
TEORIA DE GALOIS E APLICAÇÕES

por

Michèle Audin

É uma grande honra para mim de estar aqui em Luso convosco e de dar esta palestra. Pois queria agradecer a Fundação Gulbenkian e a Ána Cannas da Silva.

Vou tentar de dar a palestra em português. Pelo menos, as transparências estão em português. Peco desculpa pelas faltas.

Nesta palestra, queria apresentar alguns problemas de mecânica, em relação com a teoria de Galois. O primeiro é um brinquedo que todos conhecem.

O pião. — A figura seguinte mostra um pião (brinquedo) e também, como as crianças o conhecem muito bem, o movimento do seu eixo. Consideremos que o pião tem um ponto fixo (o ponto onde encontra o chão).

Como pode-se ver nesta figura, a extremidade do eixo de revolução oscila entre dois círculos paralelos da esfera de centre o ponto fixo.

O pêndulo « esférico ». — O exemplo seguinte é um pêndulo, uma esfera pesada a extremidade duma vara rígida. A secunda figura mostra uma trajetória da esfera. Como a da extremidade do eixo do pião, a trajetória do berlinde do pêndulo fica e oscila entre dois círculos.

Geodésicas. — A trajetória duma partícula libra sobre uma superfície é uma geodésica desta superfície. As figuras seguintes mostram geodésicas duma superfície de revolução e dum elipsóide. Repara que as geodésicas oscilam entre duas curvas paralelas outra vez.

Não é verdade que as geodésicas duma superfície têm, em geral o mesmo comportamento. É uma propriedade muito particular das superfícies de revolução e das quádricas também.

Anéis e toros. Diz-se que estes sistemas (pião, pêndulo esférico, geodésicas dum elipsóide ou duma superfície de revolução) são sistemas integráveis.

Não é possível dar uma definição formal nesta palestra. Uma expressão geométrica ou dinâmica do facto de ser integrável é a regularidade das soluções : o movimento dum sistema integrável é muito regular. Também é importante o facto que as trajetórias ficaram entre dois curvas paralelas como nos exemplos acima.

Uma outra maneira de dizer a mesma coisa é a seguinte : as trajetórias no « espaço de fases » (que é um espaço abstracto) ficam sobre toros (é o teorema de Arnold e Liouville) como o mostra a figura. A projecção do toro (no espaço de fases) no espaço de configurações (que é o espaço que vemos) é um anel, como nos exemplos acima.

O problema da lua. — O Sol e a Terra constituam um sistema que é chamado « o problema de dois corpos ». Considere-se aqui que os dois corpos são pontos. É bem conhecido desde Kepler que a trajetória da Terra é uma cónica, como é mostrado sobre a figura a seguir.

O movimento é muito regular. O sistema é integrável.

Que tal a lua (porque diz-se que onde haja um sol, terá de haver uma lua) ? Isso é o problema de três corpos. É conhecido, desde Poincaré, que este sistema não é integrável.

O satélite. — Um outro problema é o do satélite, o sistema mecânico que constitui um satélite sobre uma órbita circular à volta da Terra. Considere-se que o satélite é um corpo sólido.

É possível demonstrar que o problema da lua e também o problema do satélite não são integráveis. O método, inventado por Morales e Ramis consiste em utilizar a teoria de Galois diferencial.

A fim de deixar bem claro o que se entende por a teoria de Galois diferencial e como aplicá-la, convém dedicar alguns minutos à apresentação de teoremas clássicos de aplicação da teoria de Galois clássica.

A teoria de Galois clássica

A teoria de Galois clássica foi inventada para resolver alguns problemas clássicos, de geometria grega e de equações algébricas.

Os problemas gregos. — São problemas que possuem uma longa história e são conhecidos respectivamente como

- o quadrado do círculo,
- a duplicação do cubo,

É fácil construir um quadrado de área igual ao dobro da área dum quadrado dado : bastando construir as rectas paralelas às diagonais do quadrado. O que mostra esta figura dá é a construção do número algébrico $\sqrt{2}$. Diz-se que $\sqrt{2}$ é um número construível.

O problema é de construir, com régua e compasso

- um quadrado de área igual à de um círculo dado
- um cubo de volume igual ao dobro do volume de outro cubo dado

As figuras a seguir mostram a situação dos dois problemas.

É óbvio que resolver estes problemas significaria construir o lado do quadrado ou a aresta do cubo procurados. Mas os números construíveis são algébricos, de grau uma potência de 2. As impossibilidades dos problemas gregos decorrem dos factos seguintes.

- O número π é transcendente sobre os racionais
- O grau do número algébrico $\sqrt[3]{2}$ é 3, o que não é uma potência de 2.

Soluções por meio de radicais. — Para demonstrar o teorema sobre o grau dos números construíveis, só é preciso utilizar a teoria das extensões de corpos, uma teoria bastante eficaz. O problema de resolver as equações por meio de radicais é mais difícil e necessita realmente da teoria de Galois. Seja

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

um polinómio, os números a_i sendo racionais. Quando o grau n é igual a 2, as raízes do polinómio podem-se escrever por meio de radicais :

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Quando o grau é 3, também há fórmulas (as fórmulas de Cardano) : é mais simples e suficiente de escrever a equação

$$x^3 + px + q = 0,$$

as raízes são então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

não é muito mais difícil de escrever as raízes em grau 4, mas ninguém tinha sido capaz de fazer mais... quando Abel e Galois mostraram (no início do século dezanove) que, em geral, em grau 5 ou mais, não há fórmulas para escrever as raízes por meio de radicais. Por exemplo, a equação

$$x^5 - 16x + 2 = 0$$

não é solúvel desta maneira.

A nova ferramenta, inventada por Galois, é o grupo de Galois. O teorema diz que uma equação algébrica é solúvel por meio de radicais se e só se o grupo de Galois dela é um grupo « solúvel », quer dizer que é constituído de pedaços que são grupos abelianos. Por exemplo os grupos simétricos (grupos de permutações) $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ são solúveis (o $\mathfrak{S}_2$ é abeliano, o $\mathfrak{S}_3$ tem um subgrupo abeliano de índice 2), mas os grupos $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$, etc. não o são.

Um exemplo simples

Considere-se a equação $x^2 - 2 = 0$, cujas soluções são os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Reparamos que estes números não pertencem ao corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais.

Se só conhecemos os números racionais, esta equação não tem nenhuma solução. Por isso, temos de considerar um corpo um pouco maior que $\mathbf{Q}$, o corpo

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

É um conjunto, que contém $\mathbf{Q}$, é também um espaço vectorial de dimensão 2 sobre $\mathbf{Q}$ e é um corpo :

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = aa' + 2bb' + (a'b + a'b)\sqrt{2}.$$

O grupo de Galois da equação $x^2 - 2 = 0$ é o grupo pelas transformações do corpo $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ que preservam o subcorpo $\mathbf{Q}$.

É fácil mostrar que isso é o grupo constituído das transformações

$$a + b\sqrt{2} \mapsto a \pm b\sqrt{2},$$

um grupo de ordem 2, isomorfo ao grupo $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou ao grupo de permutações $\mathfrak{S}_2$.

O grupo de Galois da equação $x^5 - 16x + 2 = 0$ é isomorfo ao grupo simétrico $\mathfrak{S}_5$.

A teoria de Galois diferencial

É uma teoria análoga de la teoria de Galois clássica, mas agora, nós consideremos equações que são diferenciais em lugar de ser algébricas.

Uma equação diferencial linear é uma equação da forma

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t)$$

onde $Y(t)$ é um vector incógnita dependendo do tempo e $A(t)$ é uma matriz, também dependendo do tempo.

As equações diferenciais lineares são o análogo nesta teoria das equações algébricas na teoria clássica.

Consideremos, por exemplo, a equação $y' = y$.

Esta equação é uma equação diferencial linear de ordem 1 (quer dizer que o vector y é um vector dum espaço de dimensão 1). Nós sabemos todos que o espaço de soluções é o conjunto das fracções $y = C \exp(t)$, um espaço vectorial de dimensão 1.

Reparem que a única solução desta equação que é uma função racional (quociente de dois polinómios) é a solução zero.

Na teoria clássica, partimos dos números racionais (o corpo $\mathbf{Q}$) e duma equação algébrica sobre este corpo (por exemplo, equação $x^2 - 2 = 0$), pois construímos um novo corpo (o corpo $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$) em acrescentar as raízes da equação.

Aqui o análogo do corpo dos números racionais é o corpo das *fracções* racionais. Embora a equação ser muito simples (é análogo, sobre $\mathbf{Q}$), não tem soluções que sejam fracções racionais (como a $x^2 - 2 = 0$ não tinha soluções em $\mathbf{Q}$).

É possível acrescentar as soluções e construir um novo corpo (análogo do corpo das raízes de $x^2 - 2 = 0$).

O conjunto $\mathbf{C}(t)$ das fracções racionais é um corpo, é possível construir um novo corpo, uma extensão de $\mathbf{C}(t)$, a mais pequena extensão naquela nossa equação tem soluções (análogo do corpo $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$). É bastante acrescentar a $\mathbf{C}(t)$ as soluções e considerar o corpo engendrado por $\exp(t)$.

Agora chega a teoria de Galois.

O grupo de Galois diferencial da equação $y' = y$ é o grupo das transformações do corpo engendrado sobre $\mathbf{C}(t)$ por e^t que fixam o subcorpo $\mathbf{C}(t)$ e são compatíveis com a derivação. Isso é o grupo das transformações

$$e^t \mapsto \lambda e^t,$$

um grupo isomorfo ao grupo multiplicativo $\mathbf{C}^*$ dos números complexos diferentes de zero.

Retorno aos sistemas mecânicos

É possível associar aos sistemas mecânicos considerados uma equação diferencial linear e calcular o grupo de Galois diferencial dela.

Se o sistema é integrável, o grupo de Galois é abeliano. São integráveis, então têm grupos de Galois abelianos.

Portanto, se o grupo de Galois não é abeliano, o sistema não é integrável.

Assim se demonstra que o problema de três corpos (e o satélite também) não são integráveis.

O polinómio tem três raízes porque há três raízes cúbicas.

Quer dizer que $\mathfrak{S}_n$ é o grupo de permutações do conjunto $\{1, \dots, n\}$. Um, dois, n .

Nascei em mil novecentos e cinquenta e quatro, na Argel. Meu pai era um matemático, e minha mãe uma professora de matemática. Mas não é uma longa tradição na minha família. Meus avós eram operários e empregados.

Estudei na Universidade de Paris Sul (que fica em Orsay) e na École Normale Supérieure, onde me formei em matemática. Fiz uma tese em topologia algébrica (teoria do cobordismo). Depois obtive uma posição em Genève durante um ano e então em Paris Sul (aos vinte e seis anos).

Depois fiz uma Habilitation, em topologia algébrica outra vez, mas aplicada à geometria simpléctica. Agora trabalho na geometria simpléctica (é uma outra apelido da mecânica hamiltoniana, que estuda os sistemas como os daqueles falei na minha palestra). Aos trinta e três, obtive uma posição de professora em Estrasburgo.

É uma profissão muito interessante. Gosto de matemática. Em certo sentido, é verdade que ficamos como quando eramos estudantes. O que eu gosto muito é aprender novas técnicas, novas coisas, compreender doutra maneira coisas que já compreendi, avistar relações entre áreas varias (como equações diferenciais e algébricas).

Gosto de ensinar as novas coisas que aprendei, então gosto de falar com estudantes. Mais original é o facto que eu gosto também de escrever textos de matemática. Escrevei cinco o seis livros de matemática (sobre a geometria simpléctica, os sistemas hamiltonianos, e simplesmente a geometria).

Há mais oportunidades viajar, conhecer gente.

Vivo em Estrasburgo há quinze anos.

Tenho uma filha de doze e meia. O meu marido é também um matemático.

O livro de géométrie que escrevei é publicado

Lamento muito mas

Como ia a dizer

Pois é