

QUESTIONS À V.I. ARNOLD

Interview réalisée par Michèle AUDIN et Patrick IGLESIAS

La Gazette : Quel est celui de vos résultats que vous estimez le plus important? Comment en avez-vous eu l'idée, comment l'avez-vous trouvé?

V. Arnold : Je ne sais pas ce qu'est l'"importance" d'un résultat mathématique. C'est probablement une quantité inversement proportionnelle à la difficulté technique. Peut-être le plus important de ce que j'ai fait en mathématique n'est pas généralement associé à mon nom. Je vais donc simplement choisir un résultat que j'aime.

Il y a quelques mois, Hironaka m'a raconté une méthode d'analyse des courbes algébriques réelles qui lui a plu. Cette méthode est basée sur la topologie des variétés de dimension 4. La variété de dimension 4 qu'on associe à la courbe algébrique dans le plan projectif complexe est le revêtement double du plan, ramifié le long de la courbe. Hironaka ignorait que c'est moi qui avais inventé cette méthode [1].

Ce n'est pas sa faute — l'usage d'attribuer un résultat au dernier des auteurs qui l'a utilisé ou à celui par lequel on l'a appris contribue beaucoup aux progrès des sciences. Je ne cite pas d'autres exemples parce que je suis très reconnaissant aux mathématiciens et physiciens qui ont utilisé et continué mes recherches. L'Amérique ne porte pas le nom de Colomb. Nabokov a dit qu'on rend le plus grand hommage à Tolstoï non pas en citant son nom mais en évoquant celui d'Anna Karenina.

Revenons aux courbes algébriques. Je me souviens que c'est I.G. Petrovsky, le recteur de l'Université de Moscou et le créateur de la théorie des variétés algébriques réelles [2,3] qui m'a demandé de lire la thèse de D.A. Goudkov [4]. Goudkov a résolu la question du 16ème problème de Hilbert sur les configurations des ovals des courbes algébriques réelles de degré 6 dans le plan projectif. Dans cette thèse très difficile,

que je n'ai jamais lue, j'ai été frappé par une congruence modulo 8, conjecturée par Goudkov :

$$p - m \equiv k^2 \pmod{8},$$

où p est le nombre des ovals d'une courbe lisse de degré $2k$ "contenus à l'intérieur" d'un nombre pair d'ovales, et m celui contenu à l'intérieur d'un nombre impair d'ovales, pourvu que le nombre total des ovals atteigne sa valeur maximale. Cette valeur maximale est égale à $g + 1$ où $g = (n - 1)(n - 2)/2$ est le genre de la courbe, ainsi que l'a montré Harnack [5]. Les courbes de degré n avec $g + 1$ ovals existent pour tout n , elles ont été appelées M-courbes (M pour maximal) par Petrovsky.

Goudkov a trouvé toutes les configurations des 11 ovals des M-courbes de degré 6 (voir figure).

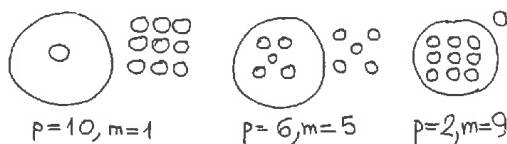


Figure 1 : les onze ovals des M-courbes

La congruence de Goudkov a été confirmée par toutes les M-courbes connues jusqu'à ce moment. Mais on ne voyait aucune relation entre les configurations des ovals dans le plan projectif et l'arithmétique. Je savais, des travaux de Rokhlin et de Milnor, qu'en topologie des variétés différentiables de dimension 4, les congruences modulo 16 jouent un rôle décisif, comme celles modulo 8 en théorie des formes quadratiques (que j'ai apprise dans l'*Arithmétique* magnifique de Serre). J'ai donc immédiatement commencé à chercher une variété de dimension 4. J'ai pensé d'abord au complément de la courbe complexe dans le plan projectif complexe, et à son image dans l'espace quotient $S^4 = \mathbb{CP}^2/\text{conj}$, où conj est

la conjugaison complexe. Après quelques semaines j'ai commencé à étudier les revêtements (en m'inspirant des articles alors récents de Rokhlin, Atiyah, Bott et Singer).

Ce mois de janvier, il faisait très froid à Moscou, et le chauffage (qui est centralisé et monopolisé par le gouvernement) était en panne (comme c'est arrivé quelques fois après, et va sans doute arriver dans un futur proche). Ma main ne pouvait plus tenir le crayon, je ne pouvais travailler qu'en skiant dans les forêts qui entourent Moscou. Quelques jours après je compris que le chemin vers la démonstration de la conjecture de Goudkov était barré par un lemme que je ne savais pas démontrer (on peut le trouver dans [1]). J'avais en ce temps un très jeune étudiant brillant, A.N. Varchenko, qui surmontait les obstacles techniques sans s'arrêter. Je lui ai posé ce problème parmi d'autres. Moins d'une semaine après, il me dit qu'il a démontré le lemme. L'obstacle n'existant plus j'ai continué sans peur et j'ai fini la démonstration en peu de temps.

La température est montée, et le chauffage a été réparé. J'ai donc pu vérifier les démonstrations en les écrivant. Tout allait bien sauf le lemme, car la démonstration de Varchenko était fautive. Je ne pouvais plus reculer, il fallait franchir l'obstacle. Je l'ai fait en quelques jours de travail intense, et j'ai ainsi démontré la conjecture de Goudkov modulo 4.

Sans la démonstration fautive de Varchenko, je ne serais jamais arrivé jusqu'au bout parce que je doutais du lemme, et je n'aurais pas eu le courage de tirer d'un lemme non démontré les corollaires nécessaires. Sans ces corollaires je n'aurais pas surmonté les difficultés techniques de la démonstration du lemme. Donc, la source essentielle du résultat final était une erreur!

Le résultat le plus important de tout ça n'était pas la conjecture de Goudkov elle-même, mais plutôt la découverte des liens inattendus entre la géométrie algébrique des courbes réelles, la topologie des variétés de dimension 4 et l'arithmétique des formes quadratiques. A partir de ce moment, le développement de la théorie a été très

rapide. Rokhlin, à qui j'ai raconté la théorie, a presque immédiatement fini la démonstration de la conjecture de Goudkov modulo 8. Le développement plus récent a été présenté aux Congrès Internationaux des Mathématiciens par Kharlamov (1978), Viro (1983), Khovanskii (1983), Nikoulin (1986) Shustin (1990). Malheureusement il n'existe pas d'exposé général de la théorie sous forme de livre (on peut consulter toutefois l'article [6] et les commentaires de Kharlamov dans les *Œuvres* de Petrovsky en russe).

En 1979, j'ai écrit [6] que parmi les 268282855 arbres décrivant les configurations des 22 ovales, au moins 10 et au plus 144 sont réalisables par les M-courbes de degré 8. Aujourd'hui ces nombres sont devenus 78 et 91, mais toutes les configurations possibles des M-courbes de degré 8 ne sont pas encore trouvées.

L'idée essentielle de [1] était que le complexifié de la notion de variété à bord $f(x, y) \geq 0$ est la notion de revêtement double ramifié $f(x, y) = z^2$. Je me demande toujours quels seront les "complexifiées" des notions topologiques dérivées de la notion de bord comme celle d'homologie et de cobordisme. Ce programme n'a été réalisé que pour les cobordismes lagrangiens et legendriens dans les géométries symplectique et de contact.

G : Vous avez eu et avez de nombreux élèves, et plus généralement de nombreux mathématiciens ont été influencés par vos idées. Pouvez-vous nous dire comment vous-même avez été formé, qui ont été vos maîtres?

V. Arnold : Je suis mathématicien de quatrième génération. Bien que mon père mourut quand j'avais 11 ans, la maison était pleine de livres mathématiques. Comme la plupart des mathématiciens russes, j'ai participé aux olympiades mathématiques entre 14 et 17 ans avec un certain succès (j'étais d'habitude le second). Un soir par semaine nous avions un "Kroujok" (groupe de travail) à l'université, où les étudiants posaient des problèmes aux écoliers. Chaque écolier devait raconter les solutions des

problèmes qu'il a résolus pendant la semaine écoulée. Là, j'ai appris plus de choses sur les mathématiques que pendant toutes les années à l'université — l'art de raisonner correctement, d'osciller entre l'induction (exemples, contre-exemples) et la déduction (conjectures, lemmes). L'école mathématique de la Russie dépendait beaucoup de cette tradition. On entrait à l'université déjà au niveau d'un chercheur, peut-être sans érudition (qu'on méprisait comme "inutile" et même "dangereuse") mais tout prêt à l'escalade des rochers, plus difficiles peut-être que ceux qu'on rencontre dans les grandes montagnes de la mathématique sérieuse.

Je suis entré à l'université de Moscou en 1954, quand les restrictions discriminatives étaient devenues moins sévères pour quelques années. Il y avait un "Kroujok" pour les étudiants de première année sur la théorie des fonctions des variables réelles, dirigé par A. G. Vitoushkin. On devait découvrir toute la théorie sans lire quoi que soit, en trouvant les démonstrations d'une suite de théorèmes bien choisis. C'était une école magnifique bien que très difficile. Parmi les participants je me souviens par exemple de Kirillov et Vinberg. L'esprit de compétition honnête (il ne fallait pas consulter les manuels) est un trait caractéristique de ce système un peu sectaire d'ailleurs. A la fin de l'année on arrivait à la théorie des variations des fonctions de plusieurs variables (aujourd'hui on dirait géométrie intégrale, variétés de Grassmann et classes caractéristiques).

Le cours d'algèbre était donné par E.B. Dynkin. J'étais étonné qu'un si grand mathématicien puisse donner d'aussi mauvais cours. Plus tard j'ai compris que les algébristes le font exprès pour rendre leur science plus hermétique et pour élever l'autorité de l'art de passer les termes de droite à gauche. Le cours était plein de définitions non motivées. Par exemple, il fallait apprendre les déterminants sans comprendre que ce sont les volumes des parallélépipèdes. Les groupes apparaissent à la fin mais comme des ensembles munis de deux opérations vérifiant plusieurs

axiomes qu'il fallait apprendre par cœur. C'était un grand soulagement d'avoir lu les manuels d'algèbre linéaire de Shilov et de Gelfand (où on remplaçait, par exemple, tous les axiomes de l'espace euclidien par le seul fait que chaque assertion de la géométrie élémentaire pouvant être formulée en termes de trois vecteurs soit vraie).

L'enseignement officiel à Moscou était déjà très Bourbakisé. Le cours de Dynkin était encore le meilleur. Le cours d'analyse était au niveau des coupures de Dedekind au moment où dans le cours de physique expérimentale on utilisait déjà l'analyse vectorielle (avec des démonstrations fausses du théorème de Stokes). Heureusement il était permis de ne pas assister au cours à condition de bien réussir aux examens.

C'est en préparant l'examen d'algèbre de première année que j'ai écrit mon premier article. Dynkin a proposé un problème sur la méthode de Sturm, trouver une formule pour le nombre des racines d'un polynôme dans un domaine borné par une courbe rationnelle. Le problème a été résolu par deux méthodes différentes, par deux étudiants, Kirillov et moi-même. Il semble que notre professeur pensait que les solutions avaient été suggérées par des mathématiciens plus mûrs. Mais on a passé toutes les épreuves (publiques) de cet inquisiteur méfiant, et il a compris que ce n'était pas le cas. Moralement, il était complètement impossible pour nous, après l'école de Vitoushkin, de proposer une solution qu'on n'a pas inventée tout seul.

Dynkin nous a ordonné d'écrire un article. Après 6 ou 7 versions rejetées il fallait envoyer l'article à un journal. Mais à ce moment j'ai trouvé à la maison un vieux bouquin de Cauchy contenant essentiellement les mêmes résultats. L'article n'a jamais été publié.

Il y avait encore un concours pour les étudiants des deux premières années. Une dizaine de problèmes étaient affichée au mur. Je me souviens d'une série de problèmes qui finissait par la classification des idéaux fermés de l'algèbre des

fonctions continues. On avait l'impression de créer cette théorie tout seul. Un autre problème était de tracer ce qu'on appelle aujourd'hui (je ne sais pas pourquoi) l'ensemble de Mandelbrojt. C'était le seul qu'on n'a pas résolu. Nous n'avions pas d'ordinateurs en 1955.

Au début de ma seconde année à l'université, Kolmogorov commençait un séminaire sur la théorie des approximations des fonctions pour les étudiants de ma génération. Il a formulé des problèmes élémentaires (visant en même temps, comme je comprends maintenant, le 13ème problème de Hilbert sur la représentation des fonctions de trois variables réelles, comme superposition de fonctions de deux variables). Ensuite il partit en France pour plusieurs mois.

Cependant Dynkin a organisé un séminaire très intéressant qui attirait les meilleurs étudiants. Je me souviens de son style remarquable. Un théorème est écrit au tableau. On y voit aussi un lemme démontré il y a cinq minutes. Un étudiant choisi par Dynkin est devant le tableau. Il doit démontrer le théorème. Il n'y arrive pas. Dynkin commence donc à l'aider. Il raconte une histoire. C'est l'histoire d'un singe. Il y a des bananes accrochées au plafond et deux bâtons. Il faut les décrocher. Ni un bâton ni l'autre ne suffisent. Mais on peut en faire un plus long avec les deux. Il y a des singes intelligents qui y arrivent en deux minutes. Pour ceux qui ne le sont pas il faut beaucoup plus de temps. Etes vous prêt? demande-t-il finalement à l'étudiant. Personne, dans le séminaire, ne souriait.

Plus tard, j'ai appris qu'il n'avait pas inventé ce style. Il a imité Gelfand qui a imité Landau. Une grande partie des mathématiciens de Moscou est passée par ce système. Je me souviens cependant d'un exposé excellent que j'ai entendu là : c'était un genre de colloquium sur la mécanique céleste par V.M. Alexeiev.

Quand Kolmogorov est revenu de Paris, je lui ai raconté ce que j'ai fait pour ses problèmes, et il m'a invité à travailler avec lui. J'ai quitté le séminaire de Dynkin avec soulagement.

Kolmogorov avait une autorité énorme. Il

s'intéressait à toutes les sciences et travaillait dans tous les domaines de la mathématique sauf en géométrie algébrique et en théorie des nombres. Pendant presque vingt ans il n'avait pratiquement pas de contact avec les mathématiciens étrangers. En 1963 il m'a dit que ses découvertes topologiques (notamment ses quatre notes aux Comptes Rendus de Paris sur la cohomologie) n'ont pas été appréciées par la communauté mathématique. "On utilise — m'a-t-il dit — les groupes de cohomologie que j'ai introduits (en généralisant les notions physiques) en même temps qu'Alexander. Or dans mes articles j'introduit aussi une structure d'anneau. Je crois qu'on pourrait faire beaucoup de découvertes en utilisant cette structure très importante, mais pas utilisée par les topologues."

Cette remarque de Kolmogorov montre l'atmosphère mathématique à Moscou isolé du monde extérieur. Elle montre aussi (comme m'a expliqué Rokhlin) la grandeur de Kolmogorov, capable d'estimer toute l'importance de ses découvertes.

En 1956, Kolmogorov travaillait surtout sur les problèmes de la théorie de l'information. Le problème des superpositions était relié à ses études. Il a trouvé une démonstration très simple de l'inégalité de Vitoushkin :

$$n/p \leq m/q$$

si toute fonction p -différentiable de n variables est une superposition de fonctions q -différentiables de m variables. Notamment le nombre d'unités d'information nécessaires pour coder une fonction p -différentiable de n variables à ε -près croît comme $(1/\varepsilon)^{n/p}$.

Pour les fonctions non différentiables la situation est différente. Kolmogorov a représenté toute fonction continue de quatre variables réelles comme une superposition de fonctions continues de trois variables réelles. Il a aussi démontré que pour ramener les fonctions continues de trois variables aux fonctions de deux variables, il suffit de plonger l'arbre universel dans $\mathbf{R}^3$ de façon que chaque fonction continue sur l'arbre se représente comme la somme des

trois fonctions continues dépendant chacune d'une seule des coordonnées.

J'ai construit un tel plongement. C'était mon premier travail sérieux. Kolmogorov lui-même a immédiatement rédigé le texte de ma note pour les Doklady qu'il a beaucoup louée dans la suite. Je pense que Kolmogorov avait raison, car il faut toujours encourager les jeunes. C'était tellement différent des singes de Dynkin!

Une semaine plus tard Kolmogorov a décomposé toute fonction continue de n variables réelles en une superposition de fonctions continues d'une variable et d'une seule fonction de deux variables, la somme. Il disait après que c'était le plus difficile de ses résultats et qu'il n'a jamais pu travailler féroceement sur un seul sujet plus que deux semaines. Je suis fier que ma démonstration l'ait stimulé : il a trouvé son théorème en simplifiant mes constructions¹.

A partir de ce moment, Kolmogorov me traitait plutôt comme un mathématicien indépendant que comme un élève. Il m'a laissé libre de faire n'importe quelle mathématique à mon choix. J'ai choisi de continuer mes recherches sur la représentation des fonctions sur les courbes par des sommes de fonctions des coordonnées. Pour les arbres le problème a été résolu. J'ai donc considéré les courbes planes fermées comme par exemple les ellipses. Ce problème de Dirichlet pour l'équation hyperbolique dépend d'un système dynamique sur la courbe. Pour une ellipse, ce système est une rotation du cercle. Pour les courbes voisines on a toutes les difficultés des résonnances et des petits diviseurs comme en mécanique céleste.

J'ai immédiatement formulé deux conjectures sur les difféomorphismes holomorphes du cercle. Je n'ai pas réussi à les démontrer. La première a été démontrée par Michel Herman 20 ans plus tard. Quant à la seconde, J.-C. Yoccoz et R. Perez-Marco ont démontré récemment qu'elle est vraie pour presque tout nombre de rotation, mais pas pour tous.

Ne pouvant pas démontrer mes conjectures, j'ai considéré un modèle simplifié : les difféomorphismes locaux. J'ai résolu le

problème dans ce cas par une méthode de type de Newton que Kolmogorov a inventée en 1954 (plus tard Malgrange m'a montré que Henri Cartan avait déjà utilisé cette méthode 10 ans avant dans ses recherches sur ce que l'on a appelé plus tard la théorie des faisceaux cohérents). Ensuite j'ai découvert les articles de C.L. Siegel qui avait déjà traité le problème simplifié pendant la guerre. Kolmogorov qui les ignorait a dit "on est en bonne compagnie".

C'était l'origine de mon premier travail (1958) sur la théorie que les physiciens ont appelée plus tard théorie KAM.

Revenons au 13ème problème de Hilbert. On ignore si chaque fonction algébrique de trois variables complexes peut être représentée comme une des branches d'une superposition des fonctions algébriques de deux variables. J'ai toujours conjecturé que ce n'est pas possible même pour la fonction $f(x, y, z)$ proposée par Hilbert :

$$f^7 + x f^3 + y f^2 + z f + 1 = 0,$$

et même si l'on remplace les fonctions algébriques de deux variables par des applications multiformes, topologiquement équivalentes aux fonctions algébriques.

Cette conjecture m'a conduit plus tard aux groupes des tresses, à la géométrie des discriminants et à la théorie des singularités. Récemment S. Smale et V.A. Vasiliev ont utilisé mes résultats sur les tresses dans leur théorie de la complexité algorithmique. Vasiliev en a déduit que la complexité topologique du calcul approché d'une racine d'un polynôme de degré n appartient à l'intervalle entre n et $n - c \log n$ [7].

G : Les français considèrent en général qu'il y a un style russe en mathématique. Qu'en pensez-vous?

V. Arnold : Je crois que les styles de N. Hitchin et D. Bennequin sont plus russes que ceux de Souslin et de Fedorchouk (professeur qui a remplacé P.S. Alexandrov à la chaire de topologie à l'Université de Moscou; les chaires à Moscou sont pratiquement à vie). Les articles russes "Sur une propriété d'une solution d'une équation aux

dérivées partielles" sont aussi ennuyants que leurs homologues dans les Comptes Rendus. A mon avis, ce qu'on appelle le style russe est le style des mathématiciens qui considèrent la mathématique comme une entité indivisible, cherchant surtout les liens entre les branches les plus éloignées des mathématiques et des sciences. Je peux citer Novikov, Sinaï, Manin, Fad-deev, Vershik, Kirillov, Fuchs, Khovanskii. Nos maîtres comme Kolmogorov, Petrovsky, Pontriagin, Gelfand avaient chacun des intérêts mathématiques très variés. Je crois que le style russe est plutôt l'héritier du style de Klein et Poincaré que de celui de Hilbert ou Bourbaki.

G : Vous venez de passer quelques mois à Orsay, quel bilan en tirez-vous ?

V. Arnold : A. Beauville, L. Illusie, J.M. Bismut, A. Douady, R. Temam m'ont accueilli très chaleureusement, mais le courrier électronique ne marchait pas. A Moscou, deux jours avant de partir pour Orsay, j'ai attendu deux heures pour acheter du pain. Quand le pain fut finalement livré il y en avait suffisamment pour servir la file jusqu'à moi et encore deux personnes. J'étais très heureux. On ne trouve pas ce genre de bonheur en France.

La mathématique à Orsay est restée aussi hermétique qu'elle était il y a 26 ans quand j'ai passé un an à Paris. Les titres des séminaires du type "Fin de démonstration de la propriété P" m'aident peu. J'aurais aimé assister à un séminaire de type "Séminaire Bourbaki" chaque semaine mais malheureusement il n'y en a eu qu'un seul. J'ai eu le très grand plaisir de revoir Thom, Sullivan, Gromov, Ruelle et Berger à l'IHES.

La bibliothèque d'Orsay est magnifique. C'est la première où j'ai vu l'ensemble de l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques rangé – par les soins de J.C. Sikorav semble-t-il – sur un même rayon et non dispersé par noms d'auteurs (comme à la bibliothèque du Congrès et donc comme dans toutes les bibliothèques des Etats Unis).

J'ai honte à le dire, mais les résultats

mathématiques que je viens d'apprendre en France et qui m'ont intéressé le plus sont dus aux mathématiciens japonais (T. Shintani), anglais (P. Kronheimer), russes (P. Zograf, M. Konzevitch) et américains (M. Freedman, Z.X. He).

G : Dans un récent mais déjà célèbre petit article [8] vous signalez que la culture mathématique des étudiants russes décroît et vous proposez des explications. N'y a-t-il aussi, comme en France, une baisse du nombre des bons étudiants qui choisissent les filières scientifiques (au profit du droit, de la gestion ou des sciences économiques par exemple) ?

V. Arnold : Ca existe aussi mais ça n'empêche pas de donner une bonne éducation à ceux qui restent. Il y en a de très bons. Le déclin est moins visible au niveau des "normaliens" moscovites que dans les universités en général.

G : Il y a quelques années vous vous plaigniez dans une autre interview des mauvaises relations entre scientifiques soviétiques et occidentaux, ces derniers ne citant pas assez les premiers. Maintenant que les gens se rencontrent plus facilement, est-ce que ça a changé ?

V. Arnold : Les relations personnelles sont excellentes, mais personne (à qui j'ai parlé) à Orsay n'avait remarqué la solution négative du 21ème problème de Hilbert (sur la réalisation des groupes de monodromie par des systèmes fuchsien), publié il y a quelques années par A. Bolibroukh à Moscou. La version publicitaire américaine publiée par Anosov n'a rien changé.

J'ai l'impression que maintenant, n'ayant plus peur, on négligera complètement les contributions russes. Un livre publié récemment à Paris attribué à Thom et à Milnor (1964-65) les estimations classiques de Petrovsky et de Oleinik (1949, 1951 [9]) des nombres de Betti des variétés algébriques (formant, à propos, la base de la démonstration initiale de l'inégalité de Vitoushkin). Un des auteurs m'a dit qu'il connaissait l'histoire de la question. Il a

cité, il est vrai, les mathématiciens russes qu'il a rencontrés.

G : Que pouvez-vous nous dire sur l'effet des changements politiques et des problèmes économiques sur la science en Union Soviétique? Sur l'Académie des Sciences, les Universités Autonomes?

V. Arnold : Je ne connais pas la situation actuelle de l'Académie des Sciences. L'académie ne pourra probablement plus payer les voyages pour les missions à l'étranger dont on devra supprimer une grande partie. Il semble que les bibliothèques n'auront plus ni livres ni journaux occidentaux à partir de 1992 — il n'y a plus d'argent même pour payer l'année 1991.

On a chassé le comité du parti communiste de la faculté. On a créé à sa place une nouvelle chaire pour le représentant local d'une institution importante dont j'ignore le nom actuel. Cette personne est responsable du choix des professeurs à qui on permet de sortir à l'étranger depuis le temps de Brejnev.

Une université autonome à Moscou a été créée par un groupe d'enthousiastes (N.N. Constantinov, M.K. Polyvanov et autres). Il y a deux facultés — mathématique et physique théorique. Les étudiants sont du niveau des normaliens parisiens. Parmi les professeurs on trouve des mathématiciens bien connus comme A.A. Kirillov, A.N. Roudakov, Ju.S. Illiashenko. Les difficultés sont énormes, l'obstacle principal étant le service militaire. Il y a aussi le problème des fonds.

G : Quel est l'effet du démantèlement de l'Union sur la science?

V. Arnold : Les régimes nationalistes et fascistes vont discriminer les étudiants, les chercheurs et les professeurs "ethniquement étrangers", par exemple les russes. J'espère que l'école mathématique de Kharkov, une des plus importantes dans l'ancienne URSS, va survivre au sein de l'Ukraine. L'effet de la catastrophe économique semble plus dangereux.

G : On a l'impression d'une véritable fuite des cerveaux d'URSS vers les pays occidentaux et Israël. Qu'en pensez-vous, quel remède peut-on envisager?

V. Arnold : Une dictature du type Pol Pot ou encore la fuite des cerveaux vers l'Amérique Latine.

Les communistes actifs en pogrommes mathématiques me demandent aujourd'hui des recommandations pour les universités occidentales. Tels des rats ils ont plus d'informations que nous et quittent le navire en train de couler.

Le salaire d'un professeur d'université était pendant plusieurs années au niveau de 20 dollars par mois. Maintenant c'est beaucoup moins. On a promis que les prix seront multipliés à peu près par 5 au début de 1992. Les salaires effectifs vont donc être divisés par 5. On m'a dit que l'état a confisqué l'argent convertible payé par les éditeurs occidentaux aux auteurs russes (effet de la banqueroute). Je ne sais pas si c'est vrai, si c'est le cas ça va augmenter la fuite des cerveaux car c'était une aide substantielle aux mathématiciens actifs.

G : Comment voyez-vous l'avenir?

V. Arnold : Si l'on croit les statistiques publiées à Moscou, la longévité en URSS a diminué de dix ans dans les dernières décennies. Un petit calcul cannibale montre que le nombre d'années-personne perdues est équivalent à l'effet d'une exécution immédiate d'approximativement 80 millions d'habitants (lemme : on perd approximativement la moitié de sa vie quand on est fusillé). C'est plus que tous les autres crimes des communistes, les pertes de la guerre n'ont fait qu'approximativement 30 millions. On aura bientôt résolu ainsi le problème que Lénine a formulé en 1918 comme la réduction du nombre de mangeurs.

Le désastre de la révolution bolchévique a produit un florissement paradoxal des mathématiques en Russie dans les années qui l'ont suivie. Un miracle semblable peut se répéter après une guerre civile atomique ou après un scénario du type Koweït, mais

où personne n'aura intérêt à défendre Paris. Je suis donc tout à fait optimiste en ce qui concerne le futur de l'école russe de mathématique. Personnellement j'espère être utile à mon pays et éviter la nécessité de l'émigration, mon âge étant déjà proche de la longévité moyenne.

Bibliographie

- [1] V.I. ARNOLD. — *Arrangements of ovals of real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional smooth manifolds and arithmetic of integer-valued quadratic forms*, Funkt. Anal. and Appl. 5 :3 (1971), 1–9.
- [2] I.G. PETROVSKY. — *Sur la topologie des courbes réelles et algébriques*, Cr. Ac. Sc. Paris, 197 (1933), 1270–73.
- [3] I.G. PETROVSKY, O.A. OLEINIK. — *Topology of real algebraic surfaces*, Izv. AN SSSR, ser. mathem., 13 (1949), 389–402.
- [4] D.A. GOUDKOV, G.A. UTKIN. — *Topology of sixth-order curves and fourth-order surfaces*, Uch. Zap. Gork. un-ta, 87 (1969), 3–213.
- [5] A. HARNACK. — *Über Vieheiligkeit der Ebenen Algebraischen Kurven*, Math. Ann. 10 (1891), 1–61.
- [6] V.I. ARNOLD, O.A. OLEINIK. — *Topology of real algebraic manifolds*, Vestnik Mosk. Univ. Matem. 34 :6 (1979) 7–17 (traduit par Allerton Press comme Moscow University Mathematics Bulletin).
- [7] V.A. VASILIEV. — *Cohomology of braid groups and complexity of algorithms*, Funkt. Anal. and Appl. 22 :3 (1988), 182–190.
- [8] V.I. ARNOLD. — *Matematicheskii Triumf*, Uspekhi Mat. Nauk, 46 (1991), traduction française dans ce numéro de la Gazette.
- [9] O.A. OLEINIK. — *Bounds for Betti numbers of real algebraic hypersurfaces*, Math. Sbornik 28 (1951), 635–640.

¹ On trouvera des traductions en anglais des articles de Kolmogorov sur ce sujet, accompagnés de commentaires d'Arnold et de Kolmogorov lui-même, dans le volumes d'œuvres de Kolmogorov récemment paru dans la série "Mathematics and its applications" chez Kluwer.

recueilli à Luminy le 31 décembre 1991

ASTÉRISQUE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.
Revue éditée par la Société Mathématique de France.

ASTÉRISQUE 198–199–200 – *Journées arithmétiques de Luminy, 17–21 juillet 1989*
405 p., Prix public (TTC) : 320 FF, Prix membres : 225 FF

Les Journées Arithmétiques offrent, tous les deux ans, un large panorama des progrès réalisés en Théorie des Nombres. Le présent volume regroupe des rapports sur les progrès récents en transcendance, la conjecture de Beilinson pour les courbes elliptiques, les motifs, le théorème de Riemann-Roch arithmétique, les codes et les empilements de sphères, ainsi que vingt-six communications présentées par les participants.

ABONNEMENT 1991 (n° 193 à 204) – Prix public : 1130 FF, Membres SMF : 680 FF
ABONNEMENT 1992 (n° 205 à 216) – Prix public : 1155 FF, Membres SMF : 695 FF

DISTRIBUTION

Membres de la S.M.F. : Maison de la S.M.F., Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 09
France et Etranger (excepté les Etats-Unis, le Canada et le Mexique) : Maison de la S.M.F., Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 09,
ou Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05
Etats-Unis, Canada, Mexique :
American Mathematical Society, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940, U.S.A.