

HISTOIRE

Cartan, Lebesgue, de Rham et l'analysis situs dans les années 1920 Scènes de la vie parisienne

Michèle Audin¹

C'est Paris lui-même qui m'a libéré de Paris. Il m'a appris dans sa propre langue à me servir (à essayer du moins de me servir) de ma propre langue. Car il faut distinguer entre ses leçons immédiates et celles qui agissent en profondeur : dont la plus profonde est sans doute qu'étant étonnamment lui-même, il vous enseigne à être soi-même.

C.F. Ramuz, [48]

Au cours de ses études, dans les années 1920, le mathématicien suisse Georges de Rham est passé par Paris. Il y a bénéficié des conseils d'Henri Lebesgue, des cours et des idées d'Élie Cartan. En le suivant, nous esquissons un tableau de la topologie dans la vie mathématique parisienne au cours des années 1922-1931.

En 1895, Henri Poincaré contribua à la célébration du centenaire du *Journal de l'École polytechnique* en donnant à ce journal un article destiné à devenir célèbre, l'*Analysis situs* [47, pp. 193–288]². Cet article inspiré fut suivi de cinq « compléments », consacrés à compléter, mais aussi à préciser, voire à corriger, ce qui y était imprimé. Le cinquième [47, pp. 435–498], paru en 1904, contient, on le sait, une description de la « sphère de Poincaré », une variété de dimension 3 ayant l'homologie d'une sphère mais pas simplement connexe. C'était à la fois un contre-exemple à un énoncé erroné du second complément [47, pp. 338–370], une clarification devenue nécessaire de la différence entre homotopie et homologie (entre π_1 et H_1), et la source de la conjecture qui occupa ensuite les topologues pendant plus de cent ans, « Mais cette question nous entraînerait trop loin », telle était d'ailleurs la dernière phrase de cette somme.

En 1935, après le Congrès de topologie de Moscou, une réunion vraiment internationale (voir [72, 69]), Pavel Alexandroff et Heinz Hopf passèrent quelques jours dans la station balnéaire de Yalta, en Crimée, et, le 28 septembre, y terminèrent la rédaction du livre [10] en mettant le point final à sa préface. Ce livre devint, et resta longtemps, internationalement, une bible de la topologie algébrique (combinatoire, disait-on encore). À Paris, les mathématiciens qui organisaient le séminaire Julia et ceux (souvent les mêmes) qui créaient Bourbaki consacrèrent, dès le début de

¹ Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et CNRS.

² Dans ce texte, les articles de Poincaré sur l'*Analysis situs* sont cités avec leur pagination dans le volume 6 de ses Œuvres complètes.

1936, plusieurs séances du séminaire à des techniques et résultats contenus dans cet ouvrage (voir [16]). Plusieurs d'entre eux (Jean Leray, Henri Cartan, André Weil, Charles Ehresmann...) devaient s'illustrer, dans les décennies suivantes, par des travaux de topologie.

Dans cet article, nous évoquons un moment de la période intermédiaire à Paris, entre 1922, année où Henri Lebesgue, qui venait d'être nommé professeur au Collège de France, commença à y dispenser ses cours³, et 1931, année de la soutenance de la thèse de Georges de Rham, dont les souvenirs constituent le fil narratif de cette histoire⁴.

Si ces dates limites sont associées aux noms de Lebesgue et de Rham, le véritable héros de cette histoire est Élie Cartan : nous le verrons se documenter sur l'Analysis situs et produire, à plus de cinquante-cinq ans, des résultats étonnants sur les formes différentielles et la topologie des groupes de Lie ouvrant la voie au théorème de de Rham.

Promenade

Georges de Rham — Alors je me suis tourné vers l'*Analysis situs* ou Topologie. J'ai essayé de comprendre les Mémoires de Poincaré sur ce sujet et j'ai lu le premier chapitre du livre de Lefschetz « L'analysis situs et la Géométrie algébrique », qui contient un exposé clair sans démonstrations, et le livre de Kerekjarto⁵. En 1926, il n'y avait encore que peu de publications sur ce sujet, alors que sur la théorie des fonctions, de variables réelles ou complexes, il y en avait tant qu'un débutant isolé s'y perdait⁶. Sur le conseil de Dumas⁷, me signalant que Lebesgue donnait au Collège de France un cours sur l'Analysis situs, je me suis rendu à Paris en novembre 1926. [55, p. 23]

1. Arrière-plan : Henri Lebesgue et l'invariance du domaine

Si le nom de Lebesgue est resté attaché à la théorie de l'intégration, il est clair que cette théorie avait besoin de topologie générale. Le théorème que l'on appelle (en France) théorème de Borel-Lebesgue est un théorème de topologie générale, une propriété des parties fermées et bornées de l'espace $\mathbf{R}^n$, *de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini*, propriété si remarquable qu'elle est devenue la définition d'un espace compact.

³ Les résumés de ses cours sont rassemblés dans [38].

⁴ Ces autres « notes d'un Vaudois », dans [55] et [54], utilisées ici un peu comme les promenades des *Tableaux d'une exposition*, de Moussorgski, orchestrés par Ravel pour une version créée à Paris le 19 octobre 1922, ou d'*Un Américain à Paris*, de Gershwin, créé à New York le 13 décembre 1928.

⁵ Les livres [42] et [36].

⁶ On pense ici notamment aux raffinements du théorème de Picard en théorie des fonctions analytiques d'une variable (voir [12]).

⁷ Il s'agit de Gustave Dumas (1872–1955), qui était professeur à Lausanne et dont de Rham a déjà parlé au début de son texte.

De l'analysis situs, il dit dans sa notice de 1922 [38, p. 164]⁸ :

Au moment où je sortais de l'École Normale, l'attention des jeunes gens était alors attirée sur cet important sujet par le cours d'analyse de Jordan, par les leçons de M. Picard sur les fonctions algébriques et par le premier mémoire de Poincaré qui venait de paraître⁹.

Si ses travaux en Analysis situs n'occupent que quatre-vingt-trois pages des cinq volumes de ses Œuvres complètes¹⁰, Lebesgue n'en a pas moins consacré beaucoup de temps à ce sujet.

Le nombre de Lebesgue d'un recouvrement. Lebesgue est l'un des mathématiciens qui ont proposé une démonstration de l'« invariance du domaine » — le théorème que Brouwer venait de démontrer et qui affirme qu'un ouvert de $\mathbf{R}^m$ ne peut être homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ que si $m = n$. Sa démonstration reposait sur un essai de définition topologique de la dimension, via le théorème suivant :

Théorème. *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. De tout recouvrement fini de U par des ouverts, on peut extraire un recouvrement tel qu'il y ait des points communs à $n + 1$ de ces ouverts et qu'aucun point de U ne se trouve dans plus de $n + 1$ de ces ouverts.*

C'est une idée utile et brillante, que l'on illustre souvent, pour $n = 3$, par l'image un peu inadéquate d'un mur de briques (voir la figure 1) — il est difficile de penser à des briques comme à des ouverts. Lebesgue lui-même est réputé [27, p. 85] avoir dit plus tard que cette idée lui était venue alors qu'il bricolait un travail de maçonnerie.

Sauf que... Lebesgue n'avait pas de démonstration convaincante de ce fait à l'époque, que l'article était publié comme une lettre à Otto Blumenthal dans *Math. Annalen* en 1910, et que Brouwer avait, lui, une démonstration complète [17] de l'invariance du domaine. Ni Brouwer, ni Lebesgue n'avait un caractère facile et une polémique épistolaire s'ensuivit, le plus souvent à travers Blumenthal, qui dirigeait les *Mathematische Annalen* (polémique que l'on pourra suivre dans la correspondance de Brouwer [25]). Lebesgue finit par publier une démonstration complète de son théorème [39, p. 177]¹¹ en 1921 (on en trouvera une autre dans [32]). Au moment qui nous intéresse, c'est-à-dire en 1922, le théorème était démontré.

⁸ Il s'agit de la notice écrite en vue de son élection à l'Académie des sciences, qui eut lieu le 29 mai 1922.

⁹ Lebesgue est entré à l'ENS en 1894. Il en est donc sorti en 1897. Le cours d'analyse de Jordan était un cours de l'École polytechnique, dont il exista trois éditions. Celle dont parle Lebesgue est certainement la deuxième [34], parue en 1893, qui contenait dans un chapitre « Ensembles » d'importantes notions de topologie générale (sur les diverses éditions du cours de Jordan, voir [28]). Il est certain que les travaux de Picard, en analyse complexe et sur les fonctions algébriques, menaient droit vers la topologie. Le « premier mémoire » de Poincaré parut, nous l'avons dit, en 1895.

¹⁰ Même si son nom n'y apparaît pas, la publication des Œuvres de Lebesgue par *l'Enseignement mathématique* à Genève doit certainement beaucoup à Georges de Rham (voir [23]).

¹¹ Les articles sur l'Analysis situs de Lebesgue sont cités avec leur pagination dans le volume IV de ses Œuvres.



FIG. 1

Promenade

Georges de Rham — J'y suis resté jusqu'en mai 1927 et j'ai pu y retourner l'hiver suivant. J'ai suivi plusieurs cours à la Sorbonne, le Séminaire Hadamard au Collège de France, où j'ai appris beaucoup de choses. Mais sur l'Analysis situs, il n'y avait rien. Lebesgue avait changé le sujet de son cours et parlait des fonctions eulériennes et des formules sommatoires d'Euler-MacLaurin¹². [55, p. 23]

2. Le séminaire Hadamard

Il est exclu de parler de la vie mathématique à Paris pendant cette période sans mentionner le séminaire de Jacques Hadamard. Brièvement puisque de Rham nous dit qu'il n'y fut pas question d'Analysis situs ces années-là. Rappelons que ce fut, de 1920 à 1933, le seul séminaire de mathématiques à Paris (à partir de 1933, il y en eut deux, voir [16]).

Renvoyons aux différents articles mentionnés dans la biographie [45], aux souvenirs d'André Weil dans [67, 68, 69], et résumons la situation, comme dans [44] par :

la vie mathématique à Paris dans les années 1920 et au début des années 1930 était pour l'essentiel décrite par les deux mots « Séminaire d'Hadamard ».

Promenade

Georges de Rham — À la bibliothèque de la Sorbonne, je lisais tout ce que je trouvais sur l'Analysis situs, travaux de Poincaré, de Brouwer, Lebesgue, la Thèse de L. Antoine. [55, p. 23]¹³

¹² Sur les cours de Lebesgue, voir ci-dessous. Le résumé du cours de 1926–27 sur la fonction Γ figure dans [38, p. 179].

¹³ Rien, dans cet article de de Rham, ne peut expliquer la phrase

Despite the eternal difficulty of obtaining books at the Sorbonne library (a situation which does not seem to have improved very much at most French universities) [...]

(dans [23, p. 203]) bien au contraire. Nous ignorons donc la source de ce commentaire. Il serait intéressant aussi de connaître la liste des bibliothèques qu'ont fréquentées les auteurs de cet article... La caricature et le préjugé rappellent, mutatis mutandis, les Parisiens vus par Hollywood dans le film inspiré par *Un Américain à Paris*.

3. Lebesgue, Jordan, Schoenflies, Antoine

Un autre apport de Lebesgue à la topologie fut son intérêt pour le théorème de Jordan, sur lequel il donna le premier de ses cours au Collège de France. Les relations entre le théorème de Jordan et l'invariance du domaine n'avaient pas échappé à Lebesgue, pas plus d'ailleurs qu'à Hadamard, comme nous allons le voir. Dans une note [39, pp. 173–175] consacrée à cette question, il avait mis ces relations en évidence en introduisant une notion de « variétés enlacées ». Celle-ci généralisait la position relative d'un couple de points et d'une courbe de Jordan dans le plan : le couple de points et la courbe sont enlacés si le segment joignant les deux points rencontre la courbe un nombre impair de fois (si c'est le cas, l'un des points est à l'intérieur, l'autre pas). Peu de temps auparavant (dans *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*¹⁴), Jacques Hadamard avait considéré l'« ordre d'un point par rapport à une courbe », qui est un indice d'intersection (indice de Kronecker, comme le titre de l'article l'indique). La définition de Lebesgue est la définition moderne du nombre d'enlacement de deux sous-variétés. Notons un article [18] de Brouwer, l'année suivante, où un nombre d'enlacement dit *looping number* était défini avec une intégrale.

Signalons aussi la démonstration de Lebesgue [39, p. 207] du théorème de Schoenflies. L'article [39, pp. 177–206] de 1921 sur les correspondances entre points de deux espaces, que nous avons déjà cité parce qu'il y démontrait son énoncé « nombre de Lebesgue », contenait d'autres résultats. Au §12, il démontrait

l'importante propriété suivante, connue sous le nom de théorème de Schoenflies :

si l'on a une correspondance univoque et continue dans les deux sens entre les points de deux ensembles fermés de deux espaces à n dimensions, les points intérieurs des deux ensembles se correspondent, les points frontières, limites de points intérieurs se correspondent, ainsi que les points frontières non limites de points intérieurs.

Schoenflies l'avait démontré¹⁵ pour la dimension 2 (c'est alors un perfectionnement du théorème de Jordan : une courbe de Jordan — plongement du cercle — dans le plan s'étend à un plongement du disque comme l'intérieur de la courbe de Jordan). Lebesgue dut revenir sur sa démonstration trois ans plus tard [39, pp. 207–210]. Une nouvelle citation s'impose :

M. Fréchet vient de me faire observer que ma démonstration est insuffisante ; par une singulière étourderie, en effet, j'ai admis presque entièrement la propriété à démontrer à un moment de mon raisonnement. Pourtant, il suffit d'ajouter quelques lignes au §12 pour le compléter. Mais, comme il résulte de ma correspondance avec M. Fréchet que tout ce paragraphe n'est pas clair, je vais le reprendre entièrement.

Une autre de ses contributions fut de lancer Louis Antoine, un grand blessé que la guerre avait rendu aveugle, sur une thèse en topologie. Celui-ci écrivit, en 1945 :

Pendant mon long séjour à l'hôpital, j'avais mûrement réfléchi aux possibilités que pouvait me permettre la cécité. [...] je me suis laissé convaincre

¹⁴ Une note publiée dans le livre [60] de Tannery en 1910 et reproduite dans [29, pp. 875–915].

¹⁵ Voir les références dans l'article de Lebesgue.

quand même et, parmi les sujets proposés par Lebesgue, j'ai choisi l'Analysis situs (on dit maintenant la Topologie). Je n'ai pas eu à regretter cette décision et j'ai gardé de mon Maître la plus vive reconnaissance. [reproduit dans [27, p. 19]]

Le collier d'Antoine est un sous-espace peu ordinaire de l'espace $\mathbf{R}^3$, dont nous esquissons ici une description. Dans un tore, on dessine une chaîne (au sens ordinaire du terme, un ensemble de chaînons accrochés les uns aux autres) fermée. On remplace le tore par cette chaîne. Chacun des maillons est un tore, que l'on remplace à son tour par une chaîne semblable à celle dont il était un maillon. En répétant indéfiniment cette opération, on obtient un sous-espace de $\mathbf{R}^3$, compact, parfait et totalement discontinu (aucun de ses points n'est isolé, toutes ses composantes connexes sont des points) — et auto-similaire par construction. La figure 2, dessinée par Arnaud Chéritat¹⁶, montre le résultat.



FIG. 2. Le collier d'Antoine

On connaissait déjà, bien avant la thèse d'Antoine, des espaces topologiques ayant ces propriétés : l'archétype de l'ensemble compact parfait totalement discontinu est l'ensemble triadique de Cantor (sur une droite) dont des versions planes venaient de faire irruption dans les mathématiques comme les poussières de Fatou produites par l'itération des fractions rationnelles (pour les travaux de Pierre Fatou, voir [12]). Ce que l'exemple d'Antoine avait de plus ? C'est un espace topologique homéomorphe à l'ensemble de Cantor, *mais* il n'existe aucun homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même qui envoie le collier d'Antoine sur une poussière plane. La preuve en est faite par un argument d'enlacement : un cercle qui enlaçait le tore originel (dans lequel se trouve le collier) garde un coefficient d'enlacement non nul avec le collier. En réalité, chacune des courbes similaires enlaçant chacun des tores de plus en plus petits utilisés dans la construction engendre un élément d'ordre infini dans le groupe fondamental du complémentaire ; ainsi celui-ci n'est même pas finiment engendré¹⁷.

¹⁶ Avec le logiciel POV-RAY. Voir des versions colorées dans son article [24].

¹⁷ Ceci est démontré, par exemple, dans un texte [53] de Georges de Rham qu'il n'est pas inadéquat de citer ici.

La notion de variétés enlacées introduite par Lebesgue et déjà mentionnée au début de cette section se révéla fort utile. Cette utilité ne devait cesser de se confirmer au cours des années¹⁸, même si Lebesgue ne fut pas beaucoup cité et Hadamard à peine plus¹⁹.

Ici on a vu les centres d'intérêt de Lebesgue se déplacer des « ensembles de points » (ce qui deviendra, quelques années plus tard, la topologie générale) à l'« analysis situs » (topologie combinatoire, puis algébrique). Clairement, un espace compact parfait totalement discontinu appartient à la première sous-discipline, alors que la notion d'enlacement appartient à la deuxième. Au cours des années que nous évoquons dans cet article, les deux sous-disciplines étaient en cours de séparation, la première se développant davantage en liaison avec l'analyse fonctionnelle.

Voilà pour l'arrière-plan de cette exposition.

Promenade

Georges de Rham — En généralisant le théorème de Jordan pour les dimensions supérieures, Lebesgue avait introduit la notion de variétés enlacées et démontré un cas particulier du théorème de dualité d'Alexander²⁰. [55, p. 25]

4. Les cours de Lebesgue au Collège de France

Arrivé au Collège de France, Lebesgue commença en 1922 à donner un cours tous les ans. Et, les premières années, c'est à l'Analysis situs qu'il consacra ce cours annuel.



FIG. 3. Au Collège de France

¹⁸ Par exemple, pour rester dans la période considérée, dans l'étude de la fibration de Hopf [31].

¹⁹ Ce qui explique sans doute la quasi-absence de Lebesgue dans un livre tel que [33].

²⁰ Les mentions ici ou là dans ce texte, après ceux de Brouwer, de travaux de James Alexander, de Heinz Hopf, d'Hermann Weyl ou d'autres mathématiciens devraient rappeler que, si Paris est le sujet de cet article, elle était loin d'être le centre du monde...

Voici les titres de ces cours.

1922–23 Sur quelques questions d'Analysis situs, à propos des travaux de Camille Jordan

1923–24 Sur l'Analysis situs

1924–25 Les divers ordres de connexion des espaces supérieurs

Le fait qu'on ait su, à Lausanne en 1926, que Lebesgue donnait un cours sur l'Analysis situs n'avait donc rien d'étonnant. Juste un peu de retard. En effet, en 1926, c'était déjà fini. Les titres des cours suivants furent

1925–26 Quelques procédés récents d'intégration (totalisation de M. Denjoy, intégrales de Radon, Hellinger, etc.)

1926–27 Sur la fonction Γ et quelques relations fonctionnelles



FIG. 4. À Paris

C'est ce dernier que de Rham trouva à son arrivée à Paris. Ses souvenirs ne contiennent aucune opinion sur les cours de Lebesgue ; à vrai dire, il n'est même pas complètement clair qu'il y a assisté²¹. Sur ces cours, il reste quelques avis. Szolem Mandelbrojt, qui assista à certains de ces mêmes cours en dit (en 1974) :

Dans ma jeunesse, j'ai suivi pendant plusieurs années les conférences de Lebesgue au Collège de France [...] Ses leçons étaient plus que profondément intéressantes : elles étaient souvent, je ne crains pas de le dire, émouvantes. Son inspiration, sa recherche de l'expression exacte, nous obligeaient à penser avec lui. [...] Le public n'était pas bien nombreux, à ces leçons. [27, Préface]

À peu près à la même époque, en 1971, bien après les cours, André Weil, qui était entré à l'ENS en 1922 et avait donc probablement assisté à des séances de l'un ou l'autre de ces cours, eut une phrase lapidaire :

²¹ Il est sûr, par contre, qu'il a suivi au moins un cours d'Élie Cartan (voir ci-dessous page 69).

[...] hors de là [du séminaire Hadamard], l'inspiration faisait défaut. Lebesgue, au Collège de France, consacrait ses cours à l'« Analysis situs », c'est-à-dire à une topologie combinatoire qui en était restée aux premiers travaux de Poincaré. [67, p. 18]

S'il est certain que Lebesgue fut un successeur de Poincaré, s'il est tout aussi certain qu'il n'a pas laissé son nom à des résultats marquants de topologie algébrique, le commentaire de Weil est quand même un peu injuste. Le théorème de Schoenflies n'est ni une évidence ni une trivialité, les coefficients d'enlacement sont utiles, un cours sur la classification des surfaces n'était pas en 1925 une chose aussi commune que dans les années 1970.

Et puis, il y avait Georges de Rham.

Promenade

Georges de Rham — Or, Kerekjarto, dans l'Introduction à son livre, mentionnait une Note d'Alexander intitulée « Two manifolds with the same group », que je n'avais pas trouvé[e] à Lausanne et que je pus obtenir à la Bibliothèque de la Sorbonne²². Les deux variétés d'Alexander sont les deux espaces lenticulaires dont le groupe est cyclique d'ordre cinq. En étudiant cet exemple, j'ai vu que la théorie des enlacements et des intersections allait plus loin que l'homologie et donnait d'autres résultats, qui me semblaient nouveaux. [55, p. 24]

Le problème fondamental de la Topologie étant résolu pour les surfaces, il était naturel d'aborder les variétés à trois dimensions. [55, p. 25]

5. Le cours de Lebesgue en 1924–25.

Les divers ordres de connexion des espaces supérieurs

Avant l'arrivée à Paris de notre visiteur suisse, arrêtons-nous sur le dernier de ces cours de topologie, simplement parce que nous avons, sur celui-ci, des informations complémentaires : outre le résumé, une lettre de Lebesgue à Élie Cartan dans laquelle il évoque ce cours, et le cahier dans lequel le jeune Henri Cartan a pris des notes pendant les séances²³. Justement, il y était question de la classification des surfaces.

Commençons par le résumé (qui semble avoir été rédigé après que le cours a été donné) :

Pendant l'année scolaire 1924–25, le Professeur a exposé les mémoires de Poincaré sur la recherche des conditions d'homéomorphie de deux variétés, et les travaux de Tietze, de Veblen, de Weyl, d'Alexander qui précisent, rectifient et prolongent ceux de Poincaré.

Il s'est attaché surtout à mettre nettement en évidence les résultats définitivement acquis et les difficultés qui arrêtent actuellement la marche en avant.

La représentation d'un polyèdre par des tableaux, introduite par Poincaré et qui joue un rôle essentiel dans ces recherches, demeure, par exemple, quelque peu illusoire pour les polyèdres à plus de trois dimensions, car on ne

²² Voir la note 13.

²³ Les archives d'Élie et d'Henri Cartan conservées par ce dernier constituent une mine à peu près inépuisable.

sait pas déterminer quels sont les tableaux qui correspondent à des polyèdres et quels sont ceux qui ne correspondent à aucun polyèdre.

Pour le cas de trois dimensions, il reste aussi beaucoup à faire ; on s'en rendra compte en remarquant que nous cherchons à donner au problème de l'homéomorphie une solution reposant uniquement sur des considérations arithmétiques et que, pourtant, nous ne savons pas formuler arithmétiquement le problème étudié.

La référence à Poincaré est explicite, elle l'est aussi dans le cahier, qui commence ainsi :

Mémoire de Poincaré en 1895 (Journ. éc. polytechn.). Beaucoup d'erreurs, mauv. dém. ; mais résult. princip. justes, et beaucoup d'idées. — Mémoires ont suivi.

Les travaux de Tietze et Weyl (en Allemagne) et d'Alexander et Veblen (aux États-Unis) sont invoqués, dans le résumé de cours comme dans le cahier. La figure 5 montre les références du cours, sur la dernière page utilisée du cahier.

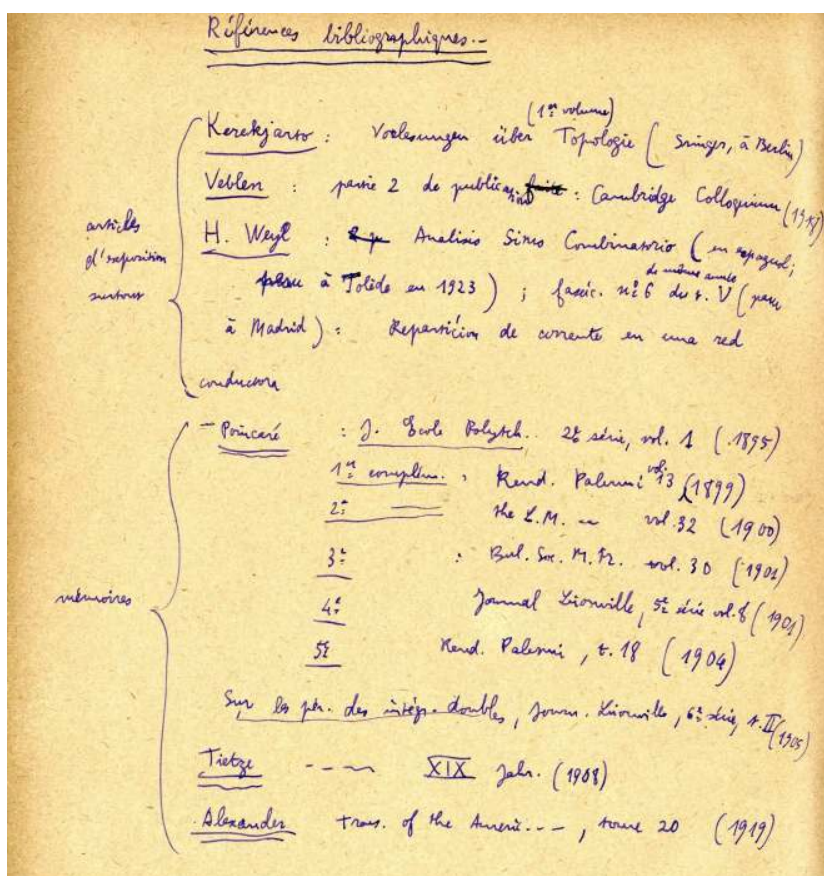


FIG. 5. La bibliographie dans le cahier d'Henri Cartan

Le cahier. C'est un cahier jaune relié et toilé, de la sorte dont tous les témoignages s'accordent à dire que l'on en a distribué aux normaliens pendant encore de longues années (et qui étaient un des signes auxquels on reconnaissait les normaliens dans les cours de la Sorbonne [57, p. 75]). Outre la date (1925), qui a pu être ajoutée ultérieurement au crayon sur l'étiquette, on peut lire

H.Cartan carré
Cours de M.Lebesgue
(Collège de France)

Et en effet, Henri Cartan était « carré », c'est-à-dire élève de deuxième année à l'ENS, en 1924–25. D'autre part, l'une des pages (celle numérotée 104) porte une date : « cours du mardi 17 mars 1925 ». L'étudiant prenait ses notes à l'encre violette, il y a de nombreuses ratures, sans doute des démonstrations incorrectes au tableau, corrigées ensuite (un cours vivant, donc).

Voici un résumé de ce qu'on lit dans ce cahier :

pages 1 à 26 La classification des surfaces (polygone)
pages 27 à 44 Discussion de $F + S - A$, de l'ordre de connexion, tableaux de Poincaré et de Veblen
pages 45 à 53 Calcul des nombres, en particulier, de Betti-Poincaré²⁴, qui pour les surfaces sont

- Var. orientable $BP = A - F - S + 3$
- Var. non orientable $BP = A - F - S + 2$

pages 54 à 75 Nombres de Betti-Riemann (et de Tietze-Veblen) [dont la conclusion est]

$$TV = A - F - S + 3 = BR$$

pages 76 à 93 Espaces supérieurs
pages 93 à 103 Nombres de Betti, Riemann, Poincaré, Tietze, Veblen et qqes autres [dont la conclusion est] Donc n. de Betti et coef. de torsion ne suffisent pas à caractériser variété au p. de vue de l'analysis situs.
pages 104 à 110 Groupe fondamental
puis Références bibliographiques.

La bibliographie. Elle est présentée sur la figure 5. Il s'agit, pour les articles d'exposition, des livres [36] et [62] (que Lebesgue datait de 1918) et de l'article en espagnol [70] d'Hermann Weyl, puis de la liste des articles « analysis situs » de Poincaré, de son [46], et des articles de Tietze [61] et d'Alexander [1]²⁵.

La classification des surfaces. « La » démonstration du théorème de classification des surfaces que présentait Lebesgue dans le cours que suivit le jeune Henri Cartan est celle que le même Henri Cartan enseignait encore à Orsay cinquante

²⁴ BR ici est notre $b_1 + 1$, ainsi $-(2 - 2g) + 3 = 2g + 1$ pour une surface orientable (avec $b_1 = 2g$).

²⁵ L'article d'Alexander, comme l'a dit de Rham dans la promenade page 57, montre deux espaces lenticulaires quotients de S^3 par un groupe $\mathbb{Z}/5$ et non homéomorphes. Il est daté de Paris, 1918. Ce que faisait cet Américain à Paris en 1918 ne nous est pas connu (il était dans l'armée, mais avait contribué à l'effort de guerre aux États-Unis même). Qui il y a rencontré non plus.

ans plus tard, juste avant son départ à la retraite²⁶. Il n'est pas très facile de dire à qui elle est due. Le principe est le suivant :

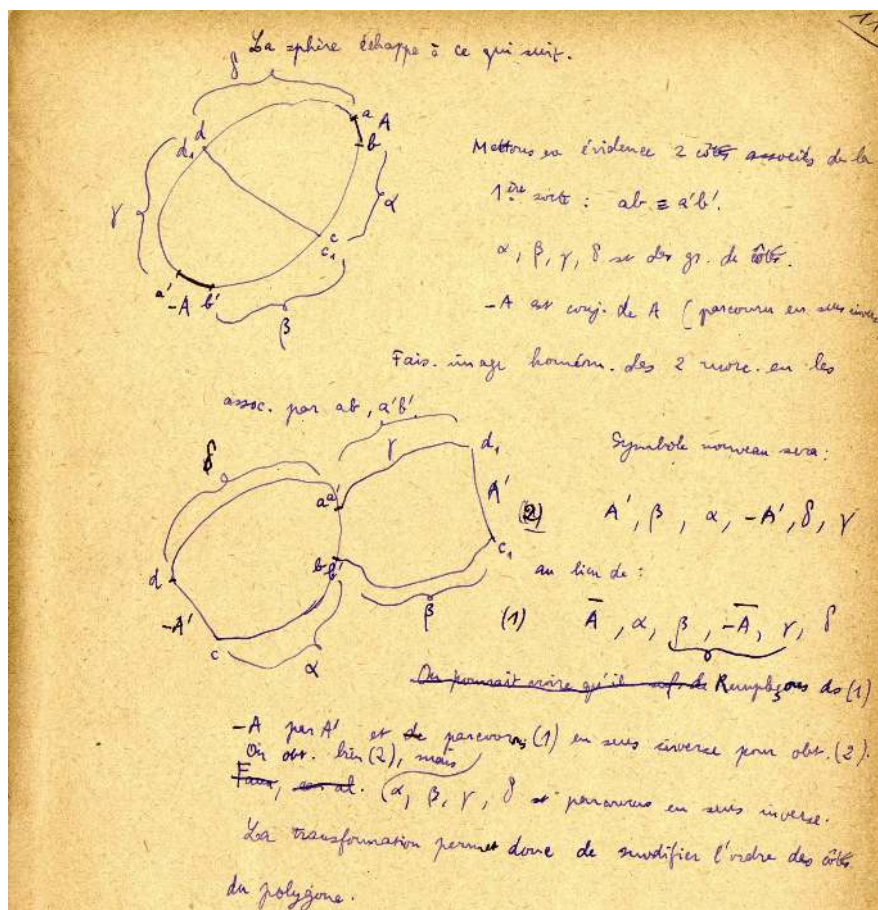


FIG. 6. La figure page 11 du cahier d'Henri Cartan

(1) La surface peut être triangulée (« On admettra possibilité de constr. » a noté Henri Cartan dans son cahier²⁷).

(2) Elle est donc décrite comme un polygone dont certains côtés doivent être identifiés.

(3) Par découpages et recollements de triangles, on modifie le polygone (dont les côtés sont identifiés deux à deux) de façon que tous les sommets soient le même point de la surface. La figure 6, qui vient des notes d'Henri Cartan, montre une étape de la manipulation du polygone.

²⁶ La comparaison des notes de cours de l'étudiant Cartan avec celles, cinquante ans après, d'un étudiant de son cours, est assez intéressante.

²⁷ Dans son cours d'Orsay, il se limita lui aussi sagement aux surfaces triangulées.

Quelques années plus tard, en 1934, Seifert et Threlfall, dans leur livre [58, p. 319] firent remonter cette démonstration à un article [26] de Max Dehn et Poul Heegaard paru en 1907 dans l'*Enzyklopädie*²⁸. La liste de références copiée par Henri Cartan à la fin de ses notes indique le livre de Béla Kerékjártó [36] comme source vraisemblable.

Promenade

Georges de Rham — À la fin du 2^{ième} Complément à l'Analysis situs, Poincaré écrit : « Pour ne pas allonger davantage, je me borne à énoncer le théorème suivant... », énoncé se réduisant à ceci : une sphère d'homologie est la sphère ordinaire ! Mais dans le 5^{ième} Complément, il montre que c'est faux en construisant une sphère d'homologie à trois dimensions dont le groupe fondamental n'est pas trivial. Il pose alors le problème appelé aujourd'hui « Hypothèse de Poincaré » : la sphère S^3 est-elle topologiquement caractérisée, parmi les variétés closes à trois dimensions, par le fait que son groupe se réduit à l'identité ?

Plus généralement, on pouvait se demander si la connaissance du groupe fondamental suffisait pour caractériser topologiquement une variété close à trois dimensions. [55, p. 25]

Ces travaux [ceux d'Élie Cartan, menant à son livre [19]], les premiers où apparaissent des préoccupations d'ordre topologique, ne font intervenir, en fait de notions topologiques, que celles de groupe fondamental et de revêtement. À l'époque, en ces années 1924–25, ces notions n'étaient pas nouvelles, mais elles n'étaient pas comme aujourd'hui familières à tous les mathématiciens. J'imagine qu'Élie Cartan a fait ces travaux en même temps qu'il cherchait à se documenter sur l'Analysis situs, comme on appelait alors la Topologie. [54, p. 642]

6. Élie Cartan se documente sur l'Analysis situs

À l'appui du commentaire de Georges de Rham, nous avons une lettre, dans laquelle Lebesgue répond à une demande d'Élie Cartan, justement. Et mentionne le cours de 1924–25.

Une lettre de Lebesgue à Élie Cartan, 19 octobre 1925. La première partie de cette lettre n'a aucun rapport avec le sujet de cet article²⁹. En voici la deuxième partie :

Vous m'avez parlé, il y a quelque deux ans³⁰, du plan projectif complexe et vous m'avez demandé ce que c'est au point de vue de l'Analysis situs.

Dans mon cours de l'an dernier, après avoir exposé les travaux de Poincaré et de ses suivants, j'ai traité des exemples pris parmi les multiplicités que fournissent la géométrie et l'analyse et j'ai en particulier considéré le cas du plan projectif complexe. Voici les caractéristiques de cette variété (j'entends

²⁸ Cet article de l'Encyclopédie de Felix Klein semble n'avoir eu ni traduction ni analogue dans la version française dirigée par Jules Molk.

²⁹ Il existe quatre lettres de Lebesgue à Cartan. Les deux dont il est question dans cet article, qui ont déjà été publiées dans les fabuleuses notes de [40] (notes qui n'ont pas été conservées dans le livre [41]), une troisième, que l'on trouvera ici [14, Appendix] ou là [15], et une quatrième, non datée, à propos d'examens à l'école de physique-chimie.

³⁰ Avant, donc, que le « fils Cartan » suive le cours de Lebesgue.

les caractères qui permettent de la distinguer de certaines autres, mais qui ne sont pas, peut-être, suffisants pour la différencier de toutes les autres — car c'est là que nous en sommes en Analysis Situs).

D'abord elle est bilatère³¹.

Les nombres de Betti-Poincaré sont

$$BP_1 = BP_3 = 1; \quad BP_2 = 2;$$

il n'y a pas de coefficients de torsion³². Enfin le groupe fondamental se réduit à l'application identique. Ceci est curieux car, jusqu'au bout Poincaré avait pensé, espéré, que seules les variétés simplement connexes³³ auraient un tel groupe fondamental.

La division de cet espace en polyèdre à éléments simplement connexes ne parle guère à l'imagination; elle peut se faire en 4 sommets, 12 arêtes, 14 faces, 6 cases, 3 hypercases³⁴. C'est un polyèdre déjà très costaud; je veux essayer de vous en donner une idée.

Soient H_1, H_2, H_3 les 3 hypercases, chacune est homéomorphe à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1$, par définition même; les 3 frontières de ces hypercases sont 3 hypersphères $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, c'est-à-dire 3 espaces ordinaires à 3 dimensions E_1, E_2, E_3 ; dans chacun desquels il n'y a qu'un point à l'infini (espace de l'inversion). Mais les points de E_1, E_2, E_3 se correspondent 2 à 2 puisque les E servent à relier les H .

Imaginez dans E_i un tore T_i qui partage E_i en 2 parties. Nous aurons ainsi les parties A et B dans E_1 ; C et A dans E_2 ; B et C dans E_3 . Les lettres vous donnent la correspondance entre parties; pour fixer la correspondance entre points il suffit de fixer la correspondance pour les trois surfaces T_i qui se correspondent toutes trois point à point. Voici: sur chaque tore traçons un méridien, un parallèle et une hélice torique à un seul tour, on a ainsi m_i, p_i, h_i , la correspondance est

$$m_1 \equiv p_2 \equiv h_3$$

$$p_1 \equiv h_2 \equiv m_3$$

$$h_1 \equiv m_2 \equiv p_3$$

Maintenant, si vous voyez clairement, c'est que vous avez les yeux de l'esprit diablement³⁵ pénétrants.

Cordialement à vous

H. Lebesgue

Remarques. Le 19 octobre 1925, « mon cours de l'année dernière » n'a qu'une signification possible, il s'agit de celui de 1924–25.

³¹ C'est-à-dire orientable.

³² Voir la note 24. Pour $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $BR_i = b_i + 1$ et $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 = 1$ donnent les valeurs annoncées par Lebesgue.

³³ C'est-à-dire, homéomorphes à une sphère. Il n'est pas clair que Poincaré ait écrit quelque chose pour les dimensions plus grandes que 3.

³⁴ La terminologie est due à (en tout cas utilisée par) Poincaré.

³⁵ Cette lettre est très posée. Comme la « singulière étourderie » de la démonstration du théorème de Schoenflies (ici page 53), le polyèdre « costaud » et l'adverbe « diablement » sont du pur Lebesgue — que reconnaîtront les lecteurs de [40, 41] et [14, 15] !

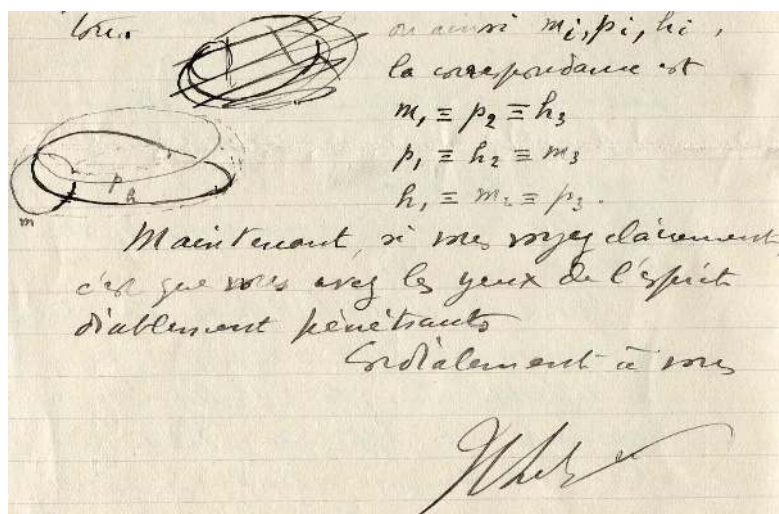


FIG. 7. La fin de la lettre

Il n'y a pas trace dans les notes prises par Henri Cartan du plan projectif complexe. Il n'est pas impossible que le jeune Cartan n'ait pas pris des notes très assidûment, ou même ait séché tel ou tel cours (nous l'avons dit, il y a une seule date dans le cahier). La dernière page des notes est une liste de références bibliographiques (reproduite ici sur la figure 5), il semble donc bien qu'il ait été là jusqu'au bout. Le résumé de cours ne mentionne que la dimension 3. Il est possible que Lebesgue ait réfléchi à cet exemple de dimension 4 sans en parler dans son cours.

Que savait-on de la topologie de l'espace projectif complexe ? De cette lettre nous apprenons que, vers 1923, Élie Cartan s'est renseigné auprès de Lebesgue sur la topologie de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$. D'où nous pouvons déduire deux informations : il s'y intéressait, d'une part, et le résultat n'était pas « bien connu », de l'autre.

Nous verrons ci-dessous qu'Élie Cartan commençait à mettre au point des méthodes qui permettraient bientôt d'étudier, non seulement le plan mais les espaces projectifs complexes — eux-mêmes comme cas particuliers d'une classe beaucoup plus étendue d'espaces symétriques complexes.

Quant au fait que le résultat n'était pas bien connu, il est un peu étonnant : cet exemple serait aujourd'hui l'un des tout premiers d'un livre de topologie. Constatons qu'il n'est pas mentionné dans les livres de topologie de l'époque (ceux de Kerékjártó [36] et de Veblen [62]). Constatons encore, avec un peu plus d'étonnement, qu'il ne l'est pas non plus, dix ou douze ans plus tard, dans celui d'Alexandroff et Hopf [10] et notons qu'il apparaît dans une des notes finales du Seifert et Threlfall [58, p. 318], où l'on apprend que le premier à avoir calculé l'homologie de $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ fut... Bartel Leendert van der Waerden, dans un article [64] de 1929³⁶.

³⁶ On connaît surtout aujourd'hui van der Waerden pour son livre d'algèbre [65, 66]. Pour un géomètre algébriste, étudier la topologie de l'espace projectif était quand même de toute première nécessité : penser aux théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes, parus quelques années

Pourtant, nous le verrons, les nombres de Betti de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ étaient bien connus de Georges de Rham en 1928 (voir la note 43).

Mais revenons à la lettre de Lebesgue à Cartan. Il est bien évident que Lebesgue, spécialiste des constructions géométriques, et Cartan, futur auteur de [21], savaient parfaitement que le plan projectif se décompose comme réunion d'un plan affine auquel est ajoutée une droite à l'infini, qui est elle-même une droite affine avec son point à l'infini

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^2 \cup \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

Nous lisons aujourd'hui cette décomposition comme une décomposition cellulaire. C'est aussi un cas particulier de cellules de Schubert qui, comme leur nom l'indique (ou ne l'indique pas), avaient été inventées par Hermann Schubert au XIX^e siècle (et furent utilisées par van der Waerden dans sa détermination de l'homologie de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ dans [64]). Avec une cellule de dimension 4, une de dimension 2 et une de dimension 0, les nombres de Betti et le groupe fondamental de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ sont évidents.

On pourra donc s'étonner de la complication de la description donnée par Lebesgue dans sa lettre...

Le plan projectif complexe et son tore central. Avec la pénétration que donnent aux yeux de notre esprit les plus de quatre-vingts ans écoulés et la familiarité avec les tores dans les variétés algébriques complexes³⁷, il est assez facile d'y voir clair même dans le polyèdre costaud de Lebesgue. Écrivons le plan projectif complexe comme quotient de la sphère S^5 , ensemble des points de coordonnées complexes homogènes $[x, y, z]$ normalisées par

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1.$$

Les équations

$$|x| = |y| = |z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

décrivent un tore de dimension 2, qui mérite le nom de « tore central » de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

La figure 8 représente le triangle image de l'application

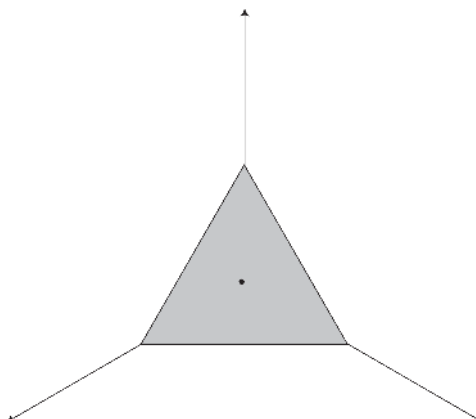
$$\mu : \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad [x, y, z] \longrightarrow (|x|^2, |y|^2, |z|^2).$$

Le tore central est l'image inverse du centre du triangle. Nous laissons aux lecteurs le plaisir d'identifier les espaces E_1 , E_2 et E_3 de la lettre de Lebesgue à partir de cette figure.

Quant à Élie Cartan, eh bien, à peine quelques années plus tard, dans son exposé du Congrès international de 1932 à Zurich [22], il faisait entrer les espaces projectifs complexes dans une longue liste d'espaces symétriques complexes... dont les méthodes dont il va être question maintenant permettent de calculer les nombres de Betti.

auparavant [42]. Dans un souci de complétude, signalons que van der Waerden redémontra ces années-là quelques-uns des résultats anciens d'Élie Cartan et lui écrivit à ce sujet (le 11 juin 1932), une lettre conservée dans le fonds 38J aux archives de l'Académie des sciences.

³⁷ Voir par exemple [11].

FIG. 8. Le tore central dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

Promenade

Georges de Rham — J'ai alors écrit à Lebesgue en lui demandant un entretien. Il a tout de suite accepté et m'a appelé à la fin de son cours au Collège de France.

Comme la conversation se prolongeait et que l'appariteur semblait s'impatienter, Lebesgue m'a proposé de le raccompagner à pied jusqu'à la rue Saint-Sabin³⁸, en me disant qu'on devait avoir des égards pour ce vieil appariteur qui avait introduit Liouville³⁹.

Lebesgue, tout en étant très encourageant, m'a signalé d'autres travaux d'Alexander que j'ignorais, parus en 1924 et 1925 dans les Proceedings of the Nat. Ac. of Sc., que j'ai trouvé[s] à la Bibliothèque de la Sorbonne⁴⁰. Ma déception a été grande d'y voir beaucoup de ce que j'avais fait et que je croyais nouveau.

Changeant de problème, j'ai alors essayé de démontrer l'hypothèse de Poincaré⁴¹. Espérant pouvoir y arriver, j'ai montré à Lebesgue une esquisse de mon projet de démonstration. Il m'a dit tout de suite que, pour une chose aussi importante, il fallait faire une rédaction complète, avec tous les détails, avant de rien annoncer. Je m'y suis acharné pendant des semaines, couvrant des dizaines et des dizaines de pages, jusqu'à ce que je me trouve devant une difficulté imprévue qui s'est révélée insurmontable. Découragé, je suis retourné voir Lebesgue. Il m'a conseillé de revenir à l'étude des invariants d'intersection et d'enlacement, en donnant un exposé clair

³⁸ Voir la figure 9 et la note 55.

³⁹ Joseph Liouville (1809–1882), fut nommé professeur au Collège de France en 1850. En 1926, il n'y avait pas d'« âge de la retraite » et le vieux monsieur pouvait bien travailler là depuis soixante ans... Cet appariteur, dit Lebesgue dans sa leçon inaugurale [37] du 7 janvier 1922,

se rappelle encore Liouville dans les dernières années de son professorat, vieillard qu'il fallait guider et qui, miracle renouvelé à chaque leçon, retrouvait toute sa vivacité de pensée et des allures de jeunesse dès qu'il était au tableau.

⁴⁰ Il y a six notes de James Alexander dans le volume 10 (1924) des Proceedings de la National Academy of Sciences, il y en a deux dans le volume 11 (de 1925) [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

⁴¹ De nombreux mathématiciens ont essayé de démontrer la conjecture de Poincaré. Bien avant de Rham, citons le cas de Max Dehn (voir [59]).

et rigoureux avec des exemples. Il m'a prêté un tiré à part de l'exposé de H. Weyl sur l'Analysis situs combinatoire qui m'a été très utile⁴².

Avant la fin de mon séjour à Paris, Lebesgue me conseilla de rédiger une Note qu'il fit publier dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences⁴³. J'avais alors un plan bien établi pour une thèse. Il s'agissait d'en achever la rédaction, ce qui était un gros travail et me prit beaucoup de temps, d'autant plus que j'avais dès septembre 1928 une lourde charge d'enseignement secondaire à Lausanne. [55, p. 24]



FIG. 9. L'immeuble 35 bis rue Saint-Sabin, qu'habitait Lebesgue, dans le XI^e arrondissement de Paris, près du métro Bréguet - Sabin

7. Élie Cartan et l'Analysis situs

Pendant ce temps, Élie Cartan, qui s'était documenté, comme nous en avons vu des preuves, s'était mis à la topologie. Pour résumer la situation nous utilisons

⁴² Il s'agit de [70].

⁴³ Il s'agit de la note [49], qui fut présentée à l'Académie des sciences par Édouard Goursat le 12 mars 1928. Hermann Weyl avait montré (dans l'article [70]) que la forme d'intersection d'une variété de dimension 4 est un invariant topologique. De Rham signala trois variétés avec les mêmes nombres de Betti et des formes non isomorphes (sommes connexes de deux plans projectifs complexes orientés différemment ou pas, produit de deux sphères) et proposa des invariants de torsion pour les variétés de dimension $4k - 1$. Voir aussi la note 52.

l'article [54] de de Rham déjà cité dans les promenades. À cette période, grâce aux efforts conjugués d'Hermann Weyl et d'Élie Cartan, l'étude (jusque-là plutôt locale) des groupes de Lie se mit à soulever des problèmes globaux. Élie Cartan avait, depuis longtemps, étudié les représentations linéaires des groupes.

Hermann Weyl chercha à prolonger ces travaux pour démontrer un résultat de complète réductibilité dans le cas général d'un groupe de Lie semi-simple.

Le cas compact fut traité facilement par un désormais classique procédé de moyenne, qui permit à Hermann Weyl de montrer que la représentation était unitaire. Pour le cas général, et grâce à un théorème de Cartan, on sait que la représentation adjointe d'une forme réelle du groupe est orthogonale. Il reste à montrer que le groupe réel est compact et donc, comme c'est un revêtement du groupe adjoint, il suffit de démontrer que son groupe fondamental est fini. Ce que fit Hermann Weyl dans une série d'articles publiés par *Math. Z.* en 1925–26 (et reproduits dans [71, pp. 543–647]) — et ce résultat fut une des sources des recherches d'Élie Cartan en topologie dans les années 1920.

Promenade

Georges de Rham — En utilisant sa théorie des espaces riemanniens symétriques, il [Cartan] démontre que tout groupe de Lie simplement connexe est homéomorphe au produit d'un sous-groupe compact maximal par un espace euclidien [...]. Il en résulte que, pratiquement, les propriétés topologiques d'un groupe se ramènent à celles d'un sous-groupe compact maximal. Pour un groupe compact semi-simple G , outre le théorème de Weyl affirmant que $\pi_1(G)$ est fini, Cartan montre que $\pi_2(G)$, le second groupe d'homotopie, se réduit à zéro. Il en déduit que les deux premiers nombres de Betti de G sont nuls, et remarque que, par contre, le 3^{ème} ne peut pas être nul. [54, p. 644]

8. Élie Cartan et la topologie des groupes de Lie

Ici nous arrivons à l'année 1928 et à la note [20]. Le résultat était nouveau, frappant et spectaculaire : on en déduit par exemple que les sphères de dimensions plus grandes que 3 ne peuvent pas être des groupes de Lie⁴⁴. Mais comment Cartan démontrait-il donc que ce troisième nombre de Betti n'est pas nul ?

Il y en a toujours une [intégrale] du troisième ordre. Si l'on choisit la base infinitésimale du groupe, ce qui est toujours possible[,] de manière que les constantes de structure c_{ijk} forment un trivecteur, cette intégrale est

$$\iiint \sum^{i,j,k} c_{ijk} \omega_i \omega_j \omega_k.$$
 Étendue à la variété à trois dimensions représentative d'un sous-groupe simple à trois paramètres de G , elle a une valeur différente de zéro. *Le troisième nombre de Betti de l'espace d'un groupe semi-simple clos n'est donc jamais nul.* [20, p. 197]

Autrement dit : il y a une 3-forme différentielle sur le groupe dont l'intégrale sur les sous-groupes de dimension 3 n'est pas nulle, donc il y a des classes d'homologie de dimension 3 non triviales. Ceci peut sembler aujourd'hui un raisonnement évident

⁴⁴ Quelques années plus tard, en 1936, André Weil par exemple considérait Élie Cartan comme un spécialiste de la topologie combinatoire et en particulier des questions liées aux sphères, comme le montre une lettre qu'il lui adressa et que l'on trouve dans [13, p. 474].

et une simple application de la formule de Stokes. Ce ne l'était pas à l'époque. Bien sûr la définition des nombres de Betti par Betti (voire par Riemann) vient des périodes des intégrales abéliennes sur les courbes. Nous allons voir que la référence aux courbes algébriques est explicite dans la note d'Élie Cartan. Bien sûr, il y a un paragraphe (plutôt sybillin) sur ce sujet dans l'*Analysis situs* de Poincaré (le § 7). Mais dire que l'idée que l'on peut étudier la topologie algébrique via les formes différentielles est implicite dans Poincaré⁴⁵ semble très exagéré. En effet, d'une part la différentielle extérieure n'apparaît pas vraiment (en tout cas pas explicitement), mais surtout il n'y a ni mention ni utilisation (ni implicitement ni explicitement) de quoi que ce soit qui ressemble à la formule de Stokes. Au moment où l'on attend celle-ci, c'est une déformation à un paramètre d'un cycle qui est invoquée. Il est difficile d'admettre que Poincaré a raté ceci⁴⁶, mais c'est pourtant le cas.

Mais revenons à Élie Cartan. Il semble donc bien que le résultat que nous venons de mentionner soit la toute première application hors géométrie algébrique de ces idées. Ici, Élie Cartan mobilisa, au service de la démonstration d'un résultat global, sa connaissance, à la fois de la structure des groupes et des formes différentielles.

Promenade

Georges de Rham — Déjà dans ses travaux d'avant 1900, E. Cartan avait introduit et utilisé ce qu'il a appelé ensuite les formes différentielles extérieures. Dans son livre de 1922, *Leçons sur les invariants intégraux*, il en expose systématiquement la théorie. Il définit en particulier l'opération appelée d'abord dérivée extérieure, puis, suivant Kaehler, *différentielle extérieure*⁴⁷, qui fait passer d'une forme de degré p à une forme de degré $p + 1$. Il démontre que la différentielle extérieure seconde est toujours nulle⁴⁸, et que réciproquement, si la différentielle extérieure d'une forme de degré p est nulle, dans $\mathbf{R}^n$, cette forme est la différentielle⁴⁹ d'une forme de degré $p - 1$. [54, p. 644]

Il était alors naturel — mais personne n'y avait pensé avant — de considérer des homologies entre formes. [54, p. 645]

À cette époque, travaillant en vue d'une thèse sur l'*Analysis situs*, j'avais étudié les mémoires de Poincaré, et pendant un séjour d'études à Paris, où j'ai bénéficié des précieux conseils et encouragements d'Henri Lebesgue, je m'étais familiarisé avec le calcul différentiel extérieur en suivant un cours d'Élie Cartan et en lisant ses *Leçons sur les invariants intégraux*. Les rares mathématiciens qui s'occupaient alors de topologie ne connaissaient guère le calcul différentiel extérieur. [54, p. 645]

⁴⁵ Comme par exemple dans [30].

⁴⁶ Si difficile que même Georges de Rham, qui dit très nettement dans [54, p. 646] que Poincaré n'a pas introduit la différentielle extérieure, même sous un autre nom, et qu'il n'a pas mentionné la formule de Stokes, avait renvoyé à l'*Analysis situs* de Poincaré à propos de la formule de Stokes dans son livre [52, Note 1, p. 34] paru vingt ans plus tôt.

⁴⁷ Élie Cartan avait appelé dérivée extérieure, et noté ω' la dérivée de la forme ω . La notation d est due à Erich Kähler [35], peu après le moment dont il est question ici.

⁴⁸ Le célèbre $d \circ d = 0$, qui est trivial, comme dit de Rham lui-même [54, p. 646], mais qui crée la cohomologie.

⁴⁹ Ce théorème d'Élie Cartan a été doté par lui du nom de Poincaré. Comme l'explique de Rham [54, p. 646], il n'avait rien à voir avec Poincaré... mais se trouvait dans Volterra [63] — sans qu'Élie Cartan le sût.

[...] je me suis rappelé le cours que vous [Élie Cartan] avez donné en 1926–27 sur les espaces de Riemann. C'est là que je me suis initié aux formes différentielles extérieures, et comme j'étudiais en même temps la théorie topologique des intersections, l'analogie entre les deux théories devait inévitablement me frapper⁵⁰.

À côté du Collège où j'enseignais [à Lausanne], se trouvait la petite Bibliothèque de l'École d'ingénieurs, où je pouvais jeter un coup d'œil sur les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Un jour, *ce fut la chance de ma vie*⁵¹, je tombai sur la Note d'Élie Cartan, intitulée « Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos », signalant quelques problèmes d'Analysis situs, dont il montrait la grande importance, mais qui n'étaient pas résolus. Cette Note mit mon cerveau en ébullition et le lendemain j'étais sûr d'avoir la solution. Il s'agissait de démontrer deux théorèmes qui permettent de définir les nombres de Betti à l'aide des formes différentielles. [55, p. 25]

9. Élie Cartan et le théorème de de Rham

Il y avait de quoi mettre un cerveau en ébullition : la note [20] ne s'arrêtait pas, en effet, à la non nullité du troisième nombre de Betti du groupe. Élie Cartan n'était certes pas un débutant, il avait à son actif de nombreux résultats de géométrie. Il était âgé, en 1928, de cinquante-neuf ans, et il eut une idée remarquable. Souhaitant compléter son énoncé sur la non nullité du troisième nombre de Betti par un énoncé sur la valeur de ce nombre, il remarqua qu'il ne pourrait le démontrer avec certitude...

[...] que si l'on avait démontré le théorème suivant.

Théorème A. *Si une intégrale de différentielle exacte d'ordre p , définie dans l'espace clos $\mathcal{E}$, est nulle pour tout domaine d'intégration fermé à p dimensions, elle résulte, par application de la formule de Stokes généralisée, d'une intégrale multiple d'ordre $p - 1$ (définie et régulière dans tout l'espace). [20, p. 197]*

En d'autres termes, une forme fermée (attention, « exacte » dans Cartan est ce que nous appelons aujourd'hui fermée) dont les intégrales sur tous les cycles sont nulles est exacte. Mais ce n'est pas tout.

D'autre part, pour qu'on pût déduire du nombre des intégrales multiples considérées des conclusions précises sur les nombres de Betti de l'espace, il faudrait être également certain du théorème suivant, vérifié dans la théorie des courbes algébriques.

Théorème B. *Si l'on considère h variétés fermées à p dimensions entre lesquelles n'existe aucune homologie, il existe h intégrales de différentielles exactes telles que le tableau carré des valeurs de ces intégrales étendues aux h variétés ait un déterminant différent de zéro. [20, p. 198]*

⁵⁰ Lettre de Georges de Rham à Élie Cartan, 16 avril 1946 (fonds 38J, archives de l'Académie des sciences). Les archives de Georges de Rham contiennent des notes prises à deux cours d'Élie Cartan, sur les invariants intégraux et sur les espaces de Riemann, me signale Manuel Ojanguren.

⁵¹ Souligné par de Rham.

En termes modernes, l'intégration établit une dualité entre les formes fermées et les sous-variétés fermées. En termes encore plus anachroniques, c'est le fait que l'on peut définir des groupes de (co-)homologie à partir des formes différentielles, et que la forme bilinéaire

$$H_k(\mathcal{E}) \times H^k(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{R} \quad (V, \omega) \longmapsto \int_V \omega$$

que la formule de Stokes définit est non dégénérée. De ses conjectures, Cartan déduit par exemple les nombres de Betti (le polynôme de Poincaré) du groupe unitaire $U(n)$. Rappelons que ce n'était pas une évidence, à un moment où même les nombres de Betti de l'espace projectif complexe n'étaient pas dans les têtes de tous les mathématiciens.

Promenade

Georges de Rham — Aux yeux de Lebesgue, les théorèmes énoncés par E. Cartan dans sa Note de 1928 sur les nombres de Betti présentaient le même degré d'évidence que le théorème de Jordan sur les courbes fermées planes, mais tout autant que ce dernier, ils exigeaient une démonstration. [55, p. 25]

Au sujet des conjectures, il [Élie Cartan] avait consulté Lebesgue qui lui avait assuré qu'elles n'étaient nullement démontrées, bien qu'elles puissent présenter une certaine évidence analogue au théorème de Jordan sur les courbes planes. [54, p. 647]

Peu après, j'écrivis à Lebesgue en lui indiquant l'esquisse de ma démonstration. Il me répondit qu'avant de publier, il fallait être bien sûr de ma démonstration, ajoutant : « ... or vous vous basez sur des théorèmes de Poincaré mal démontrés ou pas démontrés du tout, comme : toute variété admet une subdivision polyédrale. »

En fait, j'admettais l'existence d'une subdivision polyédrale, sans laquelle, à cette époque, on ne savait pas démontrer le théorème de dualité de Poincaré. Je lui répondis que j'allais encore tout rédiger complètement pour en faire un nouveau chapitre de ma thèse. Quelques mois plus tard, je lui ai envoyé la Note « Intégrales multiples et Analysis situs » qui fut, grâce à lui, publiée dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences⁵².

Mais il me fallut encore plusieurs mois pour achever la rédaction de ma thèse. [55, p. 25]

Permettez-moi de vous [Élie Cartan] adresser mes vifs remerciements pour l'envoi de vos mémoires. Comme ces questions m'intéressent beaucoup, je suis particulièrement content de pouvoir les étudier. Mes notes sont développées dans un travail assez étendu, presque achevé, qui fera, j'espère, une thèse. J'y résous un autre problème sur les intégrales, celui de déterminer les périodes d'une intégrale de différentielle exacte qui est égale au produit de deux autres, connaissant les périodes des dernières et un schéma de la variété. On est conduit à des invariants

⁵² Il s'agit de la note [50], dans laquelle de Rham annonça deux théorèmes, équivalents aux théorèmes A et B de Cartan cités ci-dessus. C'est peut-être grâce à Lebesgue que la note fut publiée, mais c'est Jacques Hadamard qui la présenta à l'Académie des sciences, le 24 juin 1929. Voir aussi la note 43. S'il n'est pas certain que Lebesgue a assisté à la séance de l'Académie des sciences le 24 juin 1929, il semble bien qu'il avait signé la liste d'émargement le 12 mars 1928 : faire présenter la note par un autre académicien, Goursat ou Hadamard, devait être un point de déontologie pour lui.

topologiques distincts des nombres de Betti, et il semble que votre méthode permet de les déterminer directement, aussi facilement que les nombres de Betti⁵³.

Enfin, aux vacances de Pâques 1930, je lui [Lebesgue] apportais mon manuscrit, écrit à la main de ma plus belle écriture! [55, p. 25]

10. Élie Cartan lit la thèse de de Rham

Lebesgue écrit à Cartan, le 14 avril 1930. Lebesgue habitait, nous l'avons dit, à Paris, rue Saint-Sabin, mais Élie Cartan habitait, lui, au Chesnay, près de Versailles. Il était donc naturel qu'ils s'écrivissent.

Lundi⁵⁴

Mon cher Cartan,

M. de Rham qui, comme vous vous rappelez, s'occupe d'*Analysis situs*, me remet le manuscrit de sa Thèse dont le dernier chapitre est consacré aux théorèmes que vous avez énoncés sur les intégrales multiples. Accepteriez-vous d'examiner cette thèse? Le manuscrit très soigné est de lecture facile matériellement et la compréhension facilitée par le fait que M. de Rham a fait un exposé complet n'obligeant pas à se reporter aux mémoires (en partie faux, en partie rectifiés, en partie contradictoires) de Poincaré.

Si oui et si vous n'êtes pas en ce moment parti en vacances voulez-vous donner rendez-vous à M. de Rham (50 rue des Écoles, Paris V)⁵⁵ qui reste encore à Paris jusque samedi sans doute. Il irait vous porter son manuscrit et vous pourriez l'interroger.

Cordialement à vous

H. Lebesgue

Élie Cartan nota sur la lettre : « jeudi 17 à 14h30 ».

Promenade

Georges de Rham — À sa demande, Élie Cartan, avec qui je n'avais pas encore eu de contact personnel, me convoqua chez lui à Versailles⁵⁶. [55, p. 25] Au cours de mon premier entretien avec Élie Cartan, à qui Lebesgue m'avait envoyé porter le manuscrit de ma thèse, il m'a dit qu'il avait été amené à tout cela par une idée qu'il qualifiait de baroque : il avait voulu montrer que la sphère est simplement connexe *en partant du groupe*. [54, p. 647]

⁵³ Lettre de Georges de Rham à Élie Cartan, 5 février 1930.

⁵⁴ C'est grâce au cachet du bureau de poste de la rue Cujas où elle a été postée que nous connaissons la date de cette carte-lettre.

⁵⁵ Le numéro 50 de la rue des Écoles se trouve exactement en face de l'entrée du Collège de France. Nous ignorons si Georges de Rham vivait à cette adresse lors de ses séjours parisiens de 1926–28. Si c'était le cas, il devait avoir le temps de réfléchir à ce que Lebesgue lui avait raconté lorsqu'il revenait de la rue Saint-Sabin à la rue des Écoles...

À ceux qui savent que Georges de Rham avait d'autres cordes à son arc que les mathématiques, signalons que le magasin *le Vieux campeur*, qui occupe les rez-de-chaussée de ce pâté de maisons n'a été fondé qu'en 1941... et qu'il ne fut sans doute jamais le fournisseur d'un alpiniste suisse aussi renommé que le fut de Rham.

⁵⁶ Au Chesnay, nous l'avons dit.



FIG. 10. 50 rue des Écoles

Il voulut bien accepter d'examiner mon travail et fut ensuite à la fois rapporteur et président du jury de ma thèse⁵⁷. Après qu'elle ait été publiée dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*⁵⁸, la soutenance eut lieu en juin 1931. [55, p. 25]

11. Épilogue

Georges de Rham soutint donc sa thèse en juin 1931. Élie Cartan avait été élu membre de l'Académie des sciences, le 9 mars, à l'âge de 61 ans — plutôt tard⁵⁹.

Si le carton contenant le rapport sur la thèse de de Rham semble avoir disparu des Archives Nationales [43], le rapport d'Élie Cartan n'a pas été complètement perdu puisqu'il est reproduit dans les *Œuvres* de de Rham [56, pp. 87–89] à la suite de sa thèse. Laissons donc la parole à Élie Cartan :

Le travail présenté comme thèse par M. de Rham apporte des contributions importantes à l'Analysis situs combinatoire et en particulier à l'Analysis situs des variétés closes à n dimensions. D'une part il présente d'une manière nouvelle les notions et théorèmes classiques, ce qui permet de simplifier notablement la théorie des intersections et des coefficients d'enlacement et d'étendre la première théorie aux variétés unilatères, ce qui n'avait pas été fait jusqu'ici ; il contient aussi toute une série de théorèmes nouveaux sur l'enlacement des chaînes d'ordre fini, théorèmes qui fournissent de nouveaux invariants topologiques. D'autre part, il étudie d'une manière

⁵⁷ Le jury de la thèse de Georges de Rham était constitué de Gaston Julia, Paul Montel et Élie Cartan. Deux lettres de de Rham à Cartan, datées des 22 et 23 septembre 1930, sont consacrées à la formation de ce jury. Lebesgue, qui n'était pas professeur à la Sorbonne, ne pouvait pas en faire partie. C'est à lui que de Rham dédia sa thèse.

⁵⁸ C'est l'article [51].

⁵⁹ La moyenne d'âge (lors de l'élection) des dix élus de la section de géométrie entre 1900 et 1942 est de 50 ans.

complète les relations qui existent entre les nombres de Betti d'une variété close et les intégrales de différentielle exacte existant à l'intérieur de cette variété; les théorèmes fondamentaux à cet égard avaient été énoncés d'une manière précise par M. Cartan en 1928; M. de Rham en a ajouté d'autres mettant en évidence le parallélisme qui existe entre la théorie des intersections et la multiplication extérieure des éléments d'intégrales de différentielle exacte existant dans la variété. Tous ces théorèmes semblent susceptibles d'applications nombreuses et importantes.

Remerciements à

Arnaud Chéritat, qui a adapté sa figure du collier d'Antoine à ma contrainte « noir-et-blanc »⁶⁰.

Manuel Ojanguren pour l'information sur les archives de de Rham.

Claude Sabbah qui m'a prêté ses notes du pénultième cours d'Henri Cartan (en 1973–74).

12. Références

- [1] J. W. ALEXANDER – « Note on two three dimensional manifolds with the same group », *Trans. Amer. Math. Soc.* **20** (1919), p. 339–342.
- [2] ———, « On the subdivision of 3-space by a polyhedron », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 6–8.
- [3] ———, « An example of a simple connected surface bounding a region which is not simply connected », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 8–10.
- [4] ———, « Remarks on a point set constructed by Antoine », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 10–12.
- [5] ———, « New topological invariants expressible as tensors », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 99–101.
- [6] ———, « On certain new topological invariants of a manifold », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 101–103.
- [7] ———, « Topological invariants of manifolds », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 493–494.
- [8] ———, « On the intersection invariants of a manifold », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **11** (1925), p. 143–146.
- [9] ———, « Note on a theorem by H. Kneser », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **11** (1925), p. 250–251.
- [10] P. ALEXANDROFF & H. HOPF – *Topologie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Springer-Verlag, Berlin, 1935.
- [11] M. AUDIN – *Torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Math., Birkhäuser, 2004, Revised and enlarged edition.
- [12] ———, *Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après*, Springer, 2009.
- [13] ———, *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil*, Documents mathématiques, Société mathématique de France, Paris, 2011.
- [14] ———, *Fatou, Julia, Montel, the Great Prize of Mathematical sciences of 1918, and Beyond*, Lecture Notes in Mathematics, 2014, Springer, 2011.
- [15] ———, « Une lettre de Lebesgue à Élie Cartan », (2011), <http://arxiv.org/abs/1109.0716>.
- [16] ———, « Le séminaire Julia », (2013), en préparation.
- [17] L. BROUWER – « Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. », *Math. Ann.* **70** (1910), p. 161–165.

⁶⁰ Toutes les autres figures et les photographies (prises à Paris, bien sûr) me sont dues.

- [18] ———, « On looping coefficients », *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings* **15** (1912), p. 113–122.
- [19] É. CARTAN – *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [20] ———, « Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos », *C. R. Acad. Sci. Paris* **187** (1928), p. 196–198.
- [21] ———, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [22] ———, « Les espaces riemanniens symétriques », *Verh. Internat. Math.-Kongr.* **1**, 152–161 (1932), 1932.
- [23] S. CHATTERJI & M. OJANGUREN – « A glimpse on the de Rham era », in *Schweizerische Mathematische Gesellschaft 1910*, European math. Soc., 2010.
- [24] A. CHÉRITAT – « Le collier d'Antoine », *Images des Mathématiques* (2009), En ligne <http://images.math.cnrs.fr/Le-collier-d-Antoine.html>.
- [25] D. VAN DALEN – *Correspondence of L.E.J. Brouwer*, Springer, 2011.
- [26] M. DEHN & P. HEEGAARD – « Analysis situs », in *Enzyklop. d. math. Wissensch. III₁*, 1907, p. 153–220.
- [27] L. FÉLIX – *Message d'un mathématicien : Henri Lebesgue*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1974.
- [28] H. GISPERT – « Sur les fondements de l'analyse en France », *Arch. Hist. Exact Sci.* **28** (1983), p. 37–106.
- [29] J. HADAMARD – *Œuvres, volume 2*, CNRS, Paris, 1968.
- [30] K. HESS – « A history of rational homotopy theory », in [33] (1999), p. 757–796.
- [31] H. HOPF – « Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. », *Math. Ann.* **104** (1931), p. 637–665.
- [32] W. HUREWICZ & H. WALLMAN – *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series, v. 4, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.
- [33] I. JAMES (éd.) – *History of topology*, North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [34] C. JORDAN – *Analyse*, Cours de l'École polytechnique, 1893, Deuxième édition.
- [35] E. KÄHLER – « Über die Integrale algebraischer Differentialgleichungen », *Abhandlungen Hamburg* **7** (1930), p. 355–385.
- [36] B. KERÉKJÁRTÓ – *Vorlesungen über Topologie I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, VIII, Springer, Berlin, 1923.
- [37] H. LEBESGUE – « Humbert et Jordan, Roberval et Ramus Les professeurs de mathématiques du Collège de France », *L'enseignement Math. (2)* **3** (1957), p. 188–215, Leçon d'ouverture professée le 7 janvier 1922.
- [38] ———, *Œuvres scientifiques, Volume I*, L'enseignement mathématique, Genève, 1972.
- [39] ———, *Œuvres scientifiques, Volume IV*, L'enseignement mathématique, Genève, 1973.
- [40] ———, « Lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **12** (1991), p. 1–506.
- [41] ———, *Les lendemains de l'intégrale, lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel*, Vuibert, Paris, 2004.
- [42] S. LEFSCHETZ – *L'Analysis situs et la géométrie algébrique*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
- [43] J. LELOUP – « L'entre-deux guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France », Thèse, Paris, 2009.
- [44] S. MANDELBROJT & L. SCHWARTZ – « Jacques Hadamard (1865–1963) », *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1965), p. 107–129.
- [45] V. MAZ'YA & T. SHAPOSHNIKOVA – *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, EDP-Sciences, Les Ulis, 2005, traduit de l'anglais par Gérard Tronel.
- [46] H. POINCARÉ – « Sur les périodes des intégrales doubles », *J. Math. Pures Appl. (6)* **2** (1906), p. 135–189.
- [47] ———, *Œuvres, Volume VI*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [48] C.-F. RAMUZ – *Paris, Notes d'un Vaudois*, Fondation C.F. Ramuz, Éditions de l'Aire, Lausanne, 1978.
- [49] G. DE RHAM – « Sur la dualité en analysis situs », *C. R. Acad. Sci. Paris* **186** (1928), p. 670–672.

- [50] ———, « Intégrales multiples et analysis situs », *C. R. Acad. Sci. Paris* **188** (1929), p. 1651–1652.
- [51] ———, « Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions », *J. Math. Pures Appl.* (9) **10** (1931), p. 115–200.
- [52] ———, *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Actualités Sci. Ind., no. 1222 = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago III, Hermann et Cie, Paris, 1955.
- [53] ———, *Lectures on introduction to algebraic topology*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1969, Notes by V. J. Lal, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 44.
- [54] ———, « L'Œuvre d'Élie Cartan et la topologie », in *Élie Cartan, 1869–1951 (hommage de l'Acad. République Socialiste de Roumanie à l'occasion du centenaire de sa naissance)*, Editura Acad. R.S.R., Bucharest, 1975, p. 11–20.
- [55] ———, « Quelques souvenirs des années 1925–1950 », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **1** (1980), p. 19–36.
- [56] ———, *Œuvres mathématiques*, L'Enseignement mathématique, Genève, 1981.
- [57] L. SCHWARTZ – *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris, 1997.
- [58] H. SEIFERT & W. THRELFALL – *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1934.
- [59] J. STILLWELL – « Max Dehn », in [33] (1999), p. 965–978.
- [60] J. TANNERY (éd.) – *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. T. 2*, Hermann, Paris, 1910.
- [61] H. TIEPPE – « Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten », *Monatsh. für Math. u. Phys.* **19** (1908), p. 1–118.
- [62] O. VEBLER – *The Cambridge Colloquium, 1916. Part II : O. Veblen. Analysis Situs. (Amer. Math. Soc., Colloquium Lectures, vol. V.)*, Amer. Math. Soc., New York, 1922.
- [63] V. VOLTERRA – « Delle variabili complesse negli iperspazi », *Atti della Reale Accademia dei Lincei* (4) **5** (1889), p. 158–165 et 291–299.
- [64] B. VAN DER WAERDEN – « Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie », *Math. Ann.* **102** (1929), p. 337–362.
- [65] ———, *Moderne Algebra*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1930.
- [66] ———, *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1931.
- [67] A. WEIL – « Biographie de Jean Delsarte », in *Œuvres complètes de Jean Delsarte*, C.N.R.S., 1971.
- [68] ———, *Œuvres scientifiques, Volume I*, Springer, 1979.
- [69] ———, *Souvenirs d'apprentissage*, Vita Mathematica, vol. 6, Birkhäuser, Basel, 1991.
- [70] H. WEYL – « Análisis situs combinatorio », (1924), reproduit dans les Œuvres complètes.
- [71] ———, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1968.
- [72] H. WHITNEY – « Moscow 1935 : topology moving toward America », in *A century of mathematics in America, Part I*, Hist. Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, p. 97–117.