Prolongements de groupoïdes différentiables et de fibrés principaux selon C. EHRESMANN, P. LIBERMANN, J. VIRSÍK et I. KOLÁŘ

J. PRADINES

Paris, le 9 décembre 2009
à la mémoire de Paulette LIBERMANN

Acknowledgement to Paul Taylor for the use of his package diagrams

1. Du prolongement principal à ses généralisations
   - Le problème du prolongement des fibrés principaux
   - Du prolongement principal au prolongement KLV

1. Du prolongement principal à ses généralisations
   - Le problème du prolongement des fibrés principaux
   - Du prolongement principal au prolongement KLV

2. Fibrés principaux généraux et leur conjugaison
   - Actions principales et fibrés associés dans le cadre général d'Ehresmann
   - Compléments
     - structure du coeur d'un papillon
     - Extenseurs

Référence Libermann

P. LIBERMANN

Sur les prolongements
des fibrés principaux
et des groupoïdes différentiables
Séminaire Analyse Globale, Montréal, (1969)
(70 pages).

Autres auteurs

indépendamment

I. KOLÁŘ, Canonical forms on the prolongations of principal bundles,*Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées*, t. XVI, n° 7, (1971), 1091-1106.

Autres auteurs

indépendamment

I. KOLÁŘ, Canonical forms on the prolongations of principal bundles, *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées*, t. XVI, n° 7, (1971), 1091-1106.

cités par I. Kolář

C. EHRESMANN, Les prolongements d'un espace fibré différentiable, *C.R.A.S., Paris*, (1955), 1755-57.

J. VIRSÍK, A generalized point of view to higher order connections on fibre bundles, *Czechoslovak MATH. J.* , (94) (1969), 110-142.

Autres auteurs

indépendamment

I. KOLÁŘ, Canonical forms on the prolongations of principal bundles,*Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées*, t. XVI, n° 7, (1971), 1091-1106.

cités par I. Kolář

C. EHRESMANN, Les prolongements d'un espace fibré différentiable, *C.R.A.S., Paris*, (1955), 1755-57.

J. VIRSÍK, A generalized point of view to higher order connections on fibre bundles, *Czechoslovak MATH. J.* , (94) (1969), 110-142.

« en coordonnées, à partir des travaux d'ÉLIE CARTAN »

GEORGHIEV, Sur les prolongements réguliers des espaces fibrés et les groupes de Lie associés, *C.R.A.S., Paris*, 234, (1968),1424-5.

G. F. LAPTĚV, Structure equations of principal fibre bundles (en russe), *Trudy Geomtr. Sem.*, II, (1969), 161-178.

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

- pour les variétés (différentiables) : p-vitesses

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

- pour les variétés (différentiables) : p-vitesses
- pour les surmersions quelconques (localement triviales ou non) : jets de sections

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

- pour les variétés (différentiables) : p-vitesses
- pour les surmersions quelconques (localement triviales ou non) : jets de sections
- pour les groupoïdes différentiables (*alias* de Lie) : jets de « bissections »

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

- pour les variétés (différentiables) : p-vitesses
- pour les surmersions quelconques (localement triviales ou non) : jets de sections
- pour les groupoïdes différentiables (*alias* de Lie) : jets de « bissections »
- la notion de prolongement principal d'une variété (= fibré principal des repères).

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

- pour les variétés (différentiables) : p-vitesses
- pour les surmersions quelconques (localement triviales ou non) : jets de sections
- pour les groupoïdes différentiables (*alias* de Lie) : jets de « bissections »
- la notion de prolongement principal d'une variété (= fibré principal des repères).

Mais le prolongement, au sens général précédent (par jets de sections) d'un fibré principal (à groupe structural) « n'est pas principal ».

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

- pour les variétés (différentiables) : p-vitesses
- pour les surmersions quelconques (localement triviales ou non) : jets de sections
- pour les groupoïdes différentiables (*alias* de Lie) : jets de « bissections »
- la notion de prolongement principal d'une variété ($=$ fibré principal des repères).

Mais le prolongement, au sens général précédent (par jets de sections) d'un fibré principal (à groupe structural) « n'est pas principal ».
Ainsi la correspondance fondamentale fibré principal $\longmapsto$ groupoïde structural n'est pas respectée par les prolongements d'Ehresmann précédents.

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

- pour les variétés (différentiables) : p-vitesses
- pour les surmersions quelconques (localement triviales ou non) : jets de sections
- pour les groupoïdes différentiables (*alias* de Lie) : jets de « bissections »
- la notion de prolongement principal d'une variété (= fibré principal des repères).

Mais le prolongement, au sens général précédent (par jets de sections) d'un fibré principal (à groupe structural) « n'est pas principal ».
Ainsi la correspondance fondamentale fibré principal $\longmapsto$ groupoïde structural n'est pas respectée par les prolongements d'Ehresmann précédents.

Problème abordé simultanément (1968-71) par divers auteurs (notamment P. Libermann, I. Kolář et J. Virsík), avec des solutions essentiellement équivalentes :

Motivation

C. Ehresmann avait introduit diverses notions de prolongement (holonome d'ordre r) :

- pour les variétés (différentiables) : p-vitesses
- pour les surmersions quelconques (localement triviales ou non) : jets de sections
- pour les groupoïdes différentiables (*alias* de Lie) : jets de « bissections »
- la notion de prolongement principal d'une variété (= fibré principal des repères).

Mais le prolongement, au sens général précédent (par jets de sections) d'un fibré principal (à groupe structural) « n'est pas principal ».
Ainsi la correspondance fondamentale fibré principal $\longmapsto$ groupoïde structural n'est pas respectée par les prolongements d'Ehresmann précédents.

Problème abordé simultanément (1968-71) par divers auteurs (notamment P. Libermann, I. Kolář et J. Virsík), avec des solutions essentiellement équivalentes :

$$\boxed{\text{prolongement principal KLV} = \text{Kolář-Libermann-Virsík}}$$

Orientation

On se propose de « revisiter » ces travaux,
dans une perspective unificatrice
inspirée de C. Ehresmann, I. Kolář, N. Bourbaki (Variétés),
en privilégiant :

Orientation

On se propose de « revisiter » ces travaux,
dans une perspective unificatrice
inspirée de C. Ehresmann, I. Kolář, N. Bourbaki (Variétés),
en privilégiant :

- les points de vue « fonctoriels » : catégorie $\mathbf{D} = \mathbf{Dif}$.

Orientation

On se propose de « revisiter » ces travaux,
dans une perspective unificatrice
inspirée de C. Ehresmann, I. Kolář, N. Bourbaki (Variétés),
en privilégiant :

- les points de vue « fonctoriels » : catégorie $\mathbf{D} = \mathbf{Dif}$.
- le rôle des (morphismes de) groupoïdes : catégorie $\mathbf{GD}$ (lois d'action$\longleftrightarrow$acteurs)

Orientation

On se propose de « revisiter » ces travaux,
dans une perspective unificatrice
inspirée de C. Ehresmann, I. Kolář, N. Bourbaki (Variétés),
en privilégiant :

- les points de vue « fonctoriels » : catégorie $\mathbf{D} = \mathbf{Dif}$.
- le rôle des (morphismes de) groupoïdes : catégorie **GD** (lois d'action$\longleftrightarrow$acteurs)
- le rôle fondamental des deux sous-catégories de **D** :
  - $\mathbf{D}_i$ les plongements $\boxed{\rightarrowtail}$
  - $\mathbf{D}_s$ les surmersions $\boxed{\twoheadrightarrow}$

Orientation

On se propose de « revisiter » ces travaux,
dans une perspective unificatrice
inspirée de C. Ehresmann, I. Kolář, N. Bourbaki (Variétés),
en privilégiant :

- les points de vue « fonctoriels » : catégorie $\mathbf{D} = \mathbf{Dif}$.
- le rôle des (morphismes de) groupoïdes : catégorie $\mathbf{GD}$ (lois d'action$\longleftrightarrow$acteurs)
- le rôle fondamental des deux sous-catégories de $\mathbf{D}$:
  - $\mathbf{D}_i$ les plongements $\boxed{\rightarrowtail}$
  - $\mathbf{D}_s$ les surmersions $\boxed{\twoheadrightarrow}$
- le rôle des diagrammes : « internalisation » des constructions ensemblistes

Orientation

On se propose de « revisiter » ces travaux,
dans une perspective unificatrice
inspirée de C. Ehresmann, I. Kolář, N. Bourbaki (Variétés),
en privilégiant :

- les points de vue « fonctoriels » : catégorie $\mathbf{D} = \mathbf{Dif}$.
- le rôle des (morphismes de) groupoïdes : catégorie **GD** (lois d'action$\longleftrightarrow$acteurs)
- le rôle fondamental des deux sous-catégories de **D** :
  - $\mathbf{D}_i$ les plongements $\boxed{\rightarrowtail}$
  - $\mathbf{D}_s$ les surmersions $\boxed{\longrightarrow\!\!\triangleright}$
- le rôle des diagrammes : « internalisation » des constructions ensemblistes

La motivation d'Ehresmann était
l'interprétation géométrique des connexions d'E. Cartan,
non abordée ici.

Un principe heuristique

Une méthode générale d'internalisation

Pour transférer une construction ensembliste dans la catégorie **D** :

- décrire la construction par un diagramme
  en privilégiant les injections et les surjections ;
- remplacer celles-ci par les plongements $\rightarrowtail$ et les surmersions $\longrightarrow\!\!\!\triangleright$.

Exemple

relation d'équivalence (ensembliste) $\longleftrightarrow$ son graphe $\longrightarrow$ **D**-groupoïde « **principal** » $\longleftrightarrow$ relation d'équivalence **régulière** (**th. « de Godement »** selon J.-P. Serre)

Remarque

Ce principe s'applique dans beaucoup d'autres catégories, utilisées par les « working mathematicians », qui sont munies de deux sous-catégories de « bons monomorphismes » et de « bons épimorphismes », vérifiant de « bonnes propriétés » de stabilité, incluant un « théorème de Godement » formel.

Ex. : dans un topos, on peut prendre **tous les monos** et **tous les épis** (mais **D** n'est pas un topos !).

« Héritage(s) et descendance(s) »

Questions évoquées

- Préliminaires sur le vocabulaire des groupoïdes différentiables et leurs morphismes (*alias* foncteurs différentiables).
- L'exemple fondamental du « prolongement ppal » d'Ehresmann pour une variété.
- Le prolongement principal KLV pour un fibré principal.

« Prolongements » (de ces questions !)

- Comparaison avec les prolongements (non principaux) des fibrés généralisés d'Ehresmann (non nécessairement localement triviaux) $=$ actions d'un groupoïde différentiable sur les fibres d'une surmersion quelconque.
- Cas des fibrés (généralisés) « principaux » : leur « conjugaison » canonique.
- Liens avec d'autres perspectives (morphismes généralisés de Haefliger-Skandalis pour les feuilletages, équivalences de Morita différentiables, *stacks*, fractions inversant les équivalences ...).

groupoïdes différentiables ou groupoïdes de Lie ? Parenthèse historique et terminologique

[CDW] (1987)

$\longleftarrow$ $\Downarrow$ $\longrightarrow$

Avant

- **groupoïde différentiable**
  (*Ehresmann*) (1958)
  (*K. Mackenzie* I) (1987 ! !)

Après

- **groupoïde de Lie**
  (*Costes-Dazord-Weinstein*) (1987)
  (*K. Mackenzie* II) (2005)

groupoïdes différentiables ou groupoïdes de Lie ? Parenthèse historique et terminologique

[CDW] (1987)

$\longleftarrow \quad \Downarrow \quad \longrightarrow$

Avant

- **groupoïde différentiable**
  (*Ehresmann*) (1958)
  (*K. Mackenzie* I) (1987 ! !)
- **groupoïde de Lie**
  (*Matsushima, N.v.Qué, McK* I)
  $\Leftrightarrow$ transitif localement trivial

Après

- **groupoïde de Lie**
  (*Costes-Dazord-Weinstein*) (1987)
  (*K. Mackenzie* II) (2005)
- **transitif localement trivial**

groupoïdes différentiables ou groupoïdes de Lie ?
Parenthèse historique et terminologique

[CDW] (1987)

$\longleftarrow$ $\Downarrow$ $\longrightarrow$

Avant

- **groupoïde différentiable**
  (*Ehresmann*) (1958)
  (*K. Mackenzie* I) (1987 ! !)
- **groupoïde de Lie**
  (*Matsushima, N.v.Qué, McK* I)
  $\Leftrightarrow$ transitif localement trivial

Après

- **groupoïde de Lie**
  (*Costes-Dazord-Weinstein*) (1987)
  (*K. Mackenzie* II) (2005)
- **transitif localement trivial**
  - t.l.t.

groupoïdes différentiables ou groupoïdes de Lie ? Parenthèse historique et terminologique

[CDW] (1987)

$\longleftarrow$ $\Downarrow$ $\longrightarrow$

Avant

- **groupoïde différentiable**
  (*Ehresmann*) (1958)
  (*K. Mackenzie* I) (1987 ! !)
- **groupoïde de Lie**
  (*Matsushima, N.v.Qué, McK* I)
  $\Leftrightarrow$ transitif localement trivial
  $\Leftrightarrow$ ancre surmersive

Après

- **groupoïde de Lie**
  (*Costes-Dazord-Weinstein*) (1987)
  (*K. Mackenzie* II) (2005)
- **transitif localement trivial**
  - t.l.t.
  - *s*-transitif

Propriétés d'(in)transivité d'un **D**-groupoïde

G groupoïde différentiable de base B

ancre ou $\boxed{\text{transiteur}}$: $\underset{B}{G} \xrightarrow[=(\beta_G,\alpha_G)]{\tau_G} \overset{\times}{B}$, $\overset{\times}{B} \underset{\text{def}}{=} B \times B$: groupoïde $\boxed{\text{banal}}$

Propriétés d'(in)transitivité d'un **D**-groupoïde

G groupoïde différentiable de base B

ancre ou $\boxed{\text{transiteur}}$: $\underset{B}{G} \xrightarrow[=(\beta_G,\alpha_G)]{\tau_G} \overset{\times}{B}$, $\overset{\times}{B} \underset{\text{def}}{=} B \times B$: groupoïde $\boxed{\text{banal}}$

cas particuliers :

Propriétés d'(in)transivité d'un **D**-groupoïde

G groupoïde différentiable de base B

ancre ou $\boxed{\text{transiteur}}$: $\underset{B}{G} \xrightarrow[=(\beta_G, \alpha_G)]{\tau_G} \overset{\times}{B}$, $\overset{\times}{B} \underset{\text{def}}{=} B \times B$: groupoïde $\boxed{\text{banal}}$

cas particuliers :

- cas $\boxed{\text{principal}}$: $G = R \rhd\!\!\xrightarrow{\tau_G} \overset{\times}{B}$ (graphe d'équivalence régulière : **Godement**)

Propriétés d'(in)transivité d'un **D**-groupoïde

G groupoïde différentiable de base B

ancre ou $\boxed{\text{transiteur}}$: $\underset{B}{G} \xrightarrow[=(\beta_G,\alpha_G)]{\tau_G} \overset{\times}{B}$, $\overset{\times}{B} \underset{\text{def}}{=} B \times B$: groupoïde $\boxed{\text{banal}}$

cas particuliers :

- cas $\boxed{\text{principal}}$: $G = R \overset{\tau_G}{\rightarrowtail} \overset{\times}{B}$ (graphe d'équivalence régulière : **Godement**)
- cas $\boxed{s\text{-transitif}}$: $G \overset{\tau_G}{\twoheadrightarrow} \overset{\times}{B}$ (transitif localement trivial) ex. : $\overset{\times}{B}$, groupes

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets $\boxed{\textbf{d'ordre } r \textbf{ fixé}}$

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets $\boxed{\textbf{d'ordre } r \textbf{ fixé}}$
- $\mathbf{J}_B^{B'}(M, M') = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(B')$ (induit sur B, B')

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)
- $\boxed{m\textbf{-vitesses}}$ $\mathbf{T}_m(M')$

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets $\boxed{\textbf{d'ordre } r \textbf{ fixé}}$
- $\mathbf{J}_B^{B'}(M, M') = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(B')$ (induit sur B, B')
- $B \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}_B^{B'}(M, M') \xrightarrow{\beta} B'$: source, but (f. l. t.)

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)
- $\boxed{m\text{-}\textbf{vitesses}}$ $\mathbf{T}_m(M')$
- $\mathbf{T}_m(M') \xrightarrow{t_m} M'$

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets $\boxed{\textbf{d'ordre } r \textbf{ fixé}}$
- $\mathbf{J}_B^{B'}(M, M') = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(B')$ (induit sur B, B')
- $B \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}_B^{B'}(M, M') \xrightarrow{\beta} B'$: source, but (f. l. t.)
- si $\boxed{m = m'}$, $\mathbf{H}(M, M')$, jets **inversibles**

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)
- $\boxed{m\textbf{-vitesses}}$ $\mathbf{T}_m(M')$
- $\mathbf{T}_m(M') \xrightarrow{t_m} M'$
- .

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets $\boxed{\textbf{d'ordre } r \textbf{ fixé}}$
- $\mathbf{J}_B^{B'}(M, M') = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(B')$ (induit sur B, B')
- $B \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}_B^{B'}(M, M') \xrightarrow{\beta} B'$: source, but (f. l. t.)
- si $\boxed{m = m'}$, $\mathbf{H}(M, M')$, jets **inversibles**
- $P = \mathbf{H}_B^{B'}(M, M')$, $G = \mathbf{H}_B^B(M, M)$, $G' = \mathbf{H}_{B'}^{B'}(M', M')$

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)
- $\boxed{m\textbf{-vitesses}}$ $\mathbf{T}_m(M')$
- $\mathbf{T}_m(M') \xrightarrow{t_m} M'$
-
- $\boxed{\textbf{pr. ppal}}$ $\mathbf{H}(M') = H$

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets $\boxed{\textbf{d'ordre } r \textbf{ fixé}}$
- $\mathbf{J}_B^{B'}(M, M') = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(B')$ (induit sur B, B')
- $B \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}_B^{B'}(M, M') \xrightarrow{\beta} B'$: source, but (f. l. t.)
- si $\boxed{m = m'}$, $\mathbf{H}(M, M')$, jets **inversibles**
- $P = \mathbf{H}_B^{B'}(M, M')$, $G = \mathbf{H}_B^{B}(M, M)$, $G' = \mathbf{H}_{B'}^{B'}(M', M')$
- G, G', **D-grpdes** de bases B, B',
  tous deux *s*-**transitifs** (loc.triv.)

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)
- $\boxed{m\textbf{-vitesses}}$ $\mathbf{T}_m(M')$
- $\mathbf{T}_m(M') \xrightarrow{t_m} M'$
- .
- $\boxed{\textbf{pr. ppal}}$ $\mathbf{H}(M') = H$
- $G = \mathbf{L}_{m'}^{(r)}(\mathbb{R})$ (groupe)
  $G' = \mathbf{\Pi}^{(r)}(M')$ (grpde)

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets $\boxed{\textbf{d'ordre } r \textbf{ fixé}}$
- $\mathbf{J}_B^{B'}(M, M') = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(B')$ (induit sur B, B')
- $B \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}_B^{B'}(M, M') \xrightarrow{\beta} B'$: source, but (f. l. t.)
- si $\boxed{m = m'}$, $\mathbf{H}(M, M')$, jets **inversibles**
- $P = \mathbf{H}_B^{B'}(M, M')$, $G = \mathbf{H}_B^{B}(M, M)$, $G' = \mathbf{H}_{B'}^{B'}(M', M')$
- G, G', **D-grpdes** de bases B, B',
  tous deux *s*-**transitifs** (loc.triv.)
- $B \xleftarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} B'$ $\boxed{\textbf{bi-fibré}}$ (loc.triv.)

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)
- $\boxed{m\textbf{-vitesses}}$ $\mathbf{T}_m(M')$
- $\mathbf{T}_m(M') \xrightarrow{t_m} M'$
- .
- $\boxed{\textbf{pr. ppal}}$ $\mathbf{H}(M') = H$
- $G = \mathbf{L}_{m'}^{(r)}(\mathbb{R})$ (groupe)
  $G' = \mathbf{\Pi}^{(r)}(M')$ (grpde)
- $P = H$ $\boxed{\textbf{f. ppal}}$ base B'

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets **d'ordre r fixé**
- $\mathbf{J}_B^{B'}(M, M') = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(B')$ (induit sur B, B')
- $B \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}_B^{B'}(M, M') \xrightarrow{\beta} B'$: source, but (f. l. t.)
- si $\boxed{m = m'}$, $\mathbf{H}(M, M')$, jets **inversibles**
- $P = \mathbf{H}_B^{B'}(M, M')$, $G = \mathbf{H}_B^B(M, M)$, $G' = \mathbf{H}_{B'}^{B'}(M', M')$
- G, G', **D-grpdes** de bases B, B',
  tous deux *s*-**transitifs** (loc.triv.)
- $B \xleftarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} B'$ **bi-fibré** (loc.triv.)
- G, G' opèrent sur P (à la source et au but) ;

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)
- **m-vitesses** $\mathbf{T}_m(M')$
- $\mathbf{T}_m(M') \xrightarrow{t_m} M'$
- .
- **pr. ppal** $\mathbf{H}(M') = H$
- $G = \mathbf{L}_{m'}^{(r)}(\mathbb{R})$ (groupe)
  $G' = \mathbf{\Pi}^{(r)}(M')$ (grpde)
- $P = H$ **f. ppal** base B'
- groupe et groupoïde structuraux de H

Ex. fondamental : prolongement principal d'Ehresmann

une situation générale plus symétrique

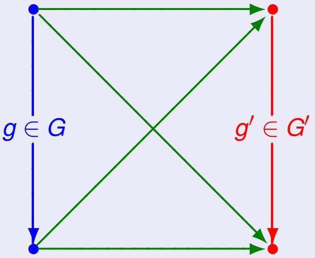
- M, M', variétés de dimension m, m'
- B, B', sous-variétés de dim. b, b' : $B \subset M$, $B' \subset M'$
- $M \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}(M, M') \xrightarrow{\beta} M'$ jets $\boxed{\textbf{d'ordre } r \textbf{ fixé}}$
- $\mathbf{J}_B^{B'}(M, M') = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(B')$ (induit sur B, B')
- $B \xleftarrow{\alpha} \mathbf{J}_B^{B'}(M, M') \xrightarrow{\beta} B'$: source, but (f. l. t.)
- si $\boxed{m = m'}$, $\mathbf{H}(M, M')$, jets **inversibles**
- $P = \mathbf{H}_B^{B'}(M, M')$, $G = \mathbf{H}_B^{B}(M, M)$, $G' = \mathbf{H}_{B'}^{B'}(M', M')$
- G, G', **D-grpdes** de bases B, B',
  tous deux *s*-**transitifs** (loc.triv.)
- $B \xleftarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} B'$ $\boxed{\textbf{bi-fibré}}$ (loc.triv.)
- G, G' opèrent sur P (à la source et au but) ;
- ces actions sont « **ppales** » et « **conjuguées** »

cas particuliers

- $M = \mathbb{R}^m$ (var. modèle)
- $B = \{0\}$, $B' = M'$
- (on omet d'écrire r)
- $\boxed{m\textbf{-vitesses}}$ $\mathbf{T}_m(M')$
- $\mathbf{T}_m(M') \xrightarrow{t_m} M'$
- .
- $\boxed{\textbf{pr. ppal}}$ $\mathbf{H}(M') = H$
- $G = \mathbf{L}_{m'}^{(r)}(\mathbb{R})$ (groupe)
  $G' = \mathbf{\Pi}^{(r)}(M')$ (grpde)
- $P = H$ $\boxed{\textbf{f. ppal}}$ base B'
- groupe et groupoïde structuraux de H

Schéma de la structure du prolongement principal

Actions « ppales conjuguées » de G et G' sur les éléments de P



$$G \rightrightarrows B \xleftarrow{\ \alpha\ } P \xrightarrow{\ \beta\ } B' \leftleftarrows G'$$

flèches vertes $=$ jets (**inversibles**) $\in P$

« principalité » des deux actions

$R = P \underset{B'}{\times} P$, $R' = P \underset{B}{\times} P$ sont « ppaux »

$R \xrightarrow{@} G$, $R' \xrightarrow{@} G$

sont des « **acteurs principaux** » (actions libres)

« conjugaison » des deux actions

$\overset{\times}{P} \underset{\overset{\times}{B}}{\times} G \approx \overset{\times}{P} \underset{\overset{\times}{B'}}{\times} G' =: K$ (grpdes induits)

$G \xleftarrow{\ \sim\ } K \xrightarrow{\ \sim\ } G'$ sont des « *s*-**équivalences** » de **D**-groupoïdes

Ingrédients généraux et particuliers

Ingrédients généraux d'Ehresmann (Evangile selon St Charles)

- Une **structure fibrée** (généralisée) E de base B **associée à un groupoïde** G de base B est définie par une **action** de G permutant les fibres de E au-dessus de B.
  (Cette action est décrite par un « **acteur** » $H \multimap\!\!\rightarrow G$, $H =$ grpde d'action).
- Les **prolongements** de cette structure fibrée sont définis en faisant opérer les jets (d'ordre r) de **bissections** (ΣG) de G sur les jets de **sections** (ΣE) de E.

Ingrédients généraux et particuliers

Ingrédients généraux d'Ehresmann (Evangile selon St Charles)

- Une **structure fibrée** (généralisée) E de base B **associée à un groupoïde** G de base B est définie par une **action** de G permutant les fibres de E au-dessus de B. (Cette action est décrite par un « **acteur** » $H \longrightarrow\!\!@\!\!\rightarrowtail G$, $H =$ grpde d'action).
- Les **prolongements** de cette structure fibrée sont définis en faisant opérer les jets (d'ordre r) de **bissections** (ΣG) de G sur les jets de **sections** (ΣE) de E.

Ingrédients plus particuliers

- Les actions de G et G' sont « **principales** » (libres du point de vue algébrique).
- Elles sont « **conjuguées** » (chacune détermine l'autre, et elles commutent). Les **orbites** de l'une sont les **fibres** de l'autre.
- **L'une** d'elles est une action de **groupe** (groupe structural, **base ponctuelle**).
- **L'autre** action est **transitive** (aspect volontairement dissymétrique).
- G et G' sont tous deux s-**transitifs** (**localement triviaux**).

Difficultés

- La **déf. générale d'Ehresmann** unifie des cas **non localement triviaux** étendus (ex. : groupoïde d'holonomie d'un feuilletage) ,
  mais **ignore la conjugaison**, associée à la « **principalité** » (**actions couplées**).
- Le **prolongement d'Ehresmann** respecte la principalité mais non la conjugaison.

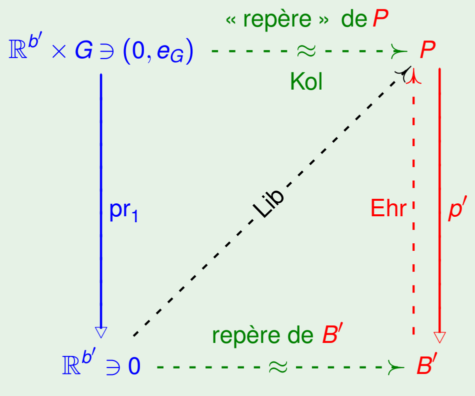
Difficultés

- La **déf. générale d'Ehresmann** unifie des cas **non localement triviaux** étendus (ex. : groupoïde d'holonomie d'un feuilletage) ,
  mais **ignore la conjugaison**, associée à la « **principalité** » (**actions couplées**).
- Le **prolongement d'Ehresmann** respecte la principalité mais non la conjugaison.

La solution de Kolář-Libermann-Virsík :

- prolonge les fibrés principaux **classiques** (associés à l'action principale d'un **groupe** G) via l'action conjuguée du **groupoïde structural** G' ;
- consiste à remplacer les **jets de section** $\mathbf{Ehr}(P) = \Sigma P$ de $P \longrightarrow\!\!\triangleright B'$ par les « **jets de trivialisation** » $\boxed{\mathbf{Lib}(P) = \mathbf{Kol}(P) = \mathbf{Ehr}(P) \times_{B'} \mathbf{H}(B')}$ (interprétés par Kolář comme généralisant les **repères** qui définissent le prol. ppal $\mathbf{H}(B')$).
- L'action du grpde structural prolongé $\mathbf{Ehr}(G')$ opère par **jets d'autom.** de P.
- Elle repose, de façon essentielle, sur la **locale trivialité** de la structure. $\Longrightarrow$

Prolongement principal de Kolář-Libermann-Virsík



$$\boxed{\mathbf{Lib}(P) = \mathbf{Kol}(P) = \mathbf{Ehr}(P) \underset{B'}{\times} \mathbf{H}(B')}$$

- P fibré ppal (loc. triv.)
- base B', projection p'
- groupe structural G
- $(B = \{0\})$
- $\mathbb{R}^{b'} \times G$ modèle trivial local
- flèche tiretée $\dashrightarrow$ = jet (d'ordre r fixé)
- $\approx$ = jet inversible
- Ehr = jet de section de P
- Kol = « repère » de P ou jet de trivialisation de P
- Lib = jet se projetant par p' sur un repère de B'

Vers des prolongements conjugués

En général les prol. d'actions ppales conjuguées ne seront plus conjuguées.

Sous-variétés transversales

- Mais la locale trivialité d'un groupoïde G se traduit par la propriété que les sous-variétés ponctuelles de la base sont « transversales » à G.
- Dans le cas général deux sous-variétés de la base qui sont transversales à G déterminent deux actions principales conjuguées des groupoïdes induits.

Conjugaison entre prolongements induits

Ceci s'applique aux prolongements d'Ehresmann $\mathbf{Ehr}(G)$:
deux sous-variétés transversales à G
déterminent des « prolongements KLV conjugués »,
en considérant les deux groupoïdes **induits** par $\mathbf{Ehr}(G)$,
généralisant ainsi les prolongements de KLV à des cas très étendus.

(*Pour la construction ci-dessus, on plongerait B et B' dans* $\boxed{M \sqcup M'}$).

Un cadre plus symétrique privilégiant la conjugaison

Actions principales conjuguées. Fibrés associés.

La notion d'actions conjuguées est définie, de façon symétrique, dans le cadre général des actions de groupoïdes qui sont « principales » (libres du point de vue algébrique). Elle s'étend aux actions non principales (fibre-type $\longleftrightarrow$ fibré associé).

Un cadre plus symétrique privilégiant la conjugaison

Actions principales conjuguées. Fibrés associés.

La notion d'actions conjuguées est définie, de façon symétrique, dans le cadre général des actions de groupoïdes qui sont « principales » (libres du point de vue algébrique). Elle s'étend aux actions non principales (fibre-type $\longleftrightarrow$ fibré associé).

Lien avec d'autres théories

Elle est étroitement liée :

- aux morphismes généralisés d'A. Haefliger (& G. Skandalis) (feuilletages) ;
- aux équivalences de Morita (formulées dans le cadre différentiable **GD**) lesquelles conduisent au point de vue des « *stacks* » ;
- à la catégorie de fractions qui inverse les équivalences de groupoïdes (dans **GD**).

Un peu plus de détails $\longrightarrow$

Notations

Notations pour un **D**-groupoïde G de base $B (= G_0)$:

$$\begin{matrix} G \\ B \end{matrix}$$

Notations

Notations pour un **D**-groupoïde G de base $B (= G_0)$: $\underset{B}{G}$

- $\overset{0}{B} \underset{\text{loi unité}}{\overset{\omega_G}{\rightarrowtail}} G$ $\quad \overset{0}{B}$ grpde $\boxed{\text{nul}}$

Notations

Notations pour un **D**-groupoïde G de base $B (= G_0)$: $\underset{B}{G}$

- $\overset{0}{B} \underset{\text{loi unité}}{\xrightarrow{\omega_G}} G$ $\quad$ $\overset{0}{B}$ grpde $\boxed{\text{nul}}$ $\quad$ $B \underset{\text{but}}{\xleftarrow{\beta_G}} G \underset{\text{source}}{\xrightarrow{\alpha_G}} B$

Notations

Notations pour un **D**-groupoïde G de base $B (= G_0)$: $\underset{B}{G}$

- $\overset{0}{B} \underset{\text{loi unité}}{\xrightarrow{\omega_G}} G$ $\quad$ $\overset{0}{B}$ grpde $\boxed{\text{nul}}$ $\quad$ $B \underset{\text{but}}{\xleftarrow{\beta_G}} G \underset{\text{source}}{\xrightarrow{\alpha_G}} B$ $\quad$ var. ss-jac. $|G|$ (oubli)

Notations

Notations pour un **D**-groupoïde G de base $B (= G_0)$: $\underset{B}{G}$

- $\overset{0}{B} \underset{\text{loi unité}}{\xrightarrow{\omega_G}} G$ $\quad \overset{0}{B}$ grpde $\boxed{\text{nul}}$ $\quad B \overset{\beta_G}{\underset{\text{but}}{\longleftarrow}} G \overset{\alpha_G}{\underset{\text{source}}{\longrightarrow}} B$ $\quad$ var. ss-jac. $|G|$ (oubli)
- groupe : $B = \bullet$ $\quad$ **plurigroupe** : $\alpha_G = \beta_G$ (somme de groupes)

Notations

Notations pour un **D**-groupoïde G de base $B (= G_0)$: $\underset{B}{G}$

- $\overset{0}{B} \xrightarrow[\text{loi unité}]{\omega_G} G$ $\quad$ $\overset{0}{B}$ grpde $\boxed{\text{nul}}$ $\quad$ $B \xleftarrow[\text{but}]{\beta_G} G \xrightarrow[\text{source}]{\alpha_G} B$ $\quad$ var. ss-jac. $|G|$ (oubli)
- groupe : $B = \bullet$ $\quad$ **plurigroupe** : $\alpha_G = \beta_G$ (somme de groupes)
- division à droite yx^{-1} : $\Delta G \xrightarrow{\delta_G} G$

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, "x"] & \\ \cdot & & \cdot \arrow[ll, "\delta_G(y,x)"', "= yx^{-1}"] \end{tikzcd}$$

(triangles commutatifs)

Notations

Notations pour un **D**-groupoïde G de base $B \,(= G_0)$: $\underset{B}{G}$

- $\overset{0}{B} \xrightarrow[\text{loi unité}]{\omega_G} G$ $\quad$ $\overset{0}{B}$ grpde $\boxed{\text{nul}}$ $\quad$ $B \xleftarrow[\text{but}]{\beta_G} G \xrightarrow[\text{source}]{\alpha_G} B$ $\quad$ var. ss-jac. $|G|$ (oubli)
- groupe : $B = \bullet$ $\quad$ **plurigroupe** : $\alpha_G = \beta_G$ (somme de groupes)
- division à droite yx^{-1} : $\Delta G \xrightarrow{\delta_G} G$

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, "x"] & \\ \cdot & & \cdot \arrow[ll, "\delta_G(y{,}x)"', "= yx^{-1}"] \end{tikzcd}$$

(triangles commutatifs)

- division à gauche $y^{-1}x$: $\nabla G \xrightarrow{\bar{\delta}_G} G$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr, "y"'] & & \cdot \arrow[ll, "y^{-1}x ="', "\bar{\delta}_G(y{,}x)"] \arrow[dl, "x"] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

(carrés dégénérés)

Notations

Notations pour un **D**-groupoïde G de base $B\,(=G_0)$: $\underset{B}{G}$

- $\overset{0}{B} \xrightarrow[\text{loi unité}]{\omega_G} G$ $\overset{0}{B}$ grpde $\boxed{\text{nul}}$ $B \xleftarrow[\text{but}]{\beta_G} G \xrightarrow[\text{source}]{\alpha_G} B$ var. ss-jac. $|G|$ (oubli)
- groupe : $B = \bullet$ **plurigroupe** : $\alpha_G = \beta_G$ (somme de groupes)
- division à droite yx^{-1} : $\Delta G \xrightarrow{\delta_G} G$

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, "x"] & \\ \cdot & & \cdot \arrow[ll, "\delta_G(y,x)"', "=yx^{-1}"] \end{tikzcd}$$

(triangles commutatifs)

- division à gauche $y^{-1}x$: $\nabla G \xrightarrow{\bar{\delta}_G} G$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr, "y"'] & & \cdot \arrow[ll, "y^{-1}x="', "\bar{\delta}_G(y,x)"] \arrow[dl, "x"] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

(carrés dégénérés)

- carrés commutatifs $G \xleftarrow[\text{bas}]{\varpi_G} \square G \xrightarrow[\text{haut}]{\bar{\varpi}_G} G$ (composition horizontale $\square\square$)

Papillon canonique d'un groupoïde

Papillon canonique de G

Papillon canonique d'un groupoïde

Papillon canonique de G

$$\begin{tikzcd}
\Delta G \arrow[dd, "\delta_G"', "@"] & \\
& \underset{|G|}{\square G} \arrow[ul, tail, "\iota_G"'] \arrow[dl, "\tilde{\varpi}_G"] \\
\underset{B}{G} &
\end{tikzcd}$$

Papillon canonique d'un groupoïde

Papillon canonique de G

$$\begin{tikzcd}
\Delta G \arrow[dd, "\delta_G"', "@"] & & \nabla G \arrow[dd, "@"', "\overline{\delta}_G"] \\
& \underset{|G|}{\square G} \arrow[ul, "\iota_G"'] \arrow[ur, "\overline{\iota}_G"] \arrow[dl, "\sim", "\varpi_G"'] \arrow[dr, "\sim"', "\overline{\varpi}_G"] & \\
\underset{B}{G} & & \underset{B}{G}
\end{tikzcd}$$

Papillon canonique d'un groupoïde

Papillon canonique de G

$$\begin{tikzcd}
\Delta G \arrow[dd, "\delta_G"', "@"] & & \nabla G \arrow[dd, "@"', "\overline{\delta}_G"] \\
& \underset{|G|}{\Box G} \arrow[ul, tail, "\iota_G"'] \arrow[ur, tail, "\overline{\iota}_G"] \arrow[dl, "\sim", "\varpi_G"'] \arrow[dr, "\sim"', "\overline{\varpi}_G"] & \\
\underset{B}{G} & & \underset{B}{G}
\end{tikzcd}$$

$$B \xleftarrow{\beta_G=(\varpi_G)_0} |G| = (\Box G)_0 \xrightarrow{\alpha_G=(\overline{\varpi}_G)_0} B$$

Papillon canonique d'un groupoïde

Papillon canonique de G

$$
\begin{tikzcd}
\Delta G \arrow[dd, "\delta_G"', "@"] & & \nabla G \arrow[dd, "@"', "\overline{\delta}_G"] \\
& \underset{|G|}{\square G} \arrow[ul, hook, "\iota_G"'] \arrow[ur, hook', "\overline{\iota}_G"] \arrow[dl, "\sim", "\varpi_G"'] \arrow[dr, "\sim"', "\overline{\varpi}_G"] & \\
\underset{B}{G} & & \underset{B}{G}
\end{tikzcd}
$$

$$
B \xleftarrow{\beta_G=(\varpi_G)_0} |G| = (\square G)_0 \xrightarrow{\alpha_G=(\overline{\varpi}_G)_0} B
$$

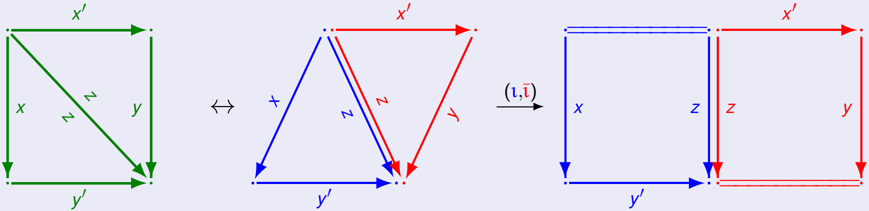
Nouvel **exemple** (très symétrique ici) d'**actions principales conjuguées** (de G sur $|G|$ au-dessus de B) : **translations** à gauche et à droite ; ces actions sont décrites par les « **acteurs** » δ_G et $\overline{\delta}_G$.

Décomposition de la loi horizontale de $\square\, G$

Double factorisation horizontale des flèches de $\square\, G$: $\quad \square = \Delta\nabla = \nabla\Delta$

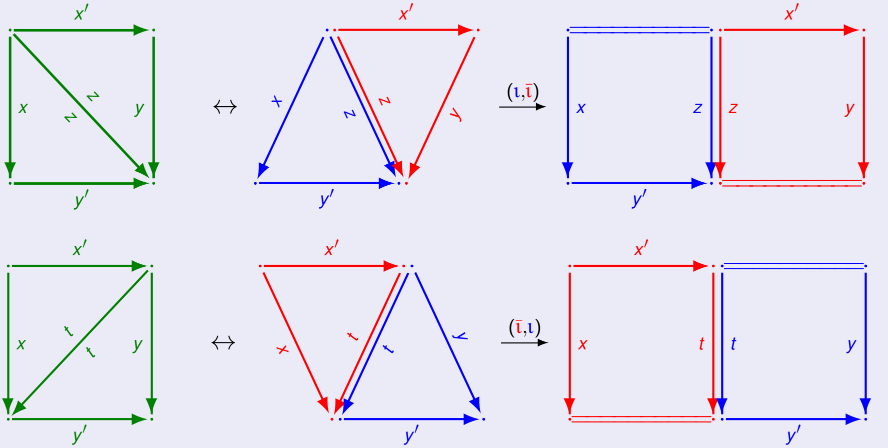
Décomposition de la loi horizontale de $\square\, G$

Double factorisation horizontale des flèches de $\square\, G$: $\square = \Delta\nabla = \nabla\Delta$



Décomposition de la loi horizontale de $\square\, G$

Double factorisation horizontale des flèches de $\square\, G$: $\square = \Delta\nabla = \nabla\Delta$



s-morphismes très particuliers mais importants

Deux cas (très) particuliers de s-morphismes de **D**-groupoïdes

$f : \underset{E}{H} \longrightarrow \underset{B}{G}$ $\quad f_0 = p : E \longrightarrow B$ $\quad N = \ker f = f^{-1}(\overset{0}{B}) \rightarrowtail \underset{E}{H}$

s-morphismes très particuliers mais importants

Deux cas (très) particuliers de s-morphismes de **D**-groupoïdes

$f : \underset{E}{H} \longrightarrow\!\triangleright \underset{B}{G} \qquad f_0 = p : E \longrightarrow\!\triangleright B \qquad N = \ker f = f^{-1}(\overset{0}{B}) \triangleright\!\!\longrightarrow \underset{E}{H}$

- les $\boxed{s\text{-équivalences}}$ $(\sim)$ (ou s-inducteurs, ou extenseurs ppaux)

$$\begin{tikzcd}
\underset{E}{H} \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_H"] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & \underset{B}{G} \arrow[d, "\tau_G"] \\
\overset{\times}{E} \arrow[r, "\overset{\times}{p}", "\sim"'] & \overset{\times}{B}
\end{tikzcd}$$

s-morphismes très particuliers mais importants

Deux cas (très) particuliers de s-morphismes de **D**-groupoïdes

$f : \underset{E}{H} \longrightarrow \underset{B}{G} \qquad f_0 = p : E \longrightarrow B \qquad N = \ker f = f^{-1}(\overset{0}{B}) \rightarrowtail \underset{E}{H}$

- les $\boxed{s\text{-équivalences}}$ ($\sim$) (ou s-inducteurs, ou extenseurs ppaux)

$$\begin{tikzcd} \underset{E}{H} \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_H"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & \underset{B}{G} \arrow[d, "\tau_G"] \\ \overset{\times}{E} \arrow[r, "\overset{\times}{p}", "\sim"'] & \overset{\times}{B} \end{tikzcd}$$

- les $\boxed{s\text{-acteurs}}$ (@) (décrivent les lois d'action)

$$\begin{tikzcd} \underset{E}{H} \arrow[r, "f", "@"'] \arrow[d, dotted, "\alpha_H"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{A}(f)"] & \underset{B}{G} \arrow[d, dotted, "\alpha_G"] \\ E \arrow[r, dotted, "p", "@"'] & B \end{tikzcd}$$

s-équivalences ou s-inducteurs

$$
\begin{tikzcd}
\underset{E}{H} \arrow[rr, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_H"] \arrow[drr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & & \underset{B}{G} \arrow[d, "\tau_G"'] \\
\overset{\times}{E} \arrow[rr, "\overset{\times}{p}", "\sim"'] & & \overset{\times}{B}
\end{tikzcd}
$$

H induit par G le long de $p = f_0$

s-équivalences ou s-inducteurs

$$
\begin{tikzcd}
\underset{E}{H} \arrow[rr, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_H"'] \arrow[drr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & & \underset{B}{G} \arrow[d, "\tau_G"] \\
\overset{\times}{E} \arrow[rr, "\overset{\times}{p}", "\sim"'] & & \overset{\times}{B}
\end{tikzcd}
$$

H induit par G le long de $p = f_0$

noyau de f

$\longrightarrow$

$$
\begin{tikzcd}
\underset{E}{R} \arrow[rr, "r", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\mathbf{K}(f)"] & & \overset{0}{B} \arrow[d, "\omega_G"] \\
\underset{E}{H} \arrow[rr, "f", "\sim"'] & & \underset{B}{G}
\end{tikzcd}
$$

$R = \ker f$ est principal

s-équivalences ou s-inducteurs

$$
\begin{tikzcd}
\underset{E}{H} \arrow[rr, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_H"] \arrow[drr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & & \underset{B}{G} \arrow[d, "\tau_G"'] \\
\overset{\times}{E} \arrow[rr, "\overset{\times}{p}", "\sim"'] & & \overset{\times}{B}
\end{tikzcd}
$$

H induit par G le long de $p = f_0$

noyau de f $\longrightarrow$

$$
\begin{tikzcd}
\underset{E}{R} \arrow[rr, "r", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\mathbf{K}(f)"] & & \overset{0}{B} \arrow[d, "\omega_G"] \\
\underset{E}{H} \arrow[rr, "f", "\sim"'] & & \underset{B}{G}
\end{tikzcd}
$$

$R = \ker f$ est principal

- G est un (cas très particulier de) quotient **bilatère**, noté $G = H /\!/ R$,
  formé des classes bilatères $R\,z\,R, \quad z \in H$.
- f est aussi un cas très particulier d'équivalence de **D**-groupoïdes (s-équivalence).

s-équivalences ou s-inducteurs

$$
\begin{tikzcd}
\underset{E}{H} \arrow[r, "f"', "\sim"] \arrow[d, "\tau_H"] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & \underset{B}{G} \arrow[d, "\tau_G"'] \\
\overset{\times}{E} \arrow[r, "\overset{\times}{p}", "\sim"'] & \overset{\times}{B}
\end{tikzcd}
$$

H induit par G le long de $p = f_0$

noyau de f

$\longrightarrow$

$\longleftarrow$

réciproque
C.R.A.S.
1986

$$
\begin{tikzcd}
\underset{E}{R} \arrow[r, "r", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{K}(f)"] & \overset{0}{B} \arrow[d, "\omega_G"] \\
\underset{E}{H} \arrow[r, "f", "\sim"'] & \underset{B}{G}
\end{tikzcd}
$$

$R = \ker f$ est principal

- G est un (cas très particulier de) quotient **bilatère**, noté $G = H /\!/ R$, formé des classes bilatères $R\,z\,R$, $\quad z \in H$.
- f est aussi un cas très particulier d'équivalence de **D**-groupoïdes (s-équivalence).

D-équivalences générales

On « internalise » la déf. algébrique :

- pleinement fidèle
- essentiellement surjective

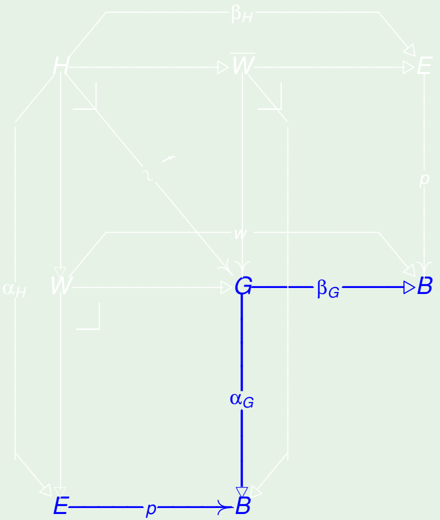
flèche p transversale à un **D**-groupoïde G :

déf. : $p \pitchfork G \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} w \in \mathbf{D}_s$; (J. P. 1989)

alors H est défini : **D**-groupoïde induit ;

$f : H \underset{\sim}{\rightarrowtail} G$ est une **D**-équivalence

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_H"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & G \arrow[d, "\tau_G"] \\ E \arrow[r, "p", "\sim"'] & B \end{tikzcd}$$



D-équivalences générales

On « internalise » la déf. algébrique :

- pleinement fidèle
- essentiellement surjective

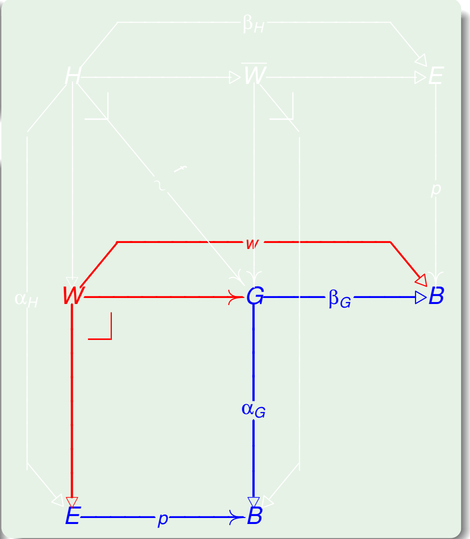
flèche p transversale à un **D**-groupoïde G :

déf. : $p \pitchfork G \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} w \in \mathbf{D}_s$; (J. P. 1989)

alors H est défini : **D**-groupoïde induit ;

$f : H \underset{\sim}{\rightarrowtail} G$ est une **D**-équivalence

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_H"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & G \arrow[d, "\tau_G"] \\ E \arrow[r, "p", "\sim"'] & B \end{tikzcd}$$



D-équivalences générales

On « internalise » la déf. algébrique :

- pleinement fidèle
- essentiellement surjective

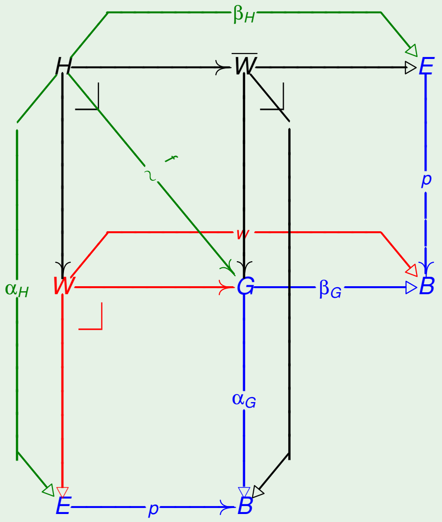
flèche p transversale à un **D**-groupoïde G :

déf. : $p \pitchfork G \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} w \in \mathbf{D}_s$; (J. P. 1989)

alors H est défini : **D**-groupoïde induit ;

$f : H \underset{\sim}{\rightarrowtail} G$ est une **D**-équivalence.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_H"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{T}(f)"] & G \arrow[d, "\tau_G"] \\
\times E \arrow[r, "\overset{\times}{p}", "\sim"'] & \times B
\end{tikzcd}$$



Lois d'action et acteurs (1)

$$\begin{tikzcd} \underset{E}{H} \arrow[d, "f"'] \\ \underset{B}{G} \end{tikzcd}$$

Une *s*-action γ d'un group(oïd)e $\underset{B}{G}$ sur $\left(\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd}\right)$ est décrite par

- le « groupoïde d'action » $\underset{E}{H}$, porté par $H = G \underset{B}{\times} E$
- sa projection f sur G, un morphisme de groupoïdes

La propriété caractéristique du morphisme f est d'être un « acteur » $\longrightarrow$:

Lois d'action et acteurs (1)

$$\begin{tikzcd} \underset{E}{H} \arrow[d, "f"'] \\ \underset{B}{G} \end{tikzcd}$$

Une *s*-action γ d'un group(oïd)e $\underset{B}{G}$ sur $\begin{pmatrix} E \\ \Big\downarrow p \\ B \end{pmatrix}$ est décrite par

- le « groupoïde d'action » $\underset{E}{H}$, porté par $H = G \underset{B}{\times} E$
- sa projection f sur G, un morphisme de groupoïdes

La propriété caractéristique du morphisme f est d'être un « acteur » $\longrightarrow$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] E & G \underset{B}{\times} E \approx \underset{E}{H} \arrow[l, dotted, "\gamma\approx\beta_H"'] \arrow[rr, "\mathrm{Pr}_1 \approx f"] \arrow[d, dotted, "\mathrm{Pr}_2 \approx \alpha_H"'] \arrow[drr, phantom, "\mathbf{A}(f)"] & & \underset{B}{G} \arrow[d, dotted, "\alpha_G"] \\ & E \arrow[rr, dotted, "p=f_0"] & & B \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\gamma \approx \beta_H}$$

Lois d'action et acteurs (2)

$$
\begin{tikzcd}
\underset{E}{H} \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "f\ @"'] & & \underset{E}{\boldsymbol{K}} \arrow[ddll, "u\ \sim"] \\
& & \\
\underset{B}{G} & &
\end{tikzcd}
$$

Le groupoïde d'action H ($\approx G \underset{B}{\times} E$) est plongé, par

$$i : (g, x) \mapsto (g ; (g.x, x))$$

dans le groupoïde $K = G \times \overset{\times}{\underset{\underset{B}{\times}}{E}}$ induit

par G le long de $f_0 = p : E \longrightarrow B$

d'où la factorisation de f ci-contre :

$$f = u \circ i$$

La propriété caractéristique du morphisme f est d'être un « acteur » $\longrightarrow\!@\!\!\longrightarrow$:

$$
\begin{tikzcd}
E & G \underset{B}{\times} E \approx \underset{E}{H} \arrow[l, dotted, "\gamma \approx \beta_H"'] \arrow[rr, "\mathrm{Pr}_1 \approx f\ @"] \arrow[d, dotted, "\mathrm{Pr}_2 \approx \alpha_H"'] \arrow[drr, phantom, "\mathbf{A}(f)"] & & \underset{B}{G} \arrow[d, dotted, "\alpha_G"] \\
\boxed{\gamma \approx \beta_H} & E \arrow[rr, dotted, "p = f_0"] & & B
\end{tikzcd}
$$

Lois d'action et acteurs : remarque

Mise en garde

- Les lois d'action / acteurs (différentiables) [où $\underset{B}{G}$ est ou non fixé],
  sont les objets de deux catégories

  $$\mathbf{@D} \;/\; \mathbf{@GD} \text{ [ou } \mathbf{@D}_G \;/\; \mathbf{@GD}_G \text{ si } G = \underset{B}{G} \text{ est fixé : } G\text{-actions],}$$

  dont les flèches sont respectivement :
  les morphismes équivariants / les carrés [triangles] commutatifs de $\square$ **GD** dont les bords verticaux sont des s-acteurs.

Lois d'action et acteurs : remarque

Mise en garde

- Les lois d'action / acteurs (différentiables) [où $\underset{B}{G}$ est ou non fixé],
  sont les objets de deux catégories
  $$\mathbf{@D} \ / \ \mathbf{@GD} \ [\text{ou } \mathbf{@D}_G \ / \ \mathbf{@GD}_G \text{ si } G = \underset{B}{G} \text{ est fixé : } G\text{-actions}],$$
  dont les flèches sont respectivement :
  les morphismes équivariants / les carrés [triangles] commutatifs de $\square$ **GD**
  dont les bords verticaux sont des *s*-acteurs.
- La correspondance précédente entre : lois d'action / acteurs
  détermine une **équivalence de catégories** entre ces deux catégories ;

Lois d'action et acteurs : remarque

Mise en garde

- Les lois d'action / acteurs (différentiables) [où $\underset{B}{G}$ est ou non fixé],
  sont les objets de deux catégories
  $$\mathbf{@D} \ / \ \mathbf{@GD} \ [\text{ou } \mathbf{@D}_G \ / \ \mathbf{@GD}_G \text{ si } G = \underset{B}{G} \text{ est fixé : } G\text{-actions}],$$
  dont les flèches sont respectivement :
  les morphismes équivariants / les carrés [triangles] commutatifs de $\square$ **GD**
  dont les bords verticaux sont des *s*-acteurs.
- La correspondance précédente entre : lois d'action / acteurs
  détermine une **équivalence de catégories** entre ces deux catégories ;
- mais **il n'en est plus de même** de la correspondance entre

  lois d'action / groupoïdes d'action !

Lois d'action et acteurs : remarque

Mise en garde

- Les lois d'action / acteurs (différentiables) [où $\underset{B}{G}$ est ou non fixé],
  sont les objets de deux catégories
  $$\textbf{@D} \ / \ \textbf{@GD} \ [\text{ou } \textbf{@D}_G \ / \ \textbf{@GD}_G \text{ si } G = \underset{B}{G} \text{ est fixé : } G\text{-actions}],$$
  dont les flèches sont respectivement :
  les morphismes équivariants / les carrés [triangles] commutatifs de $\square$ **GD**
  dont les bords verticaux sont des s-acteurs.
- La correspondance précédente entre : lois d'action / acteurs
  détermine une **équivalence de catégories** entre ces deux catégories ;
- mais **il n'en est plus de même** de la correspondance entre
  lois d'action / groupoïdes d'action !
- Une remarque analogue vaut aussi pour la correspondance entre
  fibré principal (classique, à groupe structural) / groupoïde structural ! !

Actions homogènes et actions principales

Propriétés de transitivité d'une loi d'action

Elles sont reflétées (via l'acteur $f : H \multimap\!\!\!\rightarrow G$, $\quad f_0 = p : E \longrightarrow B$)
par les propriétés de transitivité du groupoïde d'action H,
c'est-à-dire du transiteur (ancre) $\tau_H : H \longrightarrow \overset{\times}{E}$

Actions homogènes et actions principales

Propriétés de transitivité d'une loi d'action

Elles sont reflétées (via l'acteur $f : H \multimap G$, $\quad f_0 = p : E \longrightarrow B$)
par les propriétés de transitivité du groupoïde d'action H,
c'est-à-dire du transiteur (ancre) $\tau_H : H \longrightarrow \overset{\times}{E}$

Deux cas importants

- H $\boxed{s\text{-transitif}}$: E est un $\boxed{G\text{-espace homogène}}$ (action transitive, non traitée ici)
- H $\boxed{\text{principal}}$ (on écrira $H = R$, $E = P$) : f détermine une $\boxed{G\text{-fibration principale}}$ (action libre algébriquement) $p' : P \longrightarrow B' = P/G$ (**variété orbitale**).

Actions principales (1)

$$\begin{array}{ccc} \underset{P}{R} & & \\ g \Big\downarrow & & \underset{P}{K} \\ \underset{B}{G} & & \end{array}$$

$$[P/R' =]\ B \overset{p=g_0}{\vartriangleleft\cdots\cdots} \boldsymbol{P} \overset{p'=g'_0}{\cdots\cdots\vartriangleright} B'\ [= R\backslash P]$$

cas classique

- G est le groupe structural de $\boldsymbol{P}$
- $B = \bullet$
- la base du fibré principal est B'
- $\boldsymbol{K} = G \times (P \times P)$ est trivial
- G' est le groupoïde structural

1. l'acteur principal g décrit une action principale de G sur $(B \vartriangleleft \cdots\cdots \boldsymbol{P} : p)$ $(p = g_0)$
2. l'équiv. orbitale est régulière de graphe R et définit le fibré ppal $\boldsymbol{P} \cdot\cdot_{p'} \vartriangleright B'$
3. on écrit la factorisation canonique de g
4. on complète alors le diagramme par : $R' = \mathrm{Ker}(u)$, $G' = \boldsymbol{K}/\!/R$
5. g' est un acteur principal, dit conjugué de g
6. le diagramme est symétrique, et réversible (à iso près)

Actions principales (2)

$$\begin{array}{c} \underset{P}{R} \\ \Big\downarrow g \\ \underset{B}{G} \end{array} \qquad \qquad \underset{P}{\boldsymbol{K}}$$

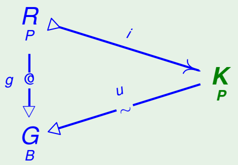
$$[P/R' =]\, B \overset{p}{\lhd\cdots\cdots} \boldsymbol{P} \overset{p'}{\cdots\cdots\rhd} B' \,[= P/R]$$

cas classique

- G est le groupe structural de $\boldsymbol{P}$
- $B = \bullet$
- la base du fibré ppal (l.t.) est B'
- $\boldsymbol{K} = G \times (P \times P)$ est trivial
- G' est le groupoïde structural

1. l'acteur principal g décrit une action principale de G sur $(B \lhd \cdots\cdots \boldsymbol{P} : p)$
2. l'équiv. orbitale est régulière de graphe R et définit le fibré ppal $p' : \boldsymbol{P} \cdots\cdots\rhd B'$
3. on écrit la factorisation canonique de g
4. on complète alors le diagramme par : $R' = \mathrm{Ker}\,(u)$, $G' = \boldsymbol{K}/\!/R$
5. g' est un acteur principal, dit conjugué de g
6. le diagramme est symétrique, et réversible (à iso près)

Actions principales (3)



$[P/R' =]\; B \overset{p}{\triangleleft\cdots\cdots} \boldsymbol{P} \overset{p'}{\cdots\cdots\triangleright} B'\; [= P/R]$

cas classique

- G est le groupe structural de $\boldsymbol{P}$
- $B = \bullet$
- la base du fibré ppal (l.t.) est B'
- $\boldsymbol{K} = G \times P^{\times}$ est trivialisé !
- G' est le groupoïde structural

1. l'acteur principal g décrit une action principale de G sur $(B \triangleleft \cdots\cdots \boldsymbol{P} : p)$
2. l'équiv. orbitale est régulière de graphe R et définit le fibré ppal $p' : \boldsymbol{P} \cdots\cdots \triangleright B'$
3. on écrit la factorisation canonique de g : R est ici distingué dans K !
4. on complète le diagramme par : $R' = \mathrm{Ker}(u)$, $G' = \boldsymbol{K}/\!/R$
5. g' est un acteur principal, dit conjugué de g
6. le diagramme est symétrique, et réversible (à iso près)

Through the Looking-glass ...

$$
\begin{tikzcd}
\underset{P}{R} \arrow[rrd, hook, "i"] \arrow[dd, "g"'] & & & & \underset{P}{R'} \arrow[lld, hook', "i'"'] \arrow[dd, "g'"] \\
& & \underset{P}{K} \arrow[lld, "u"', "\sim"] \arrow[rrd, "u'", "\sim"'] & & \\
\underset{B}{G} & & & & \underset{B'}{G'}
\end{tikzcd}
$$

$$[P/R' =]\, B \xleftarrow{p} P \xrightarrow{p'} B' \,[= P/R]$$

cas classique

- G est le groupe structural de P
- $B = \bullet \qquad R' = P^{\times}$ (banal)
- la base du fibré ppal (l.t.) est B'
- $K = G \times P^{\times}$ est trivialisé !
- G' est le groupoïde structural (t.l.t.)

1. l'acteur principal g décrit une action principale de G sur $(B \triangleleft\cdots\cdots P : p)$
2. l'équiv. orbitale est régulière de graphe R et définit le fibré ppal p' : $P \cdots\cdots\triangleright B'$
3. on écrit la factorisation canonique de g : R est ici distingué dans K !
4. on complète alors le diagramme par : $R' = \mathrm{Ker}(u)$, $G' = K/\!/R$
5. g' est un acteur principal, dit conjugué de g ; $G' = R'/$act. diag. de$G$
6. le diagramme est symétrique, et réversible (à iso près)

... and what Alice found there

$$
\begin{tikzcd}
R_P \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "g"'] & & R'_P \arrow[dl, "i'"'] \arrow[dd, "g'"] \\
& \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{P}} \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "u'", "\sim"'] & \\
G_B & & G'_{B'}
\end{tikzcd}
$$

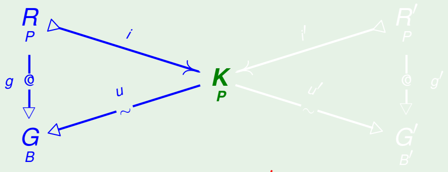
$$[P/R' =]\, B \xleftarrow{p} \boldsymbol{P} \xrightarrow{p'} B' \,[= P/R]$$

cas classique

- G est le groupe structural de $\boldsymbol{P}$
- $B = \bullet \qquad R' = P^{\times}$ (banal)
- la base du fibré ppal (l.t.) est B'
- $\boldsymbol{K} = G \times P^{\times}$ est trivialisé !
- G' est le groupoïde structural (t.l.t.)

1. l'acteur principal g décrit une action principale de G sur $(B \triangleleft \cdots\cdot \boldsymbol{P} : p)$
2. l'équiv. orbitale est régulière de graphe R et définit le fibré ppal $p' : \boldsymbol{P} \cdots\cdot\triangleright B'$
3. on écrit la factorisation canonique de g : R est ici distingué dans K !
4. on complète alors le diagramme par : $R' = \mathrm{Ker}(u)$, $G' = \boldsymbol{K}/\!/R$
5. g' est un acteur principal, dit conjugué de g ; $G' = R'/$action diag. de G ($p' = g'_0$)
6. le diagramme est symétrique, et réversible (à iso près)

Retour en arrière



$[P/R' =]\, B \overset{p}{\triangleleft\cdots\cdots} \boldsymbol{P} \overset{p'}{\cdots\cdots\triangleright} B' \,[= P/R]$

cas classique

- G est le groupe structural de $\boldsymbol{P}$
- $B = \bullet$ $\quad R' = P^{\times}$ (banal)
- la base du fibré ppal (l.t.) est B'
- $\boldsymbol{K} = G \times P^{\times}$ est trivialisé !
- G' est le groupoïde structural (t.l.t.)

1. l'acteur principal g décrit une action principale de G sur $(B \triangleleft \cdots\cdots \boldsymbol{P} : p)$
2. l'équiv. orbitale est régulière de graphe R et définit le fibré ppal $p' : \boldsymbol{P} \cdots\cdots\triangleright B'$
3. on écrit la factorisation canonique de g : R est ici distingué dans K !
4. on complète alors le diagramme par : $R' = \mathrm{Ker}(u)$, $G' = \boldsymbol{K}/\!/R$
5. g' est un acteur principal, dit conjugué de g ; $G' = R'/$action diag. de G ($p' = g'_0$)
6. le diagramme est symétrique, et réversible (à iso près)

Diagramme de conjugaison

$$\begin{tikzcd} R_P \arrow[dr, hook, "i"] \arrow[dd, "g"'] & & R'_P \arrow[dl, hook', "i'"'] \arrow[dd, "g'"] \\ & K_P \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "u'", "\sim"'] & \\ G_B & & G'_{B'} \end{tikzcd}$$

$$[P/R' =]\ B \xleftarrow{p} P \xrightarrow{p'} B'\ [= P/R]$$

cas classique

- G est le groupe structural de P
- $B = \bullet$ $\quad R' = P^{\times}$ (banal)
- la base du fibré ppal (l.t.) est B'
- $K = G \times P^{\times}$ est trivialisé !
- G' est le groupoïde structural (t.l.t.)

1. l'acteur principal g décrit une action principale de G sur $(B \triangleleft \cdots\cdots P : p)$
2. l'équiv. orbitale est régulière de graphe R et définit le fibré ppal $p' : P \cdots\cdots \triangleright B'$
3. on écrit la factorisation canonique de g : R est ici distingué dans K !
4. on complète alors le diagramme par : $R' = \mathrm{Ker}(u)$, $G' = K /\!/ R$
5. g' est un acteur principal, dit conjugué de g ; $G' = R'/$action diag. de G ($p' = g'_0$)
6. le diagramme est symétrique, et réversible (à iso unique près) !

Lien avec les équivalences de Morita et les fractions

$$
\begin{tikzcd}
\underset{P}{R} \arrow[ddd, "g"', "@"] \arrow[drr, "i"] & & & & \underset{P}{R'} \arrow[dll, "i'"'] \arrow[ddd, "g'", "@"'] \\
& & \underset{P}{K} \arrow[ddll, "u", "\sim"'] \arrow[ddrr, "u'"', "\sim"] & & \\
& & & & \\
\underset{B}{G} \arrow[rrrr, dashed, "u'u^{-1}", "\approx"'] & & & & \underset{B'}{G'} \\
B & & P \arrow[ll, dotted, "p"'] \arrow[rr, dotted, "p'"] & & B'
\end{tikzcd}
$$

1. Le diagr. du papillon décrit une équiv. de Morita entre G et G', via (g, g') (bi-act.).
cf. (Skandalis-)Haefliger et aussi W. T. van Est (Ast. 116, 1984, feuill., Tlse 1982)

Lien avec les équivalences de Morita et les fractions

$$
\begin{tikzcd}
R_{P} \arrow[dd, "g"', "@"] & & & & R'_{P} \arrow[dd, "g'", "@"'] \\
& & K_{P} \arrow[ull, "i"'] \arrow[dll, "u", "\sim"'] \arrow[urr, "i'"] \arrow[drr, "u'", "\sim"'] & & \\
G_{B} \arrow[rr, dashed, "u'u^{-1}"] & & \approx & & G'_{B'} \arrow[ll, phantom] \\
B & & P \arrow[ll, dotted, "p"'] \arrow[rr, dotted, "p'"] & & B'
\end{tikzcd}
$$

1. Le diagr. du papillon décrit une équiv. de Morita entre G et G', via (g, g') (bi-act.).
cf. (Skandalis-)Haefliger et aussi W. T. van Est (Ast. 116, 1984, feuill., Tlse 1982)
2. Le couple de s-équivalences (u, u') s'interprète aussi comme « représentant irréductible » d'une flèche (ici inversible) $u'u^{-1}$
de la catégorie de fractions (Gabriel-Zisman 1965) $\widetilde{\mathbf{GD}}$: $(\sim) \rightsquigarrow (\approx)$,
cf. J. P. 1989 et arXiv 2008 (+ commentaires), J. Bénabou 1973 (distributeurs)

Un dessin animé pour la récré !

De la chenille
au papillon

Métamorphoses d'un papillon (1)

$$\begin{tikzcd}
\underset{P}{R} \arrow[dd, "g"', "@"] & & & & \underset{P}{R'} \arrow[dd, "g'", "@"'] \\
& & \underset{P}{K} \arrow[ull, hook', "i"'] \arrow[urr, hook, "i'"] \arrow[dll, "u", "\sim"'] \arrow[drr, "u'"', "\sim"] & & \\
\underset{B}{G} & B & P \arrow[l, dotted, "p=u_0"] \arrow[r, dotted, "p'=u'_0"'] & B' & \underset{B'}{G'}
\end{tikzcd}$$

Le diagramme est déterminé (à iso unique près) par chacune des données suivantes :

- le s-acteur ppal g
- son conjugué g'
- le couple « transverse » (i, i') de ss-grpdes ppaux de $\boldsymbol{K}$
- le couple « cotransverse » (u, u') de s-équivalences

Métamorphoses d'un papillon (2)

$$\begin{tikzcd}
\underset{P}{R} \arrow[dd, "g"', "@"] & & \underset{P}{R'} \arrow[dd, "g'", "@"'] \\
& \underset{P}{K} \arrow[ul, tail, "i"'] \arrow[ur, tail, "i'"] \arrow[dl, "u", "\sim"'] \arrow[dr, "u'"', "\sim"] & \\
\underset{B}{G} & & \underset{B'}{G'}
\end{tikzcd}$$

Le diagramme est déterminé (à iso unique près) par chacune des données suivantes :

- le s-acteur ppal g
- son conjugué g'
- le couple « transverse » (i, i') de ss-grpdes ppaux de K
- le couple « cotransverse » (u, u') de s-équivalences

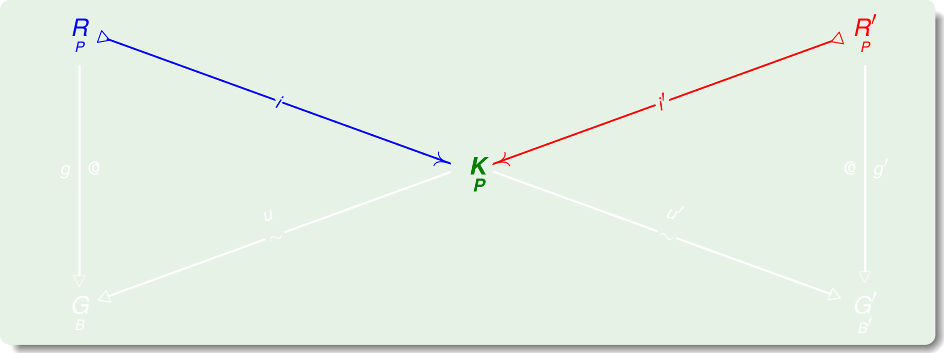
Métamorphoses d'un papillon (3)

$$\begin{tikzcd}
\underset{P}{R} \arrow[dd, "g"', "@"] & & & & \underset{P}{R'} \arrow[dd, "g'", "@"'] \\
& & \underset{P}{\boldsymbol{K}} \arrow[ull, "i"] \arrow[urr, "i'"'] \arrow[dll, "u", "\sim"'] \arrow[drr, "u'"', "\sim"] & & \\
\underset{B}{G} & & & & \underset{B'}{G'}
\end{tikzcd}$$

Le diagramme est déterminé (à iso unique près) par chacune des données suivantes :

- le *s*-acteur ppal g
- son conjugué g'
- le couple « transverse » (i, i') de ss-grpdes ppaux de $\boldsymbol{K}$
- le couple « cotransverse » (u, u') de *s*-équivalences

Métamorphoses d'un papillon (4)



Le diagramme est déterminé (à iso unique près) par chacune des données suivantes :

- le s-acteur ppal g
- son conjugué g'
- le couple « transverse » (R, R') de ss-grpdes ppaux de K
- le couple « cotransverse » (u, u') de s-équivalences

Métamorphoses d'un papillon (5)

$$
\begin{tikzcd}
\underset{P}{R} \arrow[dd, "g"'] & & & & \underset{P}{R'} \arrow[dd, "g'"] \\
& & \underset{P}{K} \arrow[ull, hook, "i"'] \arrow[urr, hook, "i'"] \arrow[dll, "u"', "\sim"] \arrow[drr, "u'", "\sim"'] & & \\
\underset{B}{G} & B & P \arrow[l, dotted, "p=u_0"'] \arrow[r, dotted, "p'=u'_0"] & B' & \underset{B'}{G'}
\end{tikzcd}
$$

Le diagramme est déterminé (à iso unique près) par chacune des données suivantes :

- le s-acteur ppal g
- son conjugué g'
- le couple « transverse » (R, R') de ss-grpdes ppaux de K
- le couple « co-transverse » (u, u') de s-équivalences

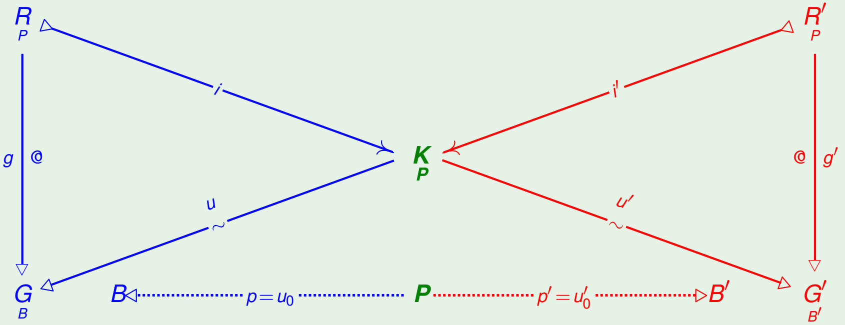
Métamorphoses d'un papillon (6)

$$
\begin{tikzcd}
\underset{P}{R} \arrow[dd, "g"', "@"] & & & & \underset{P}{R'} \arrow[dd, "g'", "@"'] \\
& & \underset{P}{K} \arrow[ull, tail, "i"'] \arrow[urr, tail, "i'"] \arrow[dll, "u"', "\sim"] \arrow[drr, "u'", "\sim"'] & & \\
\underset{B}{G} & B & P \arrow[l, dotted, "p = u_0"] \arrow[r, dotted, "p' = u'_0"'] & B' & \underset{B'}{G'}
\end{tikzcd}
$$

Le diagramme est déterminé (à iso unique près) par chacune des données suivantes :

- le s-acteur ppal g
- son conjugué g'
- le couple « transverse » (R, R') de ss-grpdes ppaux de K
- le couple « co-transverse » (u, u') de s-équivalences

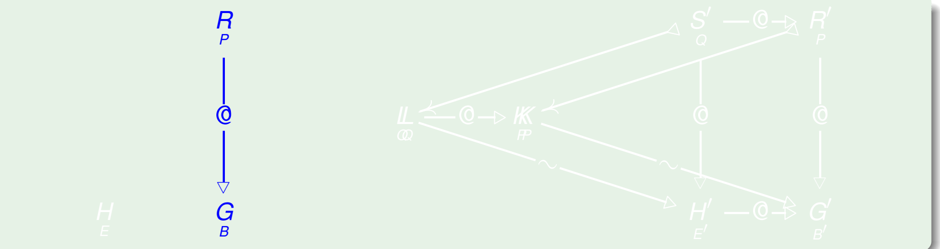
Métamorphoses d'un papillon (7)



Il y a des isomorphismes entre les fibres :

- de α_G, de α_R, et de p' ; les fibres de p' sont les orbites de l'action de G ;
- de $\alpha_{G'}$, de $\alpha_{R'}$, et de p ; les fibres de p sont les orbites de l'action de G'.

fibrés associés à un fibré principal (0)



1. une action principale de G sur P
2. une action de G sur E
3. produit fibré des deux acteurs
4. on conjugue fonctoriellement
5. diagramme symétrique et réversible

cas classique

- G groupe structural de P ($B = \bullet$)
- $E = F$ fibre-type, où G agit
- E est le fibré associé
- le grpde structural G' agit sur E'

fibrés associés à un fibré principal (1)

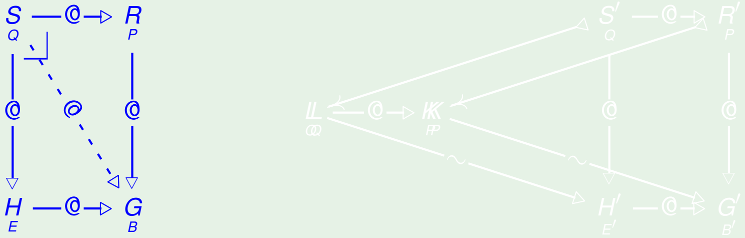
$$\begin{tikzcd}
 & \underset{P}{R} \arrow[d, "@"] & & & \underset{Q}{S'} \arrow[r, "@"] \arrow[dd, "@"] & \underset{P}{R'} \arrow[dd, "@"] \\
 & & \underset{\mathbb{QQ}}{\mathbb{L}} \arrow[r, "@"] \arrow[urr] \arrow[drr, "\sim"] & \underset{\mathbb{P}P}{\mathbb{K}} \arrow[urr] \arrow[drr, "\sim"] & & \\
\underset{E}{H} \arrow[r, "@"] & \underset{B}{G} & & & \underset{E'}{H'} \arrow[r, "@"] & \underset{B'}{G'}
\end{tikzcd}$$

1. une action principale de G sur P
2. une action de G sur E ($E \longrightarrow B$)
3. produit fibré des deux acteurs
4. on conjugue fonctoriellement
5. diagramme symétrique et réversible !

cas classique

- G groupe structural de P ($B = \bullet$)
- $E = F$ fibre-type, où G agit
- E' est le fibré associé
- le grpde structural G' agit sur E'

fibrés associés (2)

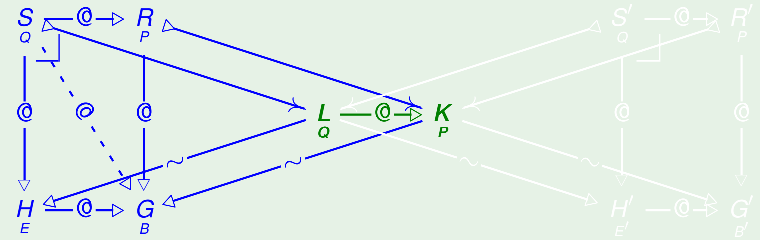


1. une action principale de G sur P
2. une action de G sur E
3. produit fibré : S est principal !
4. on conjugue fonctoriellement
5. diagramme symétrique et réversible !

cas classique

- G groupe structural de P ($B = \bullet$)
- $E = F$ fibre-type, où G agit
- E' est le fibré associé
- le grpde structural G' agit sur E'

fibrés associés (3)

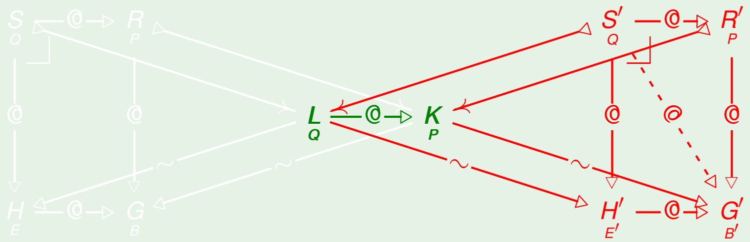


1. une action principale de G sur P
2. une action de G sur E
3. produit fibré : S est principal !
4. on conjugue fonctoriellement !
5. diagramme symétrique et réversible !

cas classique

- G groupe structural de P ($B = \bullet$)
- $E = F$ fibre-type, où G agit
- r
- le grpde structural G' agit sur E'

The other side of the looking-glass

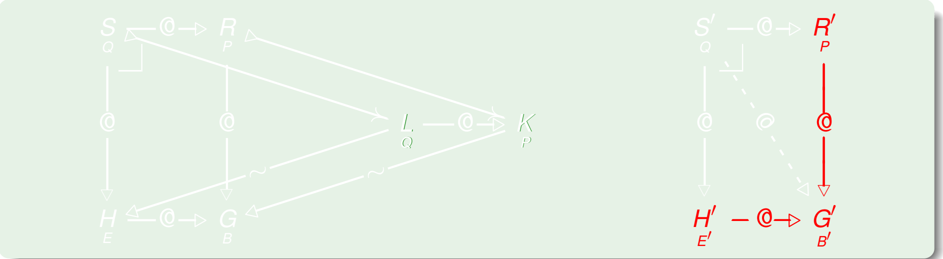


1. une action principale de G sur P
2. une action de G sur E
3. produit fibré : S est principal !
4. on conjugue fonctoriellement !
5. diagramme symétrique et réversible !

cas classique

- G groupe structural de P ($B = \bullet$)
- $E = F$ fibre-type, où G agit
- E' est le fibré associé
- le grpde structural G' agit sur E'

Tweedledum (alias Dupont) ...

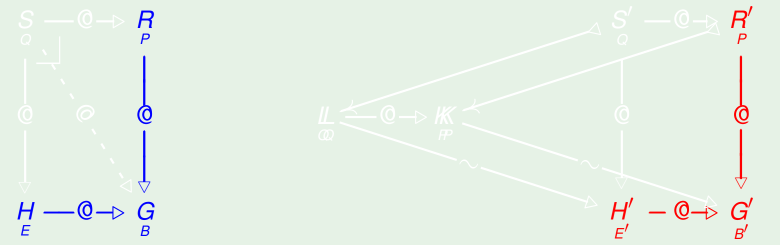


1. une action principale de G sur P
2. une action de G sur E
3. produit fibré : S est principal !
4. on conjugue fonctoriellement !
5. diagramme symétrique et réversible !

cas classique

- G groupe structural de P ($B = \bullet$)
- $E = F$ fibre-type, où G agit
- E' est le fibré associé
- le grpde structural G' agit sur E'

... and Tweedledee (Dupond)

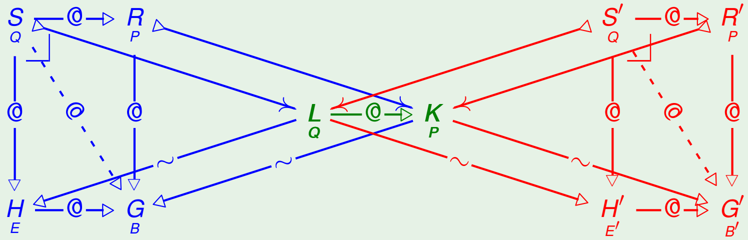


1. une action principale de G sur P
2. une action de G sur E
3. produit fibré : S est principal !
4. on conjugue fonctoriellement !
5. diagramme symétrique et réversible !

cas classique

- G groupe structural de P $(B = \bullet)$
- $E = F$ fibre-type, où G agit
- E' est le fibré associé
- le grpde structural G' agit sur E'

Back to the Looking-glass



1. une action principale de G sur P
2. une action de G sur E
3. produit fibré : S est principal !
4. on conjugue fonctoriellement !
5. diagramme symétrique et réversible !

cas classique

- G groupe structural de P ($B = \bullet$)
- $E = F$ fibre-type, où G agit
- E' est le fibré associé
- le grpde structural G' agit sur E'

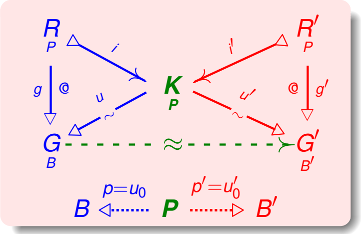
retour sur le papillon canonique et la structure du coeur (0)

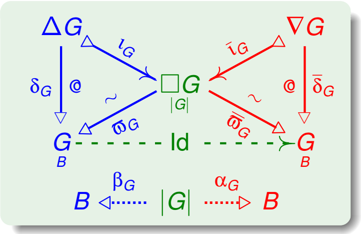
Les trois structures de groupoïde sur le coeur d'un papillon

- De façon générale, les flèches du groupoïde coeur $\underset{P}{\boldsymbol{K}}$ d'un diagramme de conjugaison se factorisent selon les deux sous-groupoïdes **principaux** R et R', dont chacun opère sur l'autre (version symétrique d'un produit semi-direct) ;
- Cela détermine sur $|\boldsymbol{K}|$ une **structure très riche** de « groupoïde bi-principal » : c'est une structure de **groupoïde double** $\left(\underset{R'}{K}, \underset{R}{K}\right)$ dont les lois horizontale et verticale sont toutes deux **principales**.
- De plus les flèches α, β, δ de chacune de ces deux lois de groupoïde sont des *s*-**acteurs** relativement à l'autre loi (**groupoïde dans la catégorie @GD**). Chaque flèche double est uniquement déterminée par ses deux sources horizontale et verticale.
- La structure double $\left(\underset{R'}{K}, \underset{R}{K}\right)$ détermine la loi « oblique » ou « mixte » de $\underset{P}{\boldsymbol{K}}$.
- C'est aussi un **sous-groupoïde double** du groupoïde double des **quadruplets** de P, et de plus chaque flèche double est uniquement déterminée par trois sommets (**règle de trois**).

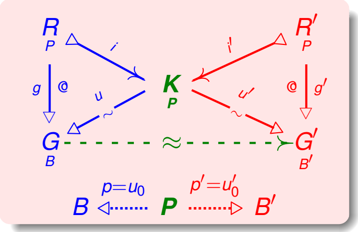
voir les figures suivantes ⟹

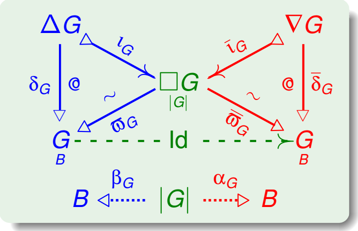
retour sur le papillon canonique et la structure du coeur (1)

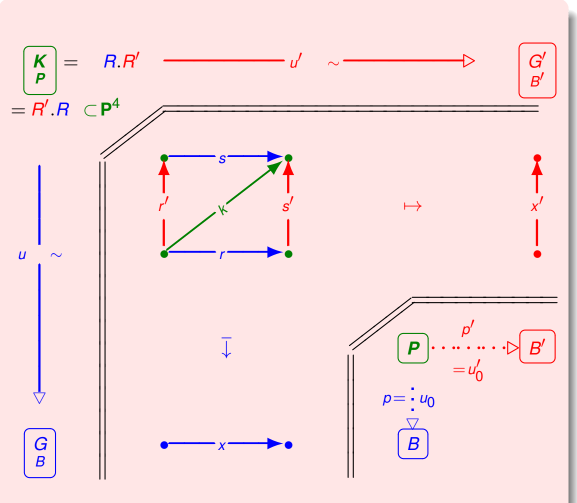




retour sur le papillon canonique et la structure du coeur (1)

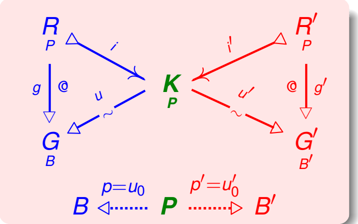






$k \in \mathbf{K}\,;\; r, s \in R\,;\; x \in G\,;\; r', s' \in R'\,;\; x' \in G'$

structure du coeur d'un papillon



$\underset{P}{K}$ ⇝ « grpde bi-principal » :

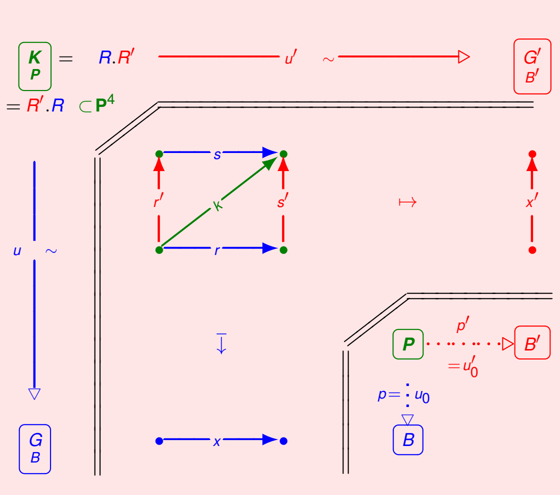
$(\underset{R'}{K}, \underset{R}{K})$ grpde double (hor, ver),

$u : \underset{R'}{K} \xrightarrow{@} G$, $R' \xrightarrow{\sim} \overset{0}{B}$

$u' : \underset{R}{K} \xrightarrow{@} G$, $R \xrightarrow{\sim} \overset{0}{B'}$

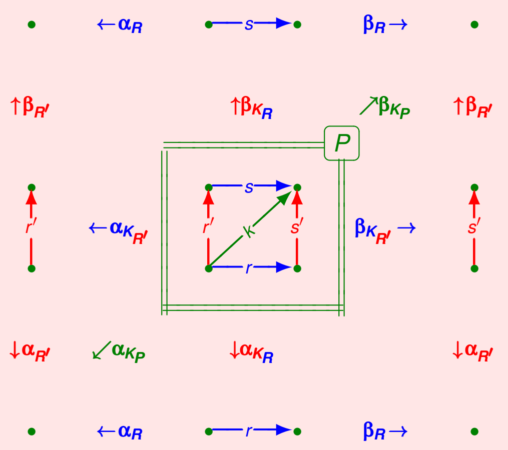
sont des acteurs principaux

$\underset{P}{K}$: loi « oblique » ou mixte



$k \in \mathbf{K}$; $r, s \in R$; $x \in G$; $r', s' \in R'$; $x' \in G'$

la structure du coeur : groupoïde bi-principal



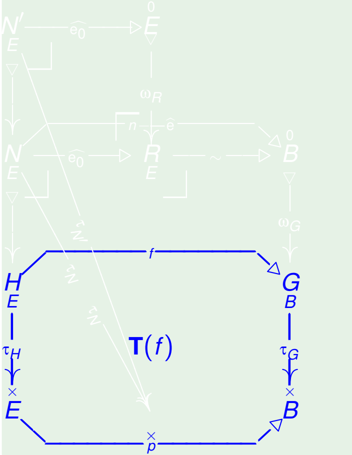
$k \in \underset{P}{\boldsymbol{K}}$; $r, s \in R$; $r', s' \in R'$; hor ; ver ; mixte

Groupoïde bi-principal $\mathbf{K_P}$

- Les proj. **source** et **but** de chacune des lois hor./vert. sont des **act. ppaux** rel. à l'autre loi.
- Le grpde (ppal) R_P (resp. R'_P) agit doublement sur $|R'|$ (resp. $|R|$) au-dessus de P rel. aux proj. $\alpha_{R'}$ et $\beta_{R'}$ (resp. α_R et β_R) (**généralisation symétrique du produit semi-direct**).
- Le **grpde double** $(K_{R'}, K_R)$ est un grpde ppal dans la catégorie des grpdes ppaux.
- k est uniquement déterminée par **3** des 4 sommets dans P, ou par (r', s), ou par (r, s').

s-extenseurs (0)

s-morphisme : $p = f_0$, $f \in \mathbf{D}_s$

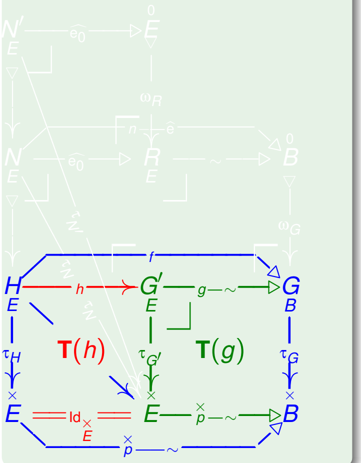


s-extenseurs $\quad f : H \xrightarrow{\widehat{e}} G$

- G' induit par G le long de $p = f_0$ surmersion
- $f = g \circ h$ (factorisation canonique)
- on suppose ici h surmersif h est unifère
- $N = \ker f$ est régulier $\tau_N \in \mathbf{D}_i \circ \mathbf{D}_s$
- $R = \ker g$ est principal
- $N' = \ker h$ est un plurigroupe ($\alpha_{N'} = \beta_{N'}$)
- l's-extenseur ($\widehat{e}$) f est composé
  - d'un s-extenseur unifère ($\widehat{e_0}$) h
  - d'un s-extenseur principal ($\sim$) g
- on a les suites exactes courtes :
  - $N \rightarrowtail H \xrightarrow{f} G$
  - $N' \rightarrowtail H \xrightarrow{h} G'$ $\quad N' \rightarrowtail N \longrightarrow R$
  - $R \rightarrowtail G' \xrightarrow{g} G$

s-extenseurs (1)

$\mathbf{T}(f) = \mathbf{T}(g)\,\mathbf{T}(h)$

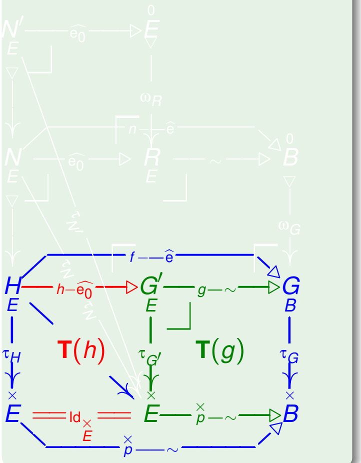


s-extenseurs $\quad f : H \overset{\widehat{e}}{\longrightarrow} G$

- G' induit par G le long de $p = f_0$ $(\in \mathbf{D}_s)$
- $f = g \circ h$ (factorisation canonique) (h unifère)
- **hyp.** : $\boxed{h \in \mathbf{D}_s}$ (s-**plénitude** de f)
- $N = \ker f$ est régulier $\tau_N \in \mathbf{D}_i \circ \mathbf{D}_s$
- $R = \ker g$ est principal
- $N' = \ker h$ est un plurigroupe $(\alpha_{N'} = \beta_{N'})$
- l's-extenseur $(\widehat{e})$ f est composé
  - d'un s-extenseur unifère $(\widehat{e_0})$ h
  - d'un s-extenseur principal $(\sim)$ g
- on a les suites exactes courtes :
  - $N \rightarrowtail H \xrightarrow{f} G$
  - $N' \rightarrowtail H \xrightarrow{h} G' \quad N' \rightarrowtail N \longrightarrow R$
  - $R \rightarrowtail G' \xrightarrow{g} G$

s-extenseurs (2)

$\mathbf{T}(f) = \mathbf{T}(g)\ \mathbf{T}(h)$

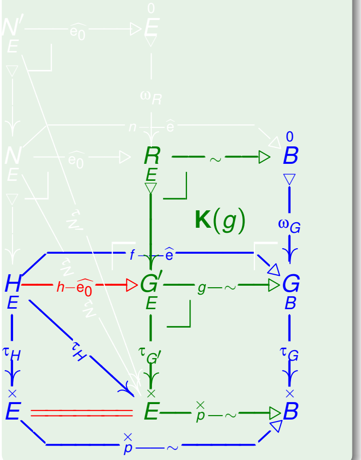


s-extenseurs $\quad f : H \xrightarrow{\widehat{e}} G$

- G' induit par G le long de $p = f_0$ ($\in \mathbf{D}_s$)
- $f = g \circ h$ (factorisation canonique) (h unifère)
- **hyp.** : $\boxed{h \in \mathbf{D}_s}$ (s-**plénitude** de f)
- $N = \ker f$ est régulier $\tau_N \in \mathbf{D}_i \circ \mathbf{D}_s$
- $R = \ker g$ est principal
- $N' = \ker h$ est un plurigroupe ($\alpha_{N'} = \beta_{N'}$)
- l's-extenseur ($\widehat{e}$) f est composé
  - d'un s-extenseur unifère ($\widehat{e_0}$) h
  - d'un s-extenseur principal ($\sim$) g
- on a les suites exactes courtes :
  - $N \rightarrowtail H \xrightarrow{f} G$
  - $N' \rightarrowtail H \xrightarrow{h} G' \quad N' \rightarrowtail N \longrightarrow R$
  - $R \rightarrowtail G' \xrightarrow{g} G$

s-extenseurs (3)

R noyau de g (principal)

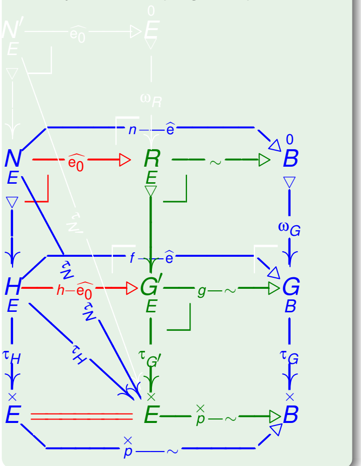


s-extenseurs $\quad f : H \xrightarrow{\widehat{e}} G$

- G' induit par G le long de $p = f_0$ ($\in \mathbf{D}_s$)
- $f = g \circ h$ (factorisation canonique) (h unifère)
- **hyp.** : $\boxed{h \in \mathbf{D}_s}$ (s-**plénitude** de f)
- $N = \ker f$ est régulier $\tau_N \in \mathbf{D}_i \circ \mathbf{D}_s$
- $R = \ker g$ est principal
- $N' = \ker h$ plurigroupe ($\alpha_{N'} = \beta_{N'}$)
- l's-extenseur ($\widehat{e}$) f est composé
  - d'un s-extenseur unifère ($\widehat{e}_0$) h
  - d'un s-extenseur principal ($\sim$) g
- on a les suites exactes courtes :
  - $N \rightarrowtail H \xrightarrow{f} G$
  - $N' \rightarrowtail H \xrightarrow{h} G' \quad N' \rightarrowtail N \longrightarrow R$
  - $R \rightarrowtail G' \xrightarrow{g} G$

s-extenseurs (4)

N noyau de f (régulier)

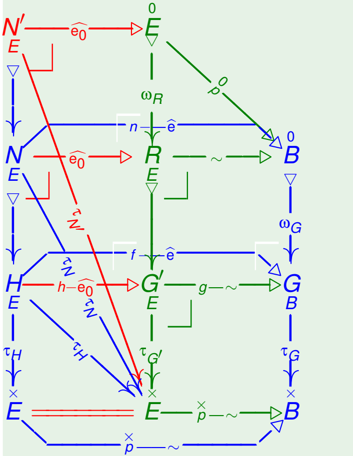


s-extenseurs $\quad f : H \xrightarrow{\hat{e}} G$

- G' induit par G le long de $p = f_0$ ($\in \mathbf{D}_s$)
- $f = g \circ h$ (factorisation canonique) (h unifère)
- **hyp.** : $\boxed{h \in \mathbf{D}_s}$ (s-**plénitude** de f)
- $N = \ker f$ est **régulier** ($\tau_N \in \mathbf{D}_r = \mathbf{D}_i \circ \mathbf{D}_s$)
- $R = \ker g$ est principal
- $N' = \ker h$ plurigroupe ($\alpha_{N'} = \beta_{N'}$)
- l's-extenseur ($\hat{e}$) f est composé
  - d'un s-extenseur unifère ($\hat{e}_0$) h
  - d'un s-extenseur principal ($\sim$) g
- on a les suites exactes courtes :
  - $N \rightarrowtail H \xrightarrow{f} G$
  - $N' \rightarrowtail H \xrightarrow{h} G' \qquad N' \rightarrowtail N \longrightarrow R$
  - $R \rightarrowtail G' \xrightarrow{g} G$

s-extenseurs (5)

N' noyau de h (plurigroupe)

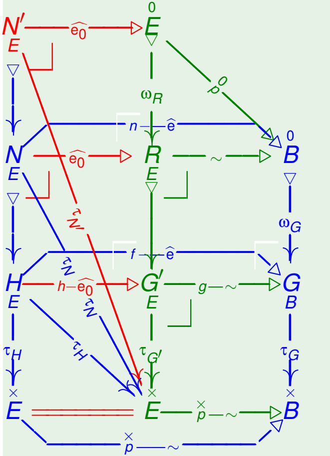


s-extenseurs $\quad f : H \xrightarrow{\widehat{e}} G$

- G' induit par G le long de $p = f_0$ ($\in \mathbf{D}_s$)
- $f = g \circ h$ (factorisation canonique) (h unifère)
- **hyp.** : $\boxed{h \in \mathbf{D}_s}$ (s-**plénitude** de f)
- $N = \ker f$ est **régulier** ($\tau_N \in \mathbf{D}_R = \mathbf{D}_i \circ \mathbf{D}_s$)
- $R = \ker g$ est principal
- $N' = \ker h$ est un plurigroupe ($\alpha_{N'} = \beta_{N'}$)
- l's-extenseur ($\widehat{e}$) f est composé
  - d'un s-extenseur unifère ($\widehat{e}_0$) h
  - d'un s-extenseur principal ($\sim$) g (s-inducteur)
- on a les suites exactes courtes :
  - $N \rightarrowtail H \xrightarrow{f} G$
  - $N' \rightarrowtail H \xrightarrow{h} G' \quad N' \rightarrowtail N \longrightarrow R$
  - $R \rightarrowtail G' \xrightarrow{g} G$

s-extenseurs (6)

$f = g \circ h$

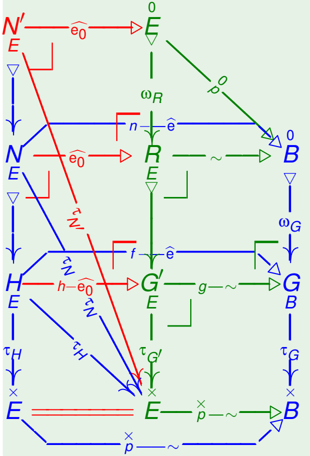


s-extenseurs $\quad f : H \multimap_{\widehat{e}} G$

- G' induit par G le long de $p = f_0$ ($\in \mathbf{D}_s$)
- $f = g \circ h$ (factorisation canonique) (h unifère)
- **hyp.** : $\boxed{h \in \mathbf{D}_s}$ (s-**plénitude** de f)
- $N = \ker f$ est **régulier** ($\tau_N \in \mathbf{D}_R = \mathbf{D}_i \circ \mathbf{D}_s$)
- $R = \ker g$ est principal
- $N' = \ker h$ est un plurigroupe ($\alpha_{N'} = \beta_{N'}$)
- l's-extenseur ($\widehat{e}$) f est composé
  - d'un s-extenseur unifère ($\widehat{e}_0$) h
  - d'un s-extenseur principal ($\sim$) g (s-inducteur)
- on a les suites exactes courtes :
  - $N \rightarrowtail H \xrightarrow{f} G$
  - $N' \rightarrowtail H \xrightarrow{h} G' \quad N' \rightarrowtail N \longrightarrow R$
  - $R \rightarrowtail G' \xrightarrow{g} G$

s-extenseurs (7)

$\boxed{G = H//N}$ $\quad G' = H/N'$



s-extenseurs $\quad f : H \xrightarrow{\widehat{e}} G$

- G' induit par G le long de $p = f_0$ ($\in \mathbf{D}_s$)
- $f = g \circ h$ (factorisation canonique) (h unifère)
- **hyp.** : $\boxed{h \in \mathbf{D}_s}$ (s-**plénitude** de f)
- $N = \ker f$ est **régulier** ($\tau_N \in \mathbf{D}_R = \mathbf{D}_i \circ \mathbf{D}_s$)
- $R = \ker g$ est principal
- $N' = \ker h$ est un plurigroupe ($\alpha_{N'} = \beta_{N'}$)
- l's-extenseur ($\widehat{e}$) f est composé
  - d'un s-extenseur unifère ($\widehat{e_0}$) h
  - d'un s-extenseur principal ($\sim$) g (s-inducteur)
- on a les suites exactes courtes :
  - $N \rightarrowtail H \xrightarrow{f} G$
  - $N' \rightarrowtail H \xrightarrow{h} G' \qquad N' \rightarrowtail N \longrightarrow R$
  - $R \rightarrowtail G' \xrightarrow{g} G \qquad R \rightarrowtail \overset{\times}{E} \longrightarrow \overset{\times}{B}$

Références J.P. d'accès aisé (arXiv 2008)

références pour la deuxième partie

- arXiv :0803.4209 *Morphisms between spaces of leaves viewed as fractions* (Haefliger's generalized morphisms interpreted as fractions ; differentiable Morita equivalences.)
- arXiv :0711.1608 *In Ehresmann's footsteps : from Group Geometries to Groupoid Geometries* (conjugation of generalized principal fibrations.)

jpradines@wanadoo.fr