

[...] bien des personnes de ma connaissance me font penser involontairement à des insectes dont les ailes sont arrachées, plusieurs articulations écrasées, les pattes brisées et qui pourtant ne peuvent se décider à mourir.

Excusez moi de vous écrire d'une manière un peu triste aujourd'hui.

Je suis en effet d'une humeur assez triste aujourd'hui. Le pire est que je ne me sens aucune disposition pour le travail.

Je ne suis pas encore parvenue à me forcer de m'occuper d'une manière un peu sérieuse de mon cours pour le semestre prochain. Mais j'ai beaucoup rêvassé au problème suivant: Prenons le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy \\ \frac{dy}{dt} &= a_1x^2 + b_1y^2 + c_2z^2 + 2d_1yz + 2e_1zx + 2f_1xy \\ \frac{dz}{dt} &= a_2x^2 + b_2y^2 + c_2z^2 + 2d_2yz + 2e_2zx + 2f_2xy\end{aligned}$$

écrivait Sofia Kovalevskaya à Gösta Mittag-Leffler pendant les vacances de Noël de 1884. Une vraie lettre de mathématicienne : elle est triste, elle n'arrive pas à préparer ses cours... mais que passe un problème de mathématiques et la voilà qui s'anime.

Née à Moscou en 1850, Sofia Kovalevskaya a eu une vie qui pourrait faire le sujet d'un roman. Il ne manque pas d'histoires et de légendes à son sujet. Elle a vécu dans une chambre d'enfant dont les murs avaient été tapissés avec les pages d'un cours de calcul différentiel. A l'âge de treize ans, elle était amoureuse de Dostoïevski. Elle était nihiliste. Elle a fait un mariage blanc, pour pouvoir partir étudier à l'étranger. Elle a passé quelques semaines à Paris pendant la Commune de 1871 et aidé à soigner les blessés. Elle a été l'élève à Berlin de Weierstrass, un célibataire misogyne qui trouvait parfaitement normal que les femmes ne puissent pas entrer dans les bâtiments de l'université... mais l'a trouvée, elle, assez brillante pour lui donner en particulier les cours qu'il dispensait à ses étudiants. Elle a passé une thèse à Göttingen. Après la mort de son mari, elle a obtenu un poste à l'université de Stockholm. Elle a participé activement au comité de rédaction de la revue *Acta Mathematica*. Son travail sur le mouvement d'un solide a été récompensé d'un prix prestigieux de l'Académie des sciences de Paris. Elle a écrit des souvenirs de son enfance et un roman un peu autobiographique. Elle est morte en 1891, à quarante et un ans, d'une pneumonie. Elle était, de son vivant, extrêmement bien intégrée et considérée dans le milieu mathématique.

Au dix-neuvième siècle, le statut des mathématiciens a changé. Une communauté s'est formée, de savants qui n'étaient plus à la merci du bon vouloir de tel ou tel mécène, qui ne faisaient pas forcément d'observations astronomiques, mais qui étaient payés comme professeurs d'université, pour donner des cours et pour mener leurs recherches. En gros, comme aujourd'hui. Et Sofia Kovalevskaya a réussi, tant bien que mal, à s'intégrer dans ce milieu. Elle a été la première femme à mener la vie de professeur d'université et de chercheuse que les mathématiciennes d'aujourd'hui connaissent, les cours, les réunions, les théorèmes, les voyages, les congrès, les séminaires, les promotions, les candidatures... Bien sûr les conditions étaient différentes et la vie est aujourd'hui plus facile. Par exemple, on meurt moins de pneumonie.

Cauchy-Kovalevskaya

Pour arriver à mener cette carrière il fallut à Sofia Kovalevskaya des qualités exceptionnelles, et surtout, pour ce qui nous intéresse ici, des qualités de mathématicienne. Elle a publié différents articles sur des sujets assez variés, par exemple un très joli travail sur la forme des

anneaux de Saturne. Celui-ci faisait partie de sa thèse. Dans celle-ci, il y avait trois articles dont chacun aurait suffi pour une thèse ordinaire, mais en 1874, une jeune femme qui passait une thèse n'était pas un fait ordinaire. Saturne, donc, et un article sur les fonctions abéliennes, mais le clou de la chose était le troisième article, un théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations aux dérivées partielles que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de théorème de Cauchy-Kovalevskaya.

De quoi s'agit-il ? Tout le monde croyait qu'une équation aux dérivées partielles se résoudrait comme une équation différentielle ordinaire : on déterminerait d'abord une solution « formelle » et on se débrouillerait ensuite pour montrer que cette solution est convergente. Voilà un bon sujet de thèse, sans problème (pour le directeur). Sauf que ça ne marche pas. La première chose qu'a faite Sofia Kovalevskaya, c'est de trouver un contre-exemple. Ce qui a beaucoup surpris Weierstrass. Le contre-exemple était pourtant une solution formelle d'une équation « simple » et utile, l'équation de la chaleur. Après quoi, elle a dû comprendre pour quelles équations il y aurait quand même des solutions. Et puis, après avoir trouvé le bon énoncé, elle l'a démontré. Weierstrass en était très étonné et heureux. Le bonheur du directeur de recherches que l'étudiant•e surprend !

Pourquoi le théorème s'appelle Cauchy-Kovalevskaya ? C'était en 1872 et Cauchy était mort depuis 1857. Sans doute parce que la tradition est de donner le nom de Cauchy aux théorèmes sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles...

Les anneaux de Saturne, les intégrales abéliennes et le théorème de Cauchy-Kovalevskaya (qu'on n'appelait pas encore ainsi, bien sûr) en poche, la jeune docteure et son mari (biologiste et jeune docteur lui aussi) espéraient bien trouver du travail en Russie. Il n'en fut rien. Ils n'en trouvèrent ni l'un ni l'autre et passèrent quelques très mauvaises années au bout desquelles ils avaient (consommé leur mariage et) eu une fille, dépensé tout l'argent de son héritage à elle, été si malheureux ensemble qu'elle l'avait quitté et qu'il finit par se suicider.

Veuve, Sofia Kovalevskaya était enfin une femme majeure, et ses amis, Weierstrass depuis Berlin, Mittag-Leffler à Stockholm, s'occupèrent de lui trouver un travail, elle avait besoin de gagner sa vie et celle de sa fille. Ce fut un grand succès personnel de Mittag-Leffler de la faire embaucher à Stockholm, au début sans salaire, puis comme professeur extraordinaire, enfin, mais peu avant sa mort, comme professeur ordinaire (un poste permanent).

Le solide

Elle arriva à Stockholm en 1883. Enfin dans des conditions de travail que nous dirions aujourd'hui normales, elle put se remettre à réfléchir. La lettre par laquelle commence cet article date de 1884. Elle y décrit un système différentiel de trois équations différentielles ordinaires à trois inconnues dont les seconds membres sont des polynômes de degré 2, qui est, même si elle ne le dit pas, une sorte de « bébé-exemple » modélisant le système du « solide ».

Ce problème et la façon dont elle l'a traité sont son plus beau titre de gloire. Il s'agit d'étudier un solide de forme quelconque mais avec un point fixe soumis à la seule pesanteur. C'était un problème ancien : Euler avait traité le cas où le point fixe est le centre de gravité du solide. Puis Lagrange, toujours au dix-huitième siècle, avait résolu le cas où le solide a un axe de symétrie (comme une toupie). Et c'était tout. L'Académie des sciences de Berlin avait ouvert un prix, dans les années 1850, sur ce sujet, sans recevoir aucune contribution...

Dans les années 1880, Sofia Kovalevskaya se mit à travailler sur cette question. Quelques années plus tard, elle avait obtenu des résultats si remarquables que l'Académie des sciences de Paris ouvrit un prix sur ce problème. C'est elle qui reçut ce prix, le prix Bordin, en 1888, on avait augmenté la valeur du prix parce que le travail était si remarquable.

Sofia Kovalevskaya pensait à ce problème depuis longtemps, peut-être même depuis le début de ses études. En tout cas, elle eut une idée vraiment brillante. Voilà : on ne sait pas résoudre le système. Mais on connaît les solutions dans les cas d'Euler et de Lagrange. Observons ces solutions. Ce sont des fonctions méromorphes du temps.

Ici il faut faire une pause pour s'expliquer. Un système différentiel comme celui du solide, formé de six équations à six inconnues, avec des seconds membres qui sont des polynômes de degré 2, a normalement des solutions assez compliquées. Une fonction méromorphe est finalement quelque chose de très simple, puisque, au pire, on y trouve des pôles, $1/t^m$.

Sofia Kovalevskaya, donc, eut l'idée de s'apercevoir que les solutions d'Euler et de Lagrange sont méromorphes. Pour avoir cette idée, il fallait au minimum considérer le temps comme une variable complexe. Mais voilà, elle avait suivi les cours de Weierstrass et l'analyse complexe, ça elle connaissait. L'idée suivante était de se demander s'il y avait d'autres cas (forme du solide, position du point fixe par rapport au centre de gravité) où les solutions auraient ce comportement « simple ».

Après quelques calculs, elle s'aperçut que c'était assez rare : le centre de gravité fixe (Euler), le centre de gravité et le point fixe sur un axe de révolution (Lagrange), et un autre cas, un peu plus compliqué à décrire, où il y a un axe de révolution mais qui ne contient pas le point fixe. Et c'est tout. C'est tout pour les cas où les solutions sont méromorphes, mais ce n'est pas tout pour le travail.

Il faut parler ici des « intégrales premières », des quantités conservées au cours du mouvement du solide. L'énergie, par exemple. Dans les cas d'Euler et de Lagrange, il y en a d'autres. Le moment par rapport à l'axe de la toupie, par exemple. Dans le nouveau cas, ce que l'on appelle « la toupie de Kovalevskaya », Sofia Kovalevskaya remarque qu'il y a aussi une intégrale première supplémentaire. Grâce à celle-ci, elle peut résoudre complètement les équations dans ce cas aussi. C'est dit vite, mais ce n'est pas très facile : il fallait, en particulier, utiliser de « nouvelles » fonctions, des fonctions « hyperelliptiques »...

Dans cette affaire, il y a plusieurs choses vraiment intéressantes. Il fallait que l'analyse complexe ait fait assez de progrès. Il fallait que les fonctions hyperelliptiques soient utilisables. Il fallait un•e mathématicien•ne qui domine toutes ces techniques. Et elle était exactement la bonne personne. Voilà pour la position du travail par rapport au passé.

Mais par rapport à l'avenir ? Les fonctions hyperelliptiques sont associées à une courbe algébrique de genre 2. Des systèmes mécaniques qui s'intègrent grâce à des courbes algébriques, on en connaît maintenant beaucoup et leur étude a été une activité importante des mathématiciens pendant les années 1980. Cent ans après l'article de Kovalevskaya.

La relation entre la « simplicité » des singularités des solutions et l'existence d'intégrales premières reste aujourd'hui assez mal comprise. Le travail de Sofia Kovalevskaya reste donc très actuel.