

Cet ouvrage monumental — il comporte plus de sept cents pages — est subdivisé en cinq thèmes principaux, chacun étant repéré par le nom d'un grand mathématicien : Euclide, Newton, Fermat, Gauß et Hilbert. La partie « Euclide » porte bien sûr sur l'algorithme d'Euclide et donne aussi des informations très détaillées sur le calcul modulaire. La section « Newton » contient la présentation d'algorithmes rapides pour les opérations arithmétiques, la FFT, l'interpolation, ... L'arithmétique : tests de primalité, factorisation des entiers et l'application à la cryptographie (méthode RSA) est la partie « Fermat ». Les chapitres relatifs à Gauß sont : factorisation des polynômes dans les corps finis, le lemme de Hensel, recherches de petits vecteurs dans les réseaux (méthode LLL) et applications. La dernière partie, « Hilbert », contient l'étude des bases de Gröbner, de la sommation numérique, de l'intégration symbolique et d'applications.

Chaque chapitre comporte de nombreux exemples très instructifs, le pseudo-code des algorithmes présentés, des exercices ainsi que des notes historiques et bibliographiques d'un grand intérêt. Le coût des algorithmes est étudié en détail et les auteurs donnent des remarques sur leur efficacité et leurs limites actuelles.

Le style est clair et précis. Le niveau de présentation me semble tout à fait adapté à nos étudiants de second cycle.

La typographie et la qualité des illustrations sont remarquables.

Pour conclure, il s'agit d'un travail d'une qualité exceptionnelle, qui est une source inégalée d'informations sur l'état de l'art dans le Calcul Formel — puisque c'est ainsi qu'on l'appelle chez nous.

M. Mignotte, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Series in Applied Mathematics

ÉDITEURS P.-G. CIARLET ET P.-L. LIONS

North Holland/Gauthier-Villars, 1999

Cette collection (chez North Holland/Gauthier-Villars) publie des textes en Mathématiques Appliquées comme des cours de troisième cycle, des séries de conférences sur un thème ou des versions préliminaires d'ouvrages plus élaborés. Elle est dans la lignée de l'ancienne collection « Recherches en mathématiques Appliquées » (chez Masson) où ont été publiés une quarantaine d'ouvrages. Trois volumes sont actuellement parus. Le premier est une introduction à la théorie linéaire des coques rédigé par P. G. Ciarlet. Il rassemble les outils mathématiques nécessaires à une écriture rigoureuse des modèles tridimensionnels de coques en coordonnées curvilignes, et présente de manière unifiée divers résultats d'existence sur les modèles bidimensionnels linéaires. La dernière partie de l'ouvrage aborde la justification asymptotique de ces modèles. Le second volume édité par P. A. Raviart contient une série de cours donnés en 1994 sur les aspects physiques et mathématiques des modèles de collision dans les plasmas et gaz raréfiés. Associés à d'autres intervenants A. Decoster, B. Perthame et P. A. Markowich développent successivement les modèles fluides pour les plasmas, les opérateurs de collision pour l'équation de Boltzmann et les aspects quantiques intervenant dans la modélisation des semi-conducteurs. Enfin le troisième ouvrage de C. Bernardi, M. Dauge et Y. Maday traite de l'approximation spectrale de problèmes d'équations aux dérivées partielles dans des domaines tridimensionnels axisymétriques. L'analyse mathématique et numérique est détaillée ainsi que des applications aux équations de Laplace, Stokes et Navier et Stokes.

P. Witonsky, IMAG, Grenoble

Éléments de géométrie, actions de groupes

R. MNEIMNÉ

Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, 1997

Le livre de Rached Mneimné que Cassini nous propose depuis 1997 devrait remplir de bonheur bien des lecteurs. Sous un titre anodin (ou sybillin, comme on voudra), c'est d'un traité d'algèbre linéaire qu'il s'agit.

Je précise. Il s'agit d'une synthèse originale (et que je trouve très réussie) entre les « basses » mathématiques, celles qu'on enseigne en DEUG et les « hautes », celles qu'on utilise pour démontrer ses propres théorèmes.

J'ai parlé de traité, mais il s'agit *vraiment* d'un livre. Ce n'est pas la suite convenue « définition-théorème-démonstration » dont nous avons hélas tant l'habitude, mais bien un texte écrit, discursif, voire digressif, constitué d'une foule d'exemples et de liens entre ces exemples

— d'opérations de groupes, on s'en doute — si j'ai bien compris, l'algèbre linéaire, c'est l'opération du groupe linéaire² sur les matrices, il y a donc un chapitre assez avancé sur les classes de similitude,

— de foules de « petits » groupes (ils opèrent partout)

— de toutes sortes de matrices 2×2 avec par exemple

- dans le groupe symétrique ou ailleurs, $GL(2, \mathbb{F}_q)$ et ses potes $SL(2, \mathbb{F}_q)$ et $PSL(2, \mathbb{F}_q)$

- le birapport et $PSL(2, \mathbb{R})$, $PSL(2, \mathbb{C})$

- les classes de similitude dans les matrices 2×2 réelles et les quadriques affines.

La « note » (dans ce livre, les chapitres s'appellent des notes) sur le birapport est remarquable. Je ne pense pas que les lectrices et lecteurs s'initieront au birapport en la lisant, une familiarité — et peut-être même un peu plus — avec le sujet est nécessaire. Par contre, la lecture de ce chapitre leur permettra de faire le lien entre le birapport et différents classiques de la géométrie plane (le théorème de Pascal, le groupe circulaire), ce qui, certes n'est pas très original comme je le présente mais l'est assez comme Mneimné le présente dans le livre.

Mon goût personnel m'aurait poussée vers un peu plus d'applications à la géométrie euclidienne (la plupart des problèmes d'angles et de cocyclicité sont justiciables d'un traitement par le birapport³ qui leur ôte une partie de l'ennui qu'ils semblent porter en eux).

Il est clair que le goût de Mneimné le pousse plutôt vers la géométrie algébrique et surtout les groupes algébriques. Qui s'en plaindrait ? Toutes les manipulations faites aveuglément sur les matrices sont des opérations algébriques et si ceci a aussi des conséquences sur la topologie et la géométrie des ensembles de matrices, disons-le !

À qui s'adresse ce livre ? À nous, d'abord. J'ai appris beaucoup en le lisant, en l'ouvrant au hasard ou en utilisant l'index de façon systématique pour explorer de façon transversale⁴ une notion élémentaire (je vous conseille d'essayer avec le « rang »).

À nos étudiants un peu avancés ou un peu curieux, ensuite. Je l'ai d'ailleurs découvert, quelques mois après sa parution grâce à un agrégatif (d'ailleurs agrégé depuis) qui me l'avait signalé comme « plein de trucs utiles pour nous ». Depuis, j'essaie de convaincre ses successeurs que c'est le livre d'algèbre linéaire dont ils ont besoin. Il est clair que l'organisation synthétique du matériau dans ce livre est particulièrement adaptée à ces étudiants. L'auteur est, on le sait⁵, un vieux routier de la préparation à l'agrégation, il ne s'en cache d'ailleurs pas. Oui, c'est un livre que les agrégatifs devraient utiliser, même si, ou parce que, le chapitre sur les classes de similitude est bien ambitieux.

L'éditeur Je ne résiste pas à une remarque⁶ sur *Cassini*. Il ne me semble pas qu'un machin bachotant étiqueté « Préparation à l'agrégation » puisse être d'une quelconque utilité à un futur enseignant, même si celui-ci prépare un concours. Ce dont ces étudiants ont besoin, c'est d'ouvrages de mathématiques, qui les aident à enrichir, organiser et synthétiser leurs connaissances.

² Hélas, nos étudiants arrêtent d'étudier l'algèbre linéaire après avoir aveuglément jordanisé des matrices en deuxième année de DEUG... juste avant qu'on veuille bien leur dire ce qu'est une opération de groupe, dans un contexte disjoint.

³ Voir par exemple le théorème des six birapports de Perrin et ses applications, qu'on ne trouve que dans les meilleurs livres de géométrie.

⁴ Ce langage technocratique, pour me donner l'occasion de signaler que je suis en désaccord avec la définition de la transversalité que donne Mneimné à la page 59.

⁵ On sait qu'il est déjà le co-auteur d'un grand classique, « le » Mneimné-Testard.

⁶ « remarque[...] que nous introduisons ici parce qu'elle est irrésistible », comme dit Saramago.

Le livre de Mneimné est cela, je l'ai dit. J'ai le plaisir d'ajouter que, chez *Cassini*, c'est presque une règle (voir aussi [2]). En plus, les livres y sont bien relus, la typographie est très agréable et soignée... j'ai eu bien du mal à trouver une faute⁷ dans le Mneimné.

Références

- [1] R. Mneimné et F. Testard – Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Méthodes, Hermann, 1986.
- [2] F. Rouviere – Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, Cassini Paris, 1999.

M. Audin, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

Integrable systems, Twistors, loop groups and Riemann surfaces

N. HITCHIN, G. SEGAL, R. WARD
Oxford Science Publications

C'est un petit livre consacré à quelques aspects des systèmes intégrables. Il est constitué des rédactions de trois cours donnés par les auteurs lors d'une école d'été à Oxford en 1997. Les textes portent sur surfaces de Riemann et systèmes intégrables (Hitchin), diffusion inverse (Segal) et twisteurs (Ward)⁸.

Les systèmes intégrables sont un sujet assez étonnant. Ce sont des systèmes différentiels (équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles)

- nombreux au sens de la taxinomie : beaucoup d'entre eux sont répertoriés (voir la liste p.3 du livre en question et celle, plus perecquienne de [2])
- mais néanmoins fort rares, au sens ou presque aucun système différentiel n'est intégrable.

Ils se trouvent à l'un des carrefours où se rencontrent les avenues « géométrie algébrique », « représentations », « systèmes dynamiques », « algèbres de Lie affines », « groupes quantiques » ... C'est dire que les points de vue d'où l'on peut les regarder sont nombreux et variés. On est, dans ce livre, très nettement du côté de la géométrie algébrique. Le cours de Hitchin est d'ailleurs composé de vingt-six pages d'introduction aux surfaces de Riemann et aux fibrés en droites « contre » seize d'applications aux systèmes intégrables.

L'introduction. L'accès au sujet est souvent ardu pour les néophytes. Le point de départ de la plupart des textes publiés est une matrice R satisfaisant une équation de Yang-Baxter (modifiée!) dans une algèbre de lacets, à partir de laquelle un théorème d'Adler-Kostant-Symes permet de construire des systèmes intégrables. C'est ce qui lie cette théorie à celle des représentations, mais aussi à la géométrie algébrique puisque le paramètre de lacet, vu comme un point de la droite projective, introduit des courbes algébriques, revêtements de ladite droite.

Une exception notable est un article ancien, lumineux, inspiré, mais peu cité de Griffiths [3]⁹ qui dégraisse considérablement cette approche. Le point de vue est direct. Il part d'un système de la forme

$$\frac{dA}{dt} = [A, B]$$

où A et B sont des matrices. Il est clair qu'un tel système décrit des variations *isospectrales* de la matrice A , les coefficients de son polynôme caractéristique sont des constantes. Si en plus, les coefficients de A sont des polynômes en une variable, son polynôme caractéristique est un polynôme en deux variables, donc l'équation d'une courbe algébrique — la courbe spectrale.

Voilà pour les valeurs propres de A . Ses vecteurs propres permettent, eux, de considérer le système différentiel comme une équation différentielle sur la jacobienne de ladite courbe. Et Griffiths de donner une condition cohomologique sur la matrice B , nécessaire et suffisante pour que les solutions soient linéaires.

⁷ Mais j'y suis arrivée, l'auteur peut me contacter.

⁸ Ce dernier est fort court, je ne vois rien à en dire, je n'en parlerai donc pas plus.

⁹ Il n'est d'ailleurs pas cité non plus dans le livre en question !