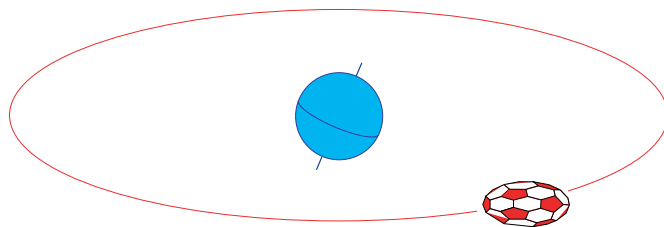


Teoria de Galois e aplicações

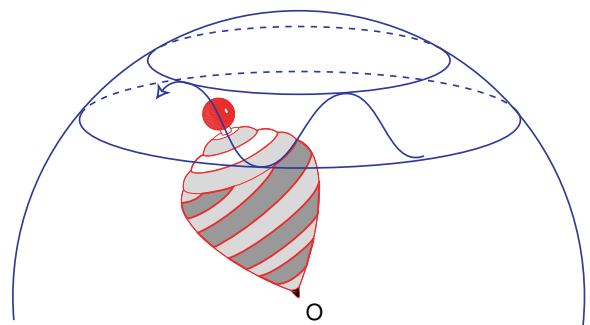
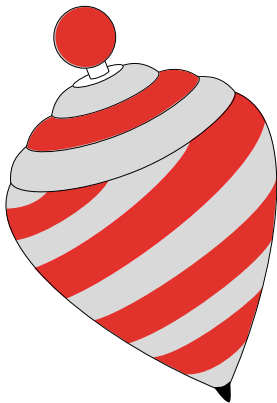


Michèle Audin

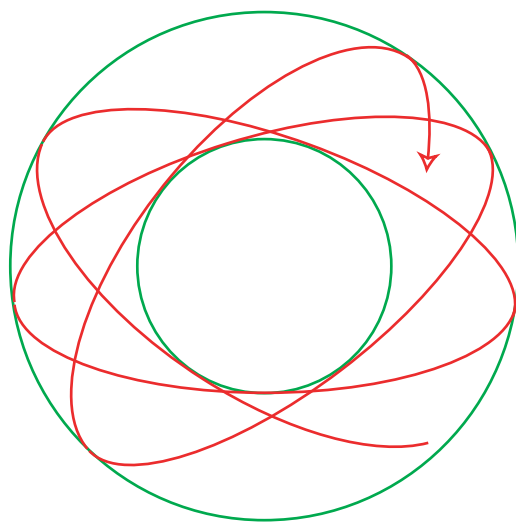
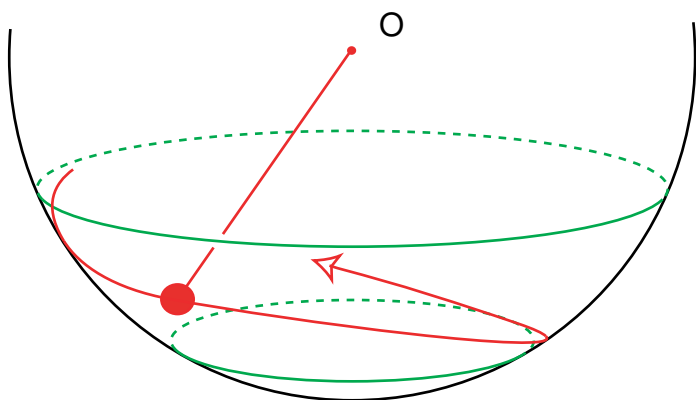
Universidade de Estrasburgo

Exemplos de sistemas integráveis

O pião

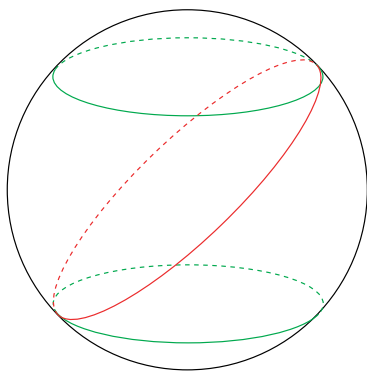


O pêndulo esférico

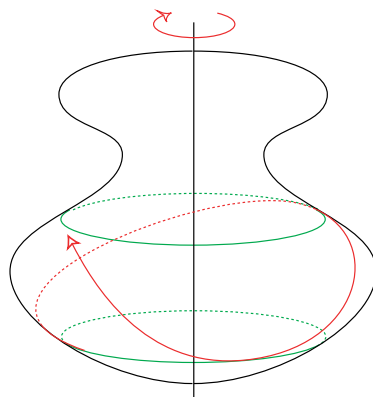


Geodésicas

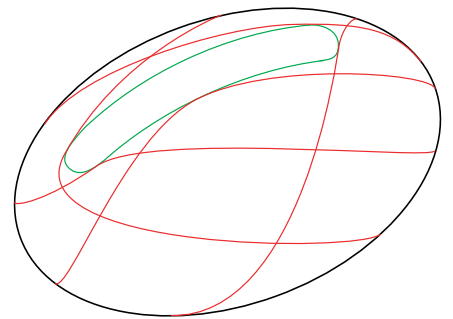
A trajetória duma partícula livre sobre uma superfície é uma geodésica.



Esféra



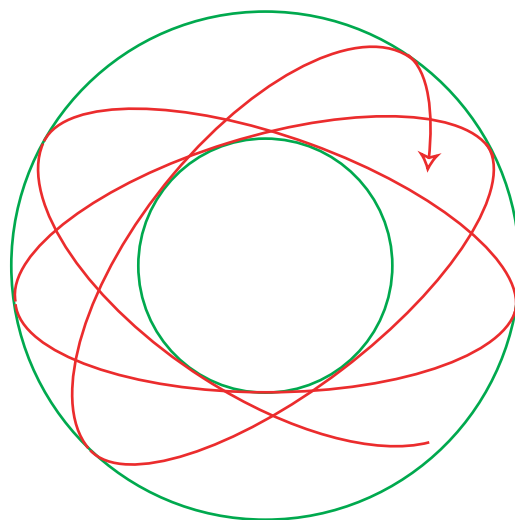
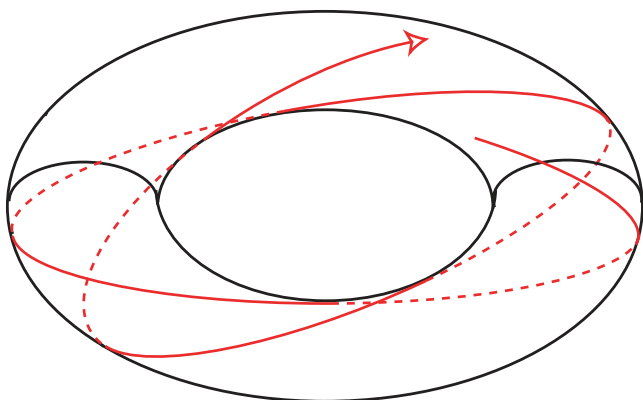
**Outra superfície
de revolução**



Elipsoide

Não é verdade que as geodésicas duma superfície têm, em geral o mesmo comportamento.

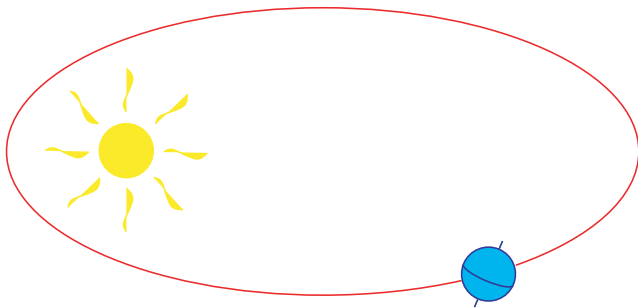
Anéis e toros



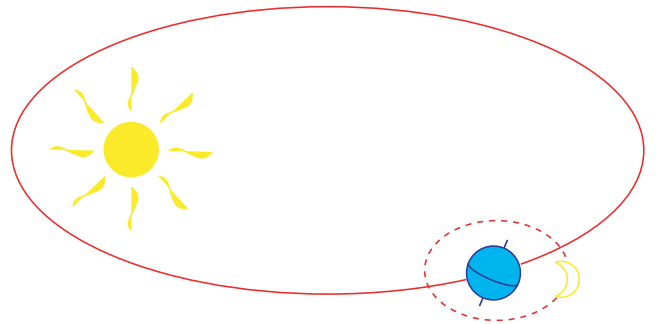
Estes sistemas (pião, pêndulo esférico, geodésicas dum elipsóide ou duma superfície de revolução) são **integráveis**. As trajetórias no « espaço de fases » (que é um espaço abstracto) ficam sobre **toros** (teorema de Arnold e Liouville). A projecção do toro no espaço de configurações (que é o espaço que vemos) é um anel.

O problema da lua (ou de três corpos)

É bem conhecido desde Kepler que a trajetória da Terra é uma cônica (elipse). O movimento é muito regular. O sistema é integrável.



O sol e a Terra...

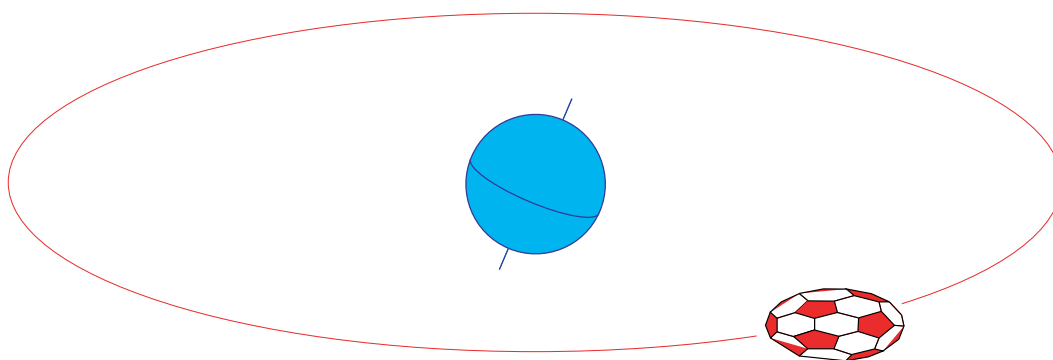


...que tal a Lua ?

É conhecido, desde Poincaré, que este sistema (sistema de três corpos) não é integrável.

O satélite

Um outro problema é o dum satélite sobre uma órbita circular à volta da Terra.

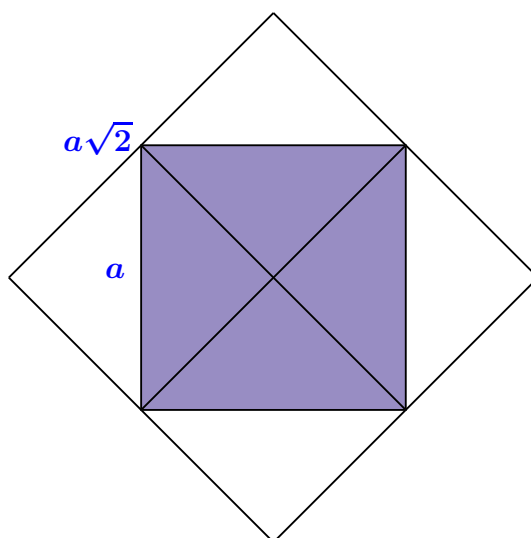


É possível demonstrar que o problema da lua e o problema do satélite também não são integráveis. O método, inventado por Morales e Ramis, consiste em utilizar a **teoria de Galois diferencial**.

A teoria de Galois clássica

Inventada para resolver alguns problemas clássicos, como os problemas gregos, quer dizer os problemas de **construções com régua e compasso**.

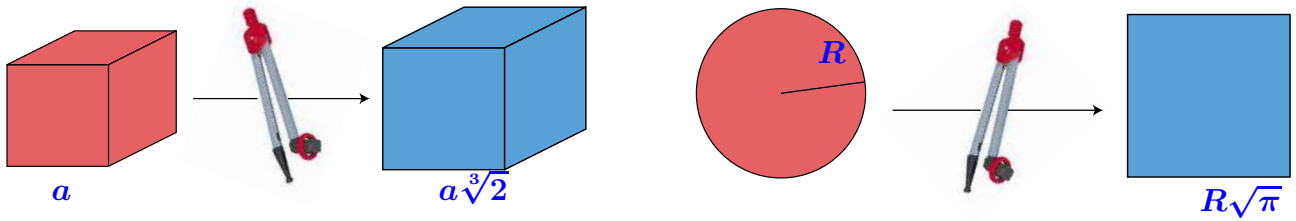
São problemas que possuem uma longa história.



É fácil construir

**um quadrado de área igual ao dobro da área
dum quadrado dado :**

bastando construir as rectas paralelas às diagonais do quadrado.



Mas é impossível construir, com régua e compasso,

- um cubo de volume igual ao dobro do volume de outro cubo dado,
- e também um quadrado de área igual à de um círculo dado.

As impossibilidades dos problemas gregos decorrem dos factos seguintes.

- O número π é transcendente sobre os racionais
- O grau do número algébrico $\sqrt[3]{2}$ é **3**, o que não é uma potência de **2**.

Soluções por meio de radicais

O problema de resolver as equações por meio de radicais é mais difícil (e necessita realmente da teoria de Galois). Seja

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{Q}$$

um polinómio. Se $n = 2$, as raízes do polinómio podem-se escrever por meio de radicais :

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \iff x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Se $n = 3$, há também fórmulas (as fórmulas de Cardano) : as raízes de

$$x^3 + px + q = 0,$$

são

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Em grau 4, também há fórmulas.

Ninguém tinha sido capaz de fazer mais... quando Abel e Galois mostraram, no início do século XIX que, em geral,

em grau **5** ou mais, não há fórmulas para escrever as raízes por meio de radicais. Por exemplo, a equação

$$x^5 - 16x + 2 = 0$$

não é solúvel desta maneira.

A nova ferramenta, inventada por Galois, é o **grupo de Galois**.

O teorema diz que uma equação algébrica é solúvel por meio de radicais se e só se o grupo de Galois dela é um grupo « solúvel », quer dizer que é constituído de pedaços que são grupos abelianos. Por exemplo os grupos simétricos (grupos de permutações) $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ são solúveis, mas os grupos $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$, etc. não o são.

Um exemplo simples

Considere-se a equação $x^2 - 2 = 0$, cujas soluções são os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Reparamos que estes números não pertencem ao corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Se só conhecemos os números racionais, esta equação não tem nenhuma solução. Por isso, temos de considerar um corpo um pouco maior que $\mathbb{Q}$, o corpo

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

É um conjunto, que contém $\mathbb{Q}$, é também um espaço vectorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{Q}$ e é um corpo :

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = aa' + 2bb' + (a'b + a'b)\sqrt{2}.$$

O grupo de Galois da equação $x^2 - 2 = 0$ é o grupo pelas transformações do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ que preservam o subcorpo $\mathbb{Q}$.

É fácil mostrar que isso é o grupo constituído das transformações

$$a + b\sqrt{2} \mapsto a \pm b\sqrt{2},$$

um grupo de ordem 2, isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou ao grupo de permutações $\mathfrak{S}_2$.

O grupo de Galois da equação $x^5 - 16x + 2 = 0$ é isomorfo ao grupo simétrico $\mathfrak{S}_5$.

A teoria de Galois diferencial

É uma teoria análoga da teoria de Galois clássica, mas agora nós consideramos equações que são diferenciais em lugar de ser algébricas.

Uma equação diferencial linear é uma equação da forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t)$$

onde $\mathbf{Y}(t)$ é um vector incognita dependendo do tempo e $\mathbf{A}(t)$ é uma matriz, também dependendo do tempo.

Por exemplo (é muito simples mas interessante) a equação diferencial

$$y'(t) = y(t)$$

de que todos sabem que as soluções são as funções

$$y(t) = Ce^t, \quad C \text{ é uma constante qualquer.}$$

O espaço de soluções é um espaço vectorial de dimensão **1**.

Reparem que a única solução desta equação que é uma função racional (quociente de dois polinómios) é a solução zero.

As equações diferenciais lineares são o análogo nesta teoria das equações algébricas na teoria clássica. Elas têm grupos de Galois também.

Na teoria clássica, conhecemos os números racionais (o corpo $\mathbb{Q}$) e consideramos uma equação algébrica (por exemplo $x^2 - 2 = 0$), pois construímos um novo corpo ao **acrescentar as raízes** da equação (o corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$).

Aqui o análogo do corpo dos números racionais é o corpo das *fracções* racionais. Consideremos uma equação diferencial linear.

Exemplo : $y' = y$. Embora a equação seja muito simples, não tem soluções que sejam fracções racionais. É possível **acrescentar as soluções** e construir um novo corpo (análogo do corpo das raízes de $x^2 - 2 = 0$).

Agora chega a teoria de Galois.

O **grupo de Galois diferencial** da equação $y' = y$ é o grupo das transformações do corpo gerado sobre o corpo $\mathbf{C}(t)$ das fracções racionais) por e^t que fixam o subcorpo $\mathbf{C}(t)$ e são compatíveis com a derivação.

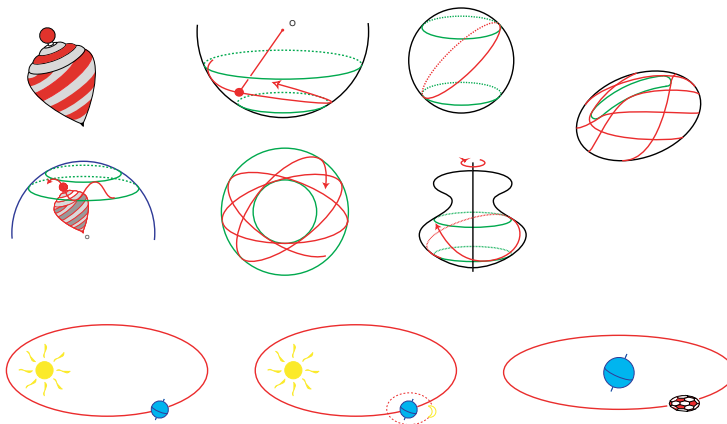
Isso é o grupo das transformações

$$e^t \mapsto \lambda e^t, \quad \lambda \neq 0.$$

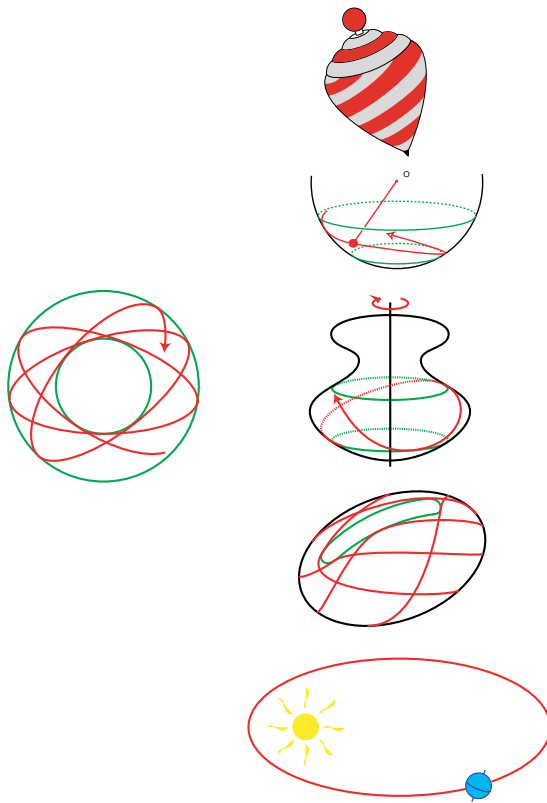
É um grupo isomorfo ao grupo multiplicativo $\mathbf{C}^\star$ dos números complexos diferentes de zero.

Retorno aos sistemas mecânicos

É possível associar aos sistemas mecânicos considerados



uma equação diferencial linear e calcular o grupo de Galois diferencial dela.



Se o sistema é integrável, o grupo de Galois é abeliano.

São integráveis, então têm grupos de Galois abelianos.

Portanto, se o grupo de Galois não é abeliano, o sistema **não é integrável**.

Assim se demonstra que o problema de três corpos (e o satélite também) não são integráveis.

