

VULGARISATION

Hasard et chaos**David Ruelle**

Editions Odile Jacob, Paris, 244 p., 140 F, 1991.

Une marche aléatoire du physicien-mathématicien de l'IHES dans la science du XXe siècle — avec un intérêt tout particulier porté aux systèmes chaotiques.

OUVRAGE DE RÉFLEXION

L'ordinateur pour enseigner les mathématiquesSous la direction de **Bernard Cornu**

Nouvelle Encyclopédie Diderot, PUF, 330p., 240 F, 1992.

Neuf essais, par Jean-Paul Bertrandias, Gérard Rauzy, Klaus-Dieter Graf, David Tall, Yves Chevallard, Régis Gras, Ed Dubinsky, Françoise Tréhard, André Rouchier, rendent compte d'expériences diverses d'utilisation de l'ordinateur dans l'enseignement des mathématiques en prenant en compte les recherches récentes en didactique des mathématiques. Un chapitre introductif de Bernard Cornu fait le lien entre évolution de l'enseignement et l'intervention croissante de l'ordinateur dans les mathématiques elles-mêmes.

COMPTES RENDUS

The geometry of four-manifolds**S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer**
Clarendon Press, Oxford, 1991.**Geometry of low-dimensional manifolds****S.K. Donaldson and C.B. Thomas**London Math. Soc. Lecture Notes series
150 and 151, Cambridge University Press, 1991

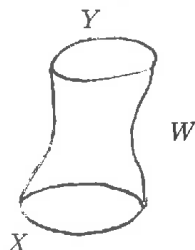
Au début des années 80, Donaldson a commencé à développer et utiliser les espaces de modules pour débloquer et résoudre bien des problèmes de topologie des variétés de petite dimension.

L'état de la science en 1980

Je vais résumer la situation en expliquant un problème (le h -cobordisme) et en présentant l'outil de classification essentiel : la forme d'intersection.

Le h -cobordisme. Le triomphe de la topologie différentielle classique — je veux dire le théorème du h -cobordisme de Smale (1965) — ne s'applique qu'aux variétés de dimension ≥ 5 . Il affirme que si deux variétés simplement connexes X et Y de dimension $n \geq 5$ sont h -cobordantes, c'est à dire, s'il existe une variété à bord W dont le bord est la réunion disjointe de X et Y et telle

que les inclusions $X \hookrightarrow W$, $Y \hookrightarrow W$ sont des équivalences d'homotopie, alors W est un produit $X \times$ un intervalle (comme sur la figure) et en particulier, X et Y sont difféomorphes.



La démonstration utilise très fortement le fait que la dimension de W est ≥ 6 . En réalité, depuis les débuts de la topologie différentielle moderne, notamment depuis un article de Whitney en 1944, on savait bien qu'on était un peu à l'étroit en dimension 4. On a souvent besoin d'éliminer les points d'intersection de deux sous-variétés, et Whitney nous a appris à le faire, dans certaines conditions, à l'aide d'un disque de dimension 2 plongé dans la variété ambiante. En dimensions ≥ 5 , c'est possible, mais en dimension 4 il se peut qu'on n'ait pas assez de place pour que le disque ne se recoupe pas lui-même.

La forme d'intersection. L'outil vraiment essentiel pour l'étude des variétés de dimension 4 est la "forme d'intersection"

$$Q : H_2(V, \mathbb{Z}) \otimes H_2(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui compte les points d'intersection de représentants de deux cycles avec les signes adéquats. Une façon de formuler la dualité de Poincaré est de dire que cette forme est unimodulaire.

En 1958 déjà, l'importance de Q était déjà bien reconnue, puisque Milnor pouvait démontrer qu'elle détermine le type d'homotopie de V . La question du type de difféomorphisme était posée. Le plus loin où l'on avait pu aller dans cette direction est un théorème de Wall (1964) : la forme Q détermine le type de difféomorphisme "stable" de V ; plus explicitement, si V_1 et V_2 sont orientées et simplement connexes et si elles ont des formes d'intersection isomorphes, alors $V_1 \# k(S^2 \times S^2)$ est difféomorphe à $V_2 \# k(S^2 \times S^2)$ pour un certain k . La démonstration utilise le même type de techniques que celle du théorème du h -cobordisme : cobordisme, décomposition en anses, élimination de points critiques, etc. et en fait montre que les deux variétés V_1 et V_2 sont ... h -cobordantes. Nous y revoilà.

La question complémentaire de celle du type de difféomorphisme est celle de la réalisabilité de telle ou telle forme unimodulaire comme forme d'intersection d'une variété de dimension 4. Voilà un exemple concret reliant cette question à celle de l'élimination des points d'intersection, et utilisant un exemple assez excitant de variété de dimension 4 : une "surface (complexe) $K3$ ", par exemple une surface de degré 4 dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. On sait que la forme d'intersection pour celle-ci est isomorphe à la somme de trois facteurs hyperboliques (concrètement un facteur hyperbolique est la forme $2xy$, c'est d'ailleurs la forme d'intersection de $S^2 \times S^2$) et de deux facteurs $-E_8$. On se demande si l'on peut réaliser la forme $2 \times \text{hyperboliques} \oplus 2(-E_8)$. Il semble assez naturel de chercher si notre surface $K3$ se décompose en somme connexe d'un $S^2 \times S^2$ et d'une autre variété, qui aurait la forme d'intersection voulue. Il n'est pas difficile de construire une telle décomposition

si on est capable de trouver deux sphères à fibré normal trivial dans la surface $K3$ qui se coupent transversalement en un seul point. Comme on connaît la forme d'intersection, on construit aisément deux sphères avec le bon nombre d'intersection, mais elles sont immergées et... (toujours la dimension 4) on ne sait pas éliminer leurs points doubles.

Et maintenant

On peut dire que c'est là que commence le livre de Donaldson et Kronheimer. Il commence d'ailleurs par un magnifique premier chapitre qui dresse un tableau lucide et détaillé de la situation avant/après. On sait que l'outil essentiel de Donaldson est l'espace des connexions antiautoduales (= ASD (!)) sur un fibré principal bien choisi. On sait aussi que son premier résultat était un théorème de non-représentation (une forme définie négative qui est la forme d'intersection d'une variété simplement connexe de dimension 4 est diagonale) obtenu en compactifiant l'espace des modules comme une variété à bord grâce aux connexions "concentrées" de Taubes. On sait encore qu'ajoutés à ceux de Freedman ces premiers résultats montrent qu'il y a beaucoup de structures différentiables sur $\mathbb{R}^4$.

Que ces techniques proviennent de la physique mathématique (champs de Yang-Mills) est un thème aujourd'hui classique sur lequel je laisse la parole à d'autres (voir par exemple l'apologie de Witten de D. Bennequin et le feuilletton écrit dans ses marges et dans les numéros 47 et 50 de la Gazette).

En résumé, ces méthodes et ces résultats montrent que la classification à difféomorphisme près des variétés de dimension 4 est très différente de celle des formes unimodulaires.

Un des résultats les plus spectaculaires de Donaldson est que le théorème du h -cobordisme est tout simplement faux en dimension 4 : il existe des h -cobordismes qui ne sont pas des produits ! Compte-tenu de ce que j'ai expliqué plus haut, il "suffit" d'exhiber deux variétés qui ont la même forme d'intersection mais qui ne sont pas

difféomorphes... et donc il "faut" construire des invariants du type de difféomorphisme, nécessairement instables, à cause du théorème de Wall, et qu'on soit capable de calculer.

C'est là un des aboutissements de la compréhension de la géométrie des espaces de modules : les invariants, les désormais célèbres "polynômes de Donaldson" proviennent de la cohomologie de cet espace.

Ces invariants instables permettent aussi de dire que telle ou telle variété ne se décompose pas en somme connexe, en particulier c'est le cas des surfaces $K3$, et on peut montrer que la forme unimodulaire dont il a été question dans l'exemple ci-dessus ne se réalise pas.

Le livre de Donaldson et Kronheimer contient toutes les constructions et démonstrations nécessaires à l'établissement de ces résultats (Uhlenbeck, Taubes, etc. ...) ainsi que de bien d'autres, ce qui lui impose de couvrir des domaines assez variés de géométrie et d'analyse globale : il s'agit de comprendre assez précisément la structure de l'espace des connexions ASD comme variété différentiable, son comportement à l'infini, etc. ... En plus, le livre contient quelques digressions assez passionnantes, par exemple l'étude des connexions ASD sur le tore T^4 en liaison avec la transformation de Fourier et la dualité de Mukai, avec une nouvelle démonstration de la classification des instantons (le même problème sur la sphère S^4).

Il est destiné à tous ceux ou celles qui s'intéressent à la géométrie moderne... et qui savent déjà assez de géométrie et de topologie différentielles. Pour être complet, il n'en est pas moins assez abordable (financièrement aussi, d'ailleurs) et agréable à lire. Les notes en fin de chapitre, qui évitent de surcharger le texte en références bibliographiques, sont bienvenues.

Notons que paraissent à peu près en même temps les Actes d'un colloque tenu à Durham en 1989, *Geometry of Low-dimensional manifolds*, où apparaissent ensemble des résultats liés aux techniques

espaces de modules/instantons, aux polynômes de Jones-Witten et à un autre des grands succès récents de l'analyse globale : les courbes pseudo-holomorphes de Gromov et leur application à la géométrie symplectique. A quand une rédaction aussi longue et détaillée des résultats et applications de cette dernière théorie ?

Michèle AUDIN
Université de Strasbourg

Corps et Modèles

Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle

Hourya Sinaceur

Coll. Mathesis, Vrin, Paris, 1991.

Cet ouvrage est tout d'abord une étude historique documentée sur l'algèbre réelle, du théorème de Sturm (1835) et de la théorie d'Artin-Schreier (1926) aux résultats métamathématiques de Tarski (1939) et Robinson (1955). Son ambition va bien au-delà d'une simple description historique : la démarche est philosophique, conformément à la citation de Jean Cavaillès citée en exergue : "Est philosophique toute exigence d'éclaircissement que ne satisfont pas actuellement ou dans leur développement normal les instruments des techniques scientifiques".

Etude historique

La première partie du livre est consacrée au théorème de Sturm qui permet de déterminer de manière exacte le nombre de racines réelles d'un polynôme. Ce résultat remarquable par son originalité et sa simplicité a beaucoup frappé ses contemporains. Sa démonstration reposait sur des propriétés élémentaires de l'analyse des polynômes, comme la relation entre le signe de la dérivée et le sens de variation du polynôme et le théorème des valeurs intermédiaires. De nombreux travaux qui ont permis de mieux comprendre la nature profondément algébrique du problème, dû notamment à Sylvester et à Hermite sont également présentés. Ils mettent en évidence le rôle que peuvent jouer les fonctions symétriques et les formes quadratiques pour le décompte des racines réelles. On met alors l'accent dans les