

Arc-en-ciel, soucoupes volantes,

**Arc-en-ciel, soucoupes volantes,
toupies, courbes elliptiques,**

**Arc-en-ciel, soucoupes volantes,
toupies, courbes elliptiques,
et tout ça...**

Arc-en-ciel, soucoupes volantes,
toupies, courbes elliptiques,
et tout ça...



Michèle Audin
IRMA **et** ULP, **Strasbourg**

Une promenade en deux parties

Une promenade en deux parties

mise en jambes, un exposé pour les professeurs,

Une promenade en deux parties

mise en jambes, un exposé pour les professeurs,

randonnée, un exposé pour les élèves

Une promenade en deux parties

mise en jambes, un exposé pour les professeurs,

randonnée, un exposé pour les élèves

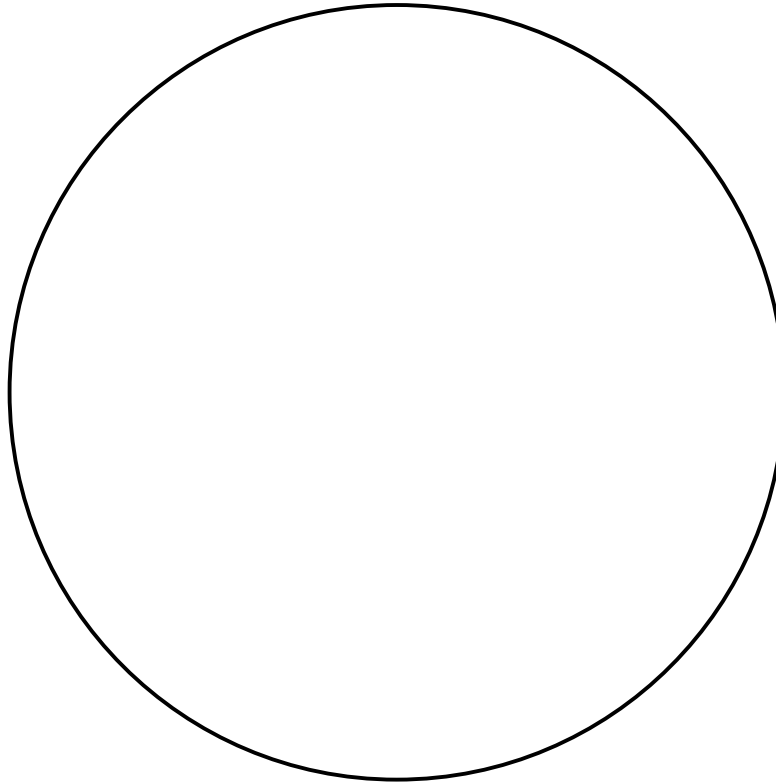
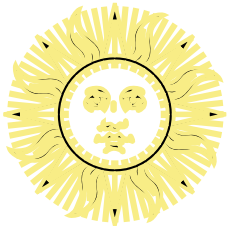
fichier pdf
créé par la classe $\text{\LaTeX}$ prosper

Première partie

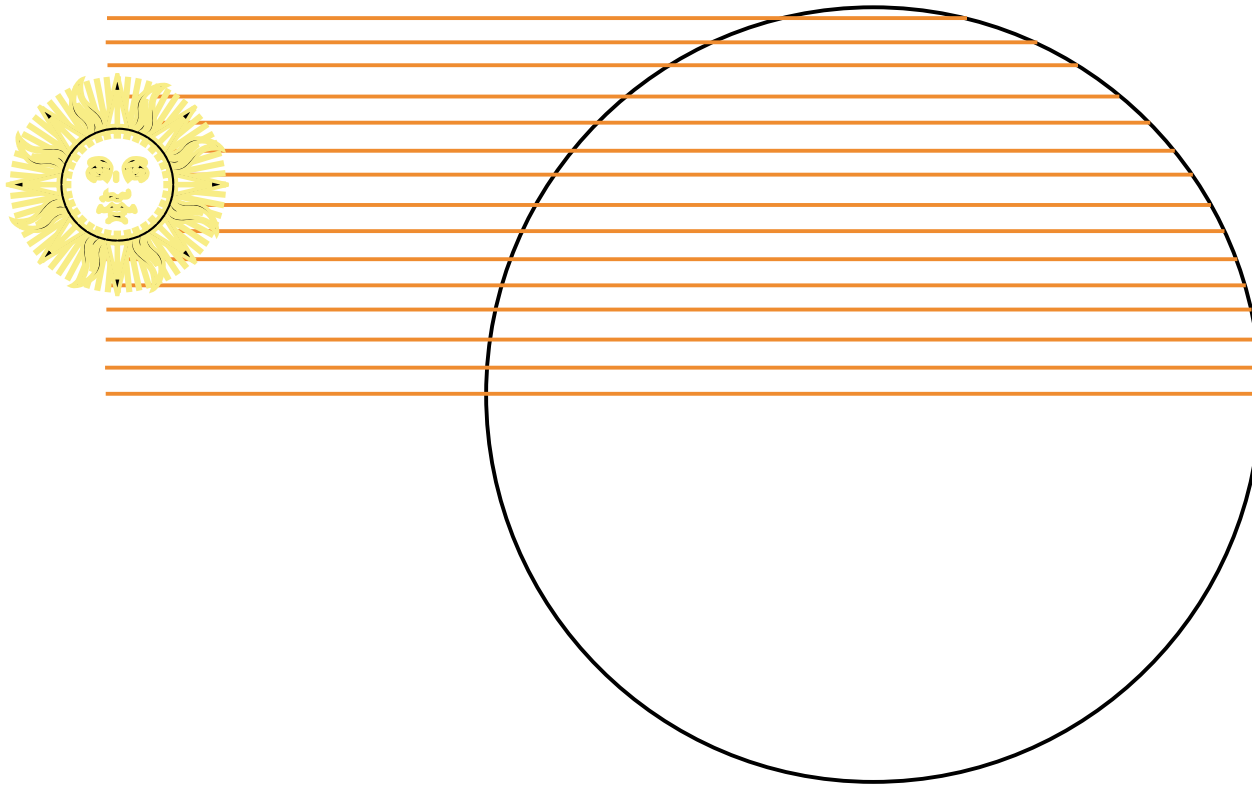
Un exposé pour les professeurs

à l'IREM de Strasbourg, en 1988.

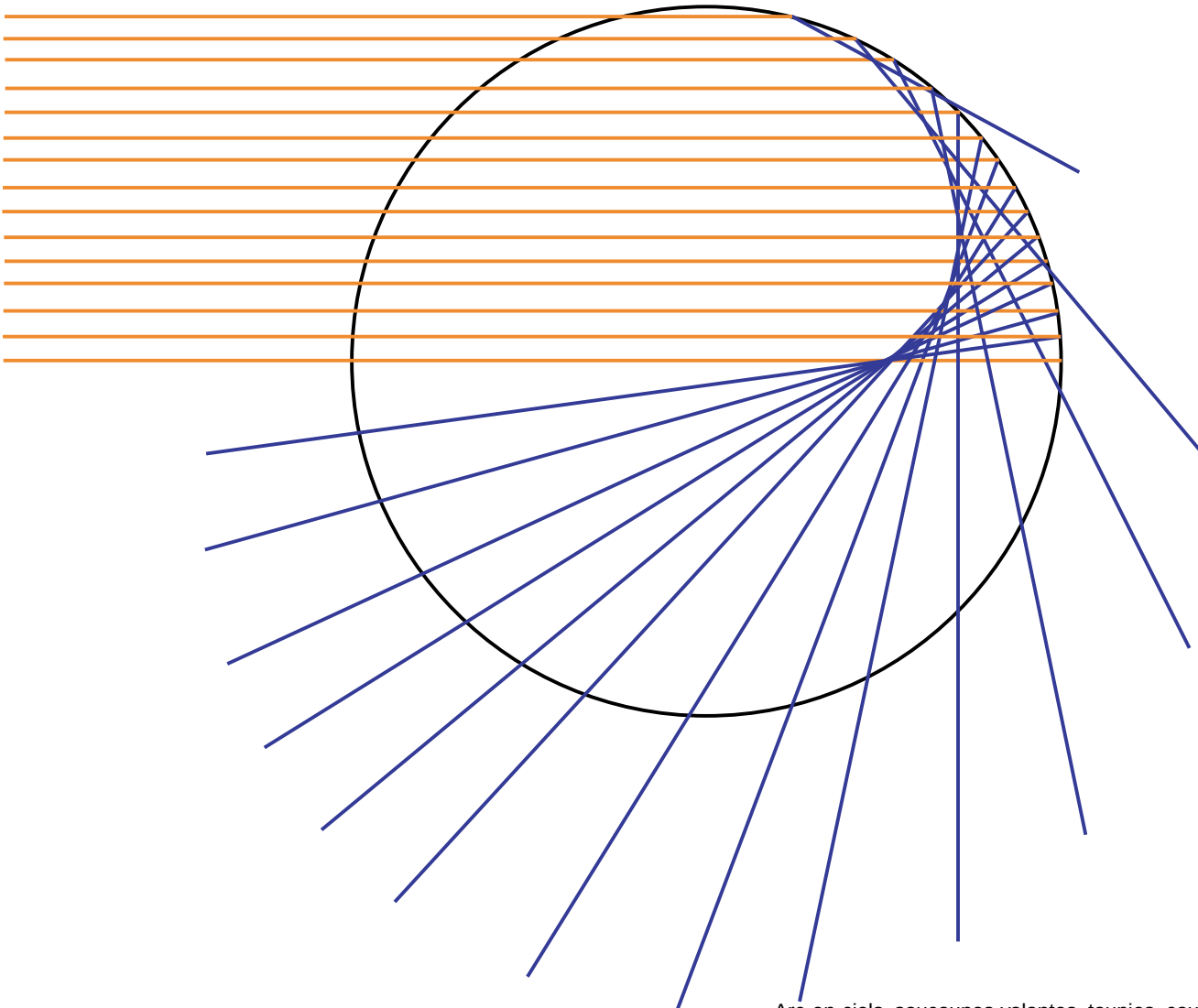
Un cœur dans un bol



Un cœur dans un bol



Un cœur dans un bol



Un cœur dans un bol

La caustique de la tasse de café est un arc de néphroïde.

Un cœur dans un bol

La caustique de la tasse de café est un arc de néphroïde.

C'est une singularité lagrangienne.

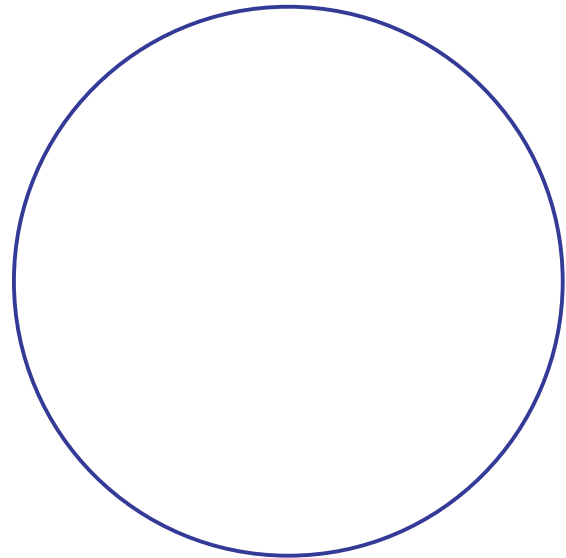
Un cœur dans un bol

La caustique de la tasse de café est un arc de néphroïde.

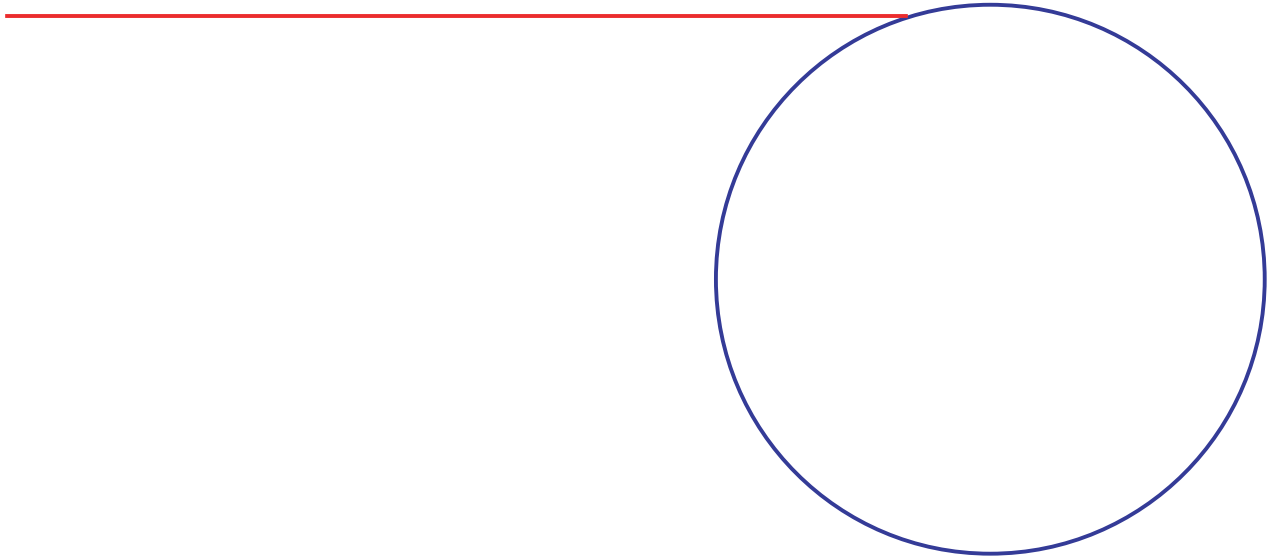
C'est une singularité lagrangienne.

Un des objets d'étude de la **géométrie symplectique**

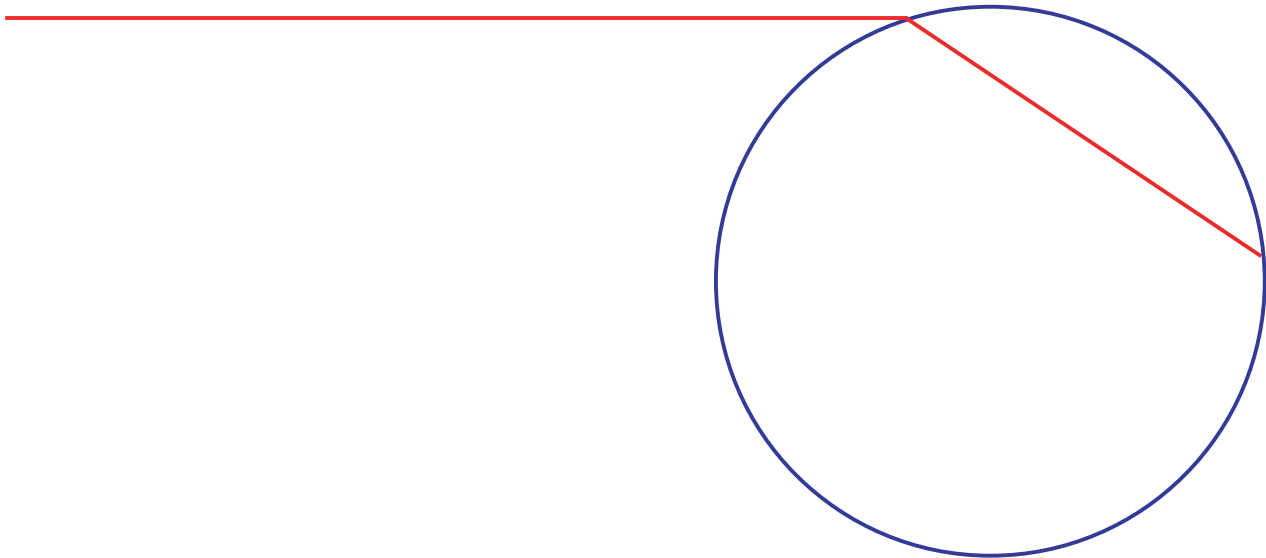
L'arc en ciel



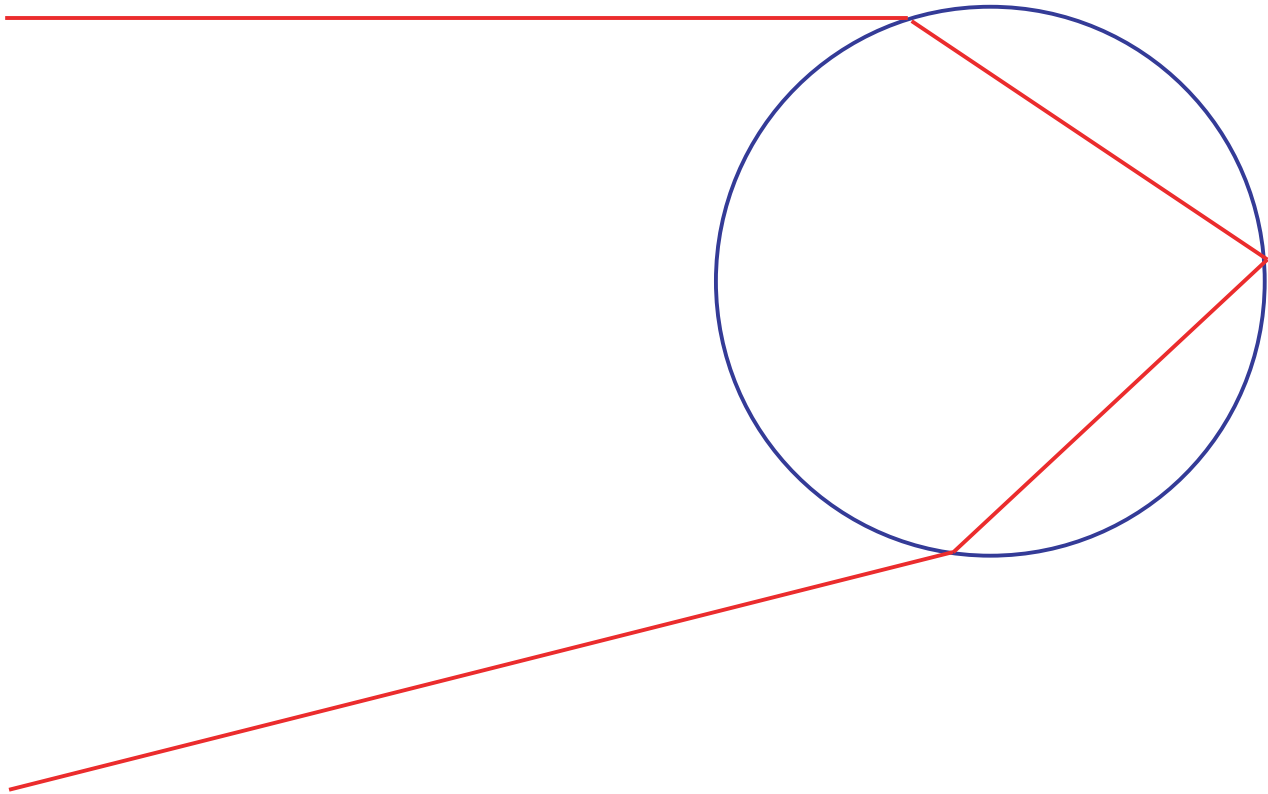
L'arc en ciel



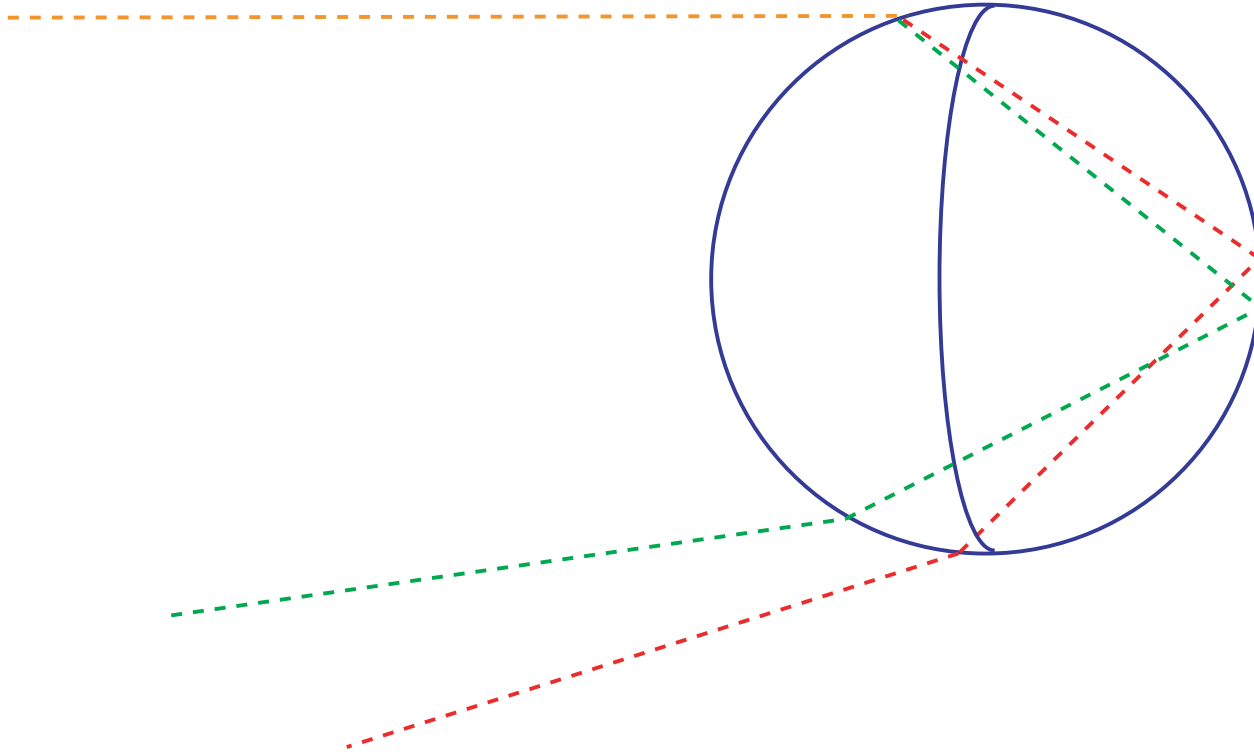
L'arc en ciel



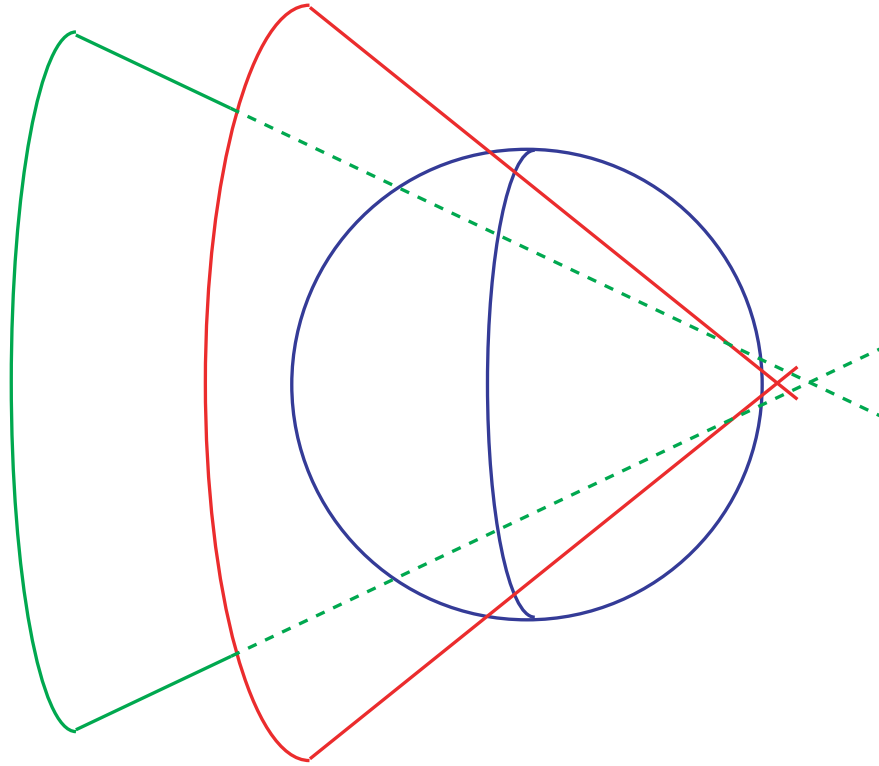
L'arc en ciel



En couleurs, c'est plus joli



Et avec une rotation...

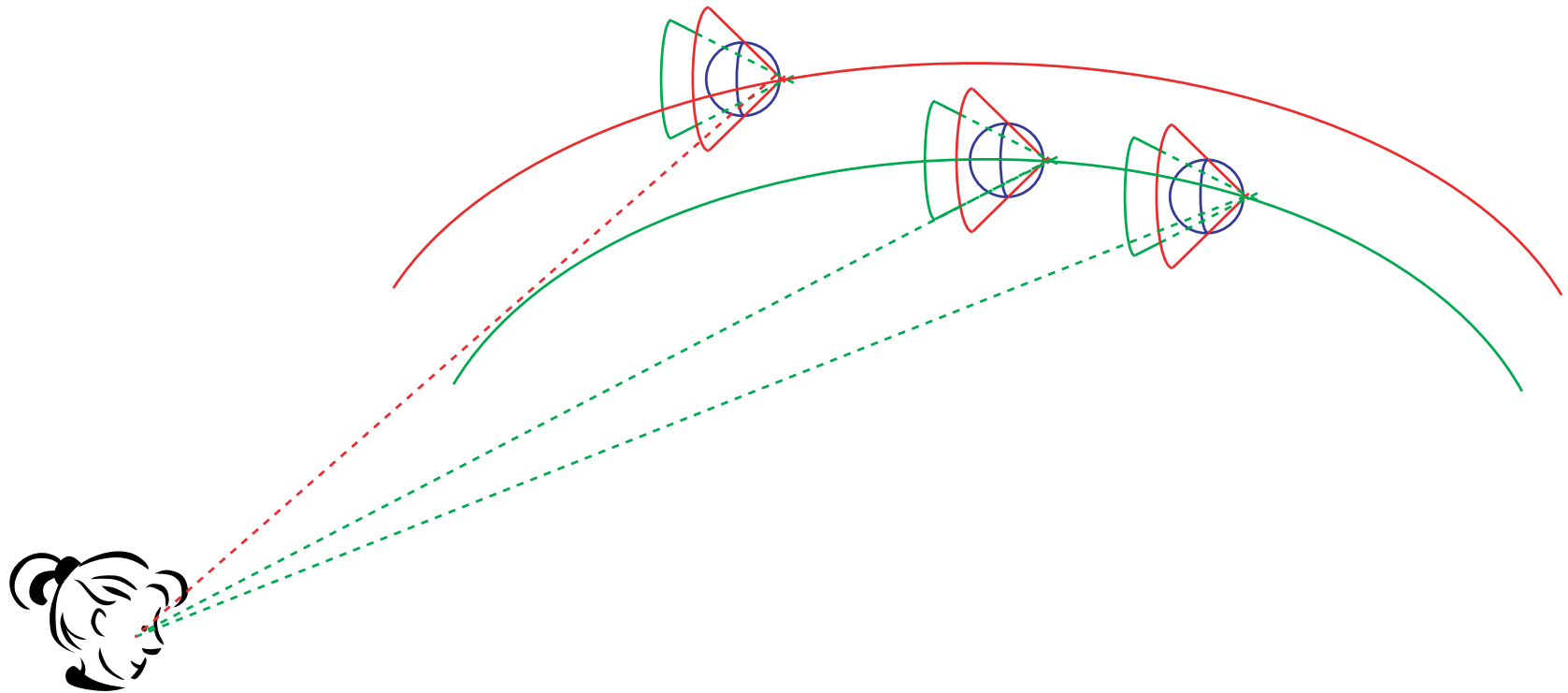


La caustique a un cone asymptote.

Pourquoi l'arc en ciel est un arc



Pourquoi l'arc en ciel est un arc



Les soucoupes volantes seraient-elles des caustiques de l'optique géométrique?

Les soucoupes volantes seraient-elles des caustiques de l'optique géométrique?

Ce sont, en effet, des singularités lagrangiennes.















Un théorème de Chekanov, en 1986, affirme que ces singularités lagrangiennes ne sont pas des caustiques de l'optique géométrique.

Un théorème de Chekanov, en 1986, affirme que ces singularités lagrangiennes ne sont pas des caustiques de l'optique géométrique.

Le mystère des OVNI reste entier...



Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé :

- Esthétique : les mathématiques, c'est joli.

Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé :

- Esthétique : les mathématiques, c'est joli.

Montrer des choses que tout le monde est capable de trouver joli.

Ce qu'il **devrait y avoir** dans un tel **exposé** :

- Esthétique : les mathématiques, c'est joli.

Montrer des choses que tout le monde est capable de trouver joli.

- Les mathématiques, ça a un rapport avec la réalité.

Ce qu'il **devrait y avoir** dans un tel **exposé** :

- Esthétique : les mathématiques, c'est joli.

Montrer des choses que tout le monde est capable de trouver joli.

- Les mathématiques, ça a un rapport avec la réalité.

Montrer des phénomènes.

Ce qu'il **devrait y avoir** dans un tel **exposé** :

- Esthétique : les mathématiques, c'est joli.
Montrer des choses que tout le monde est capable de trouver joli.
- Les mathématiques, ça a un rapport avec la réalité.
Montrer des phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée,

Ce qu'il **devrait y avoir** dans un tel **exposé** :

- Esthétique : les mathématiques, c'est joli.
Montrer des choses que tout le monde est capable de trouver joli.
- Les mathématiques, ça a un rapport avec la réalité.
Montrer des phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée,
des idées venues d'un côté peuvent être utilisées d'un autre.

Entracte

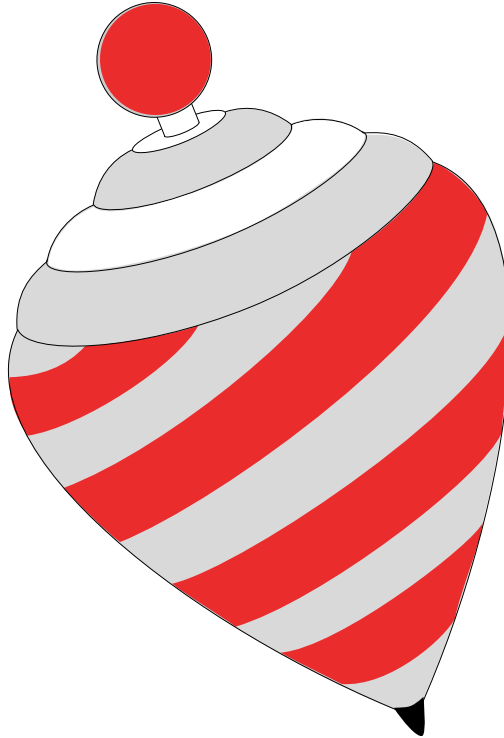


Deuxième partie

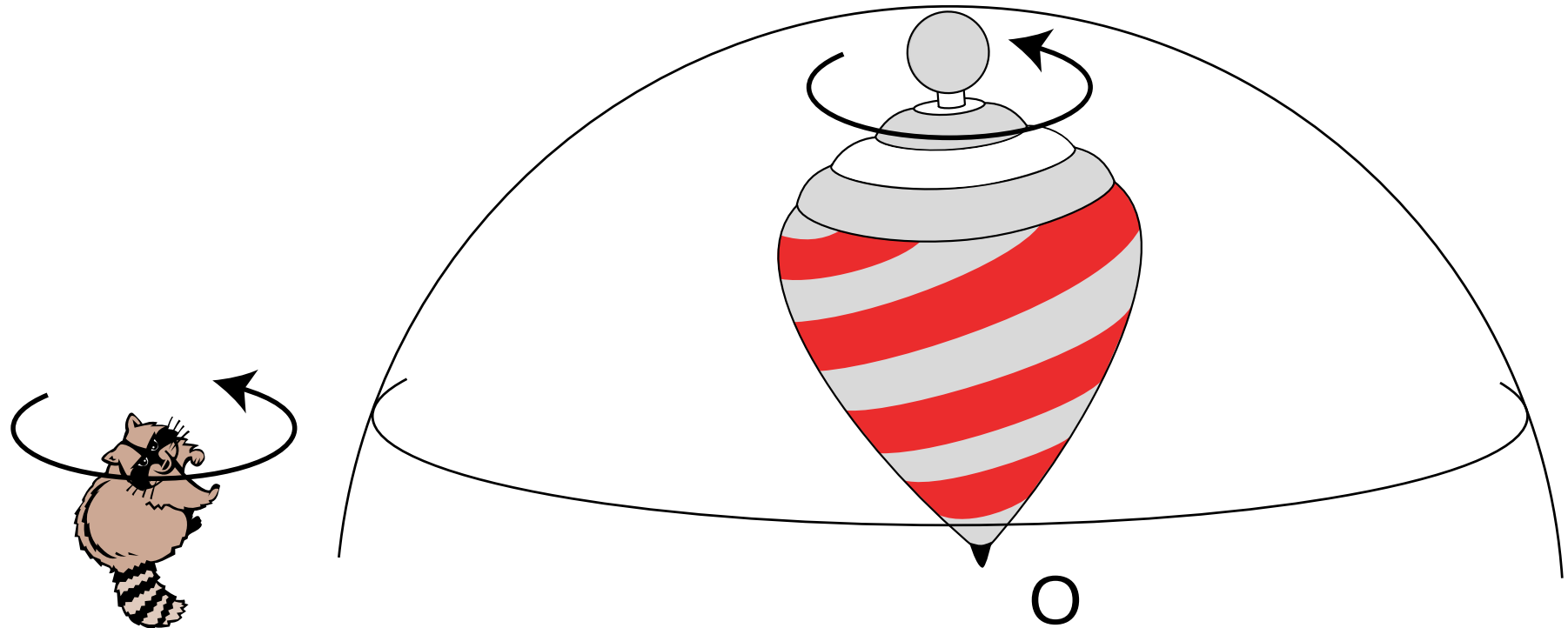
Un exposé pour les lycéens

à la Réunion, en 2004.

La toupie



La toupie, encore



Parenthèse (pour Saint-Flour)

Quel rapport entre toupies et caustiques???

Parenthèse (pour Saint-Flour)

Quel rapport entre toupies et caustiques???

Toupies : mécanique hamiltonienne

Parenthèse (pour Saint-Flour)

Quel rapport entre toupies et caustiques???

Toupies : mécanique hamiltonienne

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Parenthèse (pour Saint-Flour)

Quel rapport entre toupies et caustiques???

Toupies : mécanique hamiltonienne

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Caustiques : optique géométrique

Parenthèse (pour Saint-Flour)

Quel rapport entre toupies et caustiques???

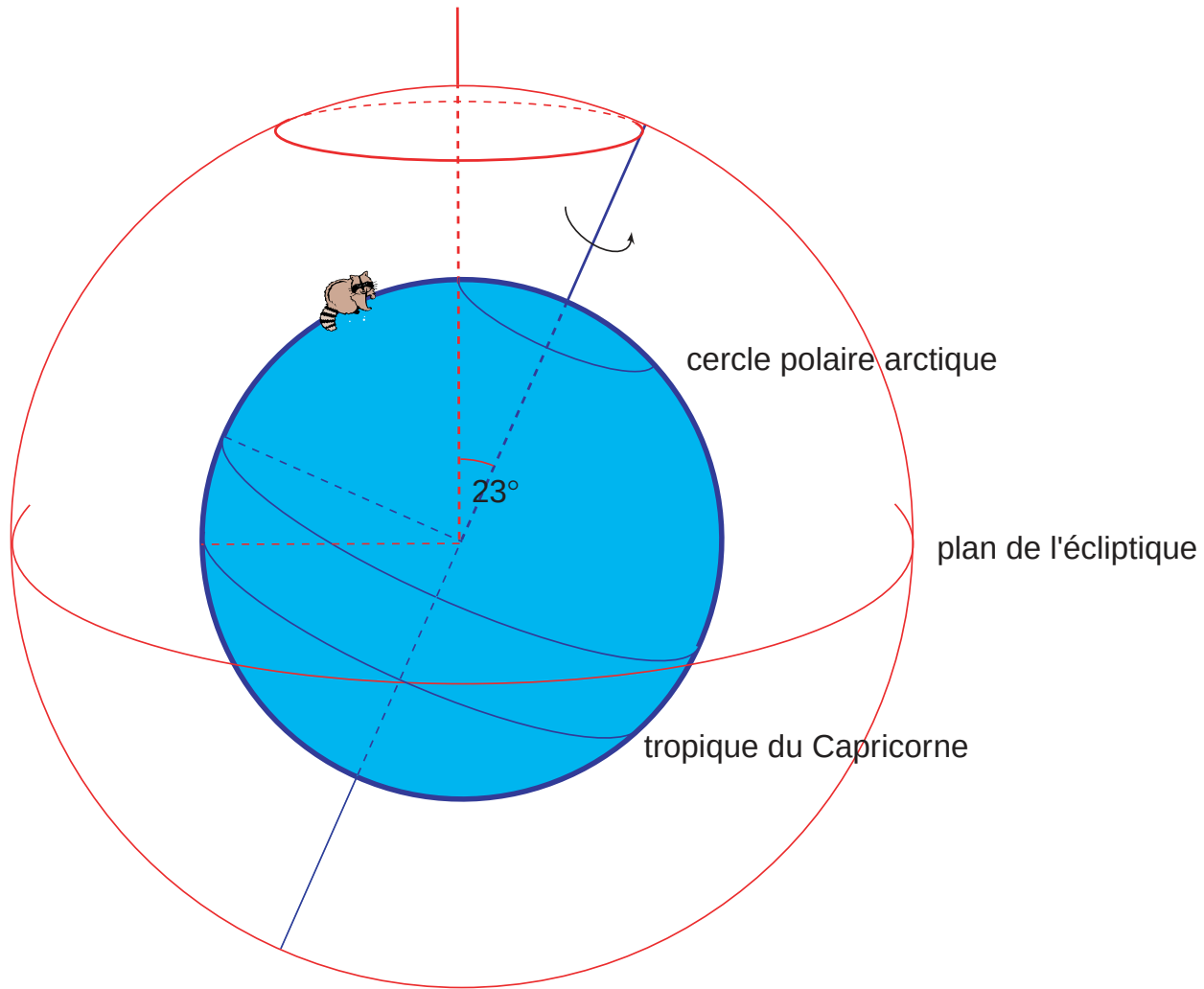
Toupies : mécanique hamiltonienne

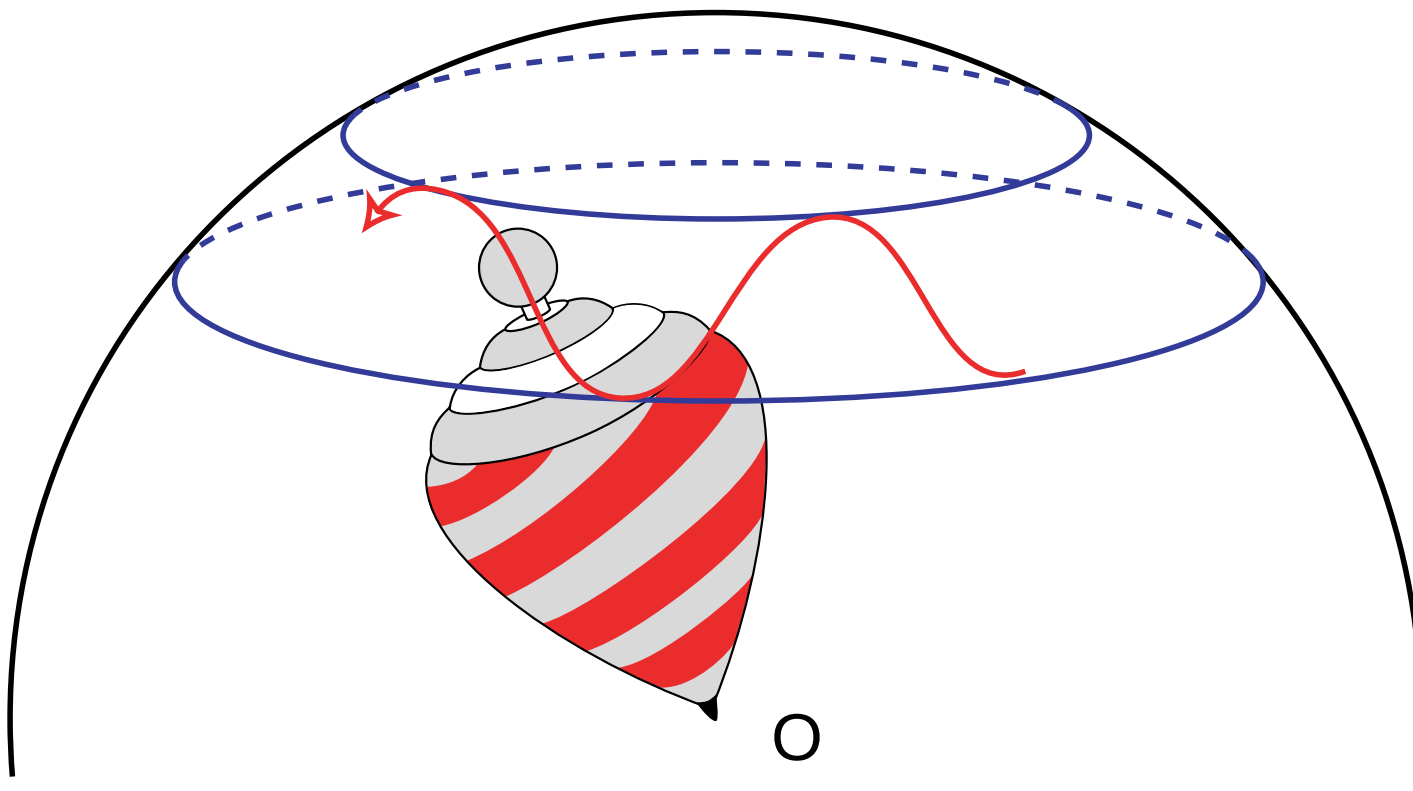
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

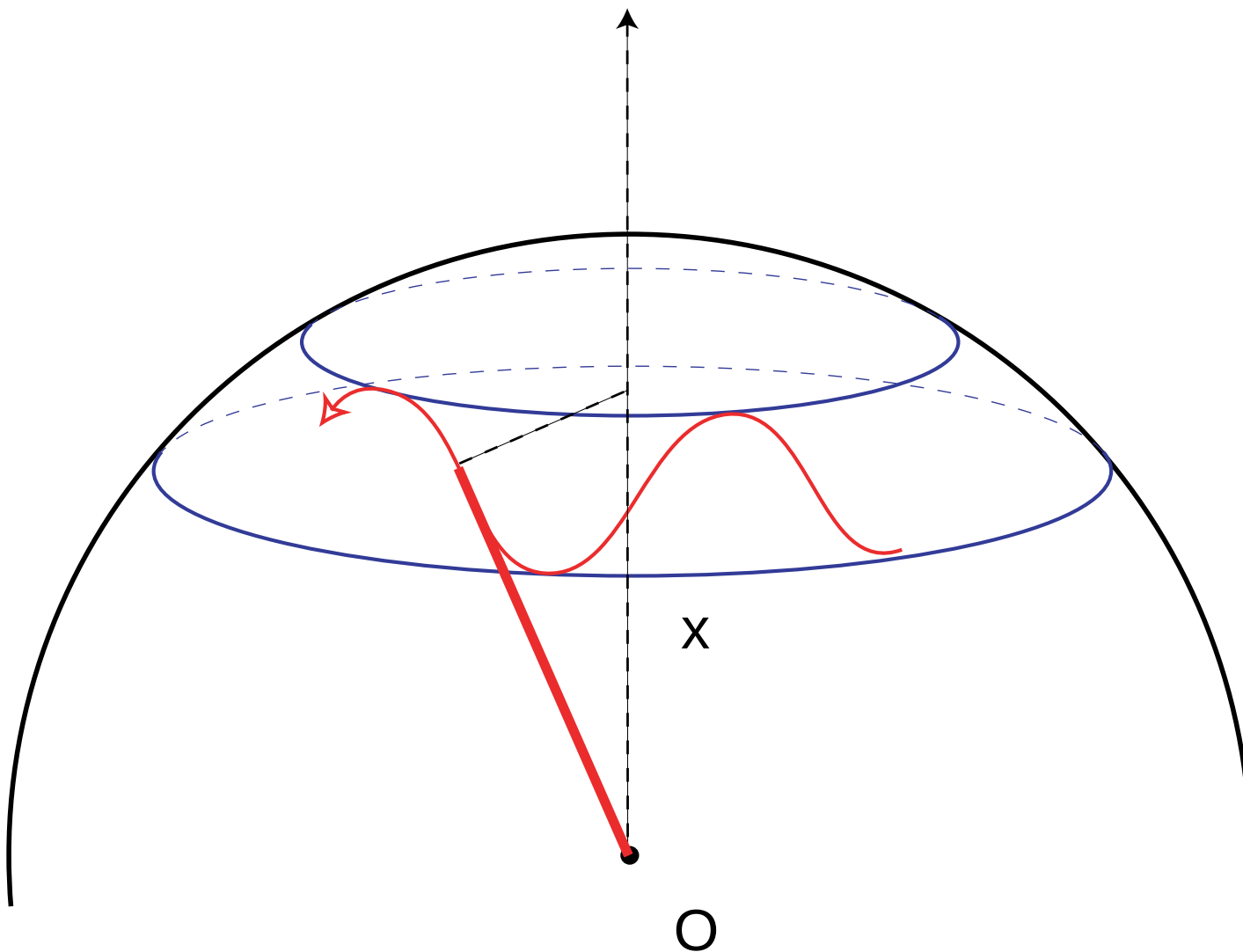
Caustiques : optique géométrique

Mécanique hamiltonienne et optique géométrique
sont deux champs décrits par la **géométrie
symplectique**

Une autre toupie







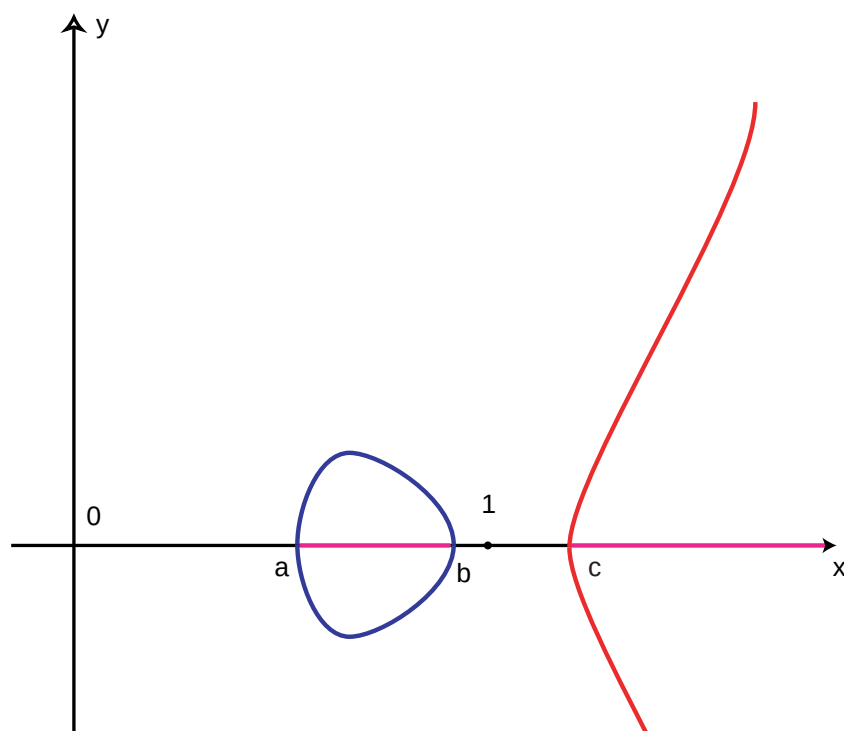
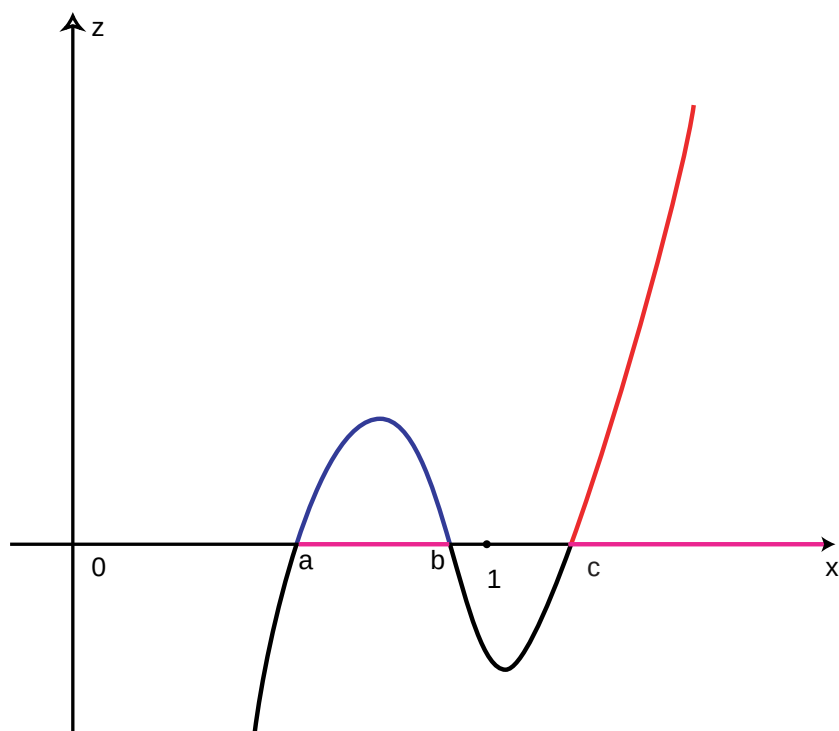
$$y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

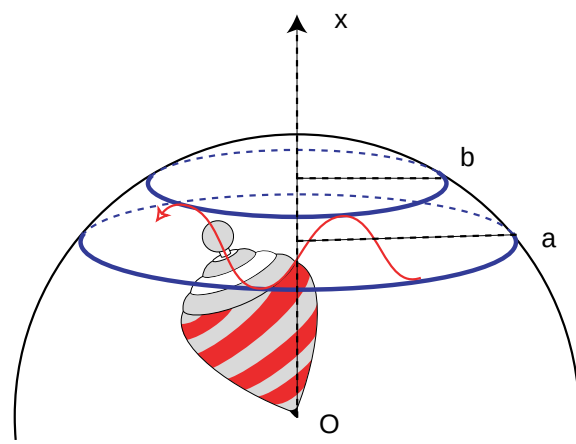
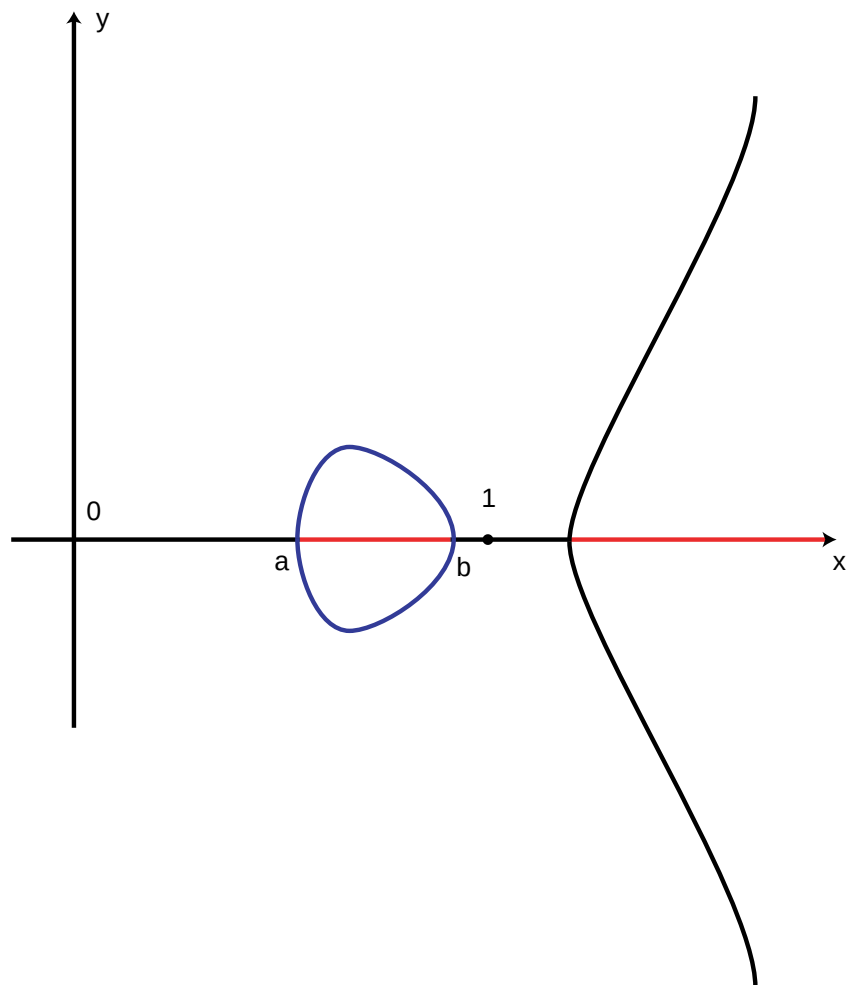
A , B , C dépendent des conditions initiales
(comment on a lancé la toupie, sa masse, etc)

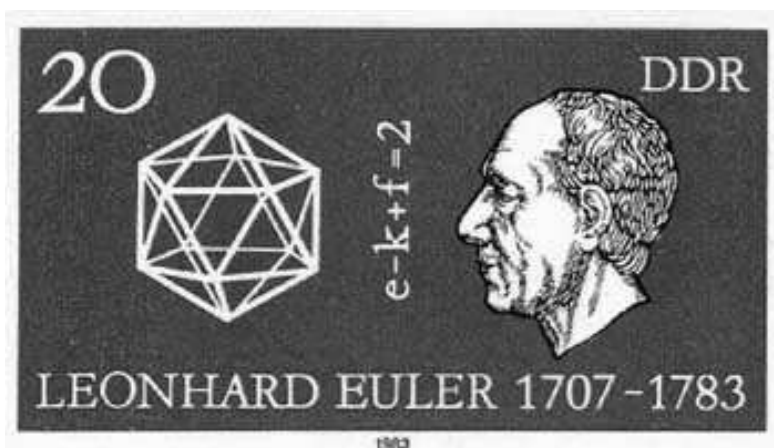
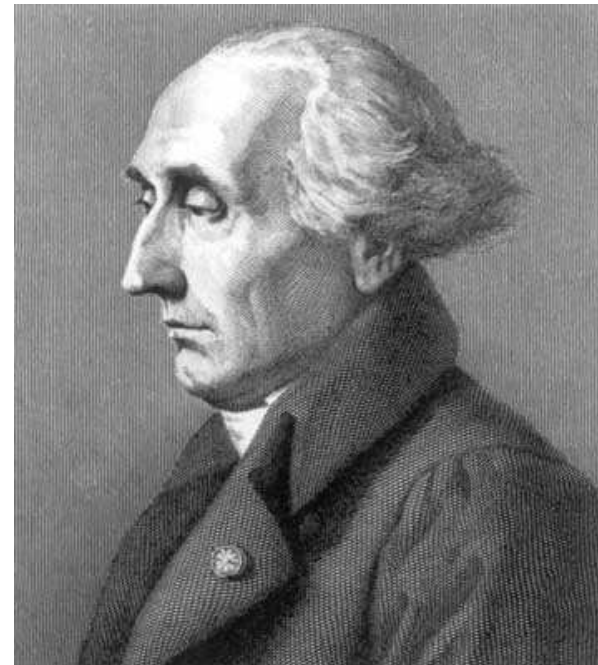
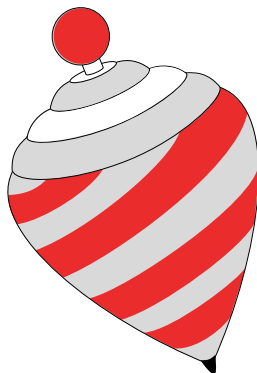
$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$z = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$$







Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé (bis) :

● Joli.

Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé (bis) :

- Joli.
- Phénomènes.

Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé (bis) :

- Joli.
- Phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée,

Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé (bis) :

- Joli.
- Phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée,
(ici entre mécanique et arithmétique)

Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé (bis) :

- Joli.
- Phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée,
(ici entre mécanique et arithmétique)
- Les mathématiques sont une activité humaine

Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé (bis) :

- Joli.
- Phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée,
(ici entre mécanique et arithmétique)
- Les mathématiques sont une activité humaine
C'est à dire faite par des êtres humains.

Ce qu'il devrait y avoir dans un tel exposé (bis) :

- Joli.
- Phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée,
(ici entre mécanique et arithmétique)
- Les mathématiques sont une activité humaine
C'est à dire faite par des êtres humains.
- Pas de mathématiques sans démonstration.

Le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

0 est neutre :

Le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

0 est neutre :

$$a + 0 = a$$

Le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

0 est neutre :

$$a + 0 = a$$

$$a + (-a) = 0$$

Le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

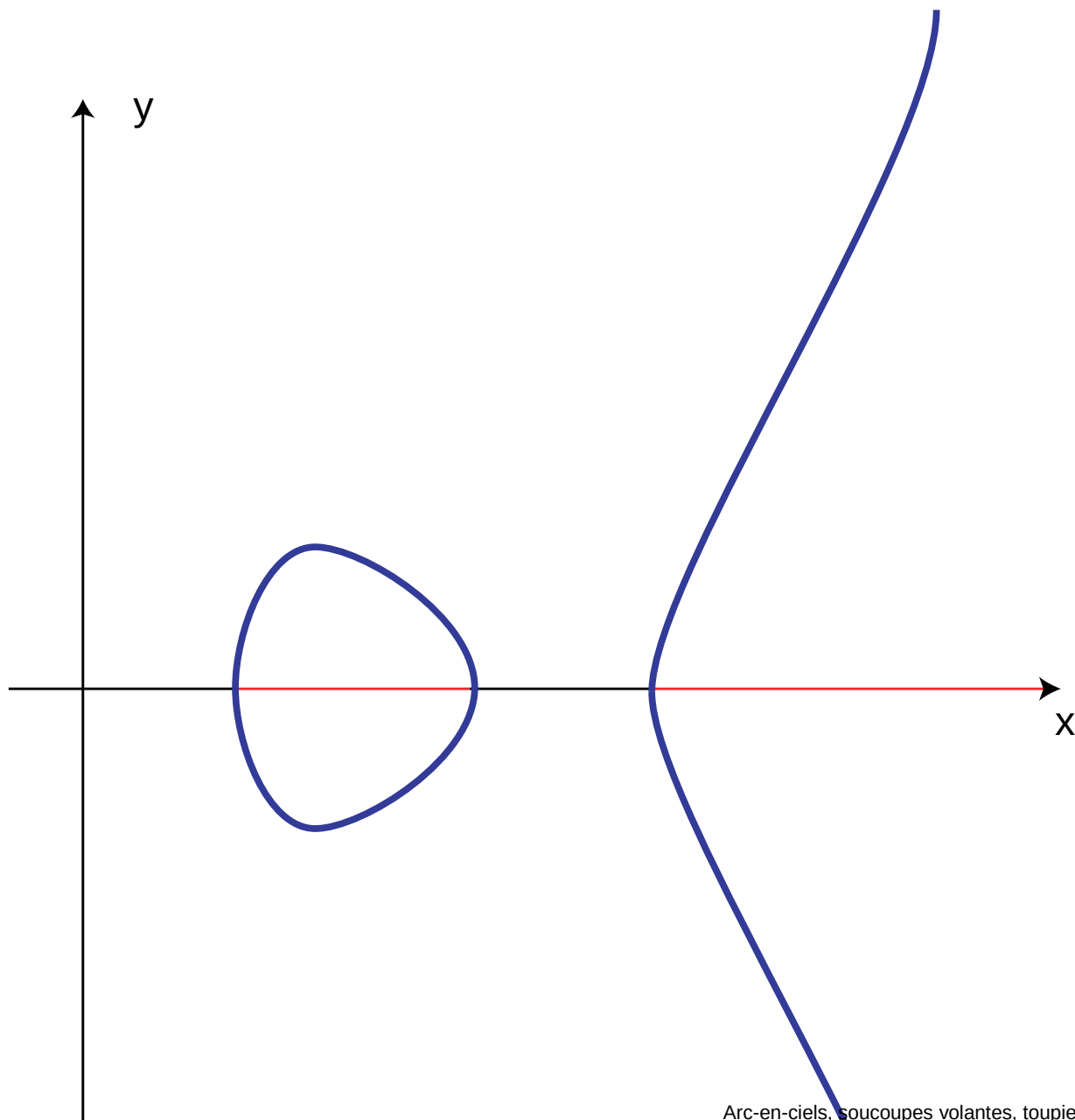
0 est neutre :

$$a + 0 = a$$

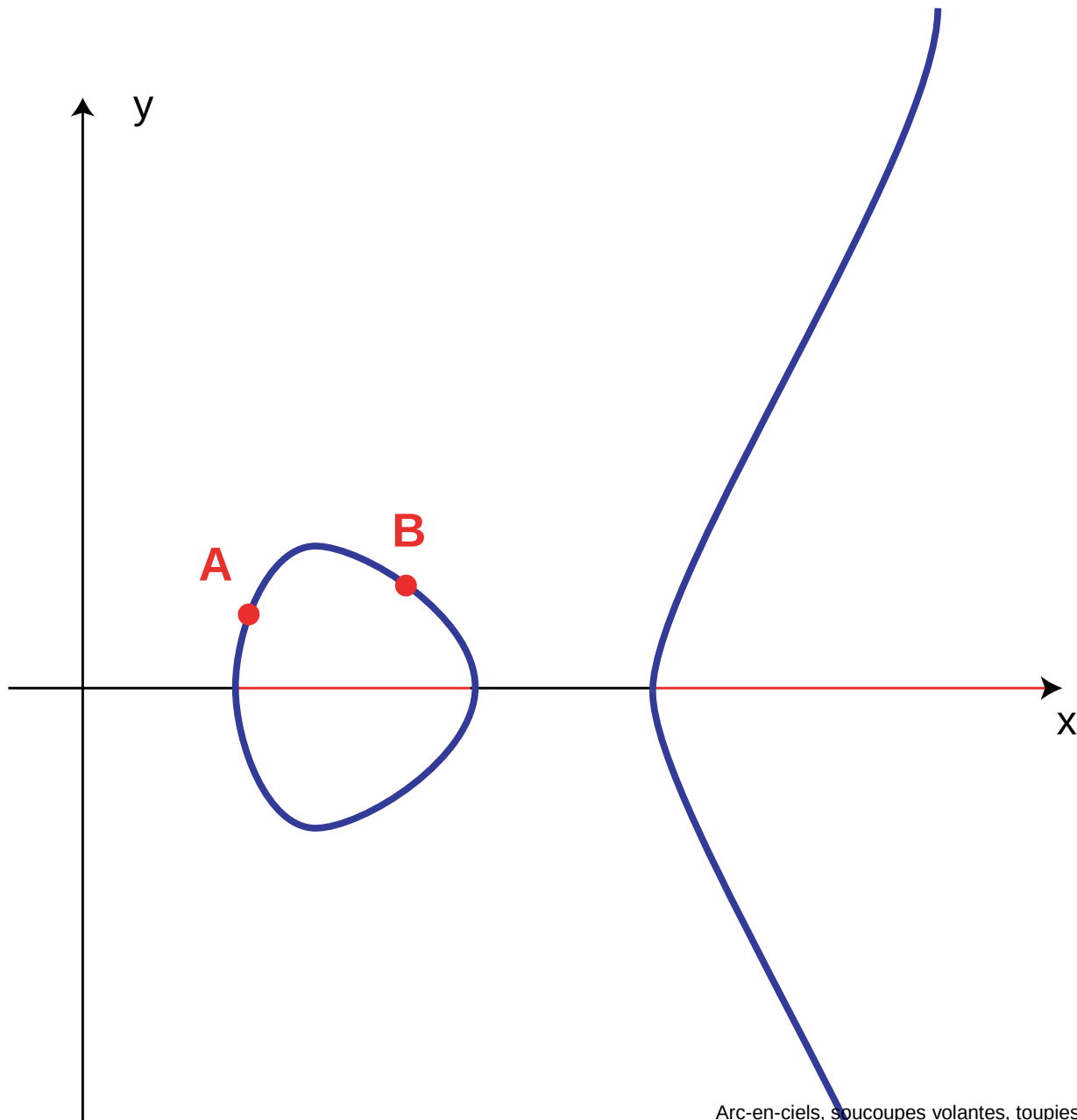
$$a + (-a) = 0$$

La courbe elliptique aussi est un groupe.

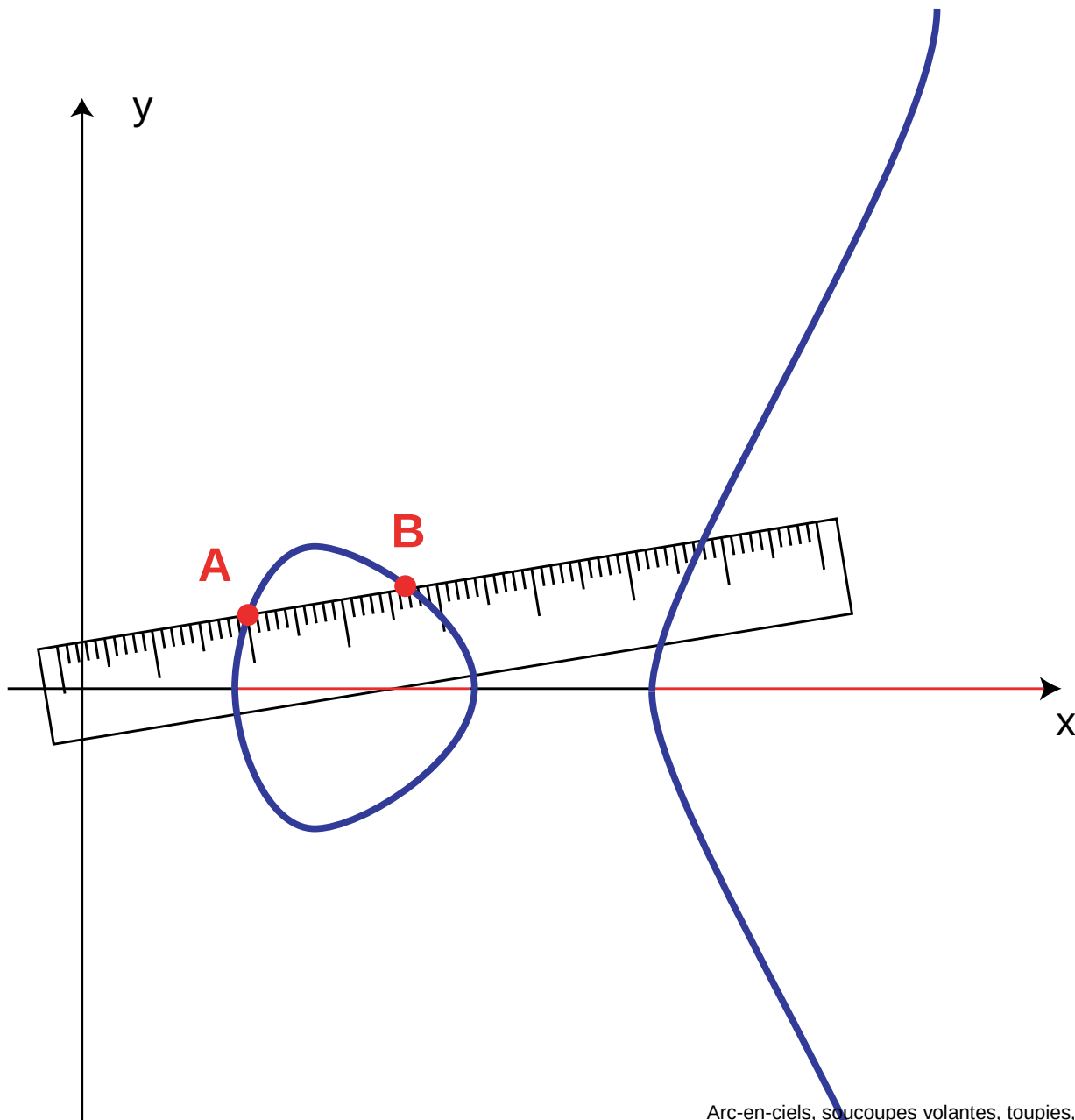
$$A + B = C$$



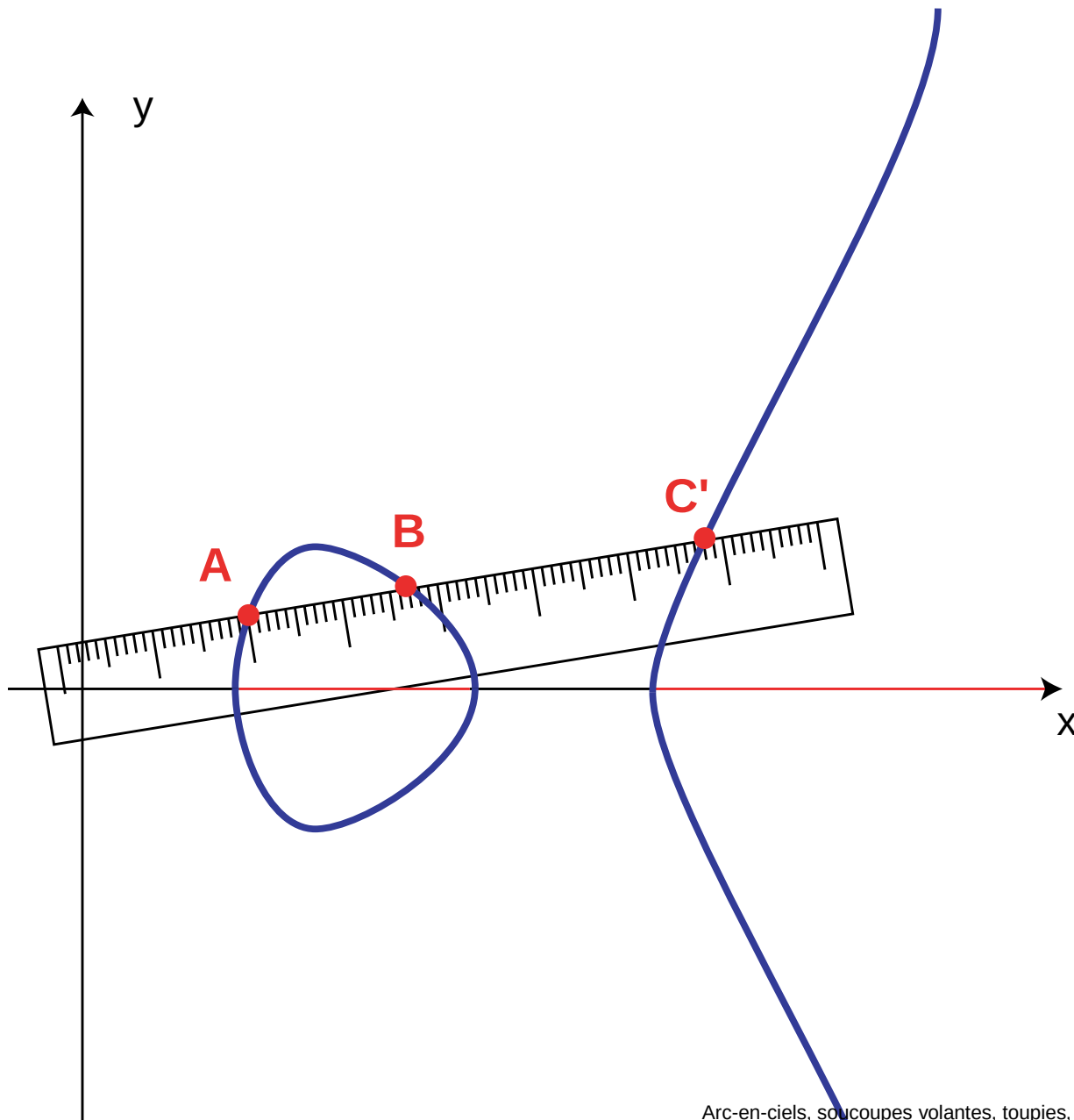
$$A + B = C$$



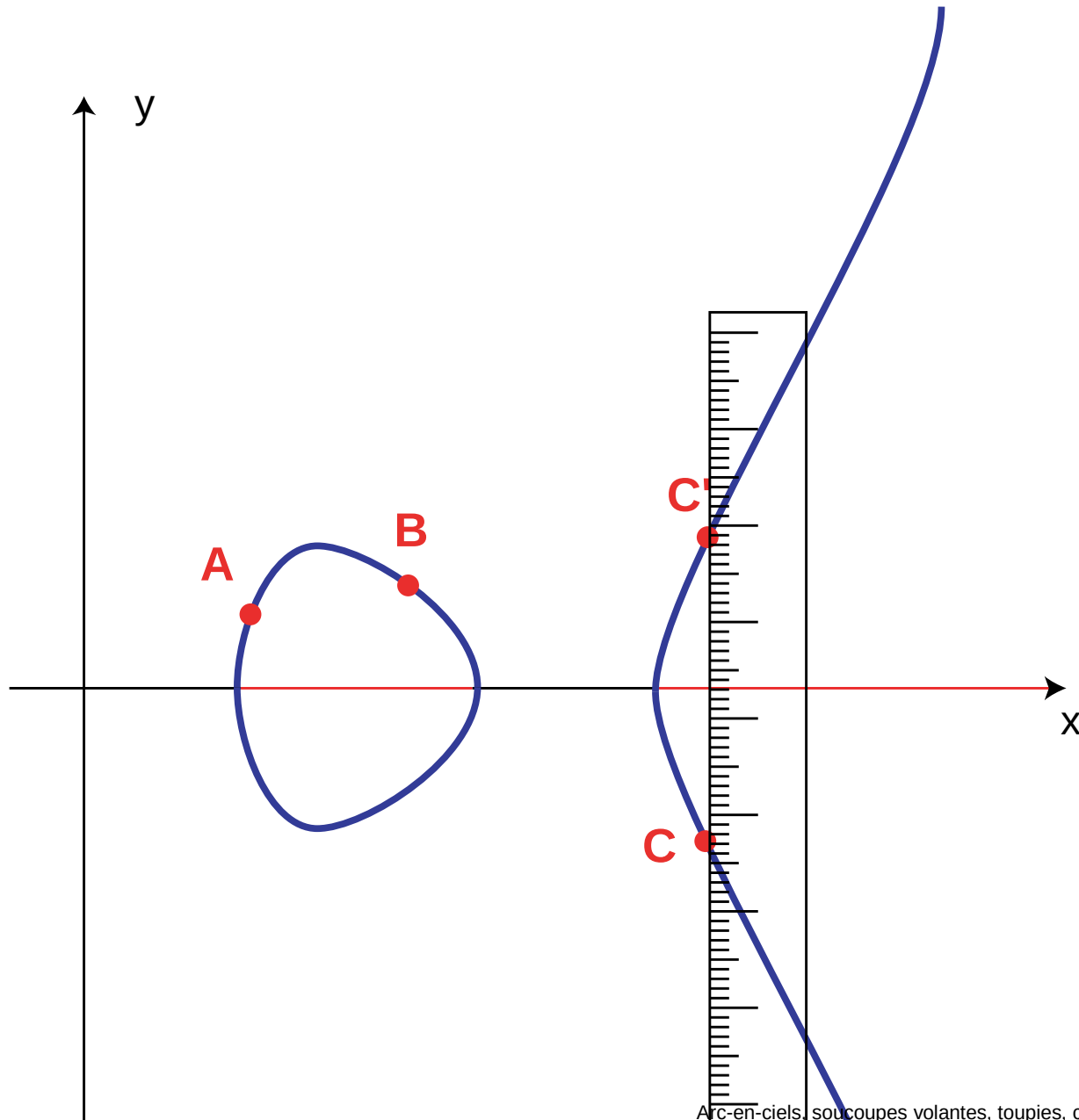
$$A + B = C$$



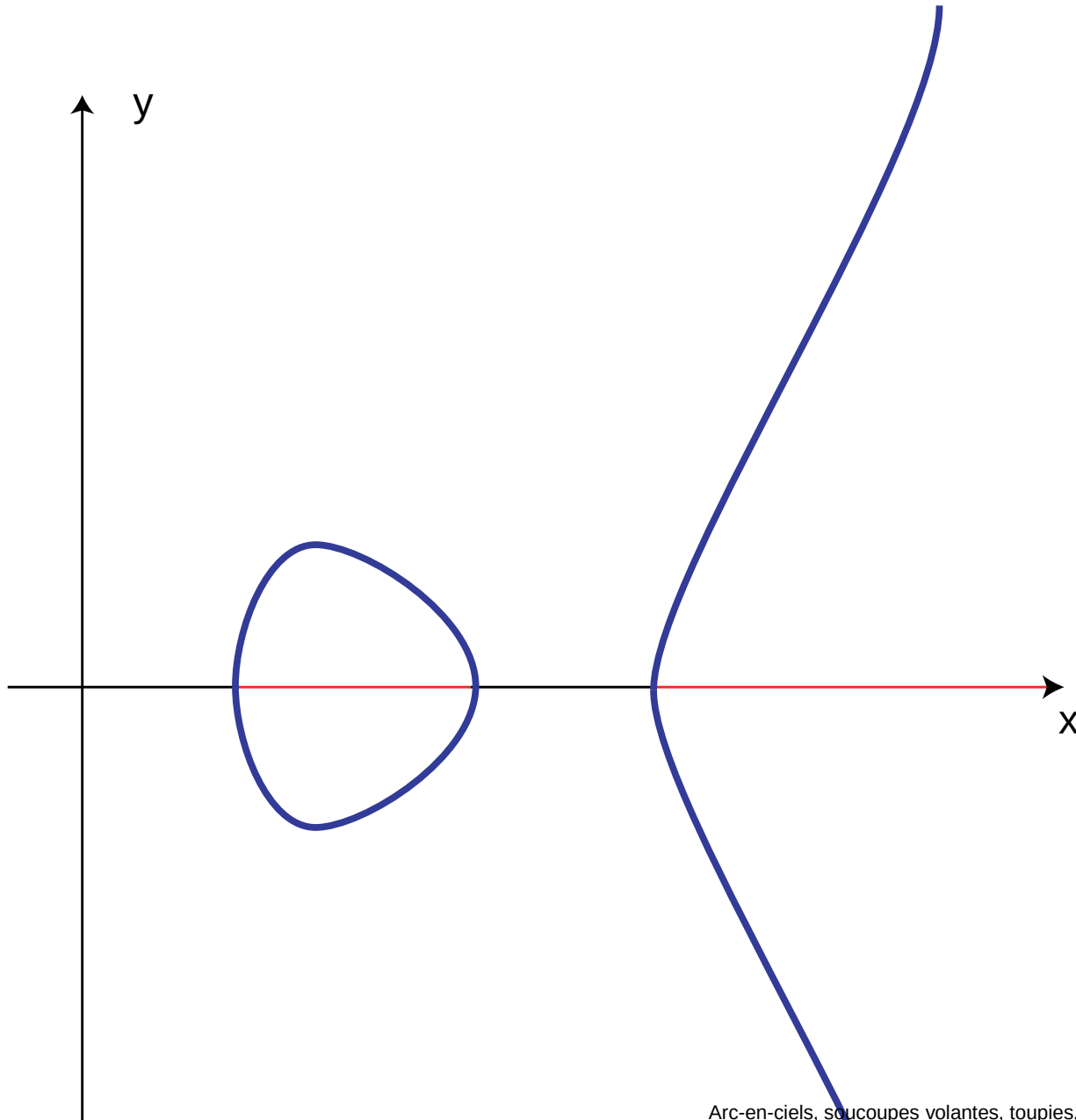
$$A + B = C$$



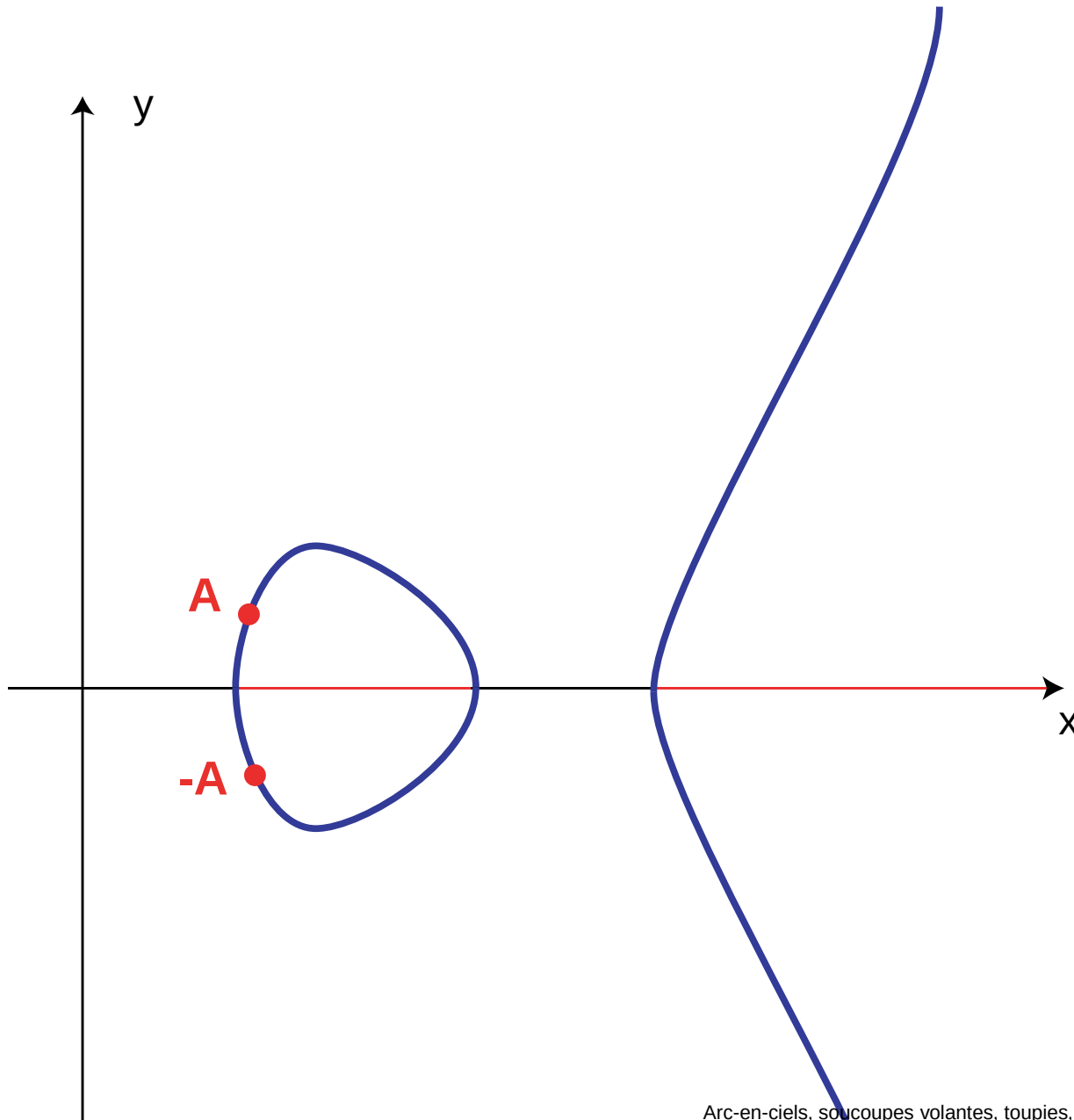
$$A + B = C$$



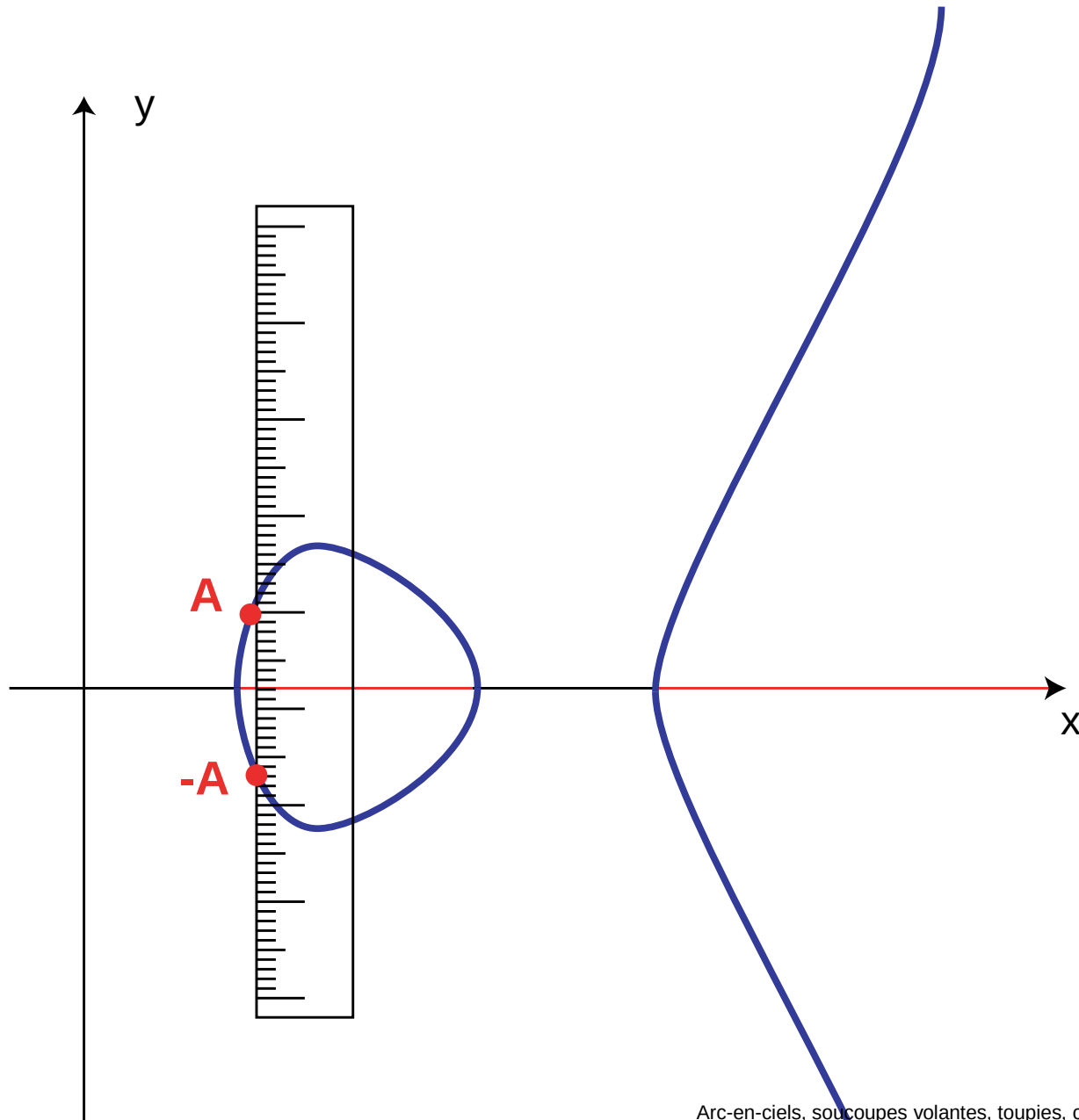
$$A + (-A) = 0$$



$$A + (-A) = 0$$



$$A + (-A) = 0$$







Le grand théorème de Fermat :

Peut-on trouver des nombres entiers a , b , c et n
tels que

$$a^n + b^n = c^n$$

Exemples :

• $n = 1$, a et b quelconques, $c = a + b$

Exemples :

- $n = 1$, a et b quelconques, $c = a + b$
- $n = 2$, par exemple $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$,
 $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Exemples :

- $n = 1$, a et b quelconques, $c = a + b$
- $n = 2$, par exemple $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$,
 $3^2 + 4^2 = 5^2$.
- L'équation est homogène (n fixé), si a , b et c sont solutions, alors ka , kb et kc sont solutions aussi.

Exemples :

- $n = 1$, a et b quelconques, $c = a + b$
- $n = 2$, par exemple $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$,
 $3^2 + 4^2 = 5^2$.
- L'équation est homogène (n fixé), si a , b et c sont solutions, alors ka , kb et kc sont solutions aussi.
- ou (avec $n = 2$), $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$,

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

ou...

Une démonstration

- On remarque que $(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$,

Une démonstration

- On remarque que $(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$,
- on part de n'importe quel nombre impair k ,

Une démonstration

- On remarque que $(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$,
- on part de n'importe quel nombre impair k ,
- k^2 est aussi un nombre impair,

Une démonstration

- On remarque que $(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$,
- on part de n'importe quel nombre impair k ,
- k^2 est aussi un nombre impair,
- on peut donc l'écrire $k^2 = 2m + 1$,

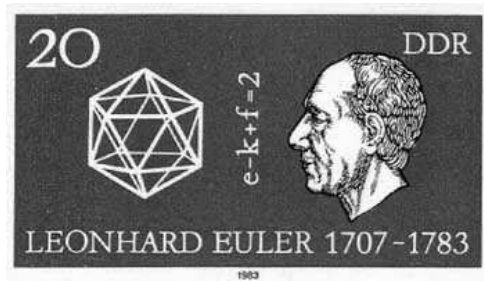
Une démonstration

- On remarque que $(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$,
- on part de n'importe quel nombre impair k ,
- k^2 est aussi un nombre impair,
- on peut donc l'écrire $k^2 = 2m + 1$,
- alors $k^2 + m^2 = (m + 1)^2$

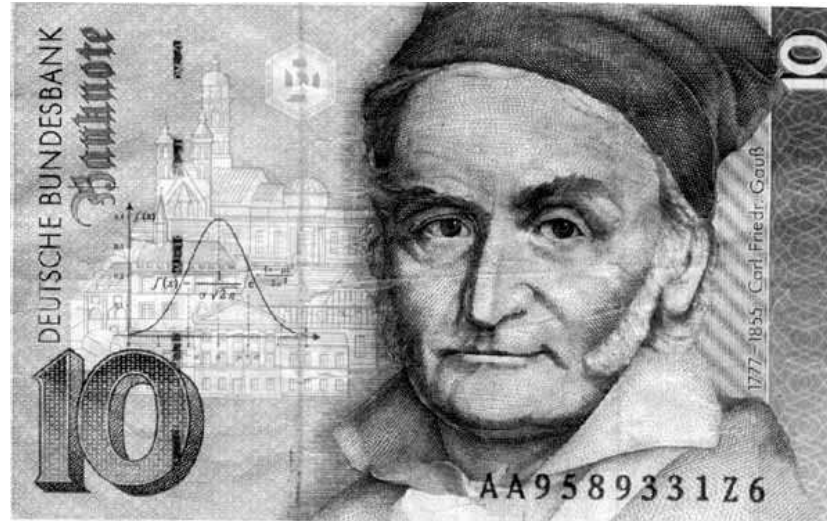
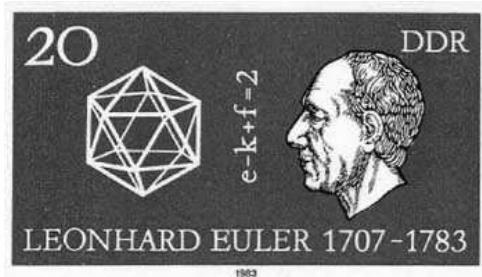
Une démonstration

- On remarque que $(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$,
- on part de n'importe quel nombre impair k ,
- k^2 est aussi un nombre impair,
- on peut donc l'écrire $k^2 = 2m + 1$,
- alors $k^2 + m^2 = (m + 1)^2$
- et il y a une infinité de triangles rectangles **différents** dont les côtés sont des nombres entiers.

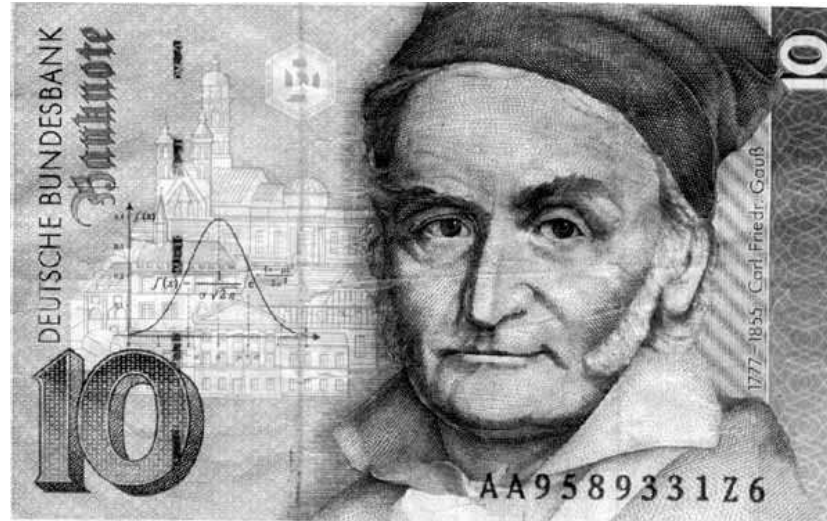
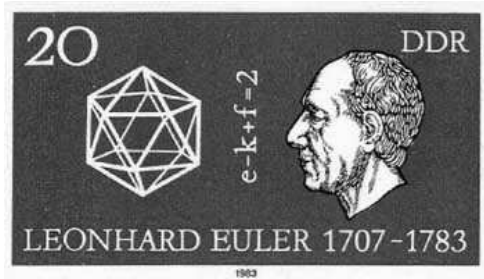
Leonhardt, Karl-Friedrich, Sophie...



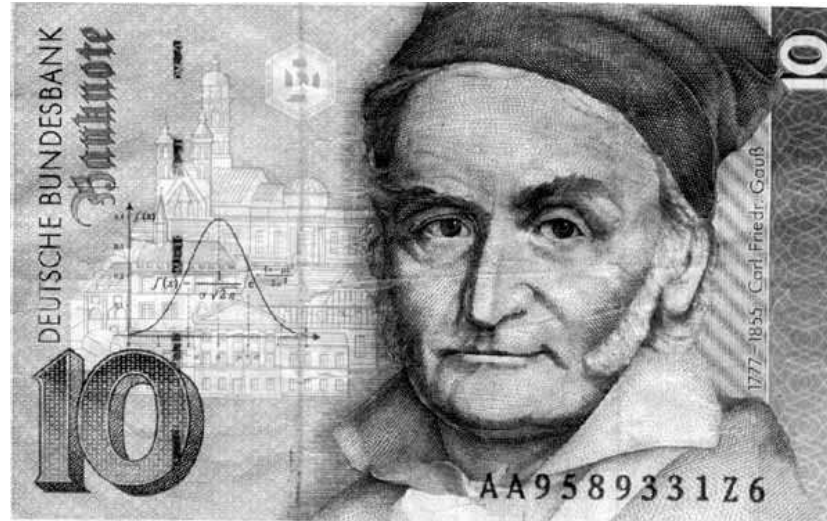
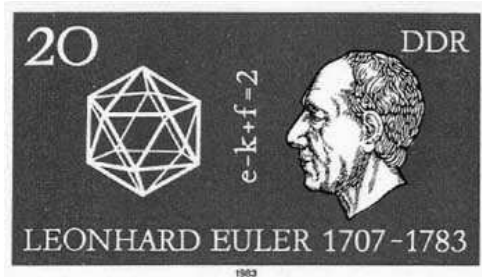
Leonhardt, Karl-Friedrich, Sophie...



Leonhardt, Karl-Friedrich, Sophie...



Leonhardt, Karl-Friedrich, Sophie...



et aussi Kummer,
plus récemment Taniyama,
Shimura...



Fermat et les courbes elliptiques

- Si A , B et C sont des nombres entiers solutions de Fermat,

Fermat et les courbes elliptiques

- Si A , B et C sont des nombres entiers solutions de Fermat,
- c'est-à-dire si $A^n + B^n = C^n$,

Fermat et les courbes elliptiques

- Si A , B et C sont des nombres entiers solutions de Fermat,
- c'est-à-dire si $A^n + B^n = C^n$,
- la courbe elliptique d'équation
$$y^2 = x^3 + (A^n - B^n)x^2 - A^n B^n$$

Fermat et les courbes elliptiques

- Si A , B et C sont des nombres entiers solutions de Fermat,
- c'est-à-dire si $A^n + B^n = C^n$,
- la courbe elliptique d'équation
$$y^2 = x^3 + (A^n - B^n)x^2 - A^n B^n$$
- a des propriétés si particulières que...

Fermat et les courbes elliptiques

- Si A , B et C sont des nombres entiers solutions de Fermat,
- c'est-à-dire si $A^n + B^n = C^n$,
- la courbe elliptique d'équation
$$y^2 = x^3 + (A^n - B^n)x^2 - A^n B^n$$
- a des propriétés si particulières que...
- elle ne peut pas exister! (Wiles)

Fermat et les courbes elliptiques

- Si A , B et C sont des nombres entiers solutions de Fermat,
- c'est-à-dire si $A^n + B^n = C^n$,
- la courbe elliptique d'équation
$$y^2 = x^3 + (A^n - B^n)x^2 - A^n B^n$$
- a des propriétés si particulières que...
- elle ne peut pas exister! (Wiles)
- Démontré par Wiles en 1994, le **grand théorème de Fermat** affirme que, pour $n \geq 3$, la seule solution (en nombres entiers) est $a = 0$ et $b = c$ (ou $b = 0$ et $a = c$).



