
ÉCRIRE DES MATHÉMATIQUES

par

Michèle Audin

Résumé. — Ce document présente quelques réflexions et conseils sur l'écriture de textes mathématiques.

Abstract. — This paper exhibits some comments and advice on the way to write mathematical texts.

Ce texte est un exercice un peu personnel inspiré du petit livre *How to write mathematics* [5] publié par l'AMS dans les années soixante-dix, et plus précisément des articles de Steenrod, Schiffer et surtout Halmos [4] qu'il contient⁽¹⁾.

1. Préliminaires : pourquoi ? pour qui ?

1.1. Pourquoi écrivez-vous ? — On écrit parce qu'on a quelque chose à dire (et pas parce qu'il faut écrire), parce qu'on est content de ce qu'on a compris et qu'on souhaite le *communiquer* et l'expliquer. Par exemple, on ne commence pas une thèse par :

Le but de cette thèse est de munir son auteur du titre de Docteur.

sauf par antiphrase, pour un auteur certain que ce qu'il a mis dans sa thèse est tout à fait intéressant [1].

Je vais donc m'adresser maintenant à un auteur qui a quelque chose à dire. Ça règle la question du pourquoi ?

Mots clefs. — grammaire, texte, écrire.

1. Le quatrième texte de ce recueil ne devrait être lu qu'à titre de curiosité, une fois les trois premiers bien assimilés.

1.2. Pour qui ?— Maintenant, qui va lire ?

C'est une question très difficile. Une façon très cynique d'y répondre pourrait être : personne ne lit les articles, mais comme tout le monde lit les listes de publications, il faut quand même en écrire.

Un point de vue plus optimiste : les rapporteurs vont lire le texte (en principe), le directeur⁽²⁾ de la revue aussi (ça arrive). J'ajouterais un lecteur très important (le seul sur lequel on puisse vraiment compter), l'auteur lui-même : le texte que vous écrivez, c'est un endroit où vous aurez fait le point sur un sujet, vous aurez besoin d'y revenir dans quelques mois ou quelques années.

De façon encore plus positive : on peut (on doit) essayer d'attirer des lecteurs. Pour pouvoir écrire, il faut penser à un lecteur idéal. Il va sans dire que ce lecteur idéal n'est pas le même pour un article de recherche spécialisé, une synthèse ou un manuel.

Il faut encourager quelqu'un qui aurait commencé à lire à continuer : le lecteur veut en lire le moins possible, c'est son droit, à vous de le motiver pour l'obliger à en lire plus. Pour l'aider, il ne faut pas le surestimer, il faut tout lui expliquer. Le danger : que l'auteur ne se rappelle pas qu'elle est, elle⁽³⁾, la meilleure spécialiste du sujet, de ce petit morceau de sujet particulier, elle ne doit donc pas se sous-estimer, ni surestimer le lecteur.

2. Contenu, ordre

Avant de discuter du contenu de la thèse, une remarque : je suis bien en train de parler d'écrire et de rédiger, pas de taper. Je mets en garde contre un effet pervers de *TeX* qui fait que n'importe quel brouillon en *TeX* a des allures de texte publié et donc achevé.

Le contenu, c'est le **titre** (et le nom de l'auteur⁽⁴⁾), l'**introduction**, le **texte** proprement dit et la **bibliographie**, ce que je vais commenter, dans l'ordre **titre**, **notations**, **texte**, **introduction**, **bibliographie** et enfin **ordre** dans lequel on écrit ces différents morceaux.

Je terminerai par une liste d'exercices d'applications.

2.1. Le titre. — C'est assez délicat, il est certain que

CONTRIBUTIONS À LA THÉORIE DES NOMBRES
O. Teur

2. J'ai distribué aléatoirement les sexes aux personnages de cette histoire, surtout quand ils-elles portaient un nom dont le féminin et le masculin étaient très différents.

3. mais oui...

4. J'ai déjà vu une thèse imprimée en plusieurs centaines d'exemplaires et sur laquelle l'auteur avait omis d'indiquer son nom. En principe, ça n'arrive pas dans une revue ou une collection.

serait un mauvais titre, parce que prétentieux (pourquoi pas

DEUX OU TROIS CHOSES QUE JE SAIS DES MATHÉMATIQUES
O. Teur

?) et surtout peu descriptif, qu'un bon titre doit être effectivement assez descriptif, mais pas trop long, par exemple

BILLIARDS
O. Teur

et

SYMÉTRIE MIROIR
O. Teur

[11, 12] sont de bons titres — encore que sur la page de titre d'un livre, d'un mémoire, d'un panorama ou d'une thèse, il y ait assez de place pour mettre un titre avec un sous-titre, du genre

LE SYSTÈME DE DUSCHMOHL
(UTILISATION DES COURBES ALGÉBRIQUES EN THÉORIE DES SYSTÈMES
INTÉGRABLES)
O. Teur

exemple dans lequel le système de Duschmohl doit être un système bien connu (des spécialistes!), sinon on peut faire l'inverse

UTILISATION DES COURBES ALGÉBRIQUES EN THÉORIE DES SYSTÈMES
INTÉGRABLES
LE SYSTÈME DE DUSCHMOHL
O. Teur

mais en tout cas, on ne met pas de formule mathématique dans un titre, donc

ÉTUDE DU SYSTÈME
$$\begin{cases} q_1'' = F(q_1, q_2, q_1', q_2') \\ q_2'' = G(q_1, q_2, q_1', q_2') \end{cases}$$

O. Teur

n'est pas un titre. Les abréviations excessives, du type

LE SYSTÈME D
O. Teur

ne sont pas recommandées.

2.2. Les notations. — Elles doivent être aussi standard que possible. Il est exclu d'écrire

Soit G le corps des nombres complexes
de même qu'il serait désagréable d'avoir à lire

Soit P la différentielle extérieure

ou

Soit ε un entier assez grand.

Il faut introduire aussi peu de notations que possible, mais le lecteur doit s'y retrouver : des *redondances* sont nécessaires. Supposons par exemple qu'on ait écrit au chapitre I

u^* désigne l'adjoint de u

et qu'il ne soit plus question d'adjoint aux chapitres II et III. Au chapitre IV, on utilise l'adjoint d'un opérateur v . Ça ne diminue en rien les qualités de l'auteur de remplacer

Alors, v^* vérifie...

par

Alors, l'adjoint v^* de v vérifie...

De plus, les notations doivent avoir une cohérence interne. Voici un exemple : vous utilisez un espace vectoriel E et son dual E^* , et vous faites vraiment usage de la dualité. Une façon élégante d'aider le lecteur à s'y retrouver serait de décider de noter tous les vecteurs de E par des lettres latines et tous ceux de E^* par des lettres grecques. Ainsi on voit immédiatement que $\langle \xi, Y \rangle$ a un sens et que $\langle X, Y \rangle$ n'en a pas.

Evitez les sigles chers aux physiciens (cohomologie BRST, théorie LHOOQ⁽⁵⁾).

De même, il n'est pas indispensable d'introduire trop de termes techniques nouveaux. Il y en a énormément de mauvais, qu'on utilise tous les jours — *K-théorie*, notamment, mais on n'y peut plus rien, ou *ensemble de catégorie I...* — ce n'est pas la peine d'en rajouter.

2.3. Le texte lui-même. —

Tautologie 2.4. — *Un texte mathématique est, d'abord, un texte.*

D'abord, il est fait de mots — pour être brève, c'est avec un petit Robert [9] que vous écrivez, pas avec un petit livre de *TEX* [10] ou un manuel de *LATEX* [6]. Vous avez le droit d'utiliser tous les mots de la langue, et le devoir d'essayer d'en utiliser plus de cinquante ou soixante. Les mots sont assemblés en phrases grâce à une grammaire⁽⁶⁾ aux règles de laquelle nul-le ne peut se soustraire.

Un minimum d'hygiène typographique est nécessaire, je n'en parlerai pas ici, renvoyant les lecteurs à [8].

Pour résumer, même si, comme le fait remarquer Halmos [4]

5. Ils doivent en tous cas toujours être prononçables.

6. Rappelons l'existence de Grévisse [3].

C'est vrai qu'on peut faire une appendicectomie avec un couteau de cuisine...
il est préférable d'utiliser un bistouri.

2.4.1. La grammaire. — Les règles les plus élémentaires de la grammaire s'appliquent : ce n'est pas parce qu'on sait qu'il ne faut pas diviser par 0 qu'on doit ignorer les règles d'accord du participe passé (surtout employé avec être!). On peut utiliser le subjonctif, on ne met pas de virgule avant une conjonction de coordination, etc. On n'écrit pas

Proposition 2.5. — *Soit blabla et supposons que*
mais

Proposition 2.6. — *Soit blabla. Supposons que*

2.6.1. Les barbarismes. — Si vous avez décidé d'écrire un texte dans une langue, alors il faut l'écrire dans cette langue et éviter les barbarismes. Si vous écrivez un texte long dans une langue qui n'est pas votre langue maternelle, je vous conseille de faire relire ce texte par un indigène.

Imaginons maintenant que vous écriviez en français. Sont des anglicismes (forme particulière de barbarisme qui affecte particulièrement les mathématiciens) les formes passives :

Comme déjà noté
qui se dit en français :
Comme nous l'avons déjà remarqué
(par exemple).

D'autre part, les règles d'utilisation des majuscules, de la ponctuation et des espaces, des chiffres et la place des adverbes sont différentes en français *and in English*.

Rappelons que *digital* se traduit par *numérique*⁽⁷⁾, *line* par *droite*, qu'il n'y a pas en français d'*espaces linéaires* mais bien des *espaces vectoriels*, et pas plus de *fibrés linéaires*, ce sont tout simplement des fibrés en droites.

Il est indispensable de traduire des locutions comme *ϑ -function*, *r -matrix* ou *3-manifold*, qui se disent en français, faut-il le rappeler *fonction ϑ* (comme *la fonction f* , ni plus, ni moins), *matrice r* ou *variété de*⁽⁸⁾ *dimension 3*. Enfin, il ne faut pas hésiter à utiliser ou inventer des équivalents français d'expressions que vous avez apprises en anglais. Ils existent d'ailleurs souvent déjà. Par exemple *splitting lemma* se dit lemme de décomposition et *cocycle condition* condition de cocycle⁽⁹⁾.

7. Sauf si c'est bien de *doigts* que vous voulez parler.

8. Et en tous cas pas 3-variété.

9. Même si condition de cocyclicité serait du meilleur français.

2.6.2. Je, nous, les mots et les gens. — L'activité de recherche est une activité humaine. Par exemple

... il est démontré dans [47] que...

est inutilement impersonnel (et en plus, cette forme passive est un anglicisme, voir le paragraphe 2.6.1)

... Mme X a démontré (voir [47]) que...

est à la fois du meilleur français et une information plus intéressante. J'en profite pour rappeler que les noms propres ont une orthographe et que si Laurent Schwartz a un t, il n'en est de même ni de Leibniz ni de Cauchy Schwarz (pas plus que du lemme de Schwarz, d'ailleurs).

Le *nous* de politesse qui désigne l'auteur et son lecteur solidaires comme dans

Nous avons ainsi démontré que...

ne doit pas être utilisé n'importe comment. On n'écrit pas

Nous remercions notre père de...

sauf si on veut parler⁽¹⁰⁾ de Dieu (mais est-ce bien l'endroit de le faire?).

2.6.3. La présentation des résultats. — Il est indispensable de séparer ce qui est du discours explicatif, peut-être heuristique, de ce qui est énoncé précis, démonstration. On peut écrire

... dans tous les exemples que je connais, les fonctions
 f_1, \dots, f_k sont des polynômes...

mais pas

PRINCIPE GÉNÉRAL. — *Les fonctions f_1, \dots, f_k sont des polynômes...*

J'aime assez lire un théorème présenté comme suit

quelques mots de motivation

Théorème 2.7. — énoncé : *autant que possible, des mots !*

commentaires (un exemple, une remarque sur les hypothèses, peut-être même un mot sur la démonstration)

Démonstration. — ...

□

10. Evidemment, deux sœurs dont le père aurait tapé l'article commun pourraient remercier celui-ci en ces termes, mais c'est une situation très exceptionnelle.

Le texte écrit ne peut pas être identique à celui qui resterait au tableau à la fin d'un exposé. Pendant un exposé, on ajoute des informations orales, on fait des retours en arrière. Dans un texte, ce n'est pas le cas. Voici un exemple. On ne peut *pas* écrire dans un texte mathématique :

On a :

$$\rho = 2\pi\omega_K$$

où $\rho(u, v) = \text{Ric}(Ju, v)$, où J est la multiplication par i et Ric désigne la courbure de Ricci, c'est-à-dire que $\text{Ric}(U, V)$ est la trace de l'application linéaire

$$W \mapsto R^\nabla(U, W)V$$

avec $R^\nabla = \nabla^2 \in \bigwedge^2 \Omega_X \otimes \text{Hom}(T_X)$ est l'opérateur de courbure de ∇ .

Je suggère plutôt :

Rappelons que, si $R^\nabla = \nabla^2 \in \bigwedge^2 \Omega_X \otimes \text{Hom}(T_X)$ est l'opérateur de courbure de ∇ , sa trace $\text{Ric}(U, V)$ est la courbure de Ricci de ∇ . Désignons par J l'opérateur de multiplication par i . Si l'on pose $\rho(u, v) = \text{Ric}(Ju, v)$, on a

$$\rho = 2\pi\omega_K.$$

2.7.1. Les énoncés. — Oui, ce sont des mots. On dit souvent qu'un bon sujet, c'est la moitié d'une thèse. Un bon énoncé est aussi quelque chose de très difficile à concevoir et à écrire (c'est souvent plus difficile que d'en trouver une démonstration). La rédaction d'un énoncé peut être un moment de clarification très utile pour un auteur. Un théorème, c'est une hypothèse et une conclusion. Un énoncé avec une liste de dix hypothèses et une conclusion compliquée est un énoncé que son auteur ne s'est *pas* donné la peine de comprendre : on voit mal dans ces conditions pourquoi et comment le lecteur le comprendrait. Certaines hypothèses sont sans doute utilisées pour obtenir telle ou telle partie de la conclusion. Donc, en présence d'un résultat que vous croyez devoir rédiger ainsi, demandez-vous simplement où vous utilisez quoi... après tout, ça fera peut-être trois propositions au lieu d'une...

On n'écrit évidemment pas

Théorème 2.8. — Soit... . Donc on peut supposer que...
Alors...

et encore moins

Théorème 2.9. — Soit... . Donc on peut appliquer le théorème 3 pour obtenir... . Alors...

De toute façon, on ne met pas de référence interne dans un énoncé.

2.9.1. Les démonstrations. — Une démonstration n'est pas une plaisanterie — et en particulier les plus courtes ne sont pas toujours les meilleures. Une démonstration non rédigée n'existe pas, tout simplement. La rédaction doit donc en être assez claire : il faut dégager les grandes étapes et les idées, voire les similitudes avec d'autres démonstrations. La démonstration doit pouvoir être comprise du lecteur⁽¹¹⁾. Tournez sept fois la souris sur son petit tapis avant de taper

... il est bien clair que...

et ceci pour au moins deux raisons : d'abord, ce n'est peut-être pas si clair que ça (j'ai souvent eu bien du mal, quinze jours après, à me convaincre que ce qui était si clair était vrai...) et ensuite, c'est certainement là qu'est la faute, s'il y en a une (ça arrive...). Soyez solidaire du lecteur, aidez-le, plaignez-le si besoin est

... je ne connais malheureusement pas d'autre démonstration
qu'un calcul, direct mais pénible...

et après tout, n'y aurait-il pas moyen de remplacer ce calcul par des mots

... on remplace p par q , on regroupe les termes, on permute
les facteurs et on simplifie par r ...

Je recommande aussi de remplacer

Démonstration. — On applique 3.3.2, 2.4.6 et 2.7.8. □

texte abscons qui va obliger le lecteur à tourner trois fois un certain nombre de pages, par

Démonstration. — Comme X est connexe (proposition 3.3.2) et f continue, $f(X)$ est connexe (théorème 2.4.6) donc c'est un intervalle (théorème 2.7.8). □

Le système de références internes sophistiqué de LATEX fait d'ailleurs souvent que ce texte abscons pour le lecteur est plein de sens pour l'auteur, qui tape et lit un texte du style :

On applique \ref{propconnexite}, \ref{thmimconnexctn} et \ref{thmconnexesder}

2.9.2. Les exemples. — Il n'y a pas de bon texte mathématique sans exemple : les exemples sont le cœur des mathématiques. Ils doivent être pertinents et illustrer à la fois l'intérêt du sujet et les méthodes. L'idéal serait d'avoir un ou deux bons exemples à suivre tout le long du texte.

11. Dois-je préciser que vous ne devez rien cacher ?

2.10. L'introduction (et la bibliographie). — C'est la chose la plus difficile à faire. Je crois qu'il faut y penser dès le début — ça aide à concevoir le plan du texte proprement dit — mais l'écrire à la fin. Elle doit, bien sûr, décrire le contenu du texte, mais pas seulement.

Elle doit expliquer

2.10.1. A quelle(s) question(s) vous allez répondre. — ... et pourquoi le problème est intéressant ? Quels sont les exemples fondamentaux qui justifient qu'on se pose ces questions ? Qu'est-ce qu'on savait sur le sujet avant cet article ? Par exemple

Le but de ce travail est d'améliorer le théorème 3.2 de [17].
est un très mauvais début pour une introduction. Préférez-lui

Un très beau théorème, dû à Mme Y (voir [17], théorème 3.2)
affirme que, pour toute fonction continûment dérivable... Nous
allons montrer ici que cette conclusion reste vraie si l'on sup-
pose seulement que la fonction est lipschitzienne...

Pour vous aider, imaginez que le lecteur a emporté votre article pour le lire dans un train, il faut qu'il soit capable de se faire une idée de ce que vous y faites sans bibliothèque.

2.10.2. Quelles méthodes vous utilisez. — N'hésitez pas à donner une idée des démonstrations.

De plus, cette introduction doit laisser transparaître votre enthousiasme⁽¹²⁾ pour un si beau sujet (si ça ne vous excite pas, on ne voit pas pourquoi ça exciterait le lecteur, qui a dix autres rapports à faire et ses propres articles à rédiger). Elle doit mettre le lecteur en appétit.

2.10.3. Bibliographie. — Une bonne bibliographie complète utilement une bonne introduction : il ne s'agit pas d'accumuler les références au cas où, mais

1. de rendre à Cléopâtre⁽¹³⁾ ce qui appartient à Cléopâtre
2. d'aider le lecteur à s'y retrouver en lui indiquant les bons articles, ceux dans lesquels il va apprendre quelque chose. Il va donc sans dire que toutes les références doivent être *complètes*.

2.11. L'ordre, le style. — Il y a des tas de théories. La meilleure est sans doute celle de la spirale d'Halmos : 12123123412345 etc... (voir [4]). A un

12. Ecrire avec un dictionnaire et avec enthousiasme serait un zeugme et plus précisément un anacoluthe. Des procédés littéraires plus raffinés sont à votre disposition (voir [2, 7]).

13. Il va sans dire que tout énoncé qui ne vous est pas dû doit être accompagné d'une référence.

certain stade, on peut chercher une victime non spécialiste (mais amicale) qui lise. Ça aide pour le style.

Enfin une remarque, sur le style, justement. Ecoutez les critiques, toutes les critiques, tenez-en compte, faites les corrections nécessaires... mais c'est *vos* texte, vous en êtes l'auteur... et ça serait vraiment dommage que X puisse avoir écrit la même chose que vous. Les textes mathématiques se ressemblent et s'uniformisent de plus en plus et c'est dommage. Défendez *vos* style.

3. Exercices

Ils sont presque tous dus à Halmos [4]. Essayez de comprendre pourquoi il ne faut pas écrire ce qui suit, ce qu'il faudrait écrire et déduisez-en des préceptes généraux.

1. Un titre :

Le splitting lemma en théorie ergodique
O. Teur

2. Si $a \in X$, alors on a $b \in Y$. Indication : où sont les verbes ?
3. Montrer qu'un nombre complexe s'écrit comme produit d'un nombre positif et d'un nombre de module 1. Indication : lequel ?
4. $\forall z, \exists u, \exists q ((z = qu) \wedge (|u| = 1) \wedge (q \geq 0))$. Indication : codage pour vous/décodage pour l'autre.
5. Si n est assez grand, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ où ε est un nombre positif donné à l'avance.
6. ... où X et Y sont 2 surfaces de genre 2 (subtil)⁽¹⁴⁾.
7. La fonction $x^2 + 3$ est paire. Indication : $x^2 + 3$ est un nombre, une suite de symboles, ce que vous voulez, mais pas une fonction.
8. La réunion d'une suite d'ensembles mesurables est mesurable. Indication : une suite n'est pas qu'un ensemble dénombrable.
9. Soit A un anneau commutatif semi-simple. Si x et y sont dans A , on a $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
10. Si p , alors si q , alors r .
11. Supposons que $a \in X$. X est ...
12. Sur un compact, toute fonction continue f est bornée. Indication : qu'en est-il d'une fonction continue g ?
13. Si $0 \leq \lim u_n^{1/n} = \rho \leq 1$, alors $\lim u_n = 0$.

14. in English, two surfaces may have genus two.

14.

$$(\star) \quad \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$$

⋮

La fonction g vérifie (\star) .

Le dernier exercice serait de trouver tous les endroits dans ce texte, où les sages préceptes énoncés sont violés.

Références

- [1] A. DOUADY.— Thèse.
- [2] B. DUPRIEZ.— *Gradus, les procédés littéraires.* 10/18, 1984.
- [3] M. GRÉVISSE.— *Le bon usage.* Douzième édition refondue par A. Goosse, Duculot, 1988.
- [4] P. HALMOS.— *How to write mathematics.* in [5].
- [5] N. STEENROD, P. HALMOS, M. SCHIFFER, J. DIEUDONNÉ.— *How to write mathematics.* AMS, 1971.
- [6] L. LAMPORT.— *LaTeX : A document preparation system.* Second edition, Addison-Wesley, 1994
- [7] G. PEREC.— *Quel petit vélo à guidon chromé au fond de la cour ?* Folio.
- [8] SOCIÉTÉ MATHMATIQUE DE FRANCE.— *Recommandations aux auteurs.* 1997.
<http://smf.emath.fr>
- [9] *le petit Robert.* le Robert, 1993.
- [10] R. SEROUL.— *Le petit livre de TeX.* Interéditions, 1990.
- [11] S. TABACHNIKOV.— *Billiards.* Panoramas et Synthèses, 1. Société Mathématique de France, 1995.
- [12] C. VOISIN.— *Symétrie miroir.* Panoramas et Synthèses, 2. Société Mathématique de France, 1996.

octobre 1997

MICHÈLE AUDIN, Institut de Recherche Mathématique Avancée,
 Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7 rue René Descartes, F-
 67084 Strasbourg cedex • E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr
 Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr>