

Le livre de Mneimné est cela, je l'ai dit. J'ai le plaisir d'ajouter que, chez *Cassini*, c'est presque une règle (voir aussi [2]). En plus, les livres y sont bien relus, la typographie est très agréable et soignée... j'ai eu bien du mal à trouver une faute⁷ dans le Mneimné.

Références

- [1] R. Mneimné et F. Testard – Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Méthodes, Hermann, 1986.
- [2] F. Rouvière – Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, Cassini Paris, 1999.

M. Audin, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

Integrable systems, Twistors, loop groups and Riemann surfaces

N. HITCHIN, G. SEGAL, R. WARD
Oxford Science Publications

C'est un petit livre consacré à quelques aspects des systèmes intégrables. Il est constitué des rédactions de trois cours donnés par les auteurs lors d'une école d'été à Oxford en 1997. Les textes portent sur surfaces de Riemann et systèmes intégrables (Hitchin), diffusion inverse (Segal) et twisteurs (Ward)⁸.

Les systèmes intégrables sont un sujet assez étonnant. Ce sont des systèmes différentiels (équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles)

- nombreux au sens de la taxinomie : beaucoup d'entre eux sont répertoriés (voir la liste p.3 du livre en question et celle, plus perecquienne de [2])
- mais néanmoins fort rares, au sens ou presque aucun système différentiel n'est intégrable.

Ils se trouvent à l'un des carrefours où se rencontrent les avenues « géométrie algébrique », « représentations », « systèmes dynamiques », « algèbres de Lie affines », « groupes quantiques » ... C'est dire que les points de vue d'où l'on peut les regarder sont nombreux et variés. On est, dans ce livre, très nettement du côté de la géométrie algébrique. Le cours de Hitchin est d'ailleurs composé de vingt-six pages d'introduction aux surfaces de Riemann et aux fibrés en droites « contre » seize d'applications aux systèmes intégrables.

L'introduction. L'accès au sujet est souvent ardu pour les néophytes. Le point de départ de la plupart des textes publiés est une matrice R satisfaisant une équation de Yang-Baxter (modifiée!) dans une algèbre de lacets, à partir de laquelle un théorème d'Adler-Kostant-Symes permet de construire des systèmes intégrables. C'est ce qui lie cette théorie à celle des représentations, mais aussi à la géométrie algébrique puisque le paramètre de lacet, vu comme un point de la droite projective, introduit des courbes algébriques, revêtements de ladite droite.

Une exception notable est un article ancien, lumineux, inspiré, mais peu cité de Griffiths [3]⁹ qui dégraisse considérablement cette approche. Le point de vue est direct. Il part d'un système de la forme

$$\frac{dA}{dt} = [A, B]$$

où A et B sont des matrices. Il est clair qu'un tel système décrit des variations *isospectrales* de la matrice A , les coefficients de son polynôme caractéristique sont des constantes. Si en plus, les coefficients de A sont des polynômes en une variable, son polynôme caractéristique est un polynôme en deux variables, donc l'équation d'une courbe algébrique — la courbe spectrale.

Voilà pour les valeurs propres de A . Ses vecteurs propres permettent, eux, de considérer le système différentiel comme une équation différentielle sur la jacobienne de ladite courbe. Et Griffiths de donner une condition cohomologique sur la matrice B , nécessaire et suffisante pour que les solutions soient linéaires.

⁷ Mais j'y suis arrivée, l'auteur peut me contacter.

⁸ Ce dernier est fort court, je ne vois rien à en dire, je n'en parlerai donc pas plus.

⁹ Il n'est d'ailleurs pas cité non plus dans le livre en question !

Ce point de vue dégraissé de Griffiths (ne pas passer des journées entières dans les algèbres de lacets et partir de l'équation de Lax), est particulièrement bien adapté aux besoins d'une exposition efficace du sujet. C'est le point de départ de [2] et c'est avec plaisir que je l'ai retrouvé dans l'introduction de Hitchin à ce petit livre — malgré l'irritation causée par la remarque faite dans la note précédente.

Le cours de Hitchin. C'est, je l'ai dit, surtout une introduction aux courbes et fibrés en droites. La partie la plus intéressante est la section 5, consacrée aux équations de Lax sur des matrices polynomiales. Hitchin y donne une condition suffisante sur la matrice B pour que les solutions soient linéaires. Le résultat lui-même est un classique de la théorie [5] et un cas particulier du théorème de Griffiths évoqué plus haut. La démonstration est très jolie et assez élémentaire pour ne pas décourager les étudiants : il s'agit de calculs cohomologiques mais la courbe spectrale est ici plongée dans une surface (une idée de Adams, Harnad et Hurtubise), ce qui permet de tout écrire de façon très explicite. Un petit regret : le résultat qui est finalement le cœur du texte et la raison d'être des pages de géométrie algébrique qui le précèdent (si la matrice B est de telle forme, alors le système est linéarisé...) n'est pas énoncé explicitement.

Le cours de Segal. Il est consacré à la diffusion inverse. C'est une introduction efficace et bien écrite à l'utilisation des groupes de lacets pour l'étude de certains systèmes intégrables en dimension infinie (travaux déjà anciens de Wilson et de Segal lui-même notamment). Cette fois, les systèmes mis sous forme de Lax sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles — par exemple l'équation de Korteweg-de Vries :

$$-4 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Les équations de Lax ne mettent plus en relation des matrices mais des opérateurs différentiels, par exemple, pour KdV :

$$\frac{dL}{dt} = [L, P] \text{ avec } L = - \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + u$$

et la « mise sous forme de Lax » (d'ailleurs inventée e dimension infinie), c'est-à-dire dans ce cas la recherche de P ,

$$P = 4 \frac{d^3}{dx^3} - 3u \frac{d}{dx} - 3 \frac{d}{dx} u \text{ pour KdV,}$$

se fait parmi les opérateurs pseudo-différentiels formels (séries formelles en $(d/dx)^{-1}$). Ici aussi le spectre de L est constant au cours du temps. Toutefois, il est clair que la notion de spectre dépend des conditions (au bord) imposées aux solutions. De même, en général, s'il y a un analogue de la courbe spectrale, c'est une courbe de genre infini.

Segal explique ici pourquoi la diffusion inverse requiert la solution du problème de Riemann-Hilbert : il s'agit de factoriser un lacet

$$g : S^1 \rightarrow GL(n; \mathbb{C}) \text{ avec } g(1) = \text{Id}$$

en produit $g = g_- g_+$ de restrictions d'applications holomorphes, respectivement sur le disque unité et sur son complémentaire. L'application g décrit un fibré de rang n sur la droite projective complexe et une factorisation en serait une trivialisation analytique. On sait que le groupe des lacets de $GL(n; \mathbb{C})$ s'étudie *via* son action sur la grassmannienne infinie des sous-espaces fermés du Hilbert des applications L^2 de S^1 dans $\mathbb{C}^n$ — une excellente occasion de recommander la lecture de [4]. Au lieu de considérer le cercle S^1 comme l'équateur de la droite projective, on peut le considérer comme bord d'un disque dans une surface de Riemann plus générale. On voit ainsi se profiler une relation entre la grassmannienne infinie et les jacobiniennes de courbes qui permet d'arriver à un théorème de linéarisation analogue à celui évoqué dans le cours de Hitchin : certaines orbites de dimension finie des flots de KdV sont des jacobiniennes de courbes.

Références

- [1] M. ADLER & P. VAN MOERBEKE – « Completely integrable systems, euclidean Lie algebras and curves, et Linearization of hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory », *Advances in Math.* **38** (1980), p. 267–317 et 318–379.
- [2] M. AUDIN – *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999.
- [3] P. A. GRIFFITHS – « Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations », *Amer. J. of Math.* **107** (1985), p. 1445–1483.
- [4] A. PRESSLEY & G. SEGAL – *Loop groups*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986, Oxford Science Publications.
- [5] A. G. REIMAN – « Integrable hamiltonian systems connected with graded Lie algebras », *J. Soviet Math.* **19** (1982), p. 1507–1545.

M. Audin, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

Séries de Fourier et Ondelettes

J.-P. KAHANE ET P.-G. LEMARIÉ-RIEUSSET
Cassini, 1999

Ce livre est divisé en deux parties indépendantes qui se distinguent très nettement l'une de l'autre, tant par leur contenu que par leur style. La première partie, écrite par J.-P. Kahane, est consacrée aux séries de Fourier et à leur influence sur le développement des mathématiques, dans une perspective historique qui s'étend de la fin du XVIII^e siècle jusqu'à la période contemporaine. La seconde partie, écrite par P.-G. Lemarié, couvre en détail la théorie des ondelettes dans ses divers aspects : représentations continues, analyses multi-résolution et bases d'ondelettes, algorithmes rapides apparentés.

Avant de détailler séparément ces deux contributions, il convient de faire quelques remarques sur l'intérêt d'une telle juxtaposition. Depuis les années 1980, la théorie des ondelettes apparaît comme un carrefour naturel où se croisent et dialoguent des scientifiques de disciplines variées : physique théorique, analyse harmonique, théorie de l'approximation, analyse numérique, traitement du signal et de l'image, statistiques. Une telle situation ne reflète pas seulement la multiplicité des applications de ces nouvelles méthodes d'analyse, mais aussi l'influence des utilisateurs de telles applications, qu'ils soient mathématiciens, ingénieurs ou physiciens, sur le développement de nouveaux champs théoriques. Dans cette perspective, il est intéressant de se pencher sur l'histoire des séries de Fourier et sur la démarche originale de celui dont elles ont hérité le nom. La décomposition systématique des fonctions périodiques en série trigonométriques est introduite dans un but appliqué précis : obtenir un moyen de calcul et d'approximation efficace des solutions d'équations modélisant la diffusion et l'équilibre de la chaleur. L'approche de Fourier, sévèrement critiquée par ses contemporains pour son manque de rigueur mathématique, marque cependant l'apparition de la notion de « fonction arbitraire » et contient en germe le développement de l'analyse du XIX^e siècle, au travers des questions qu'elle soulève. Depuis un demi-siècle, cette approche trouve un nouvel écho au travers des applications multiples des séries de Fourier au calcul scientifique et au traitement du signal, et des questions théoriques liées au développement d'outils plus sophistiqués, tels que les ondelettes, pour ces applications.

La première partie consacrée aux séries de Fourier revêt donc un caractère historique, mais il s'agit d'une histoire « vivante », dans laquelle l'auteur n'hésite pas à faire des sauts dans l'actualité en nous faisant percevoir l'impact de problématiques anciennes sur la recherche contemporaine. Les huit premiers chapitres nous font ainsi revivre le développement de l'analyse moderne et ses étapes les plus marquantes, les séries de Fourier servant de « fil directeur » à cette belle présentation. On voit ainsi se profiler les concepts rigoureux de convergence, d'intégration, de théorie des ensembles et d'analyse fonctionnelle, à travers les extraits d'oeuvres classiques, souvent méconnues des mathématiciens : outre le mémoire fondateur sur la théorie analytique de la chaleur, on trouve la reproduction de l'article de Dirichlet portant sur le problème de la convergence ponctuelle des séries de Fourier, du mémoire de Riemann qui plante les bases de sa théorie de l'intégration et du premier article de Cantor