

SAVOIRS

MATHÉMATIQUES

ACTUELS

THÉORIE DE MORSE ET HOMOLOGIE DE FLOER



MICHÈLE AUDIN
et MIHAI DAMIAN



CNRS ÉDITIONS

Michèle Audin

Mihai Damian

**THÉORIE DE MORSE
ET HOMOLOGIE DE FLOER**

M. Audin

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et
CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.

E-mail : `Michele.Audin@math.unistra.fr`

Url : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`

M. Damian

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et
CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.

E-mail : `Mihai.Damian@math.unistra.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). 53Dxx, 57R17,
53D40, 57R58.

Mots clefs. Théorie de Morse, inégalités de Morse, complexe de Morse,
homologie de Morse, conjecture d'Arnold, variété symplectique, système
hamiltonien, groupe symplectique, indice de Maslov, complexe de Floer,
recollement, homologie de Floer.

Pour lui :

à lui, poète d'une sensibilité discrète, d'une finesse calorique intime et surtout d'une profonde compréhension de la spiritualité roumaine qui a créé cet état autochtone. Hommage au grand patriote qui se joint au voievodes.

Pour elle :

à elle, dont l'esprit de justice, la sensibilité et l'autorité humaine, crée le cadre dont a aussi besoin le football, comme toute tentative de rassembler les gens, les énergies et les passions, le profond hommage de celui qui fait des effort dans le sport, se heurtant à tous les obstacles pour comprendre la vérité.

TABLE DES MATIÈRES

Préface.....	ix
--------------	----

Partie I. Théorie de Morse

Introduction de la première partie.....	3
1. Fonctions de Morse.....	7
1.1. Définition des fonctions de Morse.....	7
1.2. Existence et multitude des fonctions de Morse.....	8
1.3. Le lemme de Morse, indice d'un point critique.....	11
1.4. Exemples de fonctions de Morse.....	15
Exercices.....	17
2. Pseudo-gradients.....	21
2.1. Gradients, pseudo-gradients et cartes de Morse.....	21
2.2. La condition de Smale.....	33
2.3. Appendice : classification des variétés compactes de dimension 1	44
Exercices.....	48
3. Le complexe des points critiques.....	51
3.1. Définition du complexe.....	51
3.2. Espace des liaisons entre deux points critiques, ou des « trajectoires brisées ».....	55
3.3. Orientations, complexe sur $\mathbf{Z}$	64
3.4. L'homologie du complexe ne dépend ni de la fonction ni du champ de vecteurs.....	65
3.5. Cobordismes.....	72
Exercices.....	74
4. Homologie de Morse, applications.....	77
4.1. Homologie.....	77
4.2. La formule de Künneth.....	78
4.3. La « dualité de Poincaré ».....	80
4.4. Caractéristique d'Euler, polynôme de Poincaré.....	81

4.5. Homologie et connexité.....	84
4.6. Fonctorialité de l'homologie de Morse.....	88
4.7. Suite exacte longue.....	95
4.8. Applications.....	97
4.9. Appendice : l'homologie de Morse est l'homologie cellulaire...	104
Exercices.....	115

Partie II. La conjecture d'Arnold, théorie de Floer

Introduction de la deuxième partie.....	121
5. Ce qu'il faut savoir en géométrie symplectique.....	123
5.1. Espaces vectoriels symplectiques.....	123
5.2. Variétés symplectiques, définition.....	124
5.3. Exemples de variétés symplectiques.....	125
5.4. Champs de vecteurs hamiltoniens, systèmes hamiltoniens.....	128
5.5. Structures complexes.....	132
5.6. Le groupe symplectique.....	137
6. La conjecture d'Arnold et l'équation de Floer.....	143
6.1. La conjecture d'Arnold.....	143
6.2. Stratégie de la démonstration, homologie de Floer.....	146
6.3. La fonctionnelle d'action.....	148
6.4. Le gradient, l'équation de Floer.....	153
6.5. Espace des solutions.....	156
6.6. Démonstration de la compacité.....	167
6.7. Appendice : fonctions, formes fermées, revêtements.....	175
6.8. Appendice : structure de variété de Banach sur $\mathcal{L}W$	177
7. Géométrie du groupe symplectique, indice de Maslov.....	181
7.1. Vers la définition de l'indice.....	181
7.2. L'indice de Maslov d'un chemin.....	187
7.3. Appendice : construction et propriétés de ρ	193
8. Linéarisation et transversalité.....	211
8.1. Les résultats : énoncés.....	211
8.2. La variété de Banach $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$	214
8.3. L'espace des perturbations de H	219
8.4. Linéarisation de l'équation de Floer : calcul de la différentielle de $\mathcal{F}$	223
8.5. La transversalité.....	229
8.6. Les solutions de Floer sont « injectives quelque part ».....	241
8.7. La propriété de Fredholm.....	254
8.8. Le calcul de l'indice de L	270
8.9. La décroissance exponentielle.....	280

9. Homologie de Floer : étude des espaces de trajectoires.....	287
9.1. Les espaces de trajectoires.....	287
9.2. Trajectoires brisées, recollement : énoncés.....	293
9.3. Pré-recollement.....	294
9.4. Construction de ψ	297
9.5. Propriétés de $\widehat{\psi}$: $\widehat{\psi}$ est une immersion.....	314
9.6. Propriétés de $\widehat{\psi}$: unicité du recollement.....	315
10. De Floer à Morse.....	337
10.1. Les énoncés.....	337
10.2. La linéarisation du flot d'un champ de pseudo-gradient, démonstration du théorème 10.1.3.....	340
10.3. Démonstration du théorème (de régularité) 10.1.2.....	348
10.4. Les trajectoires de Morse et de Floer coïncident.....	353
11. Homologie de Floer : invariance.....	359
11.1. Le morphisme Φ^Γ	360
11.2. Démonstration du théorème 11.1.16.....	372
11.3. Invariance de Φ^Γ : démonstration de la proposition 11.2.8... ..	386
11.4. Démonstration du théorème 11.3.14.....	399
11.5. Fin de la preuve de l'invariance de l'homologie de Floer : démonstration de la proposition 11.2.9.....	410
11.6. Conclusion.....	423
12. La régularité elliptique de l'opérateur de Floer.....	425
12.1. La régularité elliptique : pourquoi et comment ?.....	425
12.2. Démonstration du lemme 8.7.2.....	430
12.3. Démonstration du théorème 12.1.2.....	432
12.4. Régularité elliptique de l'opérateur de Floer (non linéaire), démonstrations.....	435
13. Les lemmes sur la dérivée seconde de l'opérateur de Floer et autres technicités.....	447
13.1. Versions de l'opérateur de Floer.....	447
13.2. Les deux lemmes sur dF	448
13.3. L'opérateur $\widetilde{\mathcal{F}}_\rho$	450
13.4. Démonstration des deux lemmes : le premier.....	454
13.5. Démonstration des deux lemmes : le deuxième.....	460
13.6. Encore un lemme technique.....	465
13.7. Deux autres lemmes techniques.....	468
13.8. Variantes à paramètre(s) des lemmes sur la dérivée seconde .	475
Exercices de la deuxième partie.....	483

Appendices : ce qu'il faut savoir pour lire ce livre

14. Un peu de géométrie différentielle.....	501
14.1. Les variétés et les sous-variétés.....	501
14.2. Points critiques, valeurs critiques et théorème de Sard.....	506
14.3. Transversalité.....	507
14.4. Champs de vecteurs comme équations différentielles.....	513
14.5. Métriques riemanniennes, exponentielle.....	517
15. Un peu de topologie algébrique.....	519
15.1. Un peu d'algèbre homologique.....	519
15.2. Classes de Chern.....	522
16. Un peu d'analyse.....	525
16.1. Le théorème d'Ascoli.....	525
16.2. Théorie de Fredholm.....	526
16.3. Espaces de distributions, solutions faibles.....	534
16.4. Espaces de Sobolev sur $\mathbf{R}^n$	537
16.5. L'équation de Cauchy-Riemann.....	542
Bibliographie.....	549
Index des notations.....	555
Index terminologique.....	557

PRÉFACE

L'homologie de Floer est aujourd'hui une technique indispensable de la topologie symplectique. Inspirée d'idées de Witten et de Gromov dans les années 1980, elle a permis depuis de résoudre de nombreux problèmes difficiles, et elle continue de le faire.

Ce livre est consacré à la solution d'un de ces problèmes, une célèbre conjecture due à Arnold, qui propose de minimiser le nombre de trajectoires périodiques d'un système hamiltonien par un invariant qui ne dépend que de la topologie de la variété symplectique sur laquelle évolue ce système. Cette minoration ressemble beaucoup aux célèbres inégalités de Morse, qui minorent le nombre de points critiques d'une fonction. Une ressemblance qui n'a rien de fortuit : l'homologie de Floer est un analogue (en dimension infinie) de l'homologie de la variété telle qu'elle est calculée par le complexe de Morse « à la Witten » : le rôle principal est tenu dans les deux cas par les espaces de modules de trajectoires joignant les points critiques (d'une fonction pour Morse, d'une fonctionnelle pour Floer).

En 2004–2005, nous avons proposé un cours, deux cours, sur ces notions. Nous avons commencé par la théorie de Morse, bien sûr, il y avait des étudiants, nous aimions beaucoup le livre de Milnor dans lequel nous avons l'un et l'autre appris l'existence, la multitude et surtout l'utilité des fonctions de Morse, nous avons donc commencé à rédiger des notes pour les étudiants, c'était assez facile...

Et puis, c'est devenu plus difficile — il n'existait aucun livre donnant le point de vue plus moderne sur l'homologie de Morse, avec la construction et les propriétés d'invariance du complexe de Morse défini à l'aide des espaces de trajectoires, qui nous permettrait d'aller vers la construction du complexe de Floer — copier n'était plus possible, il nous a donc fallu là un peu d'imagination.

La première partie du cours terminée à la satisfaction des auditeurs, nous avons abordé l'homologie de Floer. Les objets et les techniques, que nous, topologues et géomètres, utilisons tous les jours, de l'homologie de Morse, se sont transfigurés en objets et techniques de l'homologie de Floer. Le charme, un des charmes, et la force, de cette théorie, résident en ceci qu'elle utilise, outre la géométrie et la topologie, beaucoup d'analyse, des opérateurs de Fredholm et des espaces de Sobolev. Exposer ceci à d'authentiques étudiants n'est pas une tâche très facile, même en s'y mettant à deux. C'est pourquoi nous avons décidé de persister à rédiger des notes de cours.

Si de nombreux travaux de recherche ont utilisé et utilisent toujours ces techniques, si de nombreux étudiants en ont aujourd'hui besoin, il faut bien dire qu'il n'y avait pas, sur ce sujet-là non plus, de livre raisonnablement auto-suffisant.

Cinq années se sont écoulées, au cours desquelles nous avons affiné, corrigé, allongé, précisé, majoré, minoré, égalé, comparé, énoncé et démontré soixante-treize théorèmes, cent vingt et une propositions et cent six lemmes, dessiné quatre-vingt-dix-huit figures (et posé un certain nombre d'exercices, dont, contrairement à la coutume, aucun ne contient la démonstration d'un résultat important « laissé en exercice aux lecteurs »)...

Cinq années se sont écoulées, au cours desquelles d'autres étudiants ont lu ces notes et nous ont fait des commentaires qui nous ont convaincus qu'elles répondaient à un besoin et qu'il serait stupide de ne pas les améliorer encore pour en faire un livre.

Voici ce livre, consacré à la puissance et la gloire des méthodes homologiques à la Morse-Floer.

Ce qu'il faut savoir... Il était difficile de prétendre écrire un ouvrage auto-suffisant. Pourtant, celui-ci est issu d'un cours professé devant d'authentiques étudiants de mastère — à qui nous avons dû commencer par « rappeler » ce qu'était une variété. En pensant à eux et à leurs semblables, nous avons donc regroupé à la fin du livre et en trois chapitres « ce qu'il faut savoir », les résultats de base que nous utilisons, en géométrie différentielle, topologie algébrique, analyse. Il y a parfois des définitions et/ou des démonstrations complètes, parfois des indications. Un index devrait aider à s'y retrouver.

Remerciements. À tous les étudiants qui ont subi ce cours, notamment à Emily Burgunder, Olivier Dodane, Shanna Li, Alexandre Mouton, Emmanuel Rey, Nelson Souza.

À Agnès Gadbled qui a relu avec soin de nombreuses versions préliminaires de ce texte. À Clémence Labrousse et Vincent Humilière pour leurs questions et leurs suggestions. À André Carneiro pour les corrections qu'il nous a suggérées. À Emmanuel Opshtein pour les réponses qu'il nous a aidés à trouver.

À François Laudenbach, Dusa McDuff. À Jean-Claude Sikorav pour sa lecture attentive et enthousiaste, les nombreuses pages de commentaires qu'il nous a faites, les discussions stimulantes que nous avons eues avec lui.

À Claude Sabbah, pour ses conseils techniques, pour avoir accueilli ce livre dans sa collection et surtout pour l'avoir patiemment attendu.

PARTIE I

THÉORIE DE MORSE

INTRODUCTION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Cette première partie est consacrée à la théorie de Morse, avec en ligne de mire le complexe défini par les points critiques d'une fonction de Morse et les trajectoires d'un champ de gradients.

C'est une théorie dont la toute première pierre est la remarque que l'étude d'une fonction (bien choisie) peut donner des informations assez précises sur la topologie d'une variété. L'exemple le plus classique — mais les exemples les plus classiques sont souvent les plus instructifs — est celui de la fonction « hauteur » $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ et de sa restriction aux différentes sous-variétés représentées sur les figures. La fonction f est, dans les trois cas considérés, la restriction de $(x, y, z) \mapsto z$.

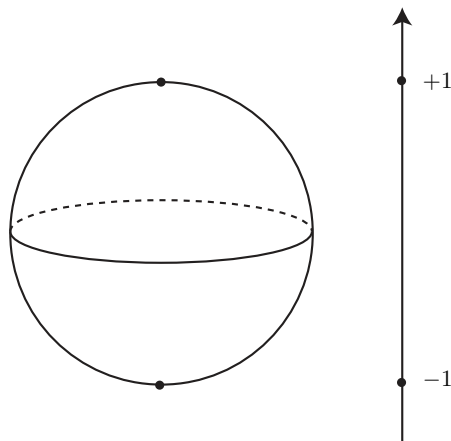


FIGURE 1. La sphère ronde

La première figure (figure 1) représente la sphère « ronde », c'est-à-dire la sphère unité

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Les niveaux $f^{-1}(a)$ sont

$$\begin{cases} \emptyset & \text{si } a < -1 \\ \text{un point} & \text{si } a = -1 \\ \text{un cercle} & \text{si } -1 < a < 1 \\ \text{un point} & \text{si } a = 1 \\ \emptyset & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

En remontant les valeurs de la fonction, on constate que les niveaux ont toujours la même topologie, jusqu'à ce que se produise un accident, où la topologie change, puis reste la même jusqu'à l'accident suivant.

Il en est de même pour les « sous-niveaux », c'est-à-dire ce qui se trouve au-dessous d'un niveau donné, qui sont, dans ce cas, d'abord vides, puis (brièvement) un point, puis un disque, puis la sphère tout entière.

Les accidents sont les valeurs critiques de la fonction, correspondant aux points critiques, ceux où la différentielle de f s'annule, ceux pour lesquels le plan tangent est horizontal, les pôles nord et sud de la sphère. Bien sûr, le pôle sud est le minimum de la fonction et le pôle nord son maximum.

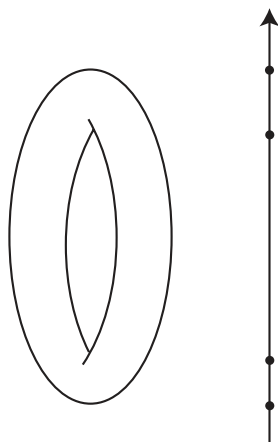


FIGURE 2. Le tore

La situation est analogue dans le cas du tore de la figure suivante (figure 2) à cette différence près qu'il y a maintenant des points critiques qui ne sont pas des extrema de la fonction, ce sont les deux points « selle ». Les niveaux correspondants sont des courbes en forme de huit (dont l'une est représentée sur la figure), et donc pas des sous-variétés, on aura remarqué que les niveaux réguliers, non critiques, doivent, eux, être des sous-variétés (à cause du théorème de submersion).

Un des premiers résultats de cette théorie est un théorème, dû à Reeb (au moins pour les fonctions de Morse) et que nous démontrerons (dans ce cas) qui affirme qu'une variété compacte qui possède une fonction avec seulement deux points critiques est homéomorphe à une sphère. Mais bien sûr, il y a sur la sphère des fonctions avec plus de points critiques.

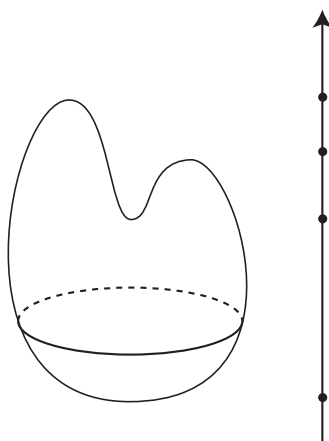


FIGURE 3. Une autre sphère

La troisième figure (figure 3) est là pour illustrer ce fait. Parce que c'est pratique à visualiser, on a gardé la « même » fonction hauteur et on a « fait un creux » dans la sphère, en douceur, ce qui fait que la sous-variété est bien sûr toujours difféomorphe à une sphère, mais que maintenant, la fonction a deux maxima locaux et un point selle. On remarquera toutefois que la parité du nombre de points critiques de la nouvelle fonction est la même que celle de l'ancienne. Si on les suppose non dégénérés, une importante propriété qui sera définie plus bas (et que vérifient les points critiques représentés sur nos figures), le nombre de points critiques comptés modulo 2 est égal à la caractéristique d'Euler modulo 2 de la variété, un invariant qui ne dépend pas de la fonction mais seulement de la variété.

L'idée des espaces de trajectoires de Witten permet de mettre en évidence un invariant plus fin : on voit bien que le tore et la sphère sont des variétés très différentes, même si toutes les deux possèdent une fonction avec quatre points critiques non dégénérés. Cet outil est ce que l'on appelle aujourd'hui l'homologie de Morse $HM_k(V)$ de la variété. C'est l'homologie d'un complexe, le complexe de Morse, construit à partir des points critiques d'une fonction de Morse en « comptant » les trajectoires d'un champ de vecteurs qui les relient... une homologie qui ne dépend, *in fine*, que (du type

de difféomorphisme) de la variété. Les remarques que nous venons de faire à propos du nombre de points critiques sur telle ou telle variété s'expriment en les fameuses « inégalités de Morse » : le nombre c_k de points critiques d'indice k d'une fonction de Morse sur une variété satisfait à

$$c_k \geq \dim HM_k(V).$$

Ces objets forment donc naturellement le sujet de la première partie de ce texte.

CHAPITRE 1

FONCTIONS DE MORSE

Toutes les variétés et les fonctions que nous considérons ici sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, même si on n'a besoin en général que de régularité $\mathcal{C}^1$!

1.1. Définition des fonctions de Morse

1.1.a. Points critiques, non-dégénérescence. Soit V une variété et soit $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

Remarque 1.1.1. Au moins si V est compacte, f a toujours des points critiques, puisqu'elle a au moins un maximum et un minimum.

En un point critique de f , on peut définir la *hessienne* ou dérivée seconde.

Remarque 1.1.2. Rappelons qu'une fonction sur une variété n'a pas de dérivée seconde : il est toujours possible de calculer une dérivée seconde dans une carte, mais le résultat dépend de la carte utilisée. La dérivée seconde est bien définie sur le noyau de la dérivée première... Ici nous nous contenterons de la définir en les points critiques. Voir l'exercice 1 page 17.

Plutôt que d'utiliser une carte et de montrer que le résultat n'en dépend pas, faisons appel à un argument plus intrinsèque (comme dans [48, p. 4]). Si x est un point critique de f et si X et Y sont des vecteurs tangents à V en x , posons

$$(d^2f)_x(X, Y) = X \cdot (\tilde{Y} \cdot f)(x)$$

où nous avons noté $\tilde{Y}$ un champ de vecteurs prolongeant localement Y . Comme

$$X \cdot (\tilde{Y} \cdot f)(x) - Y \cdot (\tilde{X} \cdot f)(x) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_x \cdot f = (df)_x([\tilde{X}, \tilde{Y}]_x) = 0,$$

l'expression est une forme bilinéaire symétrique en X et Y . Le même calcul montre aussi que cette forme est bien définie, le résultat ne dépend pas du prolongement $\tilde{Y}$ choisi.

On dira qu'un point critique est *non dégénéré* si cette forme bilinéaire l'est. Et qu'une fonction est *de Morse* si tous ses points critiques sont non dégénérés.

1.1.b. Exemples et contre-exemples. Les points critiques de la fonction hauteur sur la sphère sont non dégénérés. En effet, au voisinage du point $(0, 0, \varepsilon) \in S^2$, (x, y) forment des coordonnées locales et

$$f(x, y) = z = \varepsilon \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

une fonction dont la dérivée seconde est la forme quadratique

$$(d^2 f)_{(0,0,\varepsilon)}(x, y) = -\varepsilon(x^2 + y^2)$$

une forme quadratique non dégénérée, en effet.

Il est très facile de construire des fonctions avec des points critiques dégénérés, par exemple en prenant pour fonction une forme quadratique dégénérée, qui sera sa propre dérivée seconde en 0 ou pire, un polynôme de degré plus grand, comme la fonction $x \mapsto x^3$, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qui a un point critique dégénéré en 0.

Voir d'autres exemples dans [48] et dans les exercices de ce chapitre (voir aussi la remarque 4.4.5 ci-dessous).

1.2. Existence et multitude des fonctions de Morse

Il est moins facile de montrer qu'il existe des fonctions de Morse sur toutes les variétés, mais c'est vrai. Dans ce paragraphe (qui est une paraphrase de [48]), nous montrons qu'il existe, en un sens précis, beaucoup de fonctions de Morse sur une variété compacte (en fait, nous le montrons pour n'importe quelle variété qui se plonge comme sous-variété dans un espace $\mathbf{R}^n$).

1.2.a. Existence de fonctions de Morse. Utilisons le théorème de plongement (ici le théorème 14.1.2) et montrons l'existence de fonctions de Morse sur les sous-variétés de l'espace $\mathbf{R}^n$.

Proposition 1.2.1. *Soit $V \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété. Pour presque tout point p de $\mathbf{R}^n$, la fonction*

$$\begin{aligned} f_p : V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \|x - p\|^2 \end{aligned}$$

est une fonction de Morse.

Démonstration. La différentielle de f_p est

$$T_x f_p(\xi) = 2(x - p) \cdot \xi,$$

de sorte que x est critique si et seulement si $(x - p)$ est orthogonal à $T_x V$. Paramétrons V localement (comme nous y autorise le théorème des sous-variétés, ici le théorème 14.1.1) par

$$(u_1, \dots, u_d) \longmapsto x(u_1, \dots, u_d).$$

Dans ces coordonnées,

$$\frac{\partial f_p}{\partial u_i} = 2(x - p) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i}$$

et

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} + (x - p) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right).$$

Le point x est donc un point critique non dégénéré si et seulement si le vecteur $x - p$ est orthogonal à $T_x V$ et la matrice ci-dessus est de rang d . Pour montrer que, pour presque tout p , la fonction f_p est de Morse, il suffit donc de montrer que les p qui ne vérifient pas cette propriété sont les valeurs critiques d'une application $\mathcal{C}^\infty$ et d'appliquer le théorème de Sard (théorème 14.2.1). Considérons donc le « fibré normal » de V dans $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire l'espace

$$N = \{(x, v) \in V \times \mathbf{R}^n \mid v \perp T_x V\} \subset V \times \mathbf{R}^n,$$

et l'application

$$\begin{aligned} E : N &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto x + v. \end{aligned}$$

La proposition est alors conséquence du lemme qui suit :

Lemme 1.2.2. *Le fibré normal N est une sous-variété de $V \times \mathbf{R}^n$. Le point $p = x + v \in \mathbf{R}^n$ est une valeur critique de E si et seulement si la matrice*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} - v \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right)$$

n'est pas inversible.

Démonstration. Comme V est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, il y a une carte (locale) envoyant $\mathbf{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^d$ sur un ouvert de V . L'application tangente à la carte envoie la base canonique de $\mathbf{R}^n$ sur une base de vecteurs tangents à V suivis de vecteurs engendrant un supplémentaire. Il suffit alors d'orthonormaliser cette base pour obtenir $n - d$

champs de vecteurs $v_1, \dots, v_{n-d}$ qui forment en chaque point de V une base orthonormée de $(T_x V)^\perp$. Alors, l'application

$$(u_1, \dots, u_d, t_1, \dots, t_{n-d}) \mapsto \left(x(u_1, \dots, u_d), \sum_{i=1}^{n-d} t_i v_i(u_1, \dots, u_{n-d}) \right)$$

est un paramétrage local de N , donc celle-ci est bien une sous-variété. Dans ces coordonnées, les dérivées partielles de E sont

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \\ \frac{\partial E}{\partial t_j} = v_j. \end{cases}$$

Calculons les produits scalaires de ces n vecteurs avec les n vecteurs indépendants

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_d}, v_1, \dots, v_{n-d},$$

obtenant ainsi une matrice qui a le même rang que la jacobienne de E et qui a la forme

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_k t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} \right) & \left(\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot v_\ell \right) \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Mais v_k est orthogonal à $\partial x / \partial u_j$, donc

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left(v_k \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + v_k \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} = 0.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme... □

et donc celle de la proposition. □

Nous dirons quelques mots des points p pour lesquels la fonction p n'est pas de Morse, ci-dessous dans la remarque 1.4.1.

Remarque 1.2.3. Remarquons que cette démonstration utilise une partie non triviale du théorème de Sard (mais pas la plus difficile, qui serait celle où la dimension de la source est strictement plus grande que celle du but) : les deux variétés N et $\mathbf{R}^n$ ont la même dimension.

1.2.b. Généricité des fonctions de Morse. La proposition 1.2.1 montre qu'il existe de nombreuses fonctions de Morse sur une sous-variété de $\mathbf{R}^n$. En utilisant les mêmes outils, nous montrons maintenant, toujours suivant [48], que toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ peut être approchée par des fonctions de Morse.

Proposition 1.2.4. *Soit V une variété qui peut être plongée comme sous-variété dans un espace $\mathbf{R}^n$ et soit $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Soit k un entier. Alors f peut être approchée, uniformément sur tout compact, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leq k$, par des fonctions de Morse.*

Démonstration. Fixons un nombre réel c (avec vocation à être assez grand). Choisissons un plongement de V dans $\mathbf{R}^n$ pour un n assez grand, de façon que la première coordonnée soit la fonction f (il suffit d'ajouter cette coordonnée à un plongement dans un espace de dimension $\mathbf{R}^{n-1}$),

$$h(x) = (f(x), h_2(x), \dots, h_n(x)).$$

D'après la proposition 1.2.1, pour presque tout point

$$p = (-c + \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

proche de $(-c, 0, \dots, 0)$, la fonction f_p est de Morse. Alors

$$g(x) = \frac{f_p(x) - c^2}{2c}$$

est évidemment de Morse elle aussi. De plus,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2c} ((f(x) + c - \varepsilon_1)^2 + (h_2(x) - \varepsilon_2)^2 + \dots + (h_n(x) - \varepsilon_n)^2 - c^2) \\ &= f(x) + \frac{f(x)^2 + \sum h_i(x)^2}{2c} - \frac{\varepsilon_1 f(x) + \sum \varepsilon_i h_i(x)}{c} + \sum \varepsilon_i^2 - \varepsilon_1, \end{aligned}$$

ce qui montre (avec c assez grand et les ε_i assez petits), que g approche f uniformément sur les compacts comme annoncé. $\square$

Sans plonger la variété V et en utilisant la transversalité, il est possible de démontrer :

Théorème 1.2.5. *Soit V une variété compacte. L'ensemble des fonctions de Morse sur V est un ouvert dense de $\mathcal{C}^\infty(V; \mathbf{R})$.*

On trouvera (si besoin, la définition de $\mathcal{C}^\infty(V; \mathbf{R})$ au § 14.3.b et) une démonstration (utilisant la « transversalité sous contrainte ») dans l'exercice 9 page 19.

1.3. Le lemme de Morse, indice d'un point critique

Décrivons ici ce qui se passe près d'un point critique d'une fonction de Morse.

1.3.a. Le lemme de Morse. Au voisinage d'un point critique, la fonction est bien approchée par (la moitié de) sa dérivée seconde. Le lemme de Morse affirme beaucoup mieux : quitte à changer de coordonnées locales, elle lui est égale.

Théorème 1.3.1 (lemme de Morse). *Soit c un point critique non dégénéré de la fonction $f : V \rightarrow \mathbf{R}$. Il existe un voisinage U de c et un difféomorphisme $\varphi : (U, c) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ tels que*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(c) - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2.$$

Démonstration. On peut démontrer ce résultat en utilisant le lemme d'Hadamard comme le fait Milnor dans [48]. La démonstration que nous choisissons ici est une application directe du théorème des fonctions implicites, c'est celle que l'on trouve dans [40]⁽¹⁾.

En utilisant une carte, comme le résultat est local, nous supposons que $V = \mathbf{R}^n$ et que le point critique c est 0. En composant par un isomorphisme d'espaces vectoriels, nous supposons en outre que la forme quadratique $(d^2f)_0$ est diagonale.

Nous démontrons le résultat par récurrence sur la dimension. Commençons donc par le cas $n = 1$, où

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \varepsilon(x)x^2 \\ &= f(0) \pm ax^2(1 + \varepsilon(x)) \end{aligned}$$

pour un réel strictement positif a et une fonction ε de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f^{(3)}(t)(x-t)^2 dt.$$

Posons

$$x_1 = \varphi(x) = x\sqrt{a(1 + \varepsilon(x))}.$$

Il est clair que φ est un difféomorphisme local (puisque $\varphi'(0) = \sqrt{a} \neq 0$) ce qui permet d'appliquer le théorème d'inversion locale, de sorte qu'au voisinage de 0,

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1) = f(x) = f(0) \pm x_1^2.$$

C'est le théorème pour $n = 1$.

⁽¹⁾L'avantage principal de cette démonstration est qu'elle donne un résultat un peu plus général que le lemme de Morse : près d'un point critique, une fonction s'écrit comme somme d'une constante, d'une forme quadratique de rang $k \leq n$ et d'une fonction des $n - k$ variables restantes dont toutes les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sont nulles au point considéré.

Écrivons ensuite $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ et notons ses points (x, y) . Écrivons $f(x, y) = f_y(x)$, considérant ainsi les fonctions de variable réelle f_y , quand le paramètre y varie dans $\mathbf{R}^{n-1}$. La formule de Taylor s'écrit maintenant

$$f(x, y) = f_y(0) + f'_y(0)x + \frac{1}{2}f''_y(0)x^2 + x^2\varepsilon(x, y).$$

Si le terme $f'_y(0)$ est nul, continuons comme dans le cas $n = 1$, puisque $f''_y(0) \neq 0$ (sinon il y aurait une colonne nulle dans la matrice des dérivées secondes de f) ce qui nous permet d'écrire

$$f(x, y) = f_y(0) \pm a(y)x^2(1 + \varepsilon(x, y)) \quad \text{avec } a(y) > 0.$$

L'application

$$\varphi : (x, y) \mapsto (x_1 = x\sqrt{a(y)(1 + \varepsilon(x, y))}, y_1 = y)$$

est un difféomorphisme local comme dans le cas $n = 1$ et, toujours comme dans ce cas, donne

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, y_1) = \pm x_1^2 + f(0, y_1)$$

ce qui permet effectivement de conclure par récurrence.

Montrons donc maintenant qu'il est possible de se ramener au cas où $f'_y(0) = 0$. Cherchons les points critiques de f_y , c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Avec nos hypothèses sur $(d^2f)_0$, nous savons que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0,$$

de sorte que le théorème des fonctions implicites nous assure que nos solutions, au voisinage de $(0, 0)$, sont les points du graphe $x = \varphi(y)$ d'une fonction φ définie et $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $0 \in \mathbf{R}^{n-1}$. Comme nous avons supposé la dérivée seconde diagonale, la dérivée en $(0, 0)$ de $\partial f / \partial x$ par rapport aux variables y est nulle, de sorte que $(d\varphi)_0 = 0$.

Utilisons maintenant le difféomorphisme local (au voisinage de 0) $\Phi(x, y) = (x + \varphi(y), y)$ dont la différentielle en 0 est l'identité. La fonction $f \circ \Phi$ vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(f \circ \Phi)(0, y) = 0 \\ d^2(f \circ \Phi)_{(0,0)} = (d^2f)_{(0,0)}. \end{cases}$$

En intégrant le difféomorphisme local Φ dans la notation, c'est-à-dire en appelant encore f la fonction $f \circ \Phi$, nous nous sommes ramenés au cas d'une fonction ayant la propriété voulue. Le lemme de Morse est démontré. $\square$

On appelle *carte de Morse* une carte de la variété dans l'ouvert de laquelle des coordonnées données par le lemme de Morse sont définies.

Un corollaire immédiat du lemme de Morse est le suivant (voir aussi l'exercice 2 page 17).

Corollaire 1.3.2. *Les points critiques non dégénérés d'une fonction sont isolés.* $\square$

En particulier, une fonction de Morse sur une variété compacte a un nombre fini de points critiques.

L'entier i qui apparaît dans l'énoncé du lemme de Morse est *l'indice* du point critique (il ne dépend que du point critique, $(n - i, i)$ est la signature de la forme quadratique dérivée seconde).

Remarque 1.3.3. Un point critique d'indice i de f est un point critique d'indice $n - i$ de $-f$.

1.3.b. Exemples de points critiques.

Extrema. Un minimum local d'une fonction de Morse est un point critique d'indice 0. Les figures représentent un minimum de la fonction hauteur (sur la variété) et quelques niveaux de la fonction près d'un minimum dans une carte de Morse.

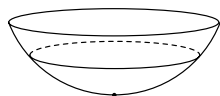


FIGURE 1. Un minimum

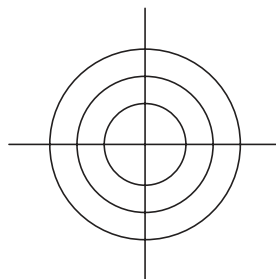


FIGURE 2. Point critique d'indice 0

Un maximum local est un point critique d'indice n (la dimension de la variété). La figure 2 montre aussi bien les niveaux d'une fonction au voisinage d'un maximum.

Indice 1. Les points critiques d'indice 1 d'une fonction de deux variables sont ceux que l'on a vu apparaître dans le cas du tore. Ces points sont appelés des points « selle » ou des « cols ». La figure 3 explique le mot selle. Le terme de col est bien adapté : la figure 3 évoque bien aussi un col de montagne, « le point le plus élevé entre deux sommets », comme le

« définissent⁽²⁾ » les manuels de géographie, et, de même, la figure 4 évoque les courbes de niveau d'une carte de géographie, au voisinage d'un col.

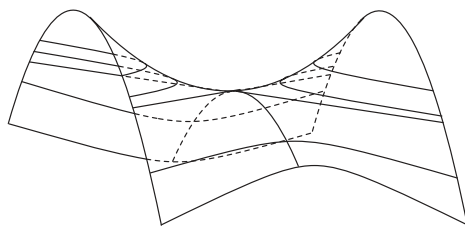


FIGURE 3. Un point selle

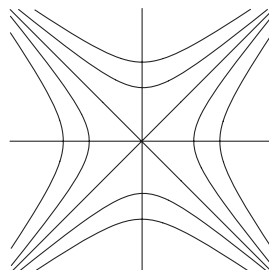


FIGURE 4. Point critique d'indice 1

1.4. Exemples de fonctions de Morse

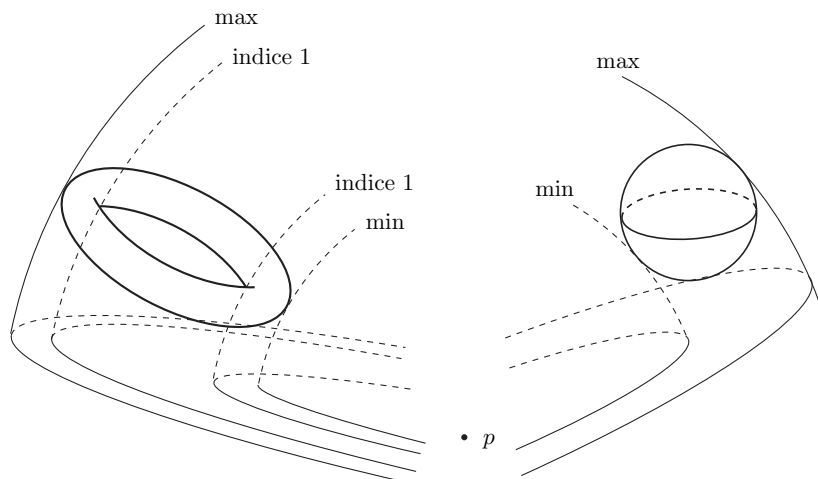
Les exemples classiques de fonctions de Morse présentés ici seront utilisés dans la suite.

1.4.a. La fonction (carré de la) distance à un point. Nous l'avons dit au 1.2.a, les fonctions $f_p = \|x - p\|^2$ sont, en général, des fonctions de Morse. La figure 5 montre les deux points critiques d'une telle fonction sur la sphère unité et sur un tore de $\mathbf{R}^3$.

Remarque 1.4.1. Le seul point pour lequel cette fonction n'est pas de Morse sur la sphère est le centre de la sphère. Plus généralement, on appelle « points focaux » de V les points p de $\mathbf{R}^n$ pour lesquels la fonction n'est pas de Morse. Cette terminologie se justifie par le fait qu'en un tel point (pour une hypersurface), des normales infinitésimalement proches se rencontrent ; si l'on imagine l'hypersurface comme une source lumineuse et les normales comme les rayons lumineux qu'elle émet, il y a accumulation d'intensité lumineuse en ces points, d'où leur nom de foyers, ou de points focaux.

En général, un point d'une sous-variété est critique pour la fonction distance si celle-ci y est tangente (non transverse) à la sphère de centre p passant par ce point.

⁽²⁾ Les définitions « passage étroit entre deux montagnes » ou « dépression formant passage entre deux sommets montagneux », que l'on trouve dans les dictionnaires, ne sont pas plus précises.

FIGURE 5. La fonction distance à p , sur un tore et une sphère

1.4.b. Fonctions hauteur. Les trois fonctions hauteur représentées dans l'introduction sont des fonctions de Morse

- sur la sphère S^2 , avec deux points critiques, d'indices 0 (le minimum, pôle sud) et 2 (le maximum, pôle nord) ;
- sur le tore T^2 , avec quatre points critiques, le minimum, le maximum et deux points critiques intermédiaires, d'indice 1 ;
- sur la sphère S^2 à nouveau, avec quatre points critiques, un minimum, un point critique d'indice 1 et deux maxima locaux.

Remarque 1.4.2. On peut aussi considérer la hauteur comme la distance à un point situé à l'infini dans la direction de l'axe des z .

1.4.c. Sur le tore T^2 . Il y a bien d'autres fonctions sur le tore ! Considérons la fonction

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)$$

et la fonction, toujours notée f , qu'elle définit sur le tore $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. C'est une fonction produit (comme nous en avons rencontré plus généralement au § 1.1.b). Celle-ci a quatre points critiques :

- un minimum, le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;
- deux points critiques d'indice 1, les points $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$;
- un maximum, le point $(0, 0)$.

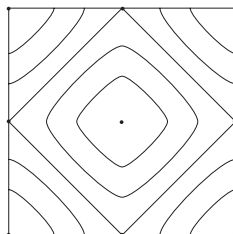


FIGURE 6. Une fonction de Morse sur le tore

Les lecteurs sont invités à vérifier ces assertions (les vérifications sont directes). La figure 6 représente quelques niveaux de la fonction f sur le tore. Remarquons que le minimum est au niveau -2 , les deux points critiques d'indice 1 dans le même niveau 0 et le maximum au niveau 2.

Exercices

Exercice 1. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient V un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $\varphi : V \rightarrow U$ un difféomorphisme. Calculer $(d^2(f \circ \varphi))_y$ (pour $y \in V$).

Soient M une variété et $g : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Montrer que la forme bilinéaire $(d^2g)_x$ est bien définie sur le sous-espace vectoriel

$$\text{Ker}(dg)_x \subset T_x M.$$

Exercice 2. Le fibré cotangent T^*V de la variété V est muni de sa structure naturelle de variété (rappelée au chapitre 14). Vérifier que l'on peut considérer la différentielle df d'une fonction $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ comme une section

$$df : V \longrightarrow T^*V$$

de ce fibré cotangent (qui est un plongement de V dans T^*V).

Quels sont les points critiques de f dans ce langage? Montrer que le point a est un point critique non dégénéré de f si et seulement si la sous-variété $df(V)$ est transverse à la section nulle au point considéré.

Montrer qu'un point critique non dégénéré d'une fonction est isolé (sans utiliser le lemme de Morse!).

Exercice 3 (une selle de singe). On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^3 - 3xy^2. \end{aligned}$$

Étudier le point critique $(0, 0)$. Est-il non dégénéré ? Dessiner quelques niveaux réguliers de la fonction f ainsi que son graphe.

Exercice 4. Si $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : W \rightarrow \mathbf{R}$ sont des fonctions de Morse, alors $f + g : V \times W \rightarrow \mathbf{R}$ est aussi une fonction de Morse dont les points critiques sont les couples de points critiques de f et g .

Exercice 5 (sur l'espace projectif complexe). La fonction définie sur $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ par

$$f(z_0, \dots, z_n) = \frac{\sum_{j=0}^n j |z_j|^2}{\sum_{j=0}^n |z_j|^2}$$

passse au quotient pour définir une fonction, toujours notée f , sur l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

Vérifier que c'est une fonction de Morse dont les points critiques sont les points $[1, 0, \dots, 0]$ (d'indice 0), $[0, 1, 0, \dots, 0]$ (d'indice 2) et ainsi de suite jusqu'à $[0, \dots, 0, 1]$ (d'indice $2n$).

Les lecteurs désireux de savoir d'où peut bien venir cette fonction (de [48], bien sûr, mais avant ?) pourront se reporter à la remarque 2.1.12.

Exercice 6 (sur la sphère et sur le plan projectif réel). Avec essentiellement la même formule, considérons ici la fonction

$$\begin{aligned} f : S^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto y^2 + 2z^2 \end{aligned}$$

et la fonction $g : \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ sur le plan projectif réel qui s'en déduit par passage au quotient. Vérifier que la fonction f est de Morse (et donc que g aussi), montrer qu'elle a six points critiques (et donc que g en a trois) qui sont

- deux points d'indice 0, les points $(\pm 1, 0, 0)$, au niveau 0 ;
- deux points d'indice 1, les points $(0, \pm 1, 0)$, au niveau 1 ;
- deux points d'indice 2, les points $(0, 0, \pm 1)$, au niveau 2.

La figure 7 représente quelques niveaux de cette fonction sur la sphère. Le niveau critique contenant les deux points d'indice 1 est formé des deux cercles intersections de la sphère avec les plans $z = \pm x$.

Exercice 7. Dessiner dans un carré les niveaux de la fonction hauteur sur le tore « chambre à air » (la réponse figure quelque part dans ce texte).

Exercice 8 (une quadrique projective). On considère la « quadrique » Q de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ définie par l'équation

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

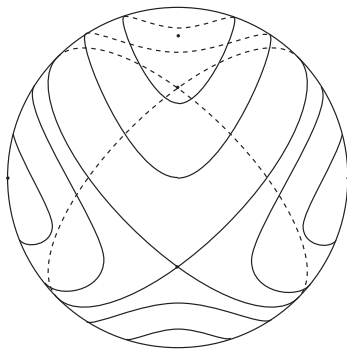


FIGURE 7. Une fonction de Morse sur le plan projectif réel

Montrer que Q est une sous-variété compacte de dimension (réelle) 4 de la variété $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$.

On écrit $z_j = x_j + iy_j$ (pour $0 \leq j \leq 3$) et $z = x + iy$ pour $z \in \mathbf{C}^4$, avec $x, y \in \mathbf{R}^4$. On fixe deux nombres réels λ et μ et l'on pose, pour $z \in \mathbf{C}^4$,

$$\tilde{f}(z) = \lambda(x_0y_1 - x_1y_0) + \mu(x_2y_3 - x_3y_2).$$

Vérifier que, pour $|u| = 1$, on a

$$\tilde{f}(uz) = \tilde{f}(z)$$

et en déduire que $\tilde{f}$ définit une fonction

$$f : \mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

On suppose que les réels λ et μ figurant dans la définition de f vérifient $0 < \lambda < \mu$. On appelle g la restriction de f à Q . Montrer que g est une fonction de Morse qui a un minimum local, un maximum local, deux points critiques d'indice 2.

Exercice 9. Dans cet exercice, nous proposons une autre démonstration de l'existence de nombreuses fonctions de Morse sur une variété et plus précisément du théorème 1.2.5.

(1) En utilisant, par exemple, l'exercice 2 (page 17), montrer que l'ensemble des fonctions de Morse sur la variété compacte V est ouvert pour la topologie $\mathcal{C}^2$, et donc aussi pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$.

(2) Soit $a \in V$ et soit U un ouvert de carte centré en a . On appelle $\mathcal{F}$ l'espace des différentielles des fonctions définies sur U (ou des 1-formes exactes), considéré comme une partie de $\mathcal{C}^\infty(U; (\mathbf{R}^n)^*)$ (pour chaque $x \in U$, $(df)_x$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$). On remarquera que $\mathcal{F}$ n'est pas un ouvert. Soit α une fonction plateau à support dans U et qui vaut 1 sur un voisinage

compact K de a . Pour $\varphi = df \in \mathcal{F}$, on définit

$$\begin{aligned} F : U \times (\mathbf{R}^n)^* &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, A) &\longmapsto f(x) + \alpha(x)A \cdot x. \end{aligned}$$

Calculer⁽³⁾ $(D_1F)_{(x,A)}$ pour $x \in K$ et montrer que F est une submersion

$$K \times (\mathbf{R}^n)^* \longrightarrow (\mathbf{R}^n)^*.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est localement transversale à $\{0\}$ (au sens du §14.3.c).

(3) Montrer que tout point a de V possède un voisinage compact K tel que l'ensemble des fonctions $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ dont les points critiques dans K sont non dégénérés est dense dans $\mathcal{C}^\infty(V; \mathbf{R})$.

(4) En déduire une démonstration du théorème 1.2.5.

⁽³⁾Si f est une fonction de deux arguments $(u, v) \in U \times V \subset E \times F$, nous désignons par $(D_1f)_{(u,v)}$ l'application linéaire

$$(D_1f)_{(u,v)} : E \longrightarrow \mathbf{R},$$

différentielle partielle de f par rapport à la première variable. De même pour $(D_2f)_{(u,v)}$.

CHAPITRE 2

PSEUDO-GRADIENTS

Dans ce chapitre, nous définissons, construisons et étudions les champs de pseudo-gradient, dont les trajectoires relient les points critiques d'une fonction de Morse. Ces champs permettent de définir les variétés stables et instables des points critiques, qui vont jouer un rôle important. Nous dégageons la « propriété de Smale » grâce à laquelle, par exemple, il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires joignant deux points critiques d'indices consécutifs et nous démontrons l'existence de champs de pseudo-gradient satisfaisant à cette propriété.

2.1. Gradients, pseudo-gradients et cartes de Morse

2.1.a. Gradients et pseudo-gradients. Si f est une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$, on est habitué à utiliser son *gradient*, le champ de vecteurs $\text{grad } f$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ sont

$$\text{grad}_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

De façon plus compacte, c'est (aussi) le champ de vecteurs défini par

$$\langle \text{grad}_x f, Y \rangle = (df)_x(Y)$$

pour tout vecteur $Y \in \mathbf{R}^n$ (bien sûr les crochets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignent le produit scalaire euclidien habituel de $\mathbf{R}^n$). Les propriétés les plus importantes de ce champ de vecteurs sont dues au fait que ce produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique *définie positive* et sont :

- (1) il s'annule exactement en les points critiques de la fonction f ;
- (2) la fonction f décroît strictement le long des lignes de flot du champ $-\text{grad } f$:

$$\frac{d}{ds} (f(\varphi^s(x))) = -\|\text{grad}_{\varphi^s(x)} f\|^2 < 0.$$

Remarque 2.1.1. Plus généralement, si la variété V est munie d'une métrique riemannienne (voir le 14.5), une fonction sur V possède aussi un gradient défini par la même formule

$$\langle \text{grad}_x f, Y \rangle = (df)_x(Y)$$

pour tout $Y \in T_x V$.

Remarque 2.1.2. C'est sans doute la conjonction des terminologies « flot » et « hauteur » qui est à la source (si l'on ose dire) de la tradition (récente) d'utiliser l'opposé du gradient : le flot descend. Nous nous sommes conformés à cette convention, comme [61] et [42], mais pas comme [39].

Soit $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse sur une variété V . On appelle *champ de pseudo-gradients* ou *pseudo-gradient* adapté à f tout champ de vecteurs X sur V tel que

- (1) on ait $(df)_x(X_x) \leq 0$ avec égalité si et seulement si x est un point critique ;
- (2) dans une carte de Morse au voisinage d'un point critique, X coïncide avec l'opposé du gradient pour la métrique canonique de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 2.1.3. Un pseudo-gradient est donc un champ de vecteurs assez particulier. Voir dans l'exercice 10 page 48 des champs de vecteurs qui n'en sont pas.

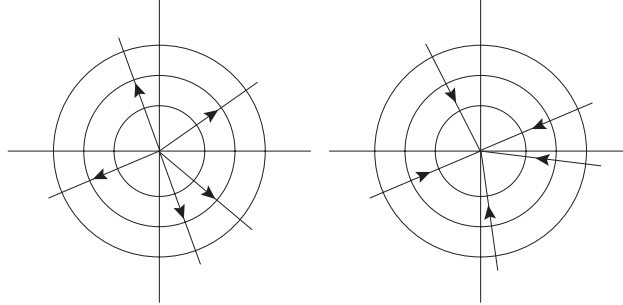


FIGURE 1. Maximum et minimum

2.1.b. Cartes de Morse. Cette notion permet de préciser les cartes de Morse en y faisant figurer les trajectoires d'un champ de pseudo-gradients X . Par exemple, la figure 1 montre, enfin, la différence entre un maximum (à gauche) et un minimum (à droite).

La figure 2 représente une carte de Morse pour un point critique d'indice i . La carte à proprement parler, le modèle dans $\mathbf{R}^n$, est représentée à gauche. À droite, c'est l'image dans la variété qui est figurée (la fonction est la

hauteur). Fixons quelques notations. Dans $\mathbf{R}^n$, la forme quadratique Q est définie négative sur V_- , sous-espace de dimension i , définie positive sur V_+ . Nous notons

$$U(\varepsilon, \eta) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid -\varepsilon < Q(x) < \varepsilon \text{ et } \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta)\}.$$

Puisque nous sommes dans $\mathbf{R}^n$, la fonction Q a un gradient, précisément, ici,

$$-\text{grad}_{(x_-, x_+)} Q = 2(x_-, -x_+).$$

Le bord de $U(\varepsilon, \eta)$ est formé de trois parties :

- deux parties des sous-ensembles de niveau de Q ,

$$\partial_{\pm} U = \{x \in U \mid Q(x) = \pm \varepsilon \text{ et } \|x_{\mp}\|^2 \leq \eta\};$$

- un ensemble de morceaux de trajectoires du gradient $\text{grad } Q$,

$$\partial_0 U = \{x \in \partial U \mid \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 = \eta(\varepsilon + \eta)\}.$$

Voir la figure 2. Ce sont les notations de [39], que nous utilisons ici.

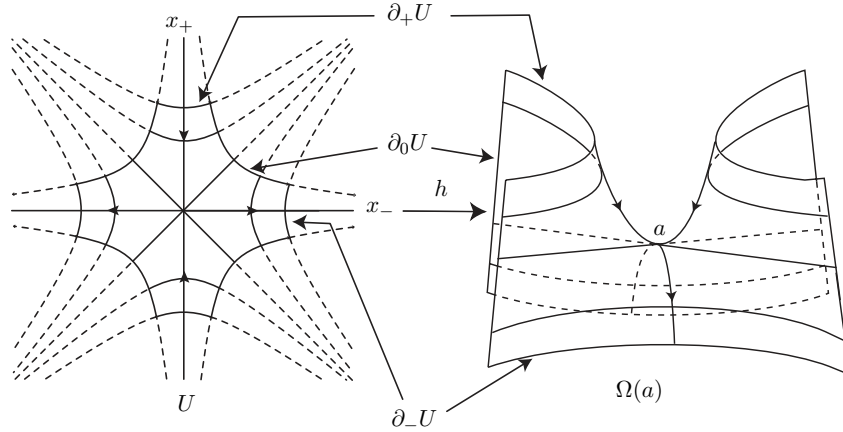


FIGURE 2. Une carte de Morse

Remarque 2.1.4. D'après la définition du gradient dans $\mathbf{R}^n$, les trajectoires du gradient sont orthogonales aux niveaux de la fonction (l'espace tangent à un niveau est le noyau de la différentielle de la fonction). Ce n'est donc pas par hasard que, sur le modèle représenté sur la figure 2, les unes et les autres apparaissent comme des hyperboles équilatères de deux familles orthogonales.

On contempera avec profit les deux parties de la figure. Sur les deux ont été indiqués le niveau critique (disons que c'est le niveau 0), deux niveaux

réguliers positifs et deux niveaux réguliers négatifs, des trajectoires de gradient limitant la carte ainsi que les trajectoires de l'opposé du gradient qui aboutissent ou commencent au point critique.

Si a est un point critique de la fonction f , un voisinage de a est décrit par le lemme de Morse comme image par un difféomorphisme h d'un $U(\varepsilon, \eta)$. Un tel voisinage sera noté $\Omega(a)$. Nous noterons aussi

$$\partial_{\pm}\Omega(a) = h(\partial_{\pm}U), \quad \partial_0\Omega = h(\partial_0U),$$

etc. Nous allons essayer d'utiliser, de façon cohérente, comme sur la figure 2, les notations

- Ω pour les images des cartes (Ω est une partie de la variété),
- et U pour les ouverts de cartes, les modèles (U est une partie de $\mathbf{R}^n$).

2.1.c. Existence de champs de pseudo-gradients. Il existe des champs de pseudo-gradients pour toutes les fonctions de Morse sur toutes les variétés. C'est, par exemple, une conséquence du fait qu'il existe des métriques riemanniennes et plus précisément, du fait qu'il existe des métriques riemanniennes ayant une forme prescrite sur une partie (un voisinage des points critiques) donnée de la variété et c'est, en tout cas, une conséquence simple de l'existence de partitions de l'unité, comme nous le montrons maintenant.

Démonstration de l'existence de pseudo-gradients. Appelons $c_1, \dots, c_r$ les points critiques de f sur la variété V (ils sont en nombre fini parce que V est compacte et que les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés) et $(U_1, h_1), \dots, (U_r, h_r)$ des cartes de Morse au voisinage de ces points. Les ouverts images Ω_j sont bien entendu supposés disjoints. Complétons les en un recouvrement ouvert $(\Omega_j)_{1 \leq j \leq N}$ fini de V par des images d'ouverts de cartes (U_j, h_j) . On peut supposer (et donc nous supposons) que le point critique c_i est dans le seul ouvert Ω_i de ce recouvrement.

Si g est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, considérons $\text{grad } g$, son gradient pour la métrique euclidienne standard de $\mathbf{R}^n$. Définissons pour chaque indice j un champ X_j sur l'ouvert Ω_j en ramenant sur V le gradient de $f \circ h_j$, c'est-à-dire par la formule

$$X_j(x) = -(T_{h_j^{-1}(x)} h_j)(\text{grad}_{h_j^{-1}(x)}(f \circ h_j))$$

(la formule a l'air compliquée, mais l'objet lui-même est très simple : nous avons pris le gradient de la fonction $f \circ h_j$, un champ de vecteurs sur U_j , et l'avons transformé, de la manière naturelle, en un champ de vecteurs sur Ω_j). Par définition même, $X_j \cdot f \leq 0$ sur Ω_j (c'est une des propriétés

de l'opposé du gradient). De plus, X_j ne s'annule qu'au point critique de f sur U_j (pour $j \leq r$).

Utilisons ensuite une partition de l'unité $(\varphi_j)_j$ associée au recouvrement $(\Omega_j)_j$, ce qui permet d'étendre les champs locaux X_j en des champs $\tilde{X}_j$ définis sur V tout entière par

$$\tilde{X}_j(x) = \begin{cases} \varphi_j(x)X_j(x) & \text{si } x \in \Omega_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à poser

$$X = \sum_{j=1}^N \tilde{X}_j.$$

Le champ X ainsi défini est bien un pseudo-gradient adapté à f , puisque, en effet

$$(df)_x(X_x) = \sum_{j=1}^N (df)_x((\tilde{X}_j)_x) \leq 0.$$

Si cette inégalité est une égalité, $\varphi_j(x)X_j(x) = 0$ pour tout j , donc, soit x est critique, soit $\varphi_j(x) = 0$ pour tout j (ce qui est absurde).

Soit c_i un des points critiques de f . Par construction, X coïncide avec l'image du gradient euclidien sur le complémentaire dans U_i de la réunion des autres ouverts U_j , lequel complémentaire est un voisinage de c_i qui contient une petite carte de Morse au voisinage de c_i . $\square$

2.1.d. Sous-variétés stables et instables. Soit a un point critique de f . On définit ses variétés stable

$$W^s(a) = \left\{ x \in V \mid \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi^s(x) = a \right\}$$

et instable

$$W^u(a) = \left\{ x \in V \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi^s(x) = a \right\}.$$

Dans un ouvert $U = U(\varepsilon, \eta)$ de $\mathbf{R}^n$ comme considéré au §2.1.b, on a

$$W^s(0) = U \cap V_+ \quad \text{et} \quad W^u(0) = U \cap V_-.$$

Avec les notations de 2.1.b, la variété stable de a est obtenue à partir de la réunion de $h(U \cap V_+) = h(W^s(0))$ et de

$$h(\partial_+ U \cap V_+) \times \mathbf{R}$$

en identifiant (x, s) , pour x dans le bord et $s \geq 0$, à $\varphi^s(x)$. Voir la figure 3. Si k est l'indice du point critique a , $h(\partial_+ U \cap V_+)$ est une sphère de dimension $n - k - 1$, c'est l'image par le difféomorphisme h de la sphère $\|x_+\|^2 = \varepsilon$ de l'espace V_+ (espace vectoriel de dimension $n - k$).

Ainsi les variétés stable et, de même, instable sont des sous-variétés : en dehors du point critique, c'est l'image du plongement $(x, s) \mapsto \varphi^s(x)$ et au voisinage du point critique, c'est l'image de V_+ . Cet argument montre aussi que $W^s(a)$ est difféomorphe à un disque de dimension $n - k$ (et de même $W^u(a)$ à un disque de dimension k) : $W^s(a)$ s'obtient en compactifiant $S^{n-k-1} \times \mathbf{R}$ par l'ajout de l'unique « point à l'infini » a , ou encore, c'est le quotient de $S^{n-k-1} \times]-\infty, +\infty]$ par la relation d'équivalence qui identifie à un unique point la sphère $S^{n-k-1} \times \{+\infty\}$.

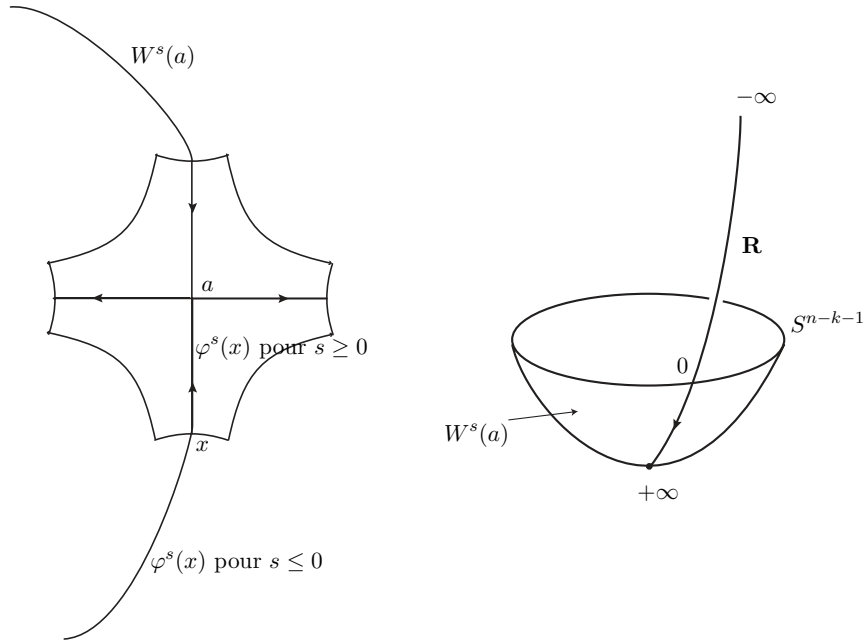


FIGURE 3. Variétés stables

Nous avons donc démontré :

Proposition 2.1.5. *La variété instable et la variété instable du point critique a sont des sous-variétés de V difféomorphes à des disques ouverts. De plus on a*

$$\dim W^u(a) = \operatorname{codim} W^s(a) = \operatorname{Ind}(a). \quad \square$$

Ici, $\operatorname{Ind}(a)$ désigne l'indice du point a comme point critique de f .

Trajectoires du champ de pseudo-gradients. Notons φ_X^s ou φ^s le flot du pseudo-gradient X . La propriété la plus importante des lignes de flot, des trajectoires du champ X est que toutes relient des points critiques de la

fonction f : toutes les trajectoires viennent d'un point critique et vont vers un autre point critique.

Proposition 2.1.6. *On suppose que la variété V est compacte. Soit $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow V$ une trajectoire du champ de pseudo-gradients X . Alors il existe des points critiques c et d de f tels que*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma(s) = c \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = d.$$

Démonstration. Montrons que $\gamma(t)$ a une limite quand t tend vers $+\infty$ (par exemple) et que cette limite est un point critique. Il nous faut prouver que $\gamma(t)$ atteint $S_+(d) = \partial_+ \Omega(d) \cap W^s(d)$ pour un certain point critique d de f . Supposons que ce ne soit pas vrai. Alors, chaque fois que la trajectoire γ pénètre dans un voisinage de Morse, elle doit en ressortir, sans jamais pouvoir y revenir puisque f décroît le long de γ . Appelons s_0 le temps pour lequel γ sort pour la dernière fois de la réunion (finie) des cartes de Morse des points critiques,

$$\Omega = \bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \Omega(c)$$

($\text{Crit}(f)$ désigne bien sûr l'ensemble des points critiques de la fonction f). Il existe donc un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall x \in V - \Omega, \quad (df)_x(X_x) \leq -\varepsilon_0.$$

Donc, pour tout $s \geq s_0$,

$$\begin{aligned} f(\gamma(s)) - f(\gamma(s_0)) &= \int_{s_0}^s \frac{d(f \circ \gamma)}{du} du \\ &= \int_{s_0}^s (df)_{\gamma(u)}(X_{\gamma(u)}) du \\ &\leq -\varepsilon_0(s - s_0), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\gamma(s)) = -\infty,$$

ce qui est absurde. □

2.1.e. Topologie des sous-niveaux — quand on ne traverse pas de valeur critique. La topologie des niveaux ne change pas tant qu'on ne traverse pas de valeur critique. Il en est de même de celle des sous-niveaux. Désignons par

$$V^a = f^{-1}(]-\infty, a])$$

le sous-niveau a de f . On a dit § 14.2.c que, si a est une valeur régulière, V^a est une variété à bord.

Théorème 2.1.7. *Soient a et b deux nombres réels tels que f n'ait pas de valeur critique dans l'intervalle $[a, b]$. On suppose que $f^{-1}([a, b])$ est compact. Alors V^b est difféomorphe à V^a .*

Démonstration. On utilise le flot d'un pseudo-gradient X pour rétracter V^b sur V^a . Fixons une fonction $\rho : V \rightarrow \mathbf{R}$ qui vaut

$$\begin{cases} -\frac{1}{(df)_x(X)} & \text{sur } f^{-1}([a, b]) \\ 0 & \text{en dehors d'un voisinage compact de cette partie.} \end{cases}$$

Le champ de vecteurs $Y = \rho X$ est nul en dehors d'un compact, de sorte que son flot ψ^s est défini pour tout $s \in \mathbf{R}$. Pour $x \in V$ un point fixé, on considère la fonction de variable réelle $s \mapsto f \circ \psi^s(x)$. Si $\psi^s(x) \in f^{-1}([a, b])$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f \circ \psi^s(x) &= (df)_{\psi^s(x)} \left(\frac{d}{ds} \psi^s(x) \right) \\ &= (df)_{\psi^s(x)} (Y_{\psi^s(x)}) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\psi^s(x) \in f^{-1}([a, b])$, on a

$$f \circ \psi^s(x) = -s + f(x).$$

On en déduit que le difféomorphisme ψ^{b-a} de V envoie V^b sur V^a . $\square$

Remarque 2.1.8. L'application

$$\begin{aligned} r : V^b \times [0, 1] &\longrightarrow V^b \\ (x, s) &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leq a \\ \psi^{s(f(x)-a)}(x) & \text{si } a \leq f(x) \leq b \end{cases} \end{aligned}$$

est une rétraction par déformation de V^b sur V^a , c'est-à-dire que $r_0 = \text{Id}$, que r_t est constamment égale à l'inclusion sur V^a et que r_1 a pour image V^a . On a donc démontré, aussi, que V^a est un rétracte par déformation de V^a .

Corollaire 2.1.9 (le théorème de Reeb). *Soit V une variété compacte. On suppose qu'il existe une fonction de Morse sur V qui n'a que deux points critiques. Alors V est homéomorphe à une sphère.*

Démonstration. Les deux points critiques sont forcément le minimum et le maximum. On peut supposer que $f(V) = [0, 1]$. Alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le lemme de Morse garantit que $f^{-1}([0, \varepsilon])$ et $f^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$ sont des disques D^n . Grâce au théorème 2.1.7, les sous-niveaux V^ε et $V^{1-\varepsilon}$ sont difféomorphes. Donc $V^{1-\varepsilon}$ est aussi un disque D^n et V est réunion de deux

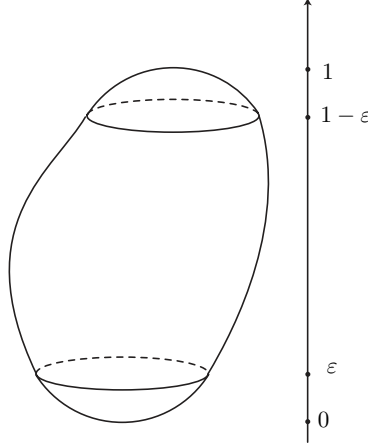


FIGURE 4. Le théorème de Reeb

disques recollés le long de leur bord. Il est classique que V est alors homéomorphe à une sphère : on écrit explicitement une application

$$h : D_1^n \cup_{\text{Id}} D_2^n \longrightarrow D_1^n \cup_{\varphi} D_2^n$$

par

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in D_1^n \\ \|x\| \varphi(x/\|x\|) & \text{si } x \in D_2^n - \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \in D_2^n. \end{cases}$$

C'est un homéomorphisme de la sphère standard (où les deux disques sont recollés par l'application identique sur S^{n-1}) sur notre variété (où les deux disques sont recollés par le difféomorphisme φ). $\square$

Remarques 2.1.10. D'abord, le théorème reste vrai si les deux points critiques ne sont pas supposés non dégénérés. Ensuite, il n'est pas vrai que la variété V soit *difféomorphe* à une sphère, c'est même un argument important dans la construction de variétés homéomorphes à des sphères sans leur être difféomorphes. Pour ces deux résultats, voir les références dans le livre [48, p. 25].

2.1.f. Topologie des sous-niveaux — quand on traverse une valeur critique. La topologie du niveau comme celle du sous-niveau va changer. Le théorème ci-dessous exprime comment.

Théorème 2.1.11. *Soit $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Soit a un point critique non dégénéré d'indice k de f et soit $\alpha = f(a)$. On suppose que pour un $\varepsilon > 0$ assez petit, $f^{-1}([\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon])$ est compact et ne contient pas d'autre point*

critique de f que a . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, l'espace $V^{\alpha+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $V^{\alpha-\varepsilon}$ auquel on a ajouté une cellule de dimension k (la variété instable de a).

Remarque 2.1.12. Ce théorème permet de justifier l'apparition, le parachutage, de la fonction de Morse sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ dont il a été question dans l'exercice 5 page 18.

Commençons par une description très naturelle de l'espace projectif (disons complexe). C'est, comme tous les géomètres le savent, la réunion d'un espace affine et d'un hyperplan « à l'infini ». En considérant les choses à l'envers, on peut dire que l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est obtenu à partir de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ en lui ajoutant un $\mathbf{C}^n$, ou un disque D^{2n} . De proche en proche, ceci définit une « décomposition cellulaire » de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$: on commence par un point (c'est $\mathbf{P}^0$, le point $[1, 0, \dots, 0]$), on ajoute un disque de dimension (réelle) 2 (on a obtenu un $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, les $[a, b, 0, \dots, 0]$) et ainsi de suite.

La fonction de Morse de l'exercice 5 permet cette reconstruction, comme l'explique le théorème 2.1.11. On commence avec le minimum (c'est justement notre point $[1, 0, \dots, 0]$), où la fonction vaut 0. La première valeur critique est ensuite 1, elle correspond au point critique $[0, 1, 0, \dots, 0]$, qui est d'indice 2... et permet d'attacher une cellule de dimension 2, et ainsi de suite. En ce sens, cette fonction est « parfaite⁽¹⁾ ».

Démonstration. Commençons par présenter les idées de la démonstration en contemplant la figure 5. La cellule D^k est le morceau de variété instable de a représenté sur cette figure. Ensuite :

(1) en modifiant f , on construit une fonction F qui coïncide avec f sauf sur un voisinage de a , où $F < f$, de sorte que $F^{-1}(]-\infty, \alpha - \varepsilon])$ sera la réunion de $V^{\alpha-\varepsilon}$ et d'un petit voisinage de a (la partie hachurée horizontalement sur la figure 5) ;

(2) ainsi, le théorème 2.1.7 et la remarque 2.1.8 appliqués à la fonction F donnent la partie hachurée $F^{-1}(]-\infty, \alpha + \varepsilon])$ comme un rétracte de $V^{\alpha+\varepsilon}$ (qui est aussi le sous-niveau $\alpha + \varepsilon$ pour la fonction modifiée F) ;

(3) on peut alors se placer dans une carte de Morse pour montrer que la partie de V constituée du morceau de variété instable et de $V^{\alpha-\varepsilon}$ est un rétracte par déformation de $F^{-1}(]-\infty, \alpha + \varepsilon])$.

⁽¹⁾Il y a aussi une définition mathématique précise de l'expression « fonction de Morse parfaite », et celle considérée ici en est le prototype.

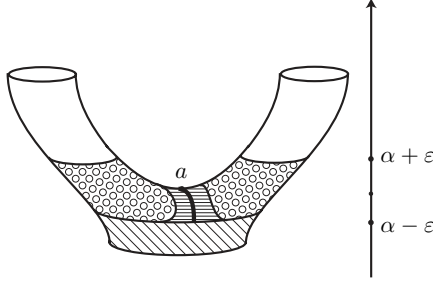


FIGURE 5

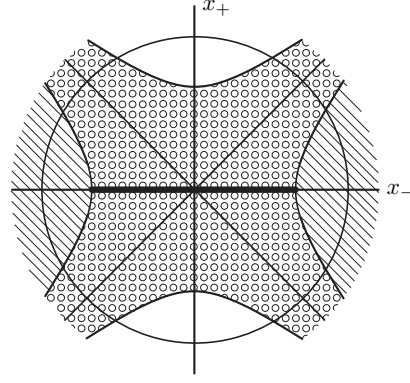
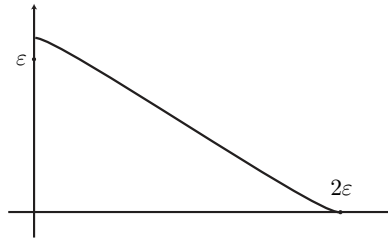


FIGURE 6

Construction de F . On choisit une carte de Morse (U, h) au voisinage de a et un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $f^{-1}([\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon])$ soit compact et pour que U contienne la boule de centre 0 et de rayon $\sqrt{2\varepsilon}$. Le disque D^k est la partie de U formée des (x_-, x_+) tels que $\|x_-\|^2 < \varepsilon$ et $x_+ = 0$. Sur la figure 5, comme sur la figure 6, le sous-niveau $V^{\alpha-\varepsilon}$ est hachuré obliquement alors que $f^{-1}([\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon])$ est pointillé. La cellule, le disque D^k est en trait gras.

On construit la fonction F en utilisant une fonction $\mu : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec les propriétés suivantes :

- $\mu(0) > \varepsilon$;
- pour $s \geq 2\varepsilon$, $\mu(s) = 0$;
- pour tout s , $-1 < \mu'(s) \leq 0$.

FIGURE 7. La fonction μ

On définit F par

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \Omega(a) \\ \alpha - \|x_-\|^2 + \|x_+\|^2 \mu(\|x_-\|^2 + 2\|x_+\|^2) & \text{si } x = h(x_-, x_+). \end{cases}$$

Remarquons que le sous-niveau $\alpha + \varepsilon$ de F est exactement celui $V^{\alpha+\varepsilon}$ de f . En effet,

- en dehors de $\|x_-\|^2 + 2\|x_+\|^2 \leq 2\varepsilon$, $F = f$;
- à l'intérieur de l'ellipsoïde en question, on a

$$F(x) \leq f(x) = \alpha - \|x_-\|^2 + \|x_+\|^2 \leq \alpha + \frac{1}{2}\|x_-\|^2 + \|x_+\|^2 \leq \alpha + \varepsilon.$$

De plus, les points critiques de F sont les mêmes que ceux de f , puisque

$$dF = \underbrace{(-1 - \mu'(\|x_-\|^2 + 2\|x_+\|^2))}_{<0} 2x_- \cdot dx_- + \underbrace{(1 - 2\mu'(\|x_-\|^2 + 2\|x_+\|^2))}_{\geq 1} 2x_+ \cdot dx_+$$

ne s'annule que pour $x_- = x_+ = 0$, c'est-à-dire en a .

Nous savons maintenant que

$$F^{-1}([\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]) \subset f^{-1}([\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]),$$

en particulier, cette région est compacte. De plus, elle ne contient aucun point critique de F : le seul possible serait a , mais

$$F(a) = \alpha - \mu(0) < \alpha - \varepsilon.$$

On en déduit que $F^{-1}([-\infty, \alpha + \varepsilon])$ est un rétracte par déformation de $V^{\alpha+\varepsilon}$. Appelons H la partie hachurée horizontalement sur la figure 5 (et blanche sur la figure 8), c'est-à-dire l'adhérence de $F^{-1}([-\infty, \alpha + \varepsilon]) - V^{\alpha-\varepsilon}$. On a en particulier

$$F^{-1}([-\infty, \alpha + \varepsilon]) = V^{\alpha-\varepsilon} \cup H.$$

La rétraction. On définit la rétraction en suivant les flèches indiquées sur la figure 9. Précisément, r_t est l'identité en dehors de $\Omega(a)$ et on définit r_t

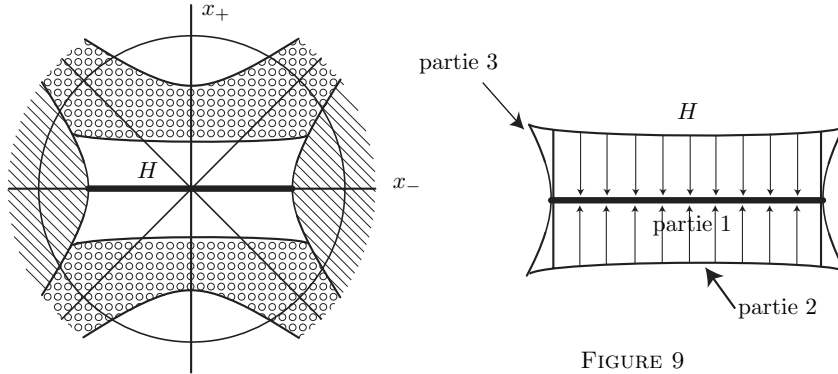


FIGURE 8

FIGURE 9

sur U (plutôt que sur $\Omega(a)$, pour alléger l'écriture) par

- sur la région 1 (figure 9), c'est-à-dire sur $\|x_-\|^2 \leq \varepsilon$,

$$r_t(x_-, x_+) = (x_-, tx_+);$$

- sur la région 2, définie par $\varepsilon \leq \|x_-\|^2 \leq \varepsilon\|x_+\|^2$, on pose

$$r_t(x_-, x_+) = (x_-, s_tx_+)$$

avec

$$s_t = t + (1-t) \frac{\sqrt{\|x_-\|^2 - \varepsilon}}{\|x_+\|}$$

le nombre *ad hoc* pour rendre les formules continues ;

- sur la région 3, qui correspond à $V^{\alpha-\varepsilon}$ et où $\|x_+\|^2 + \varepsilon \leq \|x_-\|^2$, on prend simplement $r_t = \text{Id}$. $\square$

2.2. La condition de Smale

Revenons aux variétés stables et instables des points critiques.

2.2.a. Exemples de variétés stables et instables. Dans les exemples considérés ci-dessus, voici les sous-variétés stables et instables de tous les points critiques.

La hauteur sur la sphère ronde. Appelons a le minimum et b le maximum. On a

$$W^s(a) = S^2 - \{b\}, \quad W^u(a) = \{a\}$$

et de même

$$W^s(b) = \{b\}, \quad W^u(b) = S^2 - \{a\}$$

(pour tout champ de pseudo-gradients).

Le tore. Commençons par la fonction hauteur sur le tore chambre à air. Appelons les points critiques a, b, c, d , dans l'ordre des valeurs qu'y prend la fonction (figure 10). Le champ de pseudo-gradients utilisé est simplement le gradient pour la métrique induite par celle de $\mathbf{R}^3$. La variété stable de a est constituée de tous les points qui descendent jusqu'à a , c'est-à-dire du complémentaire des trajectoires dessinées sur la figure qui se terminent en b ou en c . Ainsi $W^s(a)$ est homéomorphe à un disque ouvert. La variété stable de b est formée des deux trajectoires issues de c se terminant en b . Ainsi, $W^s(b)$ est difféomorphe à un intervalle ouvert. De même pour la variété stable de c , qui est constituée des deux trajectoires issues de d que l'on voit sur la figure. Il faut remarquer que, sur cet exemple (qui est là pour ça), la variété instable de c et la variété stable de b ont en commun deux intervalles ouverts. La figure 11 représente dans un carré quelques niveaux de la même

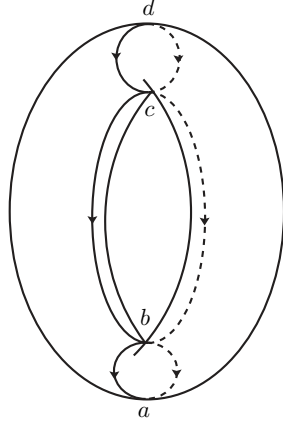


FIGURE 10. La hauteur sur le tore

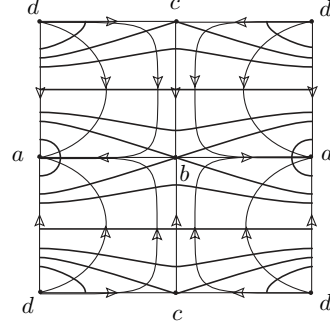


FIGURE 11. Un autre point de vue sur la même

fonction, ce qui résout un exercice suggéré dans le chapitre précédent, ainsi que quelques trajectoires du gradient.

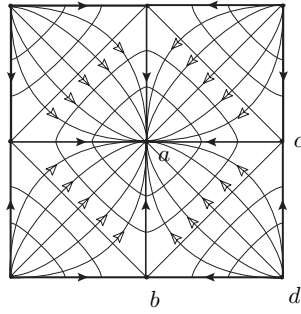


FIGURE 12. Le tore, encore

La situation est un peu différente dans le cas de l'autre fonction de Morse que nous avons rencontrée sur le tore T^2 , c'est-à-dire

$$f(x, y) = \cos(2\pi x) + \cos(2\pi y).$$

Notons encore a et d les extrema, b et c les points critiques d'indice 1. La figure 12 représente les lignes de gradient reliant deux points critiques (on utilise ici le gradient pour la métrique « plate » du tore, c'est-à-dire pour la métrique habituelle de $\mathbf{R}^2$, comme on le voit, les lignes en question forment d'authentiques angles droits avec les niveaux). On voit bien ici que $W^s(a)$ est le carré ouvert (donc un disque ouvert), que $W^s(b)$ est un intervalle ouvert (le côté horizontal du carré sur la figure) de même que $W^u(b)$ (segment

vertical), $W^s(c)$ (côté vertical) et $W^u(c)$ (segment horizontal) alors que $W^s(d)$ est réduit à d . On remarquera que $W^u(b)$ et $W^s(c)$ ne se rencontrent pas.

La hauteur sur l'« autre » sphère. À partir de la figure 13, les lecteurs pourront déterminer les variétés stables et instables des quatre points critiques de la fonction hauteur (pour le gradient de la métrique induite par celle de $\mathbf{R}^3$).

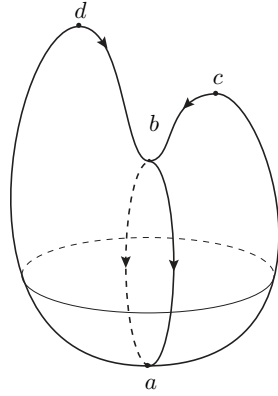


FIGURE 13. L'autre sphère

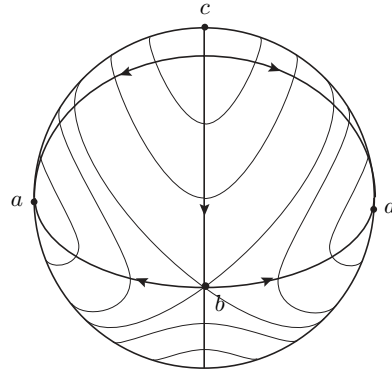


FIGURE 14. Le plan projectif

La fonction de Morse sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. La figure 14 montre, elle, les variétés stables et instables des trois points critiques a (minimum), b (indice 1) et c (maximum) pour la fonction déjà considérée ci-dessus (dans l'exercice 6 page 18) sur le plan projectif réel $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.

2.2.b. La condition de Smale. On dit que le champ de pseudo-gradients adapté à la fonction de Morse f satisfait à la *condition de Smale* si toutes les variétés stables et instables de ses points critiques se rencontrent transversalement,

$$\forall a, b \text{ points critiques de } f, \quad W^u(a) \pitchfork W^s(b).$$

Remarque 2.2.1. Certaines variétés stables et instables particulières se coupent toujours transversalement. Par exemple, on a toujours

- $W^u(a) \pitchfork W^s(a)$ (pour le même point critique), c'est ce que l'on voit dans une carte de Morse autour de a ;
- $W^u(a) \cap W^s(b) = \emptyset$ si a et b sont distincts et $f(a) \leq f(b)$ (et en particulier, ces variétés stables et instables sont transverses).

Si le champ vérifie la condition de Smale, on a, pour tous points critiques a et b ,

$$\text{codim}(W^u(a) \cap W^s(b)) = \text{codim } W^u(a) + \text{codim } W^s(b),$$

c'est-à-dire,

$$\dim(W^u(a) \cap W^s(b)) = \text{Ind}(a) - \text{Ind}(b).$$

Sous l'hypothèse faite, cette intersection est une sous-variété de V , que nous noterons $\mathcal{M}(a, b)$. Elle est formée de tous les points qui sont sur les trajectoires joignant a à b :

$$\mathcal{M}(a, b) = \left\{ x \in V \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi^s(x) = a \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi^s(x) = b \right\}.$$

Proposition 2.2.2. *Le groupe $\mathbf{R}$ des translations dans le temps opère sur $\mathcal{M}(a, b)$ par $s \cdot x = \varphi^s(x)$, librement si $a \neq b$.*

Démonstration. Le fait qu'on ait affaire à une opération de groupe est clair. Si $a \neq b$, il n'y a aucun point critique dans $\mathcal{M}(a, b)$. Soit $x \in \mathcal{M}(a, b)$. Comme x n'est pas un point critique, on sait que $f(\varphi^s(x))$ est une fonction strictement décroissante de s , si $\varphi^s(x) = \varphi^{s'}(x)$, on a donc forcément $s = s'$. Ainsi l'opération est libre. $\square$

Le quotient est donc une variété, que nous appellerons $\mathcal{L}(a, b)$ et

$$\dim \mathcal{L}(a, b) = \text{Ind}(a) - \text{Ind}(b) - 1.$$

Remarque 2.2.3. Il est clair que le quotient est un espace séparé. En fait, la façon la plus commode de considérer ce quotient est la suivante. Si α est une valeur de f comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $\mathcal{M}(a, b)$ est transverse au niveau $f^{-1}(\alpha)$: ce niveau est de codimension 1 et le champ X lui est transverse (par définition, il n'est pas tangent au niveau, ou l'on aurait $df(X) = 0$ en un point non critique). Toutes les trajectoires issues de a rencontrent ce niveau intermédiaire en exactement un point, de sorte que $\mathcal{L}(a, b)$ s'identifie à $\mathcal{M}(a, b) \cap f^{-1}(\alpha)$.

Donc, si a et b sont deux points critiques (distincts) et si le gradient utilisé vérifie la condition de Smale, pour que $\mathcal{M}(a, b)$ ou $\mathcal{L}(a, b)$ ne soit pas vide, il est nécessaire que

$$\text{Ind}(a) > \text{Ind}(b).$$

En d'autres termes, l'indice décroît le long des lignes de gradient.

Nous reviendrons longuement sur ces espaces dans le chapitre qui suit.

Exemples 2.2.4. Tous les exemples présentés ci-dessus satisfont à la condition de Smale⁽²⁾, sauf celui de la fonction hauteur sur le tore. En effet, les variétés $W^s(b)$ et $W^u(c)$ ne sont pas transverses, comme on l'a déjà remarqué sans le savoir (exemple 2.2.a et figure 10). D'ailleurs, on a des trajectoires de gradient joignant deux points critiques d'indice 1, ce dont nous venons de voir que c'est interdit. Ce « mauvais » champ de vecteurs est le gradient pour la métrique riemannienne induite sur le tore par la métrique euclidienne ambiante.

La condition de Smale interdit des lignes de champ comme celles montrées sur la figure 15. La figure 16 montre les trajectoires d'un champ voisin vérifiant la condition de Smale (obtenu par la méthode générale explicitée dans le paragraphe suivant).

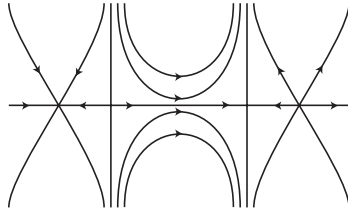


FIGURE 15

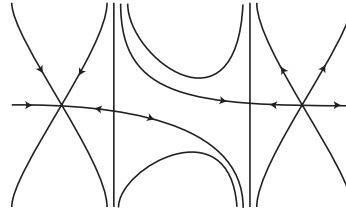


FIGURE 16

2.2.c. Existence. Nous montrons maintenant, en suivant [66], l'existence et la généricité des champs de pseudo-gradients vérifiant la condition de Smale.

Remarquons d'abord que, quitte à remplacer f par une autre fonction arbitrairement proche au sens $\mathcal{C}^1$, on peut supposer qu'elle prend des valeurs distinctes en tous ses points critiques. En effet, en dehors de Ω , on a (par compacité) $df(X) < -\varepsilon_0$ pour un certain $\varepsilon_0 > 0$. On choisit alors une fonction h qui soit constante sur chaque carte de Morse Ω_i , vérifie $|dh| < \frac{1}{2}\varepsilon_0$ et telle que

$$f(c_i) + h(c_i) \neq f(c_j) + h(c_j) \quad \text{pour } i \neq j.$$

La fonction $f + h$ reste de Morse, avec les mêmes points critiques que f , le champ de vecteurs X reste un pseudo-gradient adapté, les valeurs critiques sont maintenant distinctes.

Théorème 2.2.5 (théorème de Smale [66]). *Soit V une variété à bord et soit f une fonction de Morse à valeurs critiques distinctes sur V . On fixe des cartes*

⁽²⁾Dans les cas de l'« autre sphère » et du plan projectif, en vertu, par exemple, de l'exercice 11 (page 48).

de Morse au voisinage de chaque point critique de f . Soit Ω la réunion de ces cartes et soit X un champ de pseudo-gradients sur V transverse au bord. Alors il existe un champ de pseudo-gradients X' qui est proche de X (au sens $\mathcal{C}^1$), égal à X sur Ω et tel que, pour tous points critiques a, b de f , on ait

$$W_{X'}^s(a) \pitchfork W_{X'}^u(b).$$

Pour préciser la notion de *proximité* $\mathcal{C}^1$ utilisée ici : l'énoncé affirme que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout recouvrement de V par des cartes $\varphi_i(U_i)$ et tout compact $K_i \subset U_i$, il existe un champ X' tel que (pour la norme $\mathcal{C}^1$ sur chaque compact K_i), on ait

$$\|T\varphi_i^{-1}(X') - T\varphi_i^{-1}(X)\| < \varepsilon$$

et les propriétés annoncées.

Remarque 2.2.6. Un champ X' suffisamment proche du champ de pseudo-gradients X au sens $\mathcal{C}^1$ et égal à X sur Ω est lui aussi un champ de pseudo-gradients. On appellera, pour aller plus vite, « bonne approximation » de X un tel champ X' .

Remarque 2.2.7. Ce théorème est parfois appelé « de Kupka-Smale », parce que Kupka en a donné une démonstration, mais celle que nous imitons ici est la démonstration de Smale.

Démonstration du théorème. Comme les valeurs critiques de f sont distinctes, ordonnons ses points critiques

$$\text{Crit}(f) = \{c_1, \dots, c_q\} \quad \text{avec } f(c_1) > f(c_2) > \dots > f(c_q),$$

et on note $\alpha_i = f(c_i)$. La démonstration du théorème va être une récurrence fondée sur le lemme qui suit.

Lemme 2.2.8. Soit $j \in \{1, \dots, q\}$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une bonne approximation X' (au sens $\mathcal{C}^1$) de X telle que

- (1) le champ X' coïncide avec X sur le complémentaire dans V de $f^{-1}([\alpha_j + \varepsilon, \alpha_j + 2\varepsilon])$;
- (2) la variété stable (pour X') de c_j est transverse aux variétés instables de tous les points critiques,

$$W_{X'}^s(c_j) \pitchfork W_{X'}^u(c_i).$$

Admettons (provisoirement) le lemme et démontrons le théorème. On appelle $\mathcal{P}(r)$ la propriété : il existe une bonne approximation X'_r de X telle que, pour tout $p \leq r$ et tout i , on ait

$$W_{X'_r}^s(c_p) \pitchfork W_{X'_r}^u(c_i).$$

Remarquons que

- la propriété $\mathcal{P}(q)$ est exactement le théorème ;
- la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie pour une raison triviale : le point critique c_1 est le maximum de f et sa variété stable est réduite à lui même, celle-ci ne rencontre donc aucune variété instable d'aucun point critique situé en-dessous de c_1 ;
- et $\mathcal{P}(2)$ se déduit du lemme avec $j = 2$.

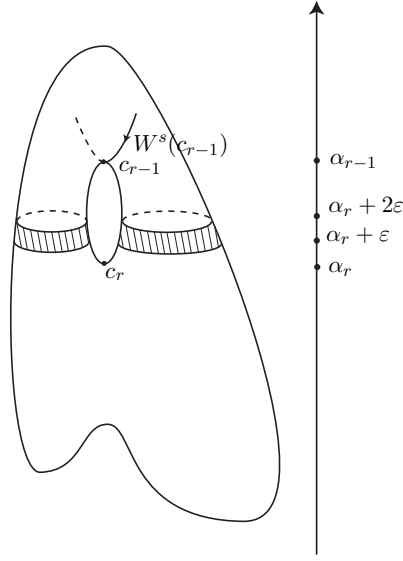


FIGURE 17

Supposons donc que $\mathcal{P}(r-1)$ soit vraie et montrons que $\mathcal{P}(r)$ l'est. On a donc un champ X'_{r-1} tel que la variété stable de c_{r-1} soit transverse à toutes les variétés instables. On applique le lemme au champ X'_{r-1} et à $j = r$. On obtient un champ X'_r qui, en particulier (c'est la première propriété donnée par le lemme), coïncide avec X'_{r-1} en dehors de l'étroite bande où $\alpha_r + \varepsilon \leq f \leq \alpha_r + 2\varepsilon$. De plus, comme, pour tout $p \leq r-1$, la variété stable de c_p pour X'_{r-1} est au-dessus de cette bande, cette variété stable est la même pour X'_{r-1} et X'_r (voir la figure 17). Donc on a

$$W_{X_{r-1}}^s(c_p) \cap W_{X_{r-1}}^u(c_i) = W_{X_r}^s(c_p) \cap W_{X_r}^u(c_i)$$

pour $p \leq r-1$ et pour tout i , donc

$$W_{X_r}^s(c_p) \pitchfork W_{X_r}^u(c_i).$$

Et, pour $p = r$, le lemme implique (c'est la deuxième propriété) que

$$W_{X_r}^s(c_r) \pitchfork W_{X_r}^u(c_i).$$

□

Démonstration du lemme. Il peut être utile de contempler une carte de Morse au voisinage de c_j . Il y en a une représentée (deux fois) sur la figure 18, où sont portées les notations qui suivent. L'indice de c_j est appelé k . On

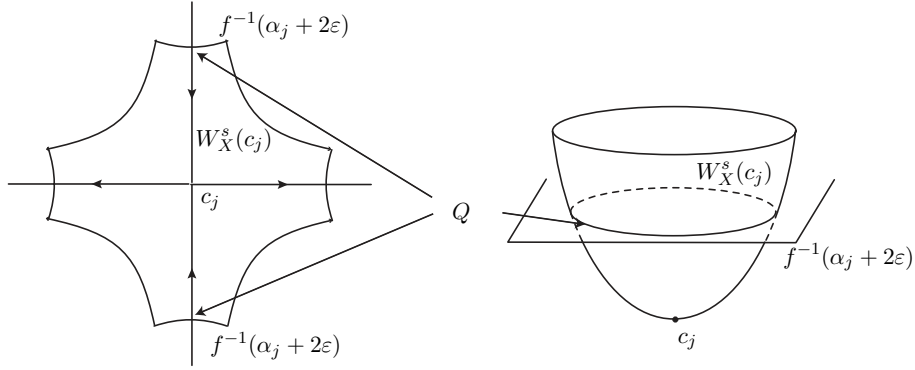


FIGURE 18. Dans une carte de Morse

choisit un ε assez petit pour que

$$\alpha_j + 2\varepsilon < \alpha_{j-1}.$$

On note $Q = W^s(c_j) \cap f^{-1}(\alpha_j + 2\varepsilon)$, de sorte que Q est une sphère de dimension $n - k - 1$. On considère un voisinage tubulaire de cette sphère Q dans $f^{-1}(\alpha_j + 2\varepsilon)$, de la forme $Q \times D^k$, ce que l'on voit dans une carte de Morse et sur la figure 19.

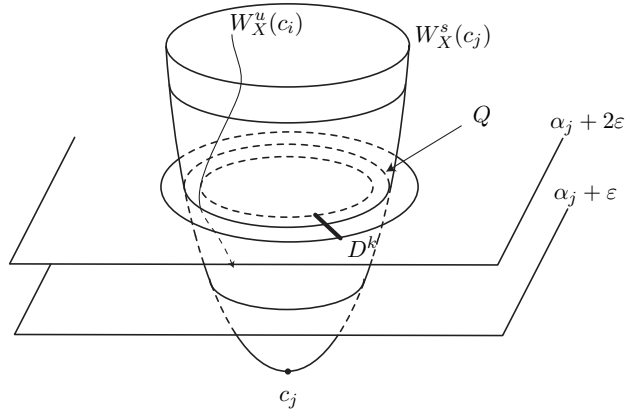


FIGURE 19. Dans la variété

Il existe alors un plongement

$$\Psi : D^k \times Q \times [0, m] \longrightarrow f^{-1}([\alpha_j + \varepsilon, \alpha_j + 2\varepsilon])$$

tel que

- Ψ se restreint à $\{0\} \times Q \times \{0\}$ en le plongement de Q dans $f^{-1}(\alpha_j + \varepsilon)$;
- Ψ se restreint à $\{0\} \times Q \times \{m\}$ en le plongement de Q dans $f^{-1}(\alpha_j + 2\varepsilon)$;
- si z est la coordonnée dans $[0, m] \subset \mathbf{R}$,

$$\Psi_* \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) = X.$$

Les variétés instables sont transverses aux niveaux. En particulier, elles rencontrent $D^k \times Q$ le long d'une variété (non connexe en général) P' . Si $W_X^s(c_j) \pitchfork P'$, il n'y a rien à démontrer. La preuve va donc consister à modifier X en X' sur $f^{-1}([\alpha_j + \varepsilon, \alpha_j + 2\varepsilon])$ de sorte que

$$W_{X'}^s(c_j) \pitchfork P'.$$

La modification aura lieu à l'intérieur de l'image de Ψ . Plaçons-nous donc dans $D^k \times Q \times [0, m]$ avec $X = -\partial/\partial z$. La figure 19 montre ce qui se passe dans la variété, la figure 20 montre le modèle.

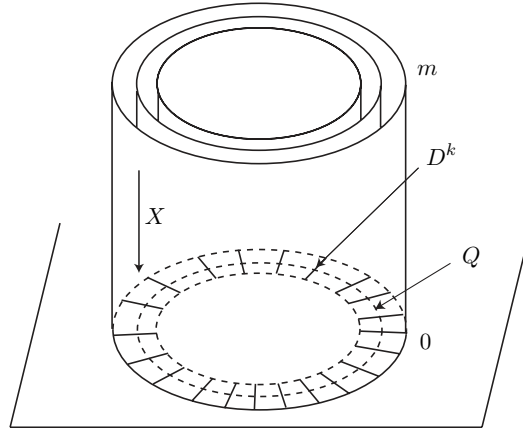


FIGURE 20. Le modèle

Appelons P la sous-variété $\Psi^{-1}(P') \subset D^k \times Q \times [0, m]$. Vue dans le modèle, la condition de transversalité $W_{X'}^s(c_j) \pitchfork P'$ recherchée s'écrit

$$W_{X'}^s \pitchfork P \quad \text{avec} \quad W_{X'}^s = \{ \phi_{X'}^{-s}(0, q, 0) \mid s > 0, q \in Q \}.$$

Dans la situation initiale, $X' = X = -\partial/\partial z$, donc

$$P \cap W_X^s = P \cap \{ (0, q, s) \mid s > 0, q \in Q \} = P \cap \{ (0, q, 0) \mid q \in Q \} = g^{-1}(0)$$

où $g : P \rightarrow D^k$ est la projection $(x, q, z) \mapsto x$.

La démonstration va consister à rendre 0 valeur régulière de g . Grâce à Sard, il y a un vecteur w dans D^k , aussi proche de 0 que nous le souhaiterons

(disons $\|w\| = \delta$) tel que w soit une valeur régulière de g . On va perturber le champ X en X' de façon que

$$W_{X'}^s \cap \{z = m\} = \phi_{X'}^{-m}(0, q, 0) = (w, q, m).$$

On aura ainsi $W_{X'}^s \cap P = g^{-1}(w)$, ce qui implique que $W_{X'}^s \cap P$ est une sous-variété de codimension k dans P . L'égalité

$$\text{codim}_P W_{X'}^s \cap P = \text{codim}_V W_{X'}^s,$$

implique la transversalité des deux sous-variétés $W_{X'}^s$ et P .

Le lemme « dans la variété » résulte maintenant du lemme « dans le modèle » qui vient.

Lemme 2.2.9. *Il existe un champ X' proche (au sens $\mathcal{C}^1$) de $-\partial/\partial z$ tel que*

- (1) $X' = -\partial/\partial z$ près de $\partial(D^k \times Q \times [0, m])$;
- (2) $\phi_{X'}^{-m}(0, q, 0) = (w, q, m)$.

Démonstration du lemme 2.2.9. Appelons $(v_1, \dots, v_k)$ les coordonnées de $w \in D^k$. Posons

$$X' = -\frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^k \beta_i(z) \gamma(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où

– la fonction β_i est nulle en dehors de $[0, m]$, avec $|\beta_i(s)| < \eta$, $|\beta'_i(s)| < \eta$ et telle que $\int_0^m \beta_i(t) dt = v_i$ (ici, η est un nombre positif fixé petit, correspondant à la précision de l'approximation souhaitée) ;

– la fonction γ est, elle, définie sur D^k , elle est à valeurs dans $[0, 1]$, identiquement nulle près de ∂D^k , vérifiant $\gamma \equiv 1$ sur $\|x\| \leq 1/3$ et $|\partial\gamma/\partial x_i| \leq 2$.

Voir les figures 21 et 22.

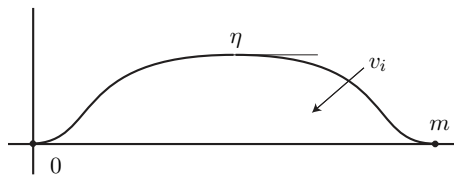


FIGURE 21. La fonction β_i

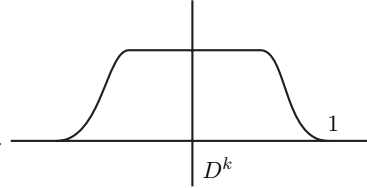


FIGURE 22. La fonction γ

Il est clair que le champ X' satisfait à la première propriété annoncée. Pour démontrer qu'il satisfait aussi à la seconde, considérons d'abord le champ

$$X'' = -\frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^k \beta_i(z) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(on a supprimé le $\gamma(x)$). Pour déterminer $\varphi_{X''}^{-m}(0, q, 0)$, on doit résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial s} = -\beta_i(z(s)) & x(0) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial s} = 0 & q(0) = q \\ \frac{\partial z}{\partial s} = -1 & z(0) = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} x_i(s) = \int_0^s -\beta_i(-t) dt = \int_0^{-s} \beta_i(-t) dt \\ q(s) = q \\ z(s) = -s. \end{cases}$$

On a donc bien

$$\varphi_{X''}^{-m}(0, q, 0) = (w, q, 0)$$

et, comme pour $s \in [-m, 0]$, $\|x(s)\| \leq 1/3$ (pour les β_i assez petits, c'est-à-dire pour w assez petit), on reste dans la partie du disque où $\gamma \equiv 1$, de sorte que la formule donne bien le flot de X' . $\square$

Ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.8. $\square$

2.2.d. Une illustration, la fonction hauteur sur le tore. Reprenons l'exemple de la fonction hauteur sur le tore de dimension 2, avec le champ de gradients X dont nous avons dit qu'il ne satisfait pas la propriété de Smale (exemples 2.2.4). C'est-à-dire, recopions les figures 10 et 11, en y faisant figurer les deux niveaux $\alpha + \varepsilon$ et $\alpha + 2\varepsilon$ au-dessus du point critique b entre lesquels nous savons qu'il suffit de modifier le champ de vecteurs.

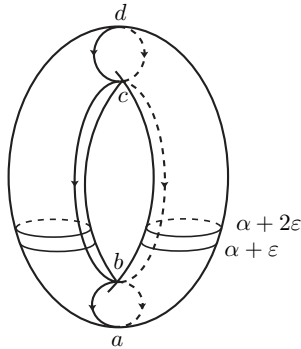


FIGURE 23

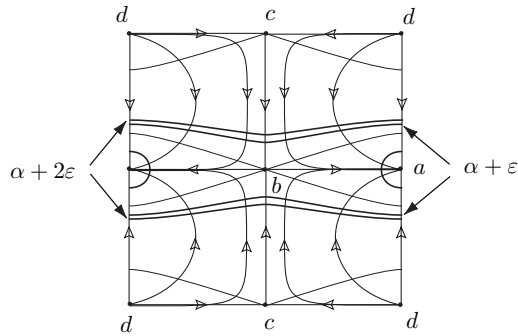


FIGURE 24

Un voisinage de Morse du point critique b est bien visible au centre de la figure 24. On l'extrait de cette figure (figure 25) et on modifie le champ dans la partie utile du modèle (figure 26). Cette dernière figure représente bien le même modèle que la figure 20, c'est bien un $Q \times D^k \times [0, m]$, mais Q est une sphère de dimension $n - k - 1 = 0$, D^k est un disque de dimension $k = 1$.

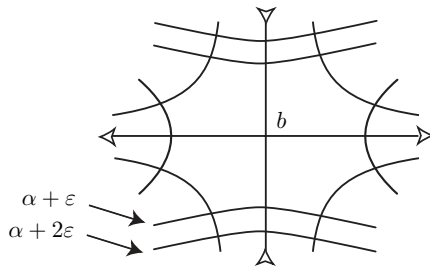


FIGURE 25. Extraction du modèle

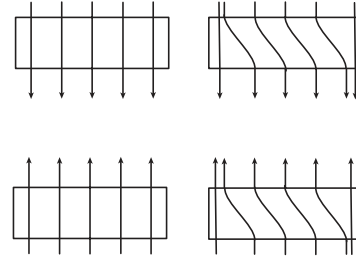


FIGURE 26. La modification dans le modèle

Réintroduite dans la surface, la modification donne un champ ayant la propriété attendue (figure 27).

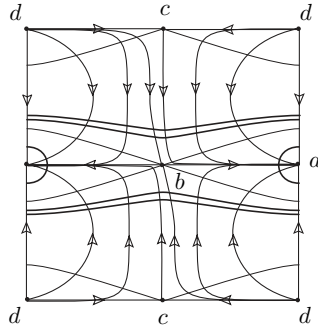


FIGURE 27. Le champ modifié

2.3. Appendice : classification des variétés compactes de dimension 1

2.3.a. Fonctions de Morse et champs adaptés sur une variété à bord. On considère maintenant une variété à bord V . On fixe un champ de vecteurs X défini sur un voisinage de ∂V dans V et dont on suppose

qu'il est *entrant*, c'est-à-dire que, pour toute carte $\varphi : U \rightarrow V$ (où U est un ouvert du demi-espace $x_n \leq 0$ de $\mathbf{R}^n$) et tout $x \in \partial V \cap \varphi(U)$, on a

$$T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi^{-1}(X_x) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{avec } a_n(\varphi^{-1}(x)) < 0.$$

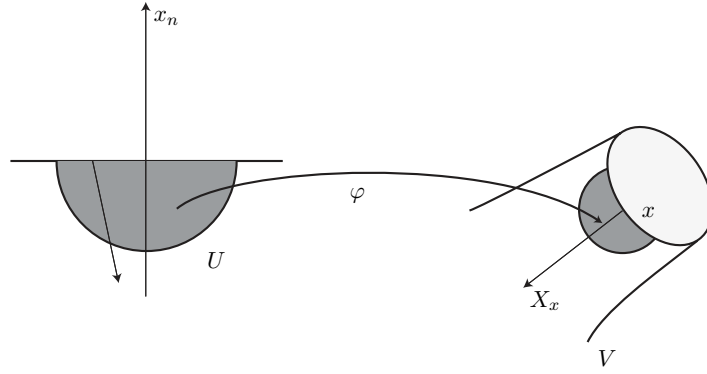


FIGURE 28. Champ de vecteurs entrant

Il est facile de construire un tel champ de vecteurs, par exemple en partant du champ $-\partial/\partial x_n$ sur $\mathbf{R}^n$ et en utilisant une partition de l'unité.

On peut ensuite construire une fonction de Morse f sur V telle que

$$df(X) < 0 \quad \text{au voisinage de } \partial V$$

en la définissant d'abord au voisinage du bord, par

$$f(\varphi_X^{-s}(x)) = s \quad \text{pour } s \in [0, \delta[\text{ si } x \in \partial V$$

puis en la prolongeant arbitrairement à V , et enfin en la perturbant si nécessaire pour en faire une fonction de Morse.

Prolongeons ensuite X , qui n'a été jusque là défini qu'au voisinage du bord, en un champ de pseudo-gradients adapté à f que nous appellerons encore X .

Remarque 2.3.1. Il n'est pas vrai que n'importe quelle fonction de Morse sur une variété à bord possède un champ de pseudo-gradient transverse au bord (penser au cas de la projection du disque unité sur une droite). C'est pourquoi nous avons choisi, dans cette construction, de commencer par le champ de vecteurs.

2.3.b. Le théorème de classification.

Théorème 2.3.2. *Soit V une variété compacte et connexe de dimension 1. Alors V est difféomorphe à S^1 si $\partial V = \emptyset$ et à $[0, 1]$ sinon.*

Démonstration. On suppose que X est un champ de vecteurs entrant le long du bord, que f est une fonction de Morse pour laquelle X est un champ de pseudo-gradients adapté (on peut construire un tel champ de vecteurs et une telle fonction comme indiqué plus haut). Les points critiques de f sont des minima et des maxima locaux. La démonstration est fondée sur le fait que toutes les trajectoires qui ne sont pas stationnaires en un maximum aboutissent à un minimum. Appelons $c_1, \dots, c_k$ les minima de f . La variété stable $W^s(c_i)$ est difféomorphe à un intervalle (ouvert), elle est constituée de deux trajectoires aboutissant en c_i et du point c_i lui-même. Dans l'adhérence A_i de cette variété stable, il y a (en plus) les points de départ de ces deux trajectoires. Ces points de départ

- soit sont tous les deux des maxima (et alors ils peuvent être ou n'être pas confondus),
- soit au moins l'un des deux est un point du bord de V (et alors ils sont distincts).

Il est clair aussi que, comme adhérence d'un espace connexe, A_i est connexe. Clairement, si A_i consiste de $W^s(c_i)$ et d'un unique point, celui-ci est un maximum et A_i est difféomorphe à un cercle. De même, si A_i consiste de la variété stable et de deux points ajoutés, alors A_i est difféomorphe à un intervalle fermé.

Remarquons que la réunion des A_i est V tout entière : si $x \in V$, sa trajectoire tend vers un minimum et il est dans une des variétés stables, sauf s'il est un maximum, mais alors il est dans l'adhérence d'une variété stable.

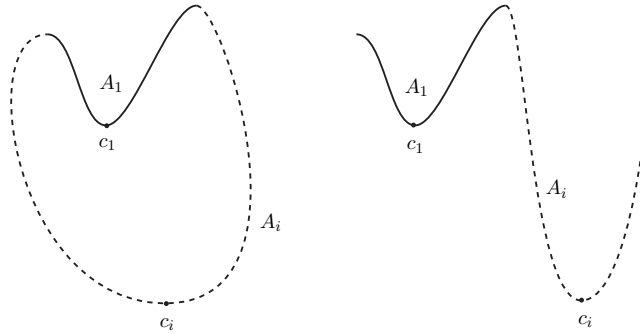


FIGURE 29

Si $k = 1$, le théorème est donc démontré. Sinon, comme V est connexe, il existe un $i \geq 2$ tel que $A_1 \cap A_i \neq \emptyset$. Cette intersection ne contient que des maxima locaux, puisque ceux-ci sont les seuls points d'où l'on peut descendre vers deux minima différents. En particulier, $\partial V \cap (A_1 \cap A_i) = \emptyset$. Dans $A_1 \cap A_i$, il y a au plus deux points.

– Si cette intersection contient deux points, les deux sont des maxima, $A_1 \cup A_i$ est difféomorphe à S^1 et on a fini.

– Si au contraire elle n'en contient qu'un, alors $A_1 \cup A_i$ est difféomorphe à $[0, 1]$. Si $A_1 \cup A_i = V$, on a terminé.

Et sinon, on continue jusqu'à épuisement des A_i . $\square$

Il existe d'autres façons, peut-être plus simples, de démontrer ce théorème (voir [49]). Cette démonstration par la théorie de Morse a l'avantage de préparer d'autres démonstrations, analogues, celle par exemple de 4.5.1 ci-dessous.

2.3.c. Une application, le théorème du point fixe de Brouwer.

Déduisons, du théorème de Sard et de la connaissance des variétés de dimension 1, le célèbre théorème de Brouwer (cette démonstration vient du livre de Milnor [49]).

Théorème 2.3.3. *Soit $\varphi : D^n \rightarrow D^n$ une application continue. Alors elle a un point fixe.*

Démonstration. La première partie de la démonstration consiste à se ramener au cas où φ est une application $\mathcal{C}^\infty$. Nous ne la détaillons pas ici (voir [38]). Ensuite à partir de φ , supposée $\mathcal{C}^\infty$ mais aussi sans point fixe, on construit une rétraction

$$r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$$

en associant à $x \in D^n$ le point d'intersection de la demi-droite issue de $\varphi(x)$ et passant par x avec la sphère S^{n-1} . De sorte que, si x est un point de la sphère, il reste à sa place. On a ainsi une application $\mathcal{C}^\infty$, r , qui se restreint à l'identité sur le bord. Le théorème de Sard nous garantit que cette application a des valeurs régulières, on en choisit une, $a \in S^{n-1}$. Alors $r^{-1}(a)$ est une sous-variété de dimension 1 de D^n , de bord

$$\partial r^{-1}(a) = r^{-1}(a) \cap \partial D^n = \{a\}.$$

Mais une variété à bord de dimension 1 est difféomorphe à une réunion de cercles et d'intervalles fermés, de sorte que son bord est composé d'un nombre pair de points. Une contradiction qui implique l'existence d'un point fixe. $\square$

Exercices

Exercice 10. Montrer que les champs dont les flots sont dessinés sur la figure 30 ne sont pas des champs de pseudo-gradients.

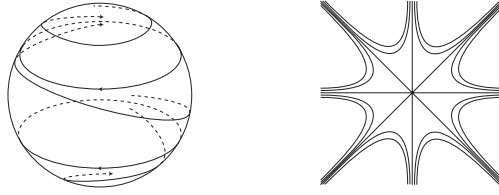


FIGURE 30

Exercice 11. Soit V une variété de dimension 2 munie d'une fonction de Morse possédant un unique point critique d'indice 1. Montrer que tout champ de pseudo-gradient adapté à cette fonction satisfait à la condition de Smale.

Exercice 12. On fixe un entier $m \geq 2$. Trouver les points critiques de la fonction $f : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f([z_0, z_1]) = \frac{|z_0^m + z_1^m|^2}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)^m} = \frac{|z^m + 1|^2}{(|z|^2 + 1)^m}$$

(en coordonnées homogènes ou dans la carte affine $z_1 \neq 0$). Vérifier que, pour $m = 2$, f n'est pas une fonction de Morse⁽³⁾.

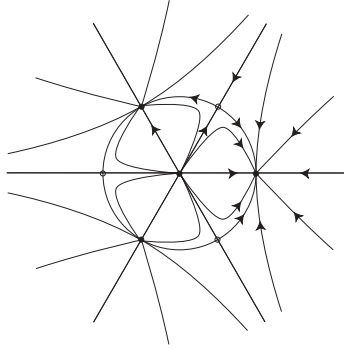


FIGURE 31

⁽³⁾C'est une fonction de Morse-Bott (voir [11]) : ses points critiques s'organisent en sous-variétés (ici $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ pour le maximum) et la dérivée seconde est non dégénérée transversalement.

On suppose que $m \geq 3$. Montrer que f est de Morse et a deux maximums locaux, les points 0 et ∞ , m minimums locaux, les racines m^e de -1 , et m points critiques d'indice 1, les racines m^e de 1.

Indication : on pourra déterminer les points critiques en utilisant les dérivées par rapport à z et $\bar{z}$, puis utiliser un développement à l'ordre 2 au voisinage de 0 en u de $f(u)$ (pour étudier les points critiques en 0 et ∞) ou de $f(\zeta(1+u))$ (pour étudier les points critiques en ζ , $\zeta^m = \pm 1$).

Montrer qu'il existe un champ de pseudo-gradients tel que celui représenté (dans une carte affine) sur la figure 31 (dans le cas $m = 3$). Voir plus généralement l'article [8] dans lequel une fonction analogue (définie sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) joue un rôle important.

CHAPITRE 3

LE COMPLEXE DES POINTS CRITIQUES

On considère ici une variété compacte munie d'une fonction de Morse f et d'un champ X de pseudo-gradients générique (c'est-à-dire, vérifiant la condition de Smale). Pour tout entier k , on définit $C_k(f)$, simplement noté C_k quand aucune confusion n'est à redouter, comme l'espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/2$ de base les points critiques d'indice k de f . En utilisant les liaisons entre points critiques établies par les trajectoires de X , on définit

$$\partial_X : C_k \longrightarrow C_{k-1}.$$

On montre aussi que

$$\partial_X \circ \partial_X : C_{k+1} \longrightarrow C_{k-1}$$

est l'application nulle, de sorte que $(C_*(f), \partial_X)$ est un complexe d'espaces vectoriels sur $\mathbf{Z}/2$, dont l'homologie est

$$H_k(C_*(f), \partial_X) = \text{Ker } \partial_X / \text{Im } \partial_X = H_k(f, X).$$

On montre enfin que, si le complexe lui-même en dépend, l'homologie ne dépend pas des choix de f et X (c'est en fait, pour ceux qui savent ce que c'est, l'homologie modulo 2 de V).

Voir le § 15.1 pour les définitions et propriétés de base des objets utilisés ici.

3.1. Définition du complexe

Définissons donc l'espace vectoriel

$$C_k(f) = \left\{ \sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} a_c c \mid a_c \in \mathbf{Z}/2 \right\},$$

où $\text{Crit}_k(f)$ désigne bien entendu l'ensemble des points critiques d'indice k de f .

3.1.a. La différentielle. Pour définir ∂_X sur $C_k(f)$, il suffit de savoir définir $\partial_X(a)$, pour a un point critique d'indice k . Et ceci doit être une combinaison linéaire des points critiques d'indice $k - 1$:

$$\partial_X(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}} n_X(a, b)b, \quad \text{avec } n_X(a, b) \in \mathbf{Z}/2.$$

L'idée est de définir $n_X(a, b)$ comme le nombre (modulo 2) de trajectoires de X descendant de a à b , c'est-à-dire le cardinal de $\mathcal{L}(a, b)$. Nous montrerons au § 3.2 que ce nombre est bien un nombre fini.

3.1.b. C'est un complexe. Un complexe⁽¹⁾ est une famille $(C_\star)_{\star=1, \dots, n}$ d'espaces vectoriels⁽²⁾ connectés par des applications linéaires

$$\partial^k : C_k \longrightarrow C_{k-1}$$

vérifiant $\partial^k \circ \partial^{k+1} = 0$. Alors l'image de ∂^{k+1} est contenue dans le noyau de ∂^k et le quotient

$$H_k = \text{Ker } \partial^k / \text{Im } \partial^{k+1},$$

qui mesure la non exactitude de la suite des ∂ , est un espace vectoriel appelé *l'homologie du complexe* (en degré k).

Pour démontrer que nous avons bien affaire ici à un complexe, il nous faut vérifier que $\partial_X \circ \partial_X = 0$. Avec

$$\partial_X \circ \partial_X(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}} \left(\sum_{c \in \text{Crit}_k} n_X(a, c)n_X(c, b) \right) b$$

(pour $a \in \text{Crit}_{k+1}$), il suffit de démontrer que, étant donnés deux points critiques, a d'indice $k + 1$ et b d'indice $k - 1$, la somme

$$\sum_{c \in \text{Crit}_k} n_X(a, c)n_X(c, b)$$

est nulle. Ce nombre est égal au cardinal de la réunion disjointe

$$\coprod_{c \in \text{Crit}_k(f)} \mathcal{L}(a, c) \times \mathcal{L}(c, b).$$

L'idée est donc de montrer que cet ensemble (dont nous aurons montré qu'il est fini) de points est le bord d'une variété de dimension 1.

La figure 1 donne un argument heuristique rendant ce résultat plausible. Elle représente la variété instable de a , qui est constituée de trajectoires joignant a à b (cette figure est un quart de la figure 12 du chapitre 2). L'ensemble de ces trajectoires doit être une variété de dimension 1 (représentée à droite sur la figure), une réunion d'intervalles ouverts, qui se compactifient

⁽¹⁾Pour ce formalisme algébrique, voir le § 15.1 et les références qui y sont données.

⁽²⁾Ici, nous utilisons des espaces vectoriels sur $\mathbf{Z}/2$; la bonne notion générale utilise des modules sur un anneau commutatif, ce qui inclut le cas des groupes abéliens. Voir le § 3.3.

en intervalles fermés ou en cercles par l'ajout des trajectoires « brisées » passant par les points c_1, c_2 d'indice intermédiaire. La propriété résulte du fait que les variétés à bord de dimension 1 ont un bord constitué d'un nombre pair de points, comme nous l'avons vu dans le théorème 2.3.2 (et nous calculons modulo 2).

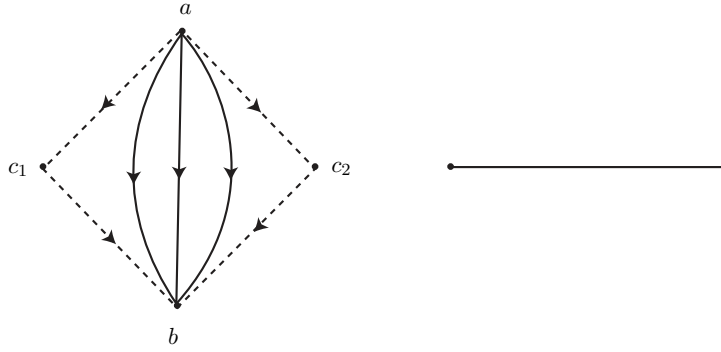


FIGURE 1

Pour rendre ceci rigoureux, nous aurons besoin d'un résultat de compacité (établi au §3.2.b), et d'une description précise de la frontière, à savoir qu'en effet, l'ensemble des liaisons de c à e se compactifie par l'ajout des trajectoires brisées (voir le §3.2.c).

3.1.c. Exemples. Reprenons ici tous les exemples de fonctions de Morse avec pseudo-gradients génériques mis en évidence au §2.2.a du chapitre 2 (avec les notations dudit paragraphe).

La hauteur sur la sphère ronde. Dans ce cas, $C_0 = \mathbf{Z}/2$ engendré par a , $C_1 = 0$, $C_2 = \mathbf{Z}/2$ engendré par b . L'homologie dans ce cas vaut

$$H_\star = \begin{cases} 0 & \text{si } \star \neq 0, 2 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{pour } \star = 0, 2. \end{cases}$$

Le même calcul avec une fonction hauteur sur la sphère unité S^n de $\mathbf{R}^{n+1}$, qui n'a, là encore, qu'un minimum et un maximum, donne

$$H_\star = \begin{cases} 0 & \text{si } \star \neq 0, n \\ \mathbf{Z}/2 & \text{pour } \star = 0, n. \end{cases}$$

La hauteur sur l'autre sphère. Cette fois, $C_0 = \mathbf{Z}/2$ engendré par a , $C_1 = \mathbf{Z}/2$ engendré par b et $C_2 = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$ engendré par c et d . En comptant naïvement les trajectoires reliant les points critiques, on trouve

$$\partial c = b, \quad \partial d = b, \quad \partial b = 2a = 0,$$

de sorte que

$$\begin{cases} H_0 = \mathbf{Z}/2 \\ H_1 = 0 \\ H_2 = \mathbf{Z}/2. \end{cases}$$

Même si le complexe était assez différent, son homologie est la même.

Le tore. Considérons maintenant la fonction $\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)$ sur le tore. On a $C_0 = \mathbf{Z}/2$ engendré par a , $C_1 = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$ engendré par b et c , et $C_2 = \mathbf{Z}/2$ engendré par d . Les différentielles sont

$$\partial d = 2b + 2c = 0, \quad \partial b = \partial c = 2a = 0.$$

Ainsi l'homologie modulo 2 est

$$\begin{cases} H_0 = \mathbf{Z}/2 \\ H_1 = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 \\ H_2 = \mathbf{Z}/2 \end{cases}$$

(ce qui est bien l'homologie du tore T^2). Les lecteurs devraient démontrer que le complexe associé à la fonction hauteur et au champ de vecteurs décrit par la figure 27 du chapitre précédent a la même homologie.

L'espace projectif complexe. Là, il n'y a que des points critiques d'indice pair et un en chaque dimension, les C_k valent $\mathbf{Z}/2$ si k est pair $\leq 2n$ et 0 sinon. Toutes les différentielles sont nulles et l'homologie du complexe est

$$H_\star = \begin{cases} \mathbf{Z}/2 & \text{si } \star = 2k \text{ avec } k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le plan projectif réel. Ici, $C_0 = \mathbf{Z}/2$ engendré par a , $C_1 = \mathbf{Z}/2$ engendré par b et $C_2 = \mathbf{Z}/2$ engendré par c . On a $\partial c = 0$ et $\partial b = 0$, de sorte que

$$H_\star = \begin{cases} \mathbf{Z}/2 & \text{si } 0 \leq \star \leq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons montrer (c'est la remarque 4.1.2 ci-dessous) que l'homologie du complexe ne dépend que du type de difféomorphisme de la variété. En particulier, des exemples ci-dessus, on déduit les corollaires suivants.

Corollaire 3.1.1. *L'espace projectif complexe de dimension (complexe) $n \geq 2$ n'est pas difféomorphe à la sphère S^{2n} .*

Corollaire 3.1.2. *La sphère S^2 , le tore T^2 et le plan projectif réel $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ ont des types de difféomorphisme distincts.*

3.2. Espace des liaisons entre deux points critiques, ou des « trajectoires brisées »

3.2.a. Espace des trajectoires brisées. Si a et b sont deux points critiques de f , on a appelé $\mathcal{L}(a, b)$ l'ensemble des trajectoires du champ X qui vont de a à b . On définit maintenant l'espace des trajectoires brisées de a à b ,

$$\overline{\mathcal{L}}(a, b) = \bigcup_{c_i \in \text{Crit}(f)} \mathcal{L}(a, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{q-1}, b).$$

Rappelons que l'indice décroît le long des trajectoires de X ; donc seuls interviennent des $\mathcal{L}(c_i, c_{i+1})$ avec $\text{Ind}(c_i) > \text{Ind}(c_{i+1})$.

Comme le suggère la notation, cet espace a vocation à être une compactification de $\mathcal{L}(a, b)$. La première chose à faire est de le munir d'une topologie. Bien entendu il faudra que celle-ci induise la topologie produit sur chacun des termes de la réunion. Dans l'exemple décrit par la figure 1, $\mathcal{L}(a, b)$ est un intervalle ouvert, $\mathcal{L}(a, c_1)$ et $\mathcal{L}(c_1, b)$ sont des points, de même que $\mathcal{L}(a, c_2)$ et $\mathcal{L}(c_2, b)$. On espère bien sûr munir l'espace $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ d'une topologie qui en fasse un intervalle fermé. Voir la figure 2.

$$\mathcal{L}(a, c_1) \times \mathcal{L}(c_1, b) \cup \mathcal{L}(a, b) \cup \mathcal{L}(a, c_2) \times \mathcal{L}(c_2, b) = \overline{\mathcal{L}}(a, b)$$

FIGURE 2

Soit donc $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ une trajectoire brisée. Elle joint un certain nombre de points critiques. Chacun d'eux possède un voisinage de Morse noté $\Omega(c_i)$. La trajectoire λ_i sort de $\Omega(c_{i-1})$ pour entrer dans $\Omega(c_i)$. Appelons U_{i-1}^- un voisinage, dans son niveau, du point de sortie de Ω_{i-1} et de même U_i^+ un voisinage dans son niveau du point d'entrée dans Ω_i . Voir la figure 3.

On note $\mathbf{U}^-$ (resp. $\mathbf{U}^+$) la collection des U_i^- (resp. des U_i^+) et on dit que $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ s'il existe des entiers

$$0 < i_0 < \cdots < i_{k-1} < i_k = q$$

tels que

- pour tout $j \leq k$, $\mu_j \in \mathcal{L}(c_{i_j}, c_{i_{j+1}})$,
- et μ_j sort des cartes $\Omega(c_{i_j}), \Omega(c_{i_{j+1}}), \dots, \Omega(c_{i_{j+1}-1})$ par les intérieurs des U^- correspondants et entre dans les cartes $\Omega(c_{i_{j+1}}), \dots, \Omega(c_{i_{j+1}})$ par les intérieurs des U^+ .

Les $\mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ forment une base de voisinages pour une topologie sur $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$.

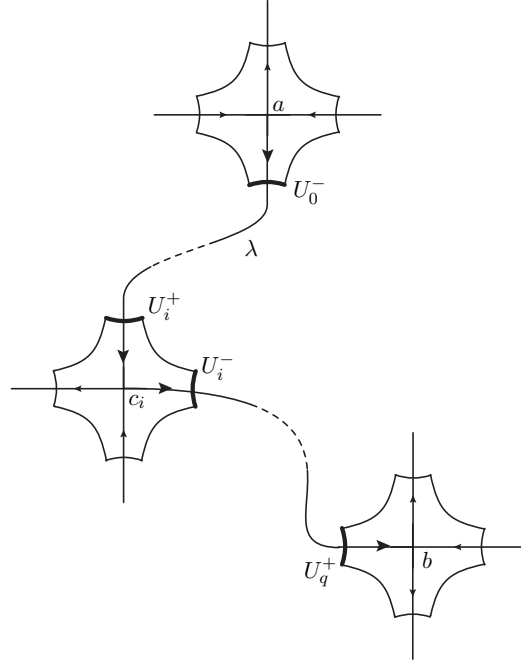


FIGURE 3

Remarques 3.2.1. Dans cette définition, $k \leq q$ (la trajectoire μ n'est pas plus brisée que λ). De plus, si λ est une trajectoire de X allant de a à b , alors une base de voisinages de λ est formée de l'ensemble des trajectoires joignant a à b et qui sortent de Ω_0 et entrent dans Ω_q assez près de λ . Il est clair que la topologie ainsi définie coïncide avec la topologie de $\mathcal{L}(a, b)$ (définie plus haut comme quotient de l'ensemble des points sur les trajectoires par les translations).

3.2.b. Compacité. On démontre maintenant :

Théorème 3.2.2. *L'espace $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ est compact.*

Remarque 3.2.3. La topologie définie sur l'espace $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ l'est à l'aide de la topologie de V . Il est donc clair qu'elle admet une base dénombrable de voisinages et il est légitime de démontrer la compacité en utilisant un argument séquentiel (elle est d'ailleurs métrisable). Les puristes remarqueront aussi que l'on n'utilisera, de la compacité de cet espace, que cette propriété des suites.

Corollaire 3.2.4. *Si $\text{Ind}(a) = \text{Ind}(b) + 1$, l'espace $\mathcal{L}(a, b)$ est un ensemble fini de trajectoires.*

Ainsi $n_X(a, b) \in \mathbf{Z}/2$ est bien défini. Ce corollaire est immédiat : $\overline{\mathcal{L}}(a, b) = \mathcal{L}(a, b)$ dans ce cas et ce dernier, qui est une variété de dimension 0, est maintenant compact. $\square$

Démonstration du théorème. Soit (ℓ_n) une suite de trajectoires dans $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$.

On suppose pour commencer que $\ell_n \in \mathcal{L}(a, b)$. La trajectoire ℓ_n sort de $\Omega(a)$ par un point ℓ_n^- et entre dans $\Omega(b)$ par un point ℓ_n^+ . Le point ℓ_n^- est dans l'intersection de la variété instable de a et du bord de $\Omega(a)$, une sphère, donc compacte. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que

$$\lim \ell_n^- = a^- \quad \text{et} \quad \lim \ell_n^+ = b^+.$$

Soit $\gamma(t) = \varphi_X^t(a^-)$ la trajectoire de a^- et soit $c_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)$, de sorte que c_1 est un point critique et que $\gamma \in \mathcal{L}(a, c_1)$. Soit d^+ le point par lequel γ entre dans $\Omega(c_1)$ (figure 4). Grâce au théorème de dépendance des conditions initiales pour les solutions d'équations différentielles, ℓ_n doit aussi (au moins si n est assez grand) entrer dans $\Omega(c_1)$, par un point d_n^+ . Nous avons $\lim d_n^+ = d^+$ grâce au lemme suivant.

Lemme 3.2.5. *Soit $x \in V - \text{Crit}(f)$ et soit (x_n) une suite qui tend vers x . Soient y_n et y des points situés sur la même trajectoire de X que x_n , resp. x . On suppose de plus que $f(y_n) = f(y)$. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y.$$

Démonstration. Soit U un voisinage de $\text{Crit}(f)$ qui ne contient pas x, y, x_n, y_n (pour n assez grand). Comme dans la démonstration du théorème 2.1.7, considérons le champ

$$Y = -\frac{1}{df(X)} \cdot X$$

défini sur $V - U$. Appelons ψ_t son flot. Les trajectoires de Y sont les mêmes que celles de X et, de plus

$$f(\psi_t(z)) = f(z) - t.$$

Nous avons alors

$$y_n = \psi_{-f(y_n)+f(x_n)}(x_n) = \psi_{f(y)+f(x_n)}(x_n)$$

et

$$y = \psi_{-f(y)+f(x)}(x),$$

donc $\lim y_n = y$. $\square$

Si $c_1 = b$, on a ainsi $\lim \ell_n = \gamma$ et la suite ℓ_n a une sous-suite convergente. Sinon, c'est que d_n^+ n'est pas dans la variété stable de c_1 , donc ℓ_n sort de $\Omega(c_1)$ par un point d_n^- . On peut supposer que la suite des d_n^- converge vers un point d^- . Ce point est dans la variété instable de c_1 . Sinon, d^- est sur

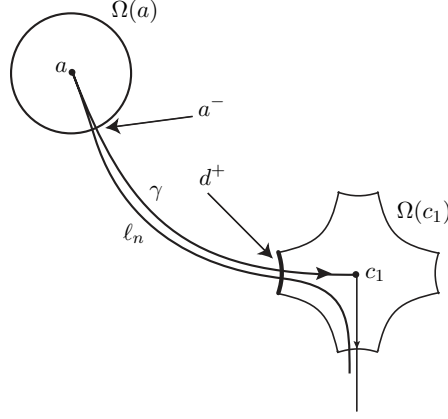


FIGURE 4

la trajectoire de d_* tel que $f(d_*) = f(d_n^+)$ et qui n'est pas dans $W^s(c_1)$. En vertu du lemme précédent, d_n^+ tend vers d_* , donc $d_* = d^+$, ce qui est absurde puisque $d^+ \in W^s(c_1)$.

Il reste à considérer le cas général d'une suite d'éléments de $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$. Il existe des points critiques $c_1, \dots, c_{q-1}$, tels que, pour n assez grand et à extraction d'une sous-suite près,

$$\ell_n = (\ell_n^1, \dots, \ell_n^q) \in \mathcal{L}(a, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_{q-1}, b).$$

On applique le résultat précédent à ℓ_n^1 , puis à $\ell_n^2, \dots, \ell_n^q$. □

Remarquons aussi que, comme le suggère la notation, $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ est bien une compactification de $\mathcal{L}(a, b)$, au sens où, arbitrairement près de tout élément de $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$, il y a des éléments de $\mathcal{L}(a, b)$. C'est une conséquence de la proposition ci-dessous, qui est elle-même conséquence des arguments utilisés dans la démonstration du théorème de compacité (à savoir le théorème de Cauchy-Lipschitz).

Proposition 3.2.6. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{\mathcal{L}}(a, b)$, avec $\lambda_1 \in \mathcal{L}(a, c)$, $\lambda_2 \in \mathcal{L}(c, b)$. Pour tous $\mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+$, il existe*

$$\ell \in \mathcal{L}(a, b) \cap \mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+). \quad \square$$

Dans le paragraphe suivant, on précise cette remarque.

3.2.c. Structure de variété à bord de l'espace des trajectoires brisées. Le théorème qui suit implique que $\partial_X \circ \partial_X = 0$.

Théorème 3.2.7. *Si $\text{Ind}(a) = \text{Ind}(b) + 2$, $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ est une variété à bord compacte de dimension 1.*

Nous savons déjà que $\mathcal{L}(a, b)$ est une variété de dimension 1 (en application de la condition de Smale). Le théorème est donc conséquence de la proposition suivante.

Proposition 3.2.8. *Soient V une variété compacte, $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse et X un pseudo-gradient pour f satisfaisant à la propriété de Smale. Soient a, c et b trois points critiques d'indices respectifs $k+1, k, k-1$. Soient $\lambda_1 \in \mathcal{L}(a, c)$ et $\lambda_2 \in \mathcal{L}(c, b)$. Il existe un plongement continu ψ , différentiable sur $]0, \delta[$, d'un intervalle $[0, \delta[$ sur un voisinage de (λ_1, λ_2) dans $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ tel que*

$$\begin{cases} \psi(0) = (\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{\mathcal{L}}(a, b) \\ \psi(s) \in \mathcal{L}(a, b) \text{ pour } s \neq 0. \end{cases}$$

De plus, si (ℓ_n) est une suite dans $\mathcal{L}(a, b)$ qui tend vers (λ_1, λ_2) , alors ℓ_n est dans l'image de ψ pour n assez grand.

Remarque 3.2.9. La dernière assertion est indispensable pour démontrer le fait que (λ_1, λ_2) est bien un point du bord : il n'y arrive pas plusieurs branches !

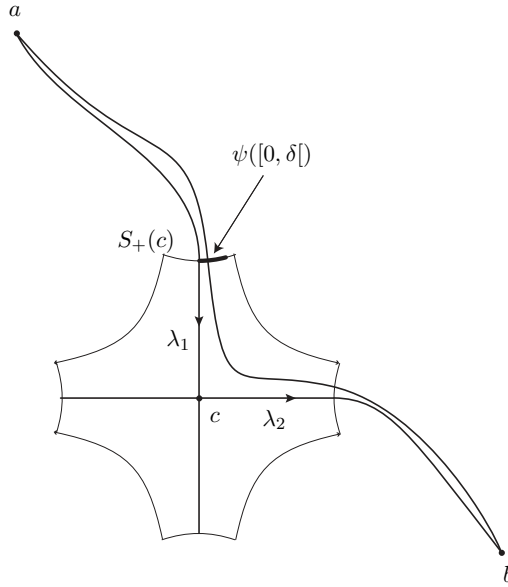


FIGURE 5

Démonstration. On pose $f(c) = \alpha$ et on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$ et $f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$ rencontrent la carte de Morse $\Omega(c)$ le long de $\partial_+ \Omega(c)$ et $\partial_- \Omega(c)$ respectivement. On utilise les notations définies plus haut, à savoir

$$S_+(c) = W^s(c) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \cong S^{n-k-1}$$

$$S_-(c) = W^u(c) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon) \cong S^{k-1}.$$

Soit $a_1 = S_+(c) \cap \lambda_1$. La variété instable $W^u(a)$ rencontre $f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$ transversalement le long d'une sous-variété P de dimension k . Comme X satisfait à la propriété de Smale, P coupe $S_+(c)$ transversalement en un nombre fini de points, dont le point a_1 . Soient

$$D^k(\delta) = \{(x_1, \dots, x_k) \mid \|x\| < \delta\}$$

et $\Psi : (D^k(\delta), 0) \rightarrow (P, a_1)$ un paramétrage local de P tels que

$$\text{Im } \Psi \cap S_+(c) = \{a_1\}.$$

On peut supposer que $D = \text{Im } \Psi$ est contenu dans $\partial_+ \Omega(c)$. Le disque D est représenté en grisé sur la figure 6. En faisant descendre $D - \{a_1\}$ le long

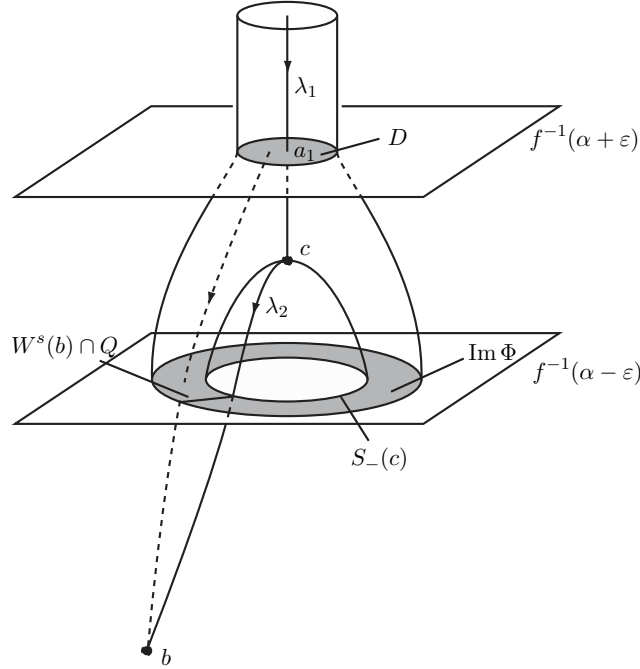


FIGURE 6

des trajectoires de X , on obtient un plongement

$$\Phi : D - \{a_1\} \longrightarrow \partial_- \Omega(c).$$

L'image de Φ est la couronne grisée représentée sur la figure 6⁽³⁾ (sur cette figure, $S_-(c)$ est le bord intérieur de la couronne grisée). On montre :

Proposition 3.2.10. *Quitte à restreindre la taille de D , c'est-à-dire prendre la restriction de Ψ à un disque de rayon $\delta' < \delta$, $Q = \text{Im } \Phi \cup S_-(c)$ est une variété à bord de dimension k et de bord $\partial Q = S_-(c)$.*

Cette proposition permet de finir la démonstration de la proposition 3.2.8. L'image de Φ est un ouvert de l'intersection de la variété instable de a avec le niveau $f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$. Comme X a la propriété de Smale, on aura donc

$$W^s(b) \pitchfork \text{Im } \Phi$$

et on a aussi

$$W^s(b) \pitchfork S_-(c).$$

De sorte que $W^s(b) \cap Q$ sera une sous-variété de dimension 1 dans $\partial_- \Omega(c) \subset f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$ dont le bord est $W^s(b) \cap \partial Q = \mathcal{L}(c, b)$.

Appelons a_2 le point d'intersection de λ_2 avec $S_-(c)$ et définissons

$$\chi : [0, \delta[\longrightarrow W^s(b) \cap Q$$

un paramétrage de cette variété à bord : le point 0 est envoyé sur le bord a_2 . On a ainsi une application

$$\Phi^{-1} \circ \chi :]0, \delta[\longrightarrow W^s(b) \cap (D - \{a_1\}).$$

Quand $s \rightarrow 0$, $\Phi^{-1} \circ \chi(s)$ tend vers a_1 (en application du lemme 3.2.5), on peut donc la prolonger à $[0, \delta[$, obtenant ainsi le ψ recherché,

$$\psi : [0, \eta[\longrightarrow \overline{\mathcal{L}}(a, b) \quad \text{avec } \psi(0) = (\lambda_1, \lambda_2).$$

Soit maintenant une suite (ℓ_n) dans $\mathcal{L}(a, b)$ qui tend vers (λ_1, λ_2) . Notons ℓ_n^+ et ℓ_n^- les points d'entrée et de sortie de ℓ_n dans la carte de Morse de c . Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n^+ = a_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n^- = a_2 \quad \text{et} \quad \Phi(\ell_n^+) = \ell_n^-.$$

Pour n assez grand, $\ell_n^+ \in D - \{a_1\}$, donc $\ell_n^- \in Q$, ce qui entraîne que

$$\ell_n^- \in Q \cap W^s(b) = \text{Im } \chi.$$

Cela implique que $\ell_n \in \text{Im } \psi$. □

⁽³⁾Cette figure est le cœur même de la démonstration.

Il reste à démontrer la proposition. Commençons par réénoncer celle-ci dans le modèle de Morse $U \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$, avec

$$f(x_-, x_+) = -\|x_-\|^2 + \|x_+\|^2, \quad X = -\text{grad } f$$

et $S_+ = \{(x_-, x_+) \mid x_- = 0, \|x_+\|^2 = \varepsilon\} \subset f^{-1}(\varepsilon),$

$$S_- = \{(x_-, x_+) \mid x_+ = 0, \|x_-\|^2 = \varepsilon\} \subset f^{-1}(-\varepsilon).$$

La figure 7 représente exactement la même chose que la figure 6 mais dans la carte de Morse (les niveaux de f ne sont plus représentés par des plans horizontaux mais par des quadriques).

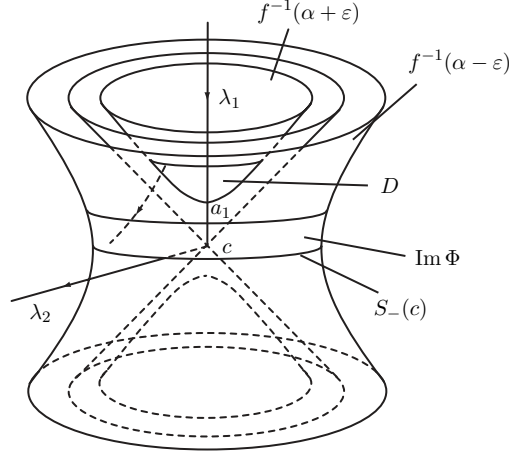


FIGURE 7

Proposition 3.2.11. Soit $a \in S_+$ et soit $D \subset \partial_+ U$ un disque de dimension k et de rayon δ qui coupe S_+ transversalement en a . Soit

$$\Phi : \partial_+ U - S_+ \longrightarrow \partial_- U - S_-$$

le plongement défini par le flot de X . Alors

$$Q = \Phi(D - \{a\}) \cup S_-$$

est une variété à bord, de bord $\partial Q = S_-$.

Pour démontrer cette proposition, nous utiliserons encore un lemme.

Lemme 3.2.12. Le plongement Φ défini par le flot de X

$$\Phi : \partial_+ U - S_+ \longrightarrow \partial_- U - S_-$$

est donné par

$$\Phi(x_-, x_+) = \left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|} x_+ \right).$$

Démonstration du lemme. On intègre simplement X , dont le flot est

$$\varphi^s(x_-, x_+) = (e^{2s}x_-, e^{-2s}x_+).$$

Si $(x_-, x_+) \in \partial_+ U$ et $x_- \neq 0$, il existe un s tel que

$$\left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|} x_+ \right) = (e^{2s}x_-, e^{-2s}x_+).$$

Comme $\|x_+\| > \|x_-\|$, on a $s > 0$; de plus

$$\left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|} x_+ \right) \in \partial_- U. \quad \square$$

Démonstration des propositions 3.2.10 ou 3.2.11. Soit D un disque comme dans l'énoncé de la proposition 3.2.11. Comme S_+ est constitué des x tels que $x_- = 0$ et comme $D \pitchfork S_+$, 0 est une valeur régulière pour la restriction à D de la projection

$$\pi : \partial_+ U \longrightarrow D^k, \quad \pi(x_-, x_+) = x_-.$$

En utilisant le théorème d'inversion locale, on peut supposer que

$$D = \{(x_-, h(x_-)) \mid x_- \in D^k(\delta)\}$$

où $h : D^k(\delta) \rightarrow D^{n-k}$ est telle que

$$\|h(x_-)\|^2 = \|x_-\|^2 + \varepsilon, \quad \text{soit } (x_-, h(x_-)) \in \partial_+ U.$$

Posons $g = h/\|h\| : D^k \rightarrow S^{n-k-1}$, de sorte que

$$D = \{(x_-, \sqrt{\varepsilon + \|x_-\|^2} g(x_-)) \mid x_- \in D^k(\delta)\}.$$

Grâce au lemme, on a

$$\Phi(D - \{a\}) = \{(\sqrt{\varepsilon + \|x_-\|^2} x_- / \|x_-\|, \|x_-\| g(x_-)) \mid x_- \in D^k(\delta) - \{0\}\}.$$

Utilisons les coordonnées « polaires » $(\rho, u) \in]0, \delta[\times S^{k-1}$ sur $D^k(\delta) - \{0\}$. Ainsi $\Phi(D - \{a\})$ est l'image de

$$\begin{aligned} H :]0, \delta[\times S^{k-1} &\longrightarrow \partial_- U \\ (\rho, u) &\longmapsto (\sqrt{\rho^2 + \varepsilon} u, \rho g(\rho, u)). \end{aligned}$$

Comme l'application g est définie sur le disque D^k tout entier, on peut prolonger H à $[0, \delta[\times S^{k-1}$ par

$$H(0, u) = (\sqrt{\varepsilon} u, 0) \in S_-.$$

Donc $\Phi(D - \{a\}) \cup S_-$ est bien une variété à bord de bord S_- . $\square$

Conclusion. Nous avons donc bien montré, comme annoncé au début de ce paragraphe, que l'ensemble des liaisons entre deux points critiques se compactifie par l'ajout des trajectoires brisées.

3.2.d. Variétés à bord. La construction de $C_*(f)$, la définition de ∂_X et le fait que $\partial_X \circ \partial_X = 0$ s'étendent d'eux-mêmes au cas d'une variété à bord V pourvu qu'aucun des points critiques de f ne soit sur le bord ∂V et que le champ X soit transverse (non tangent) à ce bord, de sorte que les liaisons entre points critiques restent loin du bord. Voir plus généralement les §§ 2.3.a et 3.5.

Remarque 3.2.13. On aura besoin d'une définition analogue pour la variété à bord anguleux⁽⁴⁾ $V \times [0, 1]^k$. On demande que, près du bord $\partial(V \times [0, 1]^k)$, le pseudo-gradient soit de la forme

$$Y + g_1(t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + g_k(t_k) \frac{\partial}{\partial t_k}$$

pour un champ Y qui coïncide avec X près du bord de V et pour des fonctions g_i non nulles en 0 et 1.

3.3. Orientations, complexe sur $\mathbf{Z}$

Si c est un point critique de la fonction de Morse f , sa variété stable $W^s(c)$, difféomorphe à un disque, est une variété orientable. Nous choisissons ici, pour chaque point critique c , une orientation de la variété stable $W^s(c)$. Remarquons qu'il revient au même de choisir une co-orientation de la variété instable $w^u(c)$: une co-orientation de l'espace vectoriel $T_c W^u(c)$ est, par définition⁽⁵⁾, une orientation du supplémentaire $T_c W^s(c)$.

Si a et b sont deux points critiques, l'intersection $W^u(a) \cap W^s(b)$ (nous supposons toujours que cette intersection est transverse) est donc une variété orientée. Il en est de même de son intersection avec un niveau régulier (un niveau régulier est co-orienté par l'orientation transverse donnée par le champ de pseudo-gradients X utilisé). Ainsi, l'espace de trajectoires $\mathcal{L}(a, b)$ est une variété orientée.

On définit $C_*(f)$ comme le groupe abélien libre ($\mathbf{Z}$ -module) de base les points critiques de f . Répétons qu'a été fixée une fois pour toutes une orientation de chaque $W^s(c)$. Nous avons donc

$$C_k(f) = \left\{ \sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} a_c c \mid a_c \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Lorsque $\text{Ind}(a) = \text{Ind}(b) + 1$, $\mathcal{L}(a, b)$ est une variété compacte orientée de dimension 0, c'est-à-dire un nombre fini de points chacun muni d'un signe.

⁽⁴⁾Nous adoptons cette élégante terminologie due à François Latour [39] pour « à bord et coins ».

⁽⁵⁾Voir au besoin l'exercice 14 page 74.

Notons $N_X(a, b) \in \mathbf{Z}$ la somme de ces signes et définissons

$$\begin{aligned} \partial_X : C_k(f) &\longrightarrow C_{k-1}(f) \\ a &\longmapsto \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} N_X(a, b)b. \end{aligned}$$

Remarquons que le $n_X(a, b)$ utilisé pour définir le complexe modulo 2 n'est autre que la réduction modulo 2 de $N_X(a, b)$.

Pour garantir que $(C_k(f), \partial_X)$ est un complexe, il reste à vérifier que $\partial_X \circ \partial_X = 0$ dans ce nouveau contexte. C'est bien entendu une conséquence du fait que le théorème 3.2.7 contient une partie « orientation ». Clairement, la compactification d'une variété orientée de dimension 1 en variété à bord fournit une variété à bord orientée... Il faut encore vérifier que l'orientation induite sur le bord soit bien celle que nous avons imposée sur le bord. Ce n'est pas très difficile, surtout si l'on contemple attentivement la figure 6 ou [39, pp. 155–156]. Nous laissons donc cette vérification aux lecteurs.

3.4. L'homologie du complexe ne dépend ni de la fonction ni du champ de vecteurs

Dans ce paragraphe, nous montrons que l'homologie du complexe des points critiques ne dépend ni de la fonction ni du champ de pseudo-gradients utilisé pour la définir.

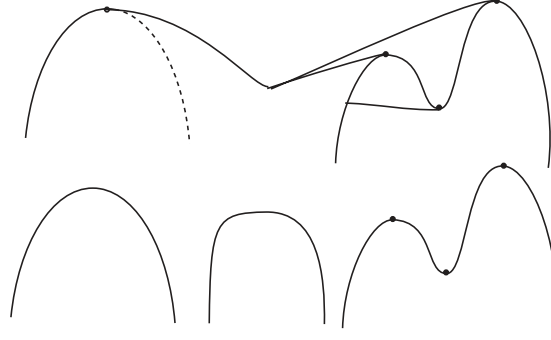
La démonstration qui suit est inspirée de [39], elle est aussi suggérée dans [42]; elle est fondée sur une idée originelle de Floer [26] qui, si elle est centrale dans les travaux de ce dernier, était, à l'époque, totalement nouvelle. On y utilise des déformations bien choisies d'une fonction de Morse à une autre.

Remarque 3.4.1. Il existe des applications $F : V \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui interpolent entre f_0 et f_1 et qui sont des fonctions de Morse. Mais en général, on ne peut pas assurer que chacune des F_s en est une : lorsque naît ou meurt un point critique, on passe par un point critique dégénéré. Voir la figure 8 où une fonction F_s intermédiaire a un point critique dégénéré.

Théorème 3.4.2. Soit V une variété compacte et soient $f_0, f_1 : V \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions de Morse et X_0, X_1 des pseudo-gradients adaptés à f_0 et f_1 qui ont la propriété de Smale. Alors il existe un morphisme de complexes

$$\Phi_* : (C_*(f_0), \partial_{X_0}) \longrightarrow (C_*(f_1), \partial_{X_1})$$

qui induit un isomorphisme en homologie.

FIGURE 8. Fonction F et fonctions F_s

Démonstration. On va procéder en plusieurs étapes que voici. On choisit d'abord une fonction

$$F : V \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, s) \longmapsto F_s(x) = F(x, s)$$

telle que

$$\begin{cases} F_s = f_0 & \text{pour } s \in [0, \frac{1}{3}] \\ F_s = f_1 & \text{pour } s \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

(1) Nous en déduirons un morphisme

$$\Phi^F : (C_*(f_0), \partial_{X_0}) \longrightarrow (C_*(f_1), \partial_{X_1}).$$

(2) Nous vérifierons que, si $(f_1, X_1) = (f_0, X_0)$ et $I_s(x) = f_0(x)$ pour tous $x \in V$, $s \in [0, 1]$, alors

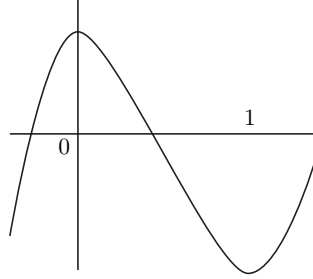
$$\Phi^I = \text{Id}.$$

(3) Nous montrerons enfin que, si $f_2 : V \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de Morse et X_2 un gradient (avec la propriété de Smale) adapté, si G est une interpolation entre f_1 et f_2 qui est stationnaire pour $s \in [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ et H une interpolation entre f_0 et f_2 avec les mêmes propriétés, alors les morphismes induits en homologie par

$$\Phi^G \circ \Phi^F \quad \text{et} \quad \Phi^H : (C_*(f_0), \partial_{X_0}) \longrightarrow (C_*(f_2), \partial_{X_2})$$

coïncident.

Si ces trois propriétés sont satisfaites, il est bien clair que Φ^F devra induire un isomorphisme en homologie. Pour forcer Φ^F à les satisfaire, on utilise une interpolation G entre f_1 et f_0 et l'interpolation constante $H = I$ entre f_0 et elle-même et on applique les propriétés, trouvant que Φ^F et Φ^G induisent des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

FIGURE 9. La fonction g

Première étape. On prolonge d'abord F à $V \times [-1/3, 4/3]$ par

$$\begin{cases} F_s = f_0 & \text{pour } s \in [-\frac{1}{3}, 0] \\ F_s = f_1 & \text{pour } s \in [1, \frac{4}{3}]. \end{cases}$$

On considère une fonction de Morse $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dont les points critiques sont 0 (son maximum) et 1 (son minimum), qui est croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ et suffisamment décroissante sur $]0, 1[$ pour que

$$\forall x \in V, \forall s \in]0, 1[, \quad \frac{\partial F}{\partial s}(x, s) + g'(s) < 0.$$

La fonction $\tilde{F} = F + g : V \times [-1/3, 4/3] \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de Morse dont les points critiques sont

$$\text{Crit}(\tilde{F}) = \text{Crit}(f_0) \times \{0\} \cup \text{Crit}(f_1) \times \{1\}.$$

De plus, pour $a \in \text{Crit}(f_0)$,

$$\text{Ind}_{\tilde{F}}(a, 0) = \text{Ind}_{f_0}(a) + 1$$

alors que pour $b \in \text{Crit}(f_1)$,

$$\text{Ind}_{\tilde{F}}(b, 1) = \text{Ind}_{f_0}(b).$$

À l'aide d'une partition de l'unité, on construit un champ de pseudo-gradients X adapté à $\tilde{F}$ qui coïncide avec

$$\begin{cases} X_0 - \text{grad } g & \text{sur } V \times [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \\ X_1 - \text{grad } g & \text{sur } V \times [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}] \end{cases}$$

(bien sûr, $\text{grad } g$ désigne le gradient euclidien de g). Ainsi X est transverse au bord de $V \times [-1/3, 4/3]$. En perturbant un peu X , on le remplace par un champ $\tilde{X}$ qui a la propriété de Smale et dont on peut supposer qu'il est transverse aux tranches $V \times \{s\}$ pour $s \in \{-1/3, 1/3, 2/3, 4/3\}$. Remarquons qu'une petite perturbation d'un champ de pseudo-gradients adapté satisfaisant à la propriété de Smale est un champ de pseudo-gradients adapté ayant

la même propriété... et le même nombre de trajectoires reliant deux points critiques (les ensembles de trajectoires des deux champs sont en bijection), ce qui est exprimé dans la proposition suivante.

Proposition 3.4.3. *Soit $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse et soit X un champ de pseudo-gradients adapté à f qui a la propriété de Smale. Tout champ de vecteurs $\tilde{X}$ suffisamment proche de X (au sens $\mathcal{C}^1$) est un champ de pseudo-gradients adapté qui a encore la propriété de Smale et on a*

$$(C_\star(f), \partial_X) = (C_\star(f), \partial_{\tilde{X}}). \quad \square$$

On peut donc choisir $\tilde{X}$ de façon que

$$\begin{aligned} (C_\star(\tilde{F}|_{V \times [-1/3, 1/3]}), \partial_{\tilde{X}}) &= (C_\star(f_0 + g|_{[-1/3, 2/3]}), \partial_{X_0 + \text{grad } g}) \\ &= (C_{\star+1}(f_0), \partial_{X_0}) \end{aligned}$$

et de même tel que

$$\begin{aligned} (C_\star(\tilde{F}|_{V \times [2/3, 4/3]}), \partial_{\tilde{X}}) &= (C_\star(f_1 + g|_{[2/3, 4/3]}), \partial_{X_1 + \text{grad } g}) \\ &= (C_\star(f_1), \partial_{X_1}). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le complexe associé à la fonction de Morse $\tilde{F}$ et au champ $\tilde{X}$ sur le produit $V \times [-1/3, 4/3]$. Les trajectoires du champ $\tilde{X}$ qui joignent deux points critiques de $\tilde{F}$ sont de deux sortes : celles qui restent dans la tranche $s \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ou dans la tranche $s \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$, qui sont des trajectoires de X_0 ou de X_1 , et celles qui vont d'un point critique de f_0 (dans la tranche $s \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$) à un point critique de f_1 (dans la tranche $s \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$). On a

$$C_{k+1}(\tilde{F}) = C_k(f_0) \oplus C_{k+1}(f_1)$$

et, compte tenu de ce qui précède,

$$\partial_{\tilde{X}} : C_k(f_0) \oplus C_{k+1}(f_1) \longrightarrow C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1)$$

a, dans cette décomposition, une matrice de la forme

$$\partial_{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} \end{pmatrix}.$$

La composante

$$\Phi^F : C_k(f_0) \longrightarrow C_k(f_1)$$

est donnée par

$$\Phi^F(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_k(f_1)} n_{\tilde{X}, (a, b)} b$$

où $n_{\tilde{X}, (a, b)}$ compte les trajectoires de $\tilde{X}$ joignant $a \in V \times \{0\} \cap \text{Crit}(\tilde{F})$ à $b \in V \times \{1\} \cap \text{Crit}(\tilde{F})$.

La relation $\partial_{\tilde{X}} \circ \partial_{\tilde{X}} = 0$ donne

$$\Phi^F \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_1} \circ \Phi^F = 0 \quad \text{ou encore} \quad \Phi^F \circ \partial_{X_0} = \partial_{X_1} \circ \Phi^F$$

donc Φ^F est bien un morphisme de complexes.

Deuxième étape. Si $f_1 = f_0$ et $X_0 = X_1$, on démarre avec

$$I : V \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{définie par } I(x, s) = f_0(x) \text{ pour tout } s$$

et on utilise une fonction g comme ci-dessus. Le champ $X = X_0 + \text{grad } g$ est un pseudo-gradient adapté et il satisfait à la propriété de Smale. De plus, pour tout point critique a de f_0 , il y a une unique trajectoire de X qui joint $(a, 0)$ à $(a, 1)$. Donc $\Phi^I = \text{Id}$.

Troisième étape. On a maintenant des interpolations F , G et H de f_0 à f_1 et de f_1 à f_2 . On interpole entre ces fonctions en choisissant une fonction

$$K : V \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad K(x, s, t) = K_{s,t}(x)$$

vérifiant les propriétés résumées par la figure 10 :

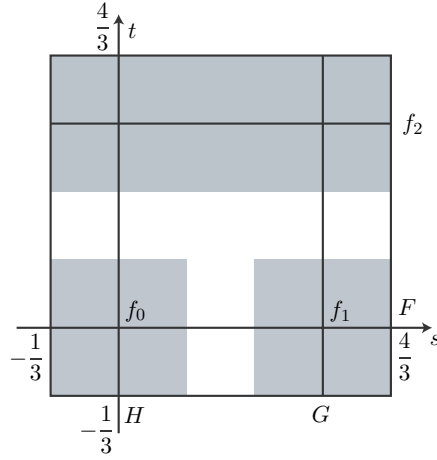


FIGURE 10

- pour $s \in [-1/3, 1/3]$, $K_{s,t} = H_t$;
- pour $s \in [2/3, 4/3]$, $K_{s,t} = G_t$;
- pour $t \in [-1/3, 1/3]$, $K_{s,t} = F_s$;
- et pour $t \in [2/3, 4/3]$, $K_{s,t} = f_2$.

On utilise aussi une fonction de Morse $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ comme celle utilisée ci-dessus (et dont le graphe est représenté sur la figure 9), avec comme seuls

points critiques 0 d'indice 1 et 1 d'indice 0, strictement croissante en dehors de $[0, 1]$ et telle que

$$\frac{\partial K}{\partial s}(x, s, t) + g'(s) < 0 \quad \text{pour tous } (x, s, t) \in V \times]0, 1[\times [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$$

et

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x, s, t) + g'(t) < 0 \quad \text{pour tous } (x, s, t) \in V \times [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \times]0, 1[.$$

Soit enfin $\tilde{K}$ la fonction définie par

$$\tilde{K}(x, s, t) = K_{s,t}(x) + g(s) + g(t).$$

Le choix de g fait que les points critiques de $\tilde{K}$ sont dans la zone grise de la figure 10, où $\tilde{K}(x, s, t)$ s'écrit $f_i(x) + g(s) + g(t)$ (pour $i = 0, 1$ ou 2). En particulier, c'est une fonction de Morse dont les points critiques sont

$$\begin{aligned} \text{Crit}(\tilde{K}) = & [\text{Crit}(f_0) \times \{0\} \times \{0\}] \cup [\text{Crit}(f_1) \times \{1\} \times \{0\}] \\ & \cup [\text{Crit}(f_2) \times \{0\} \times \{1\}] \cup [\text{Crit}(f_2) \times \{1\} \times \{1\}]. \end{aligned}$$

Les indices de ces points critiques sont

- si $a \in \text{Crit}(f_0)$, $\text{Ind}_{\tilde{K}}((a, 0, 0)) = \text{Ind}_{f_0}(a) + 2$;
- si $b \in \text{Crit}(f_1)$, $\text{Ind}_{\tilde{K}}((b, 1, 0)) = \text{Ind}_{f_1}(b) + 1$;
- si $c \in \text{Crit}(f_2)$,

$$\text{Ind}_{\tilde{K}}((c, 0, 1)) = \text{Ind}_{f_2}(c) + 1 \quad \text{et} \quad \text{Ind}_{\tilde{K}}((c, 1, 1)) = \text{Ind}_{f_2}(c).$$

Notons X le champ de pseudo-gradients adapté à F et Y celui adapté à G construits comme ci-dessus. Toujours avec une partition de l'unité, on définit un champ de pseudo-gradients $\mathfrak{X}$ adapté à $\tilde{K}$ de façon que

- pour $s \in [-1/3, 1/3]$, $\mathfrak{X}(x, s, t) = Z(x, t) + \text{grad } g(s)$ où Z est un pseudo-gradient pour

$$H(x, t) + g(t) : V \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \longrightarrow \mathbf{R};$$

- pour $s \in [2/3, 4/3]$, $\mathfrak{X}(x, s, t) = Y(x, t) + \text{grad } g(s)$ où Y est un pseudo-gradient pour G ;
- pour $t \in [-1/3, 1/3]$, $\mathfrak{X}(x, s, t) = X(x, s) + \text{grad } g(t)$;
- pour $t \in [2/3, 4/3]$, $\mathfrak{X}(x, s, t) = X_2 + \text{grad } g(s) + \text{grad } g(t)$.

On perturbe ensuite $\mathfrak{X}$ en $\tilde{\mathfrak{X}}$ pour que celui-ci ait la propriété de Smale, en supposant, comme au cours de la première étape, que la perturbation a son support dans $V \times [1/3, 2/3] \times [1/3, 2/3]$.

Considérons maintenant le complexe des points critiques associé à $\tilde{K}$ et à $\tilde{\mathfrak{X}}$. La variété $V \times [-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}] \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ n'est pas à bord (lisse) mais les hypothèses de la remarque 3.2.13 sont satisfaites. On a

$$C_{k+1}(\tilde{K}) = C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1) \oplus C_k(f_2) \oplus C_{k+1}(f_2).$$

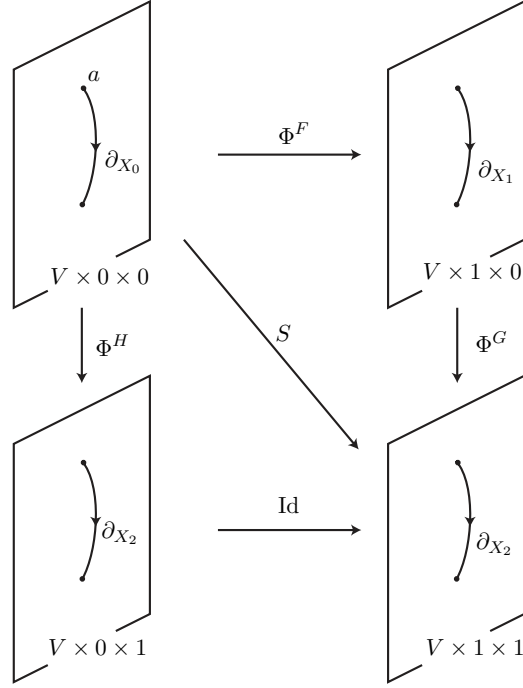


FIGURE 11

La situation avec les différents morphismes utilisés est schématisée sur la figure 11. La différentielle s'écrit, dans cette décomposition,

$$\partial_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} & 0 & 0 \\ \Phi^H & 0 & \partial_{X_2} & 0 \\ S & \Phi^G & \text{Id} & \partial_{X_2} \end{pmatrix}.$$

L'identité $\partial_{\tilde{x}} \circ \partial_{\tilde{x}} = 0$ donne

$$S \circ \partial_{X_0} + \Phi^G \circ \Phi^F + \Phi^H + \partial_{X_2} \circ S = 0$$

ou encore

$$\Phi^G \circ \Phi^F - \Phi^H = S \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_2} \circ S.$$

D'où l'on déduit que $\Phi^G \circ \Phi^F$ et Φ^H induisent le même morphisme en homologie. $\square$

3.5. Cobordismes

On considère maintenant un cobordisme, c'est-à-dire une variété à bord V dont le bord ∂V est décomposé en

$$\partial V = \partial_- V \cup \partial_+ V$$

(les deux parties $\partial_{\pm} V$ sont des réunions de composantes de ∂V choisies arbitrairement). On généralise la construction du § 2.3.a. On fixe un champ de vecteurs X (construit par exemple à l'aide d'une partition de l'unité) sur un voisinage de ∂V dans V et qui est

- sortant le long de $\partial_+ V$;
- entrant le long de $\partial_- V$.

On construit une fonction de Morse f sur V telle que

$$df(X) < 0 \text{ au voisinage de } \partial V$$

de la façon suivante. D'abord on la définit au voisinage du bord, par exemple par

$$\begin{cases} f(\varphi_X^{-s}(x)) = s & \text{pour } s \in [0, \delta[\text{ si } x \in \partial_+ V, \\ f(\varphi_X^s(x)) = -s & \text{pour } s \in [0, \delta[\text{ si } x \in \partial_- V, \end{cases}$$

puis on la prolonge arbitrairement à V tout entière et enfin on la perturbe légèrement pour en faire une fonction de Morse.

On peut ensuite prolonger X en un champ de pseudo-gradients adapté à f qui sera encore noté X .

Rappelons (c'est la remarque 2.3.1) que, pour cette construction, il est nécessaire de partir du champ de vecteurs transverse au bord et que la fonction de Morse n'est pas absolument arbitraire.

Exemple 3.5.1. Sur la figure 12, la variété est un disque D^n , son bord est une sphère S^{n-1} . La fonction de Morse est la hauteur et le champ de vecteurs est indiqué. Sur le dessin de gauche, $S^{n-1} = \partial_+ V$, sur celui de droite, $S^{n-1} = \partial_- V$.

Remarque 3.5.2. Les modifications que nous avons fait subir à un champ de pseudo-gradients pour lui donner la propriété de Smale ont lieu dans des voisinages des points critiques (et donc ici loin du bord), on peut donc les effectuer de la même manière ici.

On peut donc aussi définir $(C_*(f), \partial_X)$ comme dans le cas sans bord.

Les démonstrations de la compacité et du fait que $\partial_X \circ \partial_X = 0$ sont alors identiques à celles que nous avons faites dans le cas sans bord, puisque toutes les liaisons entre points critiques vont rester loin du bord.

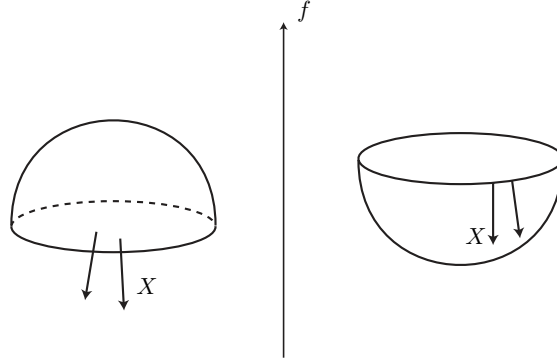


FIGURE 12

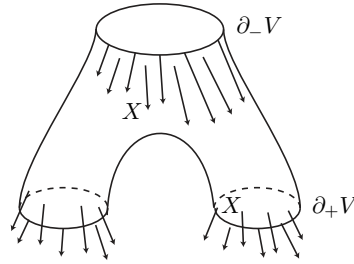


FIGURE 13

Remarque 3.5.3. Le complexe ne dépend pas de $X|_{\partial V}$ tant que celui-ci reste transverse au bord, sortant le long de $\partial_+ V$, entrant le long de $\partial_- V$ (on peut modifier X loin des points critiques).

Montrons maintenant que l'homologie du complexe ne dépend ni de la fonction ni du champ de vecteurs. Supposons donc que f_0 et f_1 soient deux fonctions de Morse sur V munies chacune d'un pseudo-gradient adapté qui a la propriété de Smale. Les deux champs de vecteurs X_0 et X_1 sont aussi supposés coïncider au voisinage du bord. Choisissons comme ci-dessus un chemin f_t de f_0 à f_1 que l'on suppose stationnaire aux deux extrémités,

$$f_t = f_0 \text{ pour } t \leq 1/3 \text{ et } f_t = f_1 \text{ pour } t \geq 2/3.$$

On suppose aussi que $df_t(X) < 0$ au voisinage de ∂V . On prolonge f_t de façon stationnaire pour $t \in [-1/3, 4/3]$. On utilise une fonction g comme ci-dessus (figure 9) telle que

$$\forall t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \forall x \in V, \quad g'(t) + \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} < 0.$$

Comme dans la démonstration de l'indépendance, on pose

$$F(x, t) = f_t(x) + g(x) \quad \text{pour } (x, t) \in V \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

Comme dans cette démonstration encore les points critiques de F sont ceux de f_0 dans la tranche 0 et ceux de f_1 dans la tranche 1, avec un saut d'indice pour ceux de la tranche 0.

On construit enfin un pseudo-gradient $\tilde{X}$ pour F de façon que

$$\tilde{X} = \begin{cases} X - \text{grad } g & \text{près de } \partial V \times [0, 1] \\ X_0 - \text{grad } g & \text{sur } V \times [-1/3, 1/3] \\ X_1 - \text{grad } g & \text{sur } V \times [2/3, 4/3], \end{cases}$$

qu'il n'y a plus qu'à perturber légèrement pour qu'il acquière la propriété de Smale... Bref, on forme le complexe $(C_*(F), \partial_{\tilde{X}})$. Comme dans le cas sans bord, on a

$$(C_k(F), \partial_{\tilde{X}}) = \left(C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1), \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi_{\tilde{X}} & \partial_{X_1} \end{pmatrix} \right),$$

ce qui définit

$$\Phi_{\tilde{X}} : (C_*(f_0), \partial_{X_0}) \longrightarrow (C_*(f_1), \partial_{X_1}),$$

un morphisme de complexes dont on démontre comme plus haut qu'il induit un isomorphisme en homologie.

En conclusion, l'homologie du complexe ne dépend, dans ce cas, que de V et de la partition du bord en $\partial V = \partial_+ V \cup \partial_- V$.

Remarquons aussi que Φ_*^F ne dépend pas de F . Pour s'en convaincre, avec une autre « interpolation » F' , prendre $G = \text{Id}$ et $H = F'$ dans l'étape (3) de la démonstration du théorème 3.4.2.

Exercices

Exercice 13. Quelle est l'homologie du complexe associé à la fonction définie dans l'exercice 12 (page 48) et au champ de vecteurs suggéré dans le même exercice ?

Exercice 14. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel de dimension finie. Une orientation de E est une classe d'équivalence de bases de E sous la relation d'équivalence

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \iff \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0.$$

Vérifier de même que la relation

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \iff \det_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0)}(\mathcal{B}', \mathcal{B}_0) > 0$$

définit une relation d'équivalence sur les bases des supplémentaires de F qui ne dépend pas de la base $\mathcal{B}_0$ de F choisie. Les classes d'équivalence sont les co-orientations de F .

Vérifier que, si E est orienté, F co-orienté et E et F transverses, alors $E \cap F$ est co-orienté.

Exercice 15. Déterminer l'homologie des complexes $(C_*(f; \mathbf{Z}), \partial_X)$ pour les exemples des fonctions de Morse utilisées dans ce texte sur les variétés $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, T^2 , S^n .

CHAPITRE 4

HOMOLOGIE DE MORSE, APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous proposons quelques calculs et quelques applications de l'homologie de Morse : le cas d'un produit (formule de Künneth), la dualité de Poincaré, la caractéristique d'Euler (et les inégalités de Morse), le lien avec la connexité et la simple connexité de la variété considérée. Nous montrons aussi la fonctorialité de l'homologie de Morse et mettons en évidence une suite exacte longue pour une paire (W, V) (où V est une sous-variété de la variété W).

4.1. Homologie

Comme l'homologie $H_\star(f, X)$ du complexe de Morse ne dépend que de V , on la note $HM_\star(V; \mathbf{Z}/2)$ (pour « homologie de Morse modulo 2 » de V). De même, l'homologie du complexe tenant compte des orientations comme au §3.3 est notée $HM_\star(V; \mathbf{Z})$. En réalité (pour celles et ceux qui savent ce que c'est), c'est l'homologie modulo 2 (resp. l'homologie entière) de la variété V (voir le §4.9). Les résultats de ce chapitre sont vrais sur $\mathbf{Z}/2$ comme sur $\mathbf{Z}$ (sauf mention explicite du contraire). Nous ferons donc en général usage du complexe à coefficients entiers et nous noterons $HM_\star(V)$ son homologie.

Dans le cas d'une variété à bord V dont le bord ∂V est décomposé en $\partial V = \partial_- V \cup \partial_+ V$, on définit de même l'homologie de Morse relative $HM_\star(V, \partial_+ V; \mathbf{Z}/2)$ comme l'homologie d'un complexe $(C_\star(f), \partial_X)$.

Exemple 4.1.1. Dans le cas du disque (voir la figure 12 du chapitre 3), la figure de gauche donne

$$HM_\star(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \star \neq n \\ \mathbf{Z} & \text{si } \star = n, \end{cases}$$

alors que celle de droite donne

$$HM_\star(D^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \star \neq 0 \\ \mathbf{Z} & \text{si } \star = 0. \end{cases}$$

On s'attend à ce que cette « homologie » vérifie un certain nombre de propriétés, de fonctorialité, de bon comportement par rapport au produit cartésien, par exemple.

Remarque 4.1.2. Notons un tout petit pas vers une sorte de fonctorialité (voir plus généralement le § 4.6). Si $\varphi : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, φ induit un isomorphisme

$$\varphi_* : HM_*(M) \longrightarrow HM_*(N).$$

En effet, si g est une fonction de Morse sur N , alors $g \circ \varphi$ en est une sur M . Si X est un champ de pseudo-gradients adapté à $g \circ \varphi$ sur M satisfaisant à la propriété de Smale, alors $\varphi_*(X)$ en est un pour g sur N . On en déduit un isomorphisme de complexes

$$(C_*(g \circ \varphi), \partial_X) \longrightarrow (C_*(g), \partial_{\varphi_* X}).$$

Homologie d'une réunion disjointe. Avant de passer aux choses sérieuses, remarquons aussi que l'homologie de Morse d'une réunion disjointe est la somme directe des homologies des morceaux. En effet, si f et g sont des fonctions de Morse sur V et W et si X et Y sont des champs de vecteurs *ad hoc*, alors évidemment

$$C_k(f \amalg g) = C_k(f) \oplus C_k(g) \quad \text{et} \quad \partial_X \amalg_Y = \partial_X \oplus \partial_Y.$$

Notations. Pour alléger l'écriture du texte aussi bien que sa lecture, nous noterons parfois $C_*(f, X)$ le complexe associé à une fonction et un champ de vecteurs; couple (f, X) que nous nous autoriserons à qualifier de « Morse-Smale » lorsque l'une est de Morse et l'autre est un pseudo-gradient adapté satisfaisant la propriété de Smale.

4.2. La formule de Künneth

Si M et N sont deux variétés munies de fonctions de Morse f et g et de champs de pseudo-gradients X et Y respectivement (satisfaisant à la condition de Smale), alors $f + g$ est une fonction de Morse sur $M \times N$ et (X, Y) est un champ de pseudo-gradients adapté satisfaisant à la condition de Smale. Les points critiques de $f + g$ sont les points (a, a') où a est un point critique de f et a' un point critique de g . L'indice de (a, a') est la somme des indices de a et a' . Soient (a, a') un point critique d'indice k de $f + g$ (avec a un point critique d'indice i de f et a' un point critique d'indice j de g) et (b, b') un point critique d'indice $k - 1$ tels qu'il y ait une trajectoire de (X, Y) joignant (a, a') à (b, b') . Le flot de (X, Y) est

$$\varphi_{(X, Y)}^t(x, y) = (\varphi_X^t(x), \varphi_Y^t(y)).$$

En particulier,

$$\mathcal{L}_{(X,Y)}((a, a'), (b, b')) \cong \mathcal{L}_X(a, b) \times \mathcal{L}_Y(a', b').$$

Si $a \neq b$ et $a' \neq b'$, pour que $\mathcal{L}_X(a, b) \times \mathcal{L}_{X'}(a', b')$ ne soit pas vide, il est nécessaire que

$$\text{Ind}(a) \geq \text{Ind}(b) + 1 \quad \text{et} \quad \text{Ind}(a') \geq \text{Ind}(b') + 1,$$

soit

$$\text{Ind}(a, a') \geq \text{Ind}(b, b') + 2.$$

Donc, pour des points (a, a') et (b, b') d'indices consécutifs, on a

$$\mathcal{L}_{(X,Y)}((a, a'), (b, b')) = \begin{cases} a \times \mathcal{L}_Y(a', b') & \text{si } a = b \\ \mathcal{L}_X(a, b) \times a' & \text{si } a' = b' \end{cases}$$

et par suite

$$n_{(X,Y)}((a, a'), (b, b')) = \begin{cases} n_Y(a', b') & \text{si } a = b \\ n_X(a, b) & \text{si } a' = b' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application

$$\Phi : \bigoplus_{i+j=k} C_i(f) \otimes C_j(g) \longrightarrow C_k(f+g)$$

définie par

$$\Phi(a \otimes a') = (a, a')$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

Proposition 4.2.1. *L'application Φ définit un isomorphisme de complexes*

$$(C_\star(f) \otimes C_\star(g), \partial_X \otimes 1 + 1 \otimes \partial_Y) \longrightarrow (C_\star(f+g), \partial_{(X,Y)}).$$

Démonstration. Soient a un point critique d'indice i de f et a' un point critique d'indice j de g . On a d'une part

$$\begin{aligned} \Phi(\partial_X \otimes 1 + 1 \otimes \partial_Y)(a \otimes a') &= \Phi(\partial_X(a) \otimes a' + a \otimes \partial_Y(a')) \\ &= \Phi\left(\sum_{b \in \text{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a, b)b \otimes a' + \sum_{b' \in \text{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(a', b')a \otimes b'\right) \\ &= \sum_{b \in \text{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a, b)(b, a') + \sum_{b' \in \text{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(a', b')(a, b'), \end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} \partial_{(X,Y)}\Phi(a \otimes a') &= \sum_{(b, b') \in \text{Crit}_{i+j-1}(f+g)} n_{(X,Y)}((a, a'), (b, b'))(b, b') \\ &= \sum_{b \in \text{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a, b)(b, a') + \sum_{b' \in \text{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(a', b')(a, b'), \end{aligned}$$

grâce à la remarque ci-dessus. $\square$

Ceci fonctionne bien sur $\mathbf{Z}$ (avec orientations) ou sur $\mathbf{Z}/2$ (sans). Le passage à l'homologie nécessite, lui, de nous placer sur $\mathbf{Z}/2$ (voir au besoin l'algèbre homologique nécessaire au § 15.1.a). Nous en déduisons :

Corollaire 4.2.2. *L'homologie modulo 2 de $(C_*(f+g), \partial_{(X,Y)})$ sur le produit $M \times N$ est isomorphe au produit tensoriel de celles de $(C_*(f), \partial_X)$ et $(C_*(g), \partial_Y)$.*

Corollaire 4.2.3 (formule de Künneth). *Si M et N sont deux variétés compactes, on a un isomorphisme*

$$HM_k(M \times N; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k} HM_i(M; \mathbf{Z}/2) \otimes HM_j(N; \mathbf{Z}/2). \quad \square$$

4.3. La « dualité de Poincaré »

On sait que les points critiques d'indice k de f sont les points critiques d'indice $n - k$ de $-f$ (n est la dimension de la variété). De plus, si X est un pseudo-gradient adapté à f , $-X$ en est un, qui est adapté à f .

Si $a \in \text{Crit}_k(f)$, notons a^* le même point, vu comme point critique de la fonction $-f$. De sorte que

$$\{a \mid a \in \text{Crit}_k(f)\} \text{ est une base de } C_k(f)$$

alors que

$$\{a^* \mid a \in \text{Crit}_k(f)\} \text{ est une base de } C_{n-k}(-f).$$

L'espace vectoriel $C_{n-k}(-f)$ est isomorphe à $C_k(f)$, mais il est préférable d'y penser comme étant son dual (d'où la notation)

$$C_{n-k}(-f) = C_k(f)^*.$$

Ainsi, par définition, la transposée

$${}^t\partial_X : C_{n-k+1}(-f) \longrightarrow C_{n-k}(-f) \text{ de } \partial_X : C_k(f) \longrightarrow C_{k-1}(f)$$

est la différentielle ∂_{-X} du complexe $(C_*(-f), \partial_{-X})$. On a donc :

Proposition 4.3.1 (dualité de Poincaré). *Soit V une variété compacte de dimension n . Si V est sans bord, $HM_{n-k}(V; \mathbf{Z}/2)$ est isomorphe à $HM_k(V; \mathbf{Z}/2)$. Si V a un bord $\partial V = \partial_+ V \cup \partial_- V$, alors $HM_k(V, \partial_+ V; \mathbf{Z}/2)$ est isomorphe à $HM_{n-k}(V, \partial_- V; \mathbf{Z}/2)$. $\square$*

Par exemple (c'est le cas où $\partial_+ V = \emptyset$),

$$HM_k(V; \mathbf{Z}/2) \text{ est isomorphe à } HM_{n-k}(V, \partial V; \mathbf{Z}/2).$$

Pour pouvoir énoncer un résultat analogue en homologie à coefficients entiers, il faut pouvoir associer à un point critique a d'indice k de f avec une orientation de $W^s(a)$, un point critique a^* de $-f$ avec une orientation

de $W^s(a^*) = W^u(a)$. Pour écrire un énoncé simple, supposons donc que la variété V est orientée : ainsi une orientation de $W^s(a)$ définit-elle une orientation (et pas seulement une co-orientation) de $W^u(a)$. Les arguments utilisés ci-dessus restent valables et on obtient une proposition analogue.

Proposition 4.3.2 (dualité de Poincaré pour les variétés orientées). *Soit V une variété compacte orientée de dimension n . Si V est sans bord, les groupes abéliens $HM_{n-k}(V; \mathbf{Z})$ et $HM_k(V; \mathbf{Z})$ ont le même rang. Si V a un bord $\partial V = \partial_+ V \cup \partial_- V$, alors les groupes abéliens $HM_k(V, \partial_+ V; \mathbf{Z})$ et $HM_{n-k}(V, \partial_- V; \mathbf{Z})$ ont le même rang.* $\square$

4.4. Caractéristique d'Euler, polynôme de Poincaré

Voici une application directe de l'indépendance de l'homologie.

Corollaire 4.4.1. *Le nombre de points critiques modulo 2 d'une fonction de Morse ne dépend que de la variété et pas de la fonction.*

Démonstration. On écrit le complexe associé à une fonction de Morse et à un pseudo-gradient :

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \# \text{Crit}(f) &= \sum_{k=0}^n \dim C_k(f) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (\dim \text{Ker } \partial_k + \dim \text{Im } \partial_k) \\ &= \sum_{k=0}^n (\dim \text{Ker } \partial_k + \dim \text{Im } \partial_{k+1}) \\ &\equiv \sum_{k=0}^n (\dim \text{Ker } \partial_k - \dim \text{Im } \partial_{k+1}) \pmod{2} \\ &= \sum_{k=0}^n \dim HM_k(V; \mathbf{Z}/2). \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 4.4.2. Nous n'avons utilisé ici que de l'algèbre, la définition de l'homologie à partir du complexe et montré que

$$\sum_k (-1)^k \dim C_k = \sum_k (-1)^k \dim HM_k.$$

Mais nous avons utilisé le « théorème noyau-image », il était donc prudent de nous placer dans des espaces vectoriels, c'est-à-dire sur un corps, c'est pourquoi c'est de l'homologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$ qui apparaît ici.

Ce nombre est la caractéristique d'Euler de la variété V (modulo 2). La caractéristique d'Euler est, par définition :

$$\begin{aligned}\chi(V) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim HM_k(V; \mathbf{Z}/2) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (\dim \operatorname{Ker} \partial_k - \dim \operatorname{Im} \partial_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (\dim \operatorname{Ker} \partial_k + \dim \operatorname{Im} \partial_k) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim C_k(f).\end{aligned}$$

De sorte que la caractéristique d'Euler d'une variété est la somme alternée des nombres de points critiques d'une fonction de Morse sur celle-ci.

En étant moins grossier, c'est-à-dire en écrivant

$$\# \operatorname{Crit}(f) \geq \sum_{k=0}^n (\dim \operatorname{Ker} \partial_k - \dim \operatorname{Im} \partial_{k+1}) = \sum_{k=0}^n \dim HM_k(V; \mathbf{Z}/2),$$

on obtient :

Proposition 4.4.3 (inégalités de Morse). *Le nombre de points critiques d'une fonction de Morse sur une variété V est supérieur ou égal à la somme des dimensions des groupes d'homologie (de Morse, modulo 2) de cette variété.* $\square$

Si l'on définit $c_k(f)$ comme le nombre de points critiques d'indice k de la fonction de Morse f et $\beta_k = \dim HM_k(V; \mathbf{Z}/2)$ (le k -ème nombre de Betti de V), la proposition s'écrit

$$c_k(f) \geq \beta_k, \quad 0 \leq k,$$

une série d'inégalités connues sous le nom d'inégalités de Morse.

Exemple 4.4.4. Nous avons vu que dans le cas du tore T^2 la somme des dimensions des groupes d'homologie était 4. Donc une fonction de Morse sur le tore doit avoir au moins quatre points critiques.

Remarque 4.4.5. Il est possible de construire une fonction (dégénérée) sur le tore qui n'a que trois points critiques (mais pas moins, à cause du théorème de Reeb, le corollaire 2.1.9, et de la remarque qui le suit). Voir la figure 1, le

point critique dégénéré est au centre, les deux autres points critiques sont le maximum et le minimum, c'est une « selle de singe » (voir l'exercice 3 page 17).

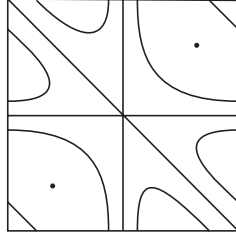


FIGURE 1. Niveaux d'une fonction avec trois points critiques sur le tore

Il est d'ailleurs possible, sur une variété compacte et connexe de dimension n , de construire une fonction avec $n + 1$ points critiques. Une stratégie, développée dans [70], est de construire d'abord sur la variété une fonction de Morse avec au plus $n + 1$ niveaux critiques tous connexes (un résultat de Smale, voir [47]), puis de modifier la fonction au voisinage de chaque niveau critique, de façon qu'elle n'ait plus qu'un point critique (dégénéré) dans ce niveau.

Exemple 4.4.6. La caractéristique d'Euler de la sphère S^n est $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, soit 0 si n est impair et 2 si n est pair. Par exemple, la caractéristique d'Euler de la sphère de dimension 2 est 2. C'est le même Euler, le même 2 et la même somme alternée que dans la « formule d'Euler » sur les nombres F de faces, A d'arêtes et S de sommets d'un polyèdre convexe, $F - A + S = 2$.

Remarque 4.4.7. La caractéristique d'Euler d'une variété compacte sans bord de dimension impaire est nulle : grâce à la dualité de Poincaré, dans la somme alternée, les termes s'annulent deux à deux.

À l'aide des nombres de Betti, $\beta_k(V) = \dim HM_k(V; \mathbf{Z}/2)$ on définit le polynôme de Poincaré

$$P_V(t) = \sum_k \beta_k(V) t^k.$$

Par exemple, $P_{S^1}(t) = 1 + t$ et plus généralement,

$$P_{S^n}(t) = 1 + t^n.$$

De même,

$$P_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}(t) = 1 + t^2 + \cdots + t^{2n},$$

et

$$P_{T^2}(t) = 1 + 2t + t^2, \quad P_{\mathbf{P}^2(\mathbf{R})} = 1 + t + t^2.$$

La formule de Künneth donne immédiatement la relation

$$P_{V_1 \times V_2}(t) = P_{V_1}(t)P_{V_2}(t).$$

On en déduit, en écrivant $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n fois) que

$$\beta_k(T^n) = C_n^k.$$

En particulier, en appliquant la remarque 4.1.2, on en déduit que la sphère S^n n'est difféomorphe au tore T^n que si $n = 1$. Il y a évidemment des manières plus rapides que la théorie de Morse d'arriver à ce résultat (par exemple, la sphère est simplement connexe et pas le tore).

On en déduit aussi (pour $t = -1$) que

$$\chi(V_1 \times V_2) = \chi(V_1)\chi(V_2).$$

Exemple 4.4.8. On trouve $\chi(S^2 \times S^2) = 4$. En utilisant la fonction hauteur sur S^2 , on obtient par produit une fonction de Morse sur $S^2 \times S^2$ qui a seulement quatre points critiques, un minimum, un maximum et deux points critiques d'indice 2, ce qui est cohérent, puisque $1 + 2 + 1 = 4$.

4.5. Homologie et connexité

4.5.a. Composantes connexes et homologie.

Proposition 4.5.1. *Si V est une variété compacte et connexe,*

$$HM_0(V; \mathbf{Z}/2) \cong \mathbf{Z}/2.$$

Démonstration. On choisit une fonction de Morse f sur V et on considère ses minima locaux $a_1, \dots, a_r$. Ils ont des voisinages (donnés par le lemme de Morse) disjoints. On choisit aussi un pseudo-gradient (avec la propriété de Smale) adapté X .

L'idée de la démonstration est la suivante. Comme la variété est connexe, on doit avoir un point critique au-dessus de a_1 et une carte de Morse qui permet de joindre le voisinage utilisé de a_1 à un autre des disques, disons autour de a_i . Si l'indice d'un point critique est k , la carte de Morse va s'attacher à un niveau juste en-dessous par une application de S^{k-1} dans ce sous-niveau. Pour $k \geq 2$, cette sphère est connexe et ne peut être utilisée pour connecter les deux disques autour de a_1 et a_i . Il y a donc un point critique c d'indice 1 relié à a_1 et à a_i par des trajectoires de X . Ainsi

$$\partial_X c = a_1 + a_i.$$

On montre ainsi que tous les points critiques d'indice 0 sont homologues.

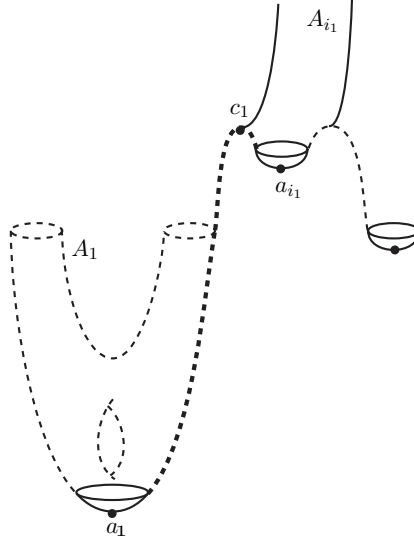


FIGURE 2

Plus précisément, appelons B le sous-espace vectoriel de dimension $r - 1$ dans $C_0(f)$ qui est engendré par les $a_1 + a_i$ (pour $2 \leq i \leq r$) et montrons que B est précisément l'image de

$$\partial_X : C_1(f) \longrightarrow C_0(f).$$

Commençons par montrer que $\partial_X C_1 \subset B$, qui est l'inclusion facile. Soit c un point critique d'indice 1. Sa variété instable est de dimension 1, il n'y a donc que deux trajectoires de X issues de c , atteignant deux minima locaux a_i et a_j (pas nécessairement distincts). On a donc

$$\partial_X c = a_i + a_j = (a_1 + a_i) + (a_1 + a_j) \in B.$$

Donc $\partial_X(C_1(f)) \subset B$.

Montrons réciproquement que $B \subset \partial_X(C_1(f))$ (c'est le cœur de la preuve). Il suffit de montrer que, pour tout i , a_i est dans la même classe d'homologie que a_1 . Soit

$$N = V - \bigcup_{\text{Ind}(x), \text{Ind}(y) \geq 2} \mathcal{M}(x, y).$$

Remarquons que, avec $\text{Ind}(x)$ et $\text{Ind}(y) \geq 2$, $\text{codim } \mathcal{M}(x, y) \geq 2$, de sorte que N est connexe. Posons, pour $j = 1, \dots, r$,

$$A_j = \{x \in N \mid x \text{ est sur une trajectoire (brisée) aboutissant à } a_j\}.$$

Les ensembles A_j sont connexes (tous les points de A_j sont reliés à a_j), N est la réunion des A_j et A_j est la réunion de la variété stable de a_j avec

les orbites aboutissant à a_j en passant par un point critique d'indice 1. La figure 2 représente une partie de N , avec les parties correspondantes de A_1 et A_{i_1} .

Montrons maintenant que les ensembles A_j sont fermés dans N . Il suffit de le faire pour $j = 1$. Soit (x_n) une suite dans A_1 qui converge vers $x \in N$. On prouve que $x \in A_1$. On suppose que x_n n'est pas un point critique de f , ce qui suffit. Appelons ℓ_n la trajectoire passant par x_n et ℓ celle passant par x . Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que les trajectoires ℓ_n aboutissent toutes au même point critique b , qui peut être a_1 ou un point critique d'indice 1, lui-même relié à a_1 par une trajectoire.

Appelons c le point critique auquel aboutit ℓ . Son indice est 0 ou 1, puisque x est dans N . Si $c = b$, la démonstration est finie. Sinon, soit ℓ^+ le point par lequel ℓ entre dans la carte de Morse de c . Par continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, les ℓ_n entrent aussi dans cette carte. Appelons ℓ_n^+ le point d'entrée de ℓ_n . Grâce au lemme 3.2.5, la suite des ℓ_n^+ tend vers ℓ^+ . Comme nous avons supposé que $c \neq b$, les trajectoires ℓ_n sortent de cette carte, par des points ℓ_n^- . Toujours grâce au lemme 3.2.5, la limite d'une suite extraite convergente de la suite (ℓ_n^-) tend vers une limite $\lambda^- \in W^u(c)$ (comme dans la démonstration du théorème 3.2.2). La trajectoire λ de λ^- joint c à un point critique a qui doit être d'indice 0. Comme les ℓ_n entrent dans le voisinage de Morse de a pour n assez grand, nous avons forcément $a = a_1 (= b)$ et $x \in A_1$. Donc A_1 est fermé dans N .

Comme N est connexe, il existe un indice $i_1 > 1$ tel que $A_1 \cap A_{i_1} \neq \emptyset$. Dans cette intersection, il y a forcément un point critique d'indice 1, disons c_1 . On a

$$\partial_X c_1 = a_1 + a_{i_1},$$

donc a_{i_1} est dans la même classe d'homologie que a_1 . Et en plus, $A_1 \cup A_{i_1}$ est connexe. Donc il existe un indice i_2 tel que $(A_1 \cup A_{i_1}) \cap A_{i_2} \neq \emptyset$. De même, cette intersection contient une trajectoire provenant d'un point critique c_2 d'indice 1, de sorte que l'on a

$$\partial_X c_2 = a_1 + a_{i_2} \quad \text{ou} \quad \partial_X c_2 = a_{i_1} + a_{i_2}.$$

Dans les deux cas, la classe d'homologie de a_{i_2} est la même que celle de a_1 . On montre ainsi en épuisant les a_i qu'ils sont tous homologues à a_1 . $\square$

Remarque 4.5.2. Cette démonstration est complètement analogue à celle que nous avons utilisée dans la classification des variétés de dimension 1 (au §2.3.b).

En appliquant la dualité de Poincaré, on déduit de la proposition 4.5.1 :

Corollaire 4.5.3. *Soit V une variété compacte et connexe de dimension n . Alors $HM_n(V; \mathbf{Z}/2) \cong \mathbf{Z}/2$.* $\square$

Remarque 4.5.4. La proposition 4.5.1 est vraie sur $\mathbf{Z}$, comme on s'en convaincra en faisant attention aux orientations dans la démonstration. L'analogie du corollaire 4.5.3 affirme alors que, si V est une variété compacte, connexe et orientée de dimension n , alors $HM_n(V; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$.

Corollaire 4.5.5. *Soit V une variété compacte de dimension n . Alors $HM_0(V; \mathbf{Z}/2)$ et $HM_n(V; \mathbf{Z}/2)$ sont des $\mathbf{Z}/2$ -espaces vectoriels de dimension le nombre de composantes connexes de V .*

Démonstration. On écrit V comme réunion disjointe de ses composantes connexes

$$V = \coprod_{i=1}^k V_i.$$

Sur chaque V_i , on choisit une fonction de Morse f_i et un champ de vecteurs *ad hoc* X_i . Il est clair que

$$C_\star(\coprod f_i) = \bigoplus C_\star(f_i) \quad \text{et} \quad \partial_{\coprod X_i} = \bigoplus \partial_{X_i},$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 4.5.6. La démonstration de 4.5.1 donne aussi le fait qu'une fonction de Morse sur une variété compacte et connexe qui n'a pas de point critique d'indice 1 a un unique minimum local, un résultat essentiel dans la démonstration d'un célèbre théorème de géométrie symplectique, le théorème de convexité d'Atiyah, Guillemin et Sternberg (voir par exemple [5] et les références aux articles originaux qui y sont contenues).

4.5.b. Groupe fondamental et homologie (à suivre). Dans le même ordre d'idées, et sans réellement utiliser le complexe de Morse, commençons à comparer le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie de la variété (connexe) V . Le résultat le meilleur possible serait que $HM_1(V; \mathbf{Z})$ est le plus grand quotient abélien du groupe $\pi_1(V)$. Nous montrerons plus bas (au §4.8.a) que, si V est simplement connexe, alors $HM_1(V; \mathbf{Z})$ est nul. Contentons-nous pour l'instant de remarquer :

Proposition 4.5.7. *Si la variété V possède une fonction de Morse qui n'a aucun point critique d'indice 1, alors elle est simplement connexe.*

Démonstration. On peut supposer V connexe par arcs et choisir un minimum (disons a_0) de f comme point base. Soit un lacet C dans V . On peut supposer que ce lacet est différentiable. Si b est un point critique d'indice k , nous savons que $\dim W^s(b) = n - k$. Par position générale, on peut donc

supposer que C ne rencontre aucune des variétés stables des points critiques d'indices plus grands ou égaux à 2. Comme nous avons supposé qu'il n'y a aucun point critique d'indice 1, C est contenu dans la réunion des variétés stables des minimums locaux, qui sont disjointes. Donc C est contenu dans l'une d'entre elles, celle de a_0 . Mais celle-ci est un disque, dans lequel on n'a aucun mal à contracter C sur le point base a_0 . $\square$

Exemple 4.5.8. Par exemple, la sphère S^n est simplement connexe dès que $n \geq 2$.

4.6. Fonctorialité de l'homologie de Morse

On a vu (c'est la remarque 4.1.2) qu'un difféomorphisme entre deux variétés induisait un isomorphisme en homologie de Morse. Nous aimerions démontrer plus généralement qu'une application $\mathcal{C}^\infty$ induit un homomorphisme. Hélas, une application $u : V \rightarrow W$ ne permet pas de construire une fonction de Morse sur V à partir d'une fonction de Morse sur W , donc il va falloir être plus subtil.

La variété V considérée ici est une variété compacte, éventuellement à bord, munie d'une fonction de Morse f et d'un champ de pseudo-gradients X satisfaisant la propriété de Smale, et qui est entrant si $\partial V \neq \emptyset$ (avec les notations utilisées jusque là, $\partial V = \partial_- V$).

Les résultats que nous allons démontrer ici sont les deux théorèmes :

Théorème 4.6.1 (fonctorialité). *Soit $u : V \rightarrow W$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle induit un morphisme de groupes abéliens gradués*

$$u_* : HM_*(V) \longrightarrow HM_*(W).$$

De plus, si $v : W \rightarrow Z$ est une autre application $\mathcal{C}^\infty$,

$$(v \circ u)_* = v_* \circ u_*.$$

Enfin, pour l'application identique $\text{Id} : V \rightarrow V$, on a $\text{Id}_ = \text{Id}$.*

Dire que u_* est un morphisme de groupes abéliens gradués, c'est dire que cette application est une collection de morphismes

$$u_k : HM_k(V) \longrightarrow HM_k(W).$$

Dit en termes savants, ce théorème affirme que l'homologie de Morse est un foncteur de la catégorie des variétés différentiables et applications $\mathcal{C}^\infty$ dans la catégorie des groupes abéliens. C'est aussi un foncteur « homotopique ».

Théorème 4.6.2 (invariance homotopique). *Soit $u : [0, 1] \times V \rightarrow W$ une application $\mathcal{C}^\infty$. Pour $u_t(x) = u(t, x)$, on a $(u_0)_* = (u_1)_*$.*

L'idée de la démonstration du théorème 4.6.1 est d'utiliser le fait que la composition

$$V \xrightarrow{u} W = W \times \{0\} \subset W \times D^N$$

est homotope à un plongement (pour N assez grand), et donc de commencer par traiter le cas des plongements.

Démonstration du théorème 4.6.1 pour les plongements

L'idée est, en partant d'un couple (f, X) sur V ayant les propriétés Morse et Smale, de le prolonger en $(\tilde{f}, \tilde{X})$ sur W ayant les mêmes propriétés. On en déduira un morphisme de complexes

$$u_{\bullet} : C_{\bullet}(f, X) \longrightarrow C_{\bullet}(\tilde{f}, \tilde{X})$$

dont on montrera enfin que le morphisme qu'il induit en homologie ne dépend pas des choix de f et de X .

Cas où u est un difféomorphisme. On a vu dans la remarque 4.1.2 que le difféomorphisme u induit un isomorphisme de complexes

$$C_{\bullet}(f, X) \longrightarrow C_{\bullet}(f \circ u^{-1}, du(X)).$$

Vérifions que l'isomorphisme induit en homologie ne dépend pas des choix de f et de X . Soient donc (f_0, X_0) et (f_1, X_1) deux couples Morse-Smale sur V ainsi que (F, X) un couple Morse-Smale sur $[-1/3, 4/3] \times F$, comme au §3.4. Le couple $(F \circ (\text{Id} \times u^{-1}), d(u \times \text{Id})(X))$ joue le même rôle entre $(f_0 \circ u^{-1}, du(X_0))$ et $(f_1 \circ u^{-1}, du(X_1))$. En d'autres termes, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_{\bullet}(f_0, X_0) & \xrightarrow{u_{\bullet,0}} & C_{\bullet}(f_0 \circ u^{-1}, du(X_0)) \\ \downarrow \Phi^F & & \downarrow \Phi^{F \circ (\text{Id} \times u^{-1})} \\ C_{\bullet}(f_1, X_1) & \xrightarrow{u_{\bullet,1}} & C_{\bullet}(f_1 \circ u^{-1}, du(X_1)) \end{array}$$

Puis évidemment, pour deux difféomorphismes u et v , $v_{\bullet} \circ u_{\bullet} = (v \circ u)_{\bullet}$ de sorte que $v_{\star} \circ u_{\star} = (v \circ u)_{\star}$. Enfin, $\text{Id}_{\star} = \text{Id}$.

Cas où u est l'inclusion d'une sous-variété. Notons-la

$$i : V \hookrightarrow W.$$

Proposition 4.6.3. *Soit (f, X) un couple Morse-Smale sur V . Alors il existe un couple Morse-Smale $(\tilde{f}, \tilde{X})$ sur W , qui le prolonge et tel que*

- (1) $\text{Crit}(f) \subset \text{Crit}(\tilde{f})$ et l'indice d'un point critique de f est le même que son indice comme point critique de $\tilde{f}$;
- (2) si a est un point critique de f , alors $\partial_{\tilde{X}}(a) = \partial_X(a)$.

Comme conséquence de cette proposition, on a un morphisme (injectif) de complexes

$$i_{\bullet} : C_{\bullet}(f, X) \longrightarrow C_{\bullet}(\tilde{f}, \tilde{X})$$

simplement défini en envoyant a (vu comme point critique de f) sur a (vu comme point critique de $\tilde{f}$). De plus, ce morphisme ne dépend pas du choix du couple (f, X) : on relie (f_0, X_0) à (f_1, X_1) comme d'habitude, grâce à une fonction

$$F : [-1/3, 4/3] \times V \longrightarrow \mathbf{R}$$

et à un champ de vecteurs X sur ce produit. On peut fabriquer un diagramme commutatif comme ci-dessus

$$\begin{array}{ccc} C_{\bullet}(f_0, X_0) & \xhookrightarrow{u_{\bullet 0}} & C_{\bullet}(\tilde{f}_0, \tilde{X}_0) \\ \downarrow \Phi^F & & \downarrow \Phi^{\tilde{F}} \\ C_{\bullet}(f_1, X_1) & \xhookrightarrow{u_{\bullet 1}} & C_{\bullet}(\tilde{f}_1, \tilde{X}_1) \end{array}$$

en prolongeant F et X en $\tilde{F}$ et $\tilde{X}$ comme on a prolongé f et X , de sorte que, si a est un point critique de f_0 sur V , $\Phi^{\tilde{F}}(a) = \Phi^F(a)$.

Cas où $u : V \rightarrow W$ est un plongement. On peut considérer u comme composée d'un difféomorphisme et de l'inclusion d'une sous-variété :

$$V \xrightarrow{u} u(V) \xhookrightarrow{i} W.$$

En partant de (f, X) sur V , on construit comme plus haut $(\tilde{f}, \tilde{X})$ sur W et un morphisme de complexes

$$u_{\bullet} : C_{\bullet}(f, X) \longrightarrow C_{\bullet}(\tilde{f}, \tilde{X})$$

en envoyant a sur $iu(a) = u(a)$.

On a clairement

$$v_{\bullet} \circ u_{\bullet} = (v \circ u)_{\bullet} \text{ et donc aussi } v_{\star} \circ u_{\star} = (v \circ u)_{\star}. \quad \square$$

Démonstration de la proposition. Considérons une sous-variété V de dimension n d'une variété W de dimension p .

Soit c un point critique de f sur V et soit U un voisinage de c dans la (grosse) variété W . On peut supposer que U est de la forme $U \equiv D^n \times D^{p-n}$. Sur un tel U , il est facile de prolonger f en posant

$$\tilde{f}(x, y) = f(x) + \frac{1}{2} \|y\|^2$$

et X par

$$\tilde{X}(x, y) = X(x) - y$$

(c'est-à-dire en ajoutant à $X(x)$ l'opposé du gradient de la norme au carré). On choisit donc un tel voisinage U_i de chaque point critique c_i de f et on prolonge f et X en imposant cette forme sur les U_i et arbitrairement sur le complémentaire de la réunion des U_i dans W .

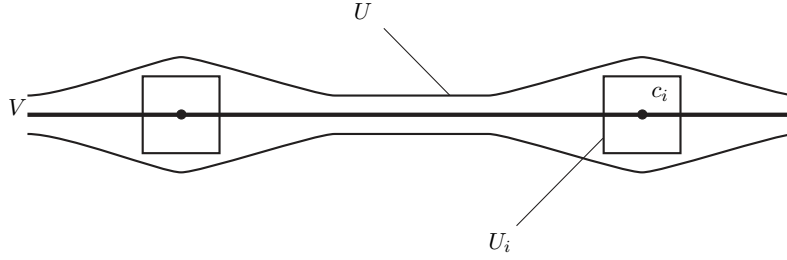


FIGURE 3

Comme tous les points critiques de f sur V sont contenus dans les U_i et comme X est un pseudo-gradient, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$d\tilde{f}(\tilde{X}) < -\varepsilon_0$$

sur $V - \cup(U_i \cap V)$ ainsi que près du bord des U_i . Il existe donc un voisinage ouvert U de $V \cup (\cup U_i)$ dans W tel que

$$d\tilde{f}(\tilde{X}) \leq 0$$

sur U avec égalité exactement en les c_i .

En particulier, $\tilde{f}$ n'a pas d'autre points critiques que les c_i sur U . Comme on a ajouté à f une forme quadratique définie positive, l'indice de c comme point critique de $\tilde{f}$ est son indice comme point critique de f .

Il n'y a aucune raison que $\tilde{f}$ que nous avons obtenue en prolongeant f arbitrairement, soit une fonction de Morse en dehors de U . On la perturbe légèrement pour qu'elle le devienne. On construit ensuite un prolongement *ad hoc* $\tilde{X}$ de X en un pseudo-gradient à l'aide d'une partition de l'unité.

Remarque 4.6.4. Remarquons aussi que toute trajectoire γ de $\tilde{X}$ telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = c \in V$ est complètement contenue dans V (on a supposé que le champ X est entrant près de ∂V).

Il se pourrait que le champ $\tilde{X}$ prolongé n'ait pas la propriété de Smale. On a toutefois, pour tous points critiques de f ,

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}(a, b) = \mathcal{L}_X(a, b), \text{ donc } n_{\tilde{X}}(a, b) = n_X(a, b), \text{ et donc } \partial_{\tilde{X}}(a) = \partial_X(a).$$

Si (par chance) $\tilde{X}$ a la propriété de Smale, on a le résultat attendu. En perturbant $\tilde{X}$ au besoin, on obtient un champ très proche qui satisfait

Smale, n'est peut-être plus tangent à V mais vérifie toujours $n_{\widetilde{X}}(a, b) = n_X(a, b)$. $\square$

Remarque 4.6.5. Notons en particulier, en application de cette démonstration, que si V est une sous-variété d'une variété W et si $\mathcal{V}$ est un voisinage tubulaire de V dans W , alors $HM_\star(\mathcal{V}) \cong HM_\star(V)$.

Avant de terminer la démonstration du théorème 4.6.1 (cas général d'une application qui n'est pas un plongement), commençons à démontrer le théorème 4.6.2, qui nous sera utile.

Démonstration du théorème 4.6.2, cas des plongements

Remarquons tout d'abord, comme

$$HM_\star(D^N; \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } \star = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

que, pour tout difféomorphisme $\psi : D^N \rightarrow D^N$, $\psi_\star$, qui doit être un isomorphisme de $\mathbf{Z}$ dans lui-même, ne peut être que l'application identique, ou son opposée, $\psi_\star = \pm \text{Id}$, et que c'est l'identité lorsque ψ préserve l'orientation.

Comme conséquence, pour toute variété V et tout difféomorphisme ψ préservant l'orientation de D^N , $\psi \times \text{Id} : D^N \times V \rightarrow D^N \times V$ induit aussi l'identité en homologie, puisque $(\psi \times \text{Id})_\bullet = \psi_\bullet \otimes \text{Id}_\bullet$ sur le produit tensoriel des complexes, de sorte que $(\psi \times \text{Id})_\star = \psi_\star \otimes \text{Id}_\star = \text{Id}$.

Considérons maintenant différentes façons d'inclure V dans $D^N \times V$.

Lemme 4.6.6. Pour $a \in D^N$, soit $i_a : V \rightarrow D^N \times V$ le plongement défini par $i_a(x) = (a, x)$. Alors

- (1) $(i_0)_\star$ est un isomorphisme ;
- (2) $(i_a)_\star = (i_0)_\star$.

Démonstration du lemme. On considère un couple (f, X) Morse-Smale sur $V = \{0\} \times V \subset D^N \times V$. On prolonge (f, X) en $(\tilde{f}, \tilde{X})$ comme ci-dessus, c'est-à-dire par

$$\tilde{f}(y, x) = \frac{1}{2} \|y\|^2 + f(x) \quad \text{et} \quad \tilde{X}(y, x) = -y + X(x).$$

Alors, $C_\bullet(f, X) = C_\bullet(\tilde{f}, \tilde{X})$, de sorte que $(i_0)_\bullet = \text{Id}$. Ce qui démontre la première assertion. Pour la deuxième, on utilise un difféomorphisme⁽¹⁾

⁽¹⁾L'existence d'un tel difféomorphisme peut être démontrée en intégrant un champ de vecteurs convenable sur le disque D^N , un exercice dont les détails sont laissés aux lecteurs, l'exercice 19 page 116.

$\psi : D^N \rightarrow D^N$ qui envoie 0 sur a . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_0} & D^N \times V \\ & \searrow i_a & \downarrow \psi \times \text{Id} \\ & & D^N \times V \end{array}$$

donne $(i_0)_* = (i_a)_*$ comme souhaité. $\square$

Pour démontrer le théorème d'invariance homotopique, considérons donc une application

$$u : [0, 1] \times V \longrightarrow W$$

telle que chaque u_t soit un plongement. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{u} : [0, 1] \times V &\longrightarrow [0, 1] \times W \\ (t, x) &\longmapsto (t, u_t(x)) \end{aligned}$$

est un plongement. Pour les inclusions i_0 et i_1 (notations du lemme), on a deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times V & \xrightarrow{\tilde{u}} & [0, 1] \times W \\ i_0^V \uparrow & & \uparrow i_0^W \\ [0, 1] \times V & \xrightarrow{u_0} & [0, 1] \times W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} [0, 1] \times V & \xrightarrow{\tilde{u}} & [0, 1] \times W \\ i_1^V \uparrow & & \uparrow i_1^W \\ [0, 1] \times V & \xrightarrow{u_1} & [0, 1] \times W \end{array}$$

d'où l'on déduit

$$(u_0)_* = (i_0^W)^{-1} \circ \tilde{u}_* \circ (i_0^V)_* = (i_1^W)^{-1} \circ \tilde{u}_* \circ (i_1^V)_* = (u_1)_*. \quad \square$$

Démonstration du théorème 4.6.1, cas général. Considérons une application de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$u : V \longrightarrow W.$$

Choisissons un entier N assez grand pour qu'il existe un plongement $\varphi : V \rightarrow D^N$. Alors, (φ, u) est un plongement de V dans $D^N \times W$. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & D^N \times W \\ & \nearrow (\varphi, u) & \uparrow i_0 \\ V & \xrightarrow{u} & W \end{array}$$

et l'on définit

$$u_* = (i_0)_*^{-1} \circ (\varphi, u)_*.$$

Montrons que le morphisme u_* ainsi défini ne dépend pas du choix de N ni de φ (de sorte qu'en particulier, si u est un plongement, on retrouvera,

pour $N = 0$, ce que l'on a déjà construit). Considérons donc une autre application $\psi : V \rightarrow D^N$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D^N \times W & & \\
 & i_0 \nearrow & \uparrow (\varphi, u) & \searrow \ell_0 & \\
 W & \xleftarrow{u} & V & \xrightarrow{(\psi, \varphi, u)} & D^M \times D^N \times W \\
 & j_0 \searrow & \downarrow (\psi, u) & \nearrow k_0 & \\
 & & D^M \times W & &
 \end{array}$$

où ℓ_0 et k_0 sont définis par

$$\ell_0(y, x) = (0, y, x) \quad \text{et} \quad k_0(z, x) = (z, 0, x).$$

On a $k_0 \circ j_0 = \ell_0 \circ i_0$, mais les deux triangles de droite du diagramme ne commutent pas. Cependant, les diagrammes induits en homologie commutent. L'homotopie « $t\psi$ » relie

$$\ell_0(\varphi(x), u(x)) = (0, \varphi(x), u(x)) \text{ à } (\psi(x), \varphi(x), u(x))$$

et de même, l'homotopie « $t\varphi$ » relie

$$k_0(\psi(x), u(x)) = (\psi(x), 0, u(x)) \text{ à } (\psi(x), \varphi(x), u(x)).$$

Évaluons maintenant, grâce à ce diagramme et à ces remarques, l'application $(i_0)_\star^{-1} \circ (\varphi, u)_\star$. On trouve

$$\begin{aligned}
 (i_0)_\star^{-1} \circ (\varphi, u)_\star &= (i_0)_\star^{-1} \circ (\ell_0)_\star^{-1} \circ (\psi, \varphi, u)_\star \\
 &= (j_0)_\star^{-1} \circ (k_0)_\star^{-1} \circ (\psi, \varphi, u)_\star \\
 &= (j_0)_\star^{-1} \circ (\psi, u)_\star
 \end{aligned}$$

Donc notre morphisme $u_\star$ en homologie ne dépend pas des choix faits.

La vérification de la propriété de fonctorialité suit le même chemin. Pour $u : V \rightarrow W$ et $W \rightarrow Z$, à l'aide de $\varphi : V \rightarrow D^N$ et de $\psi : W \rightarrow D^M$, on utilise le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{u} & W & \xrightarrow{v} & Z \\
 (\varphi, u) \downarrow & \swarrow i_0 & \downarrow (\psi, v) & \swarrow j_0 & \\
 D^N \times W & & D^M \times Z & & \\
 (\text{Id}, (\psi, v)) \downarrow & \swarrow k_0 & & & \\
 D^M \times D^N \times Z & & & &
 \end{array}$$

La flèche verticale $V \rightarrow D^M \times D^N \times Z$ est un plongement composé de deux plongements. Nous savons donc déjà qu'elle satisfait la relation de

fonctorialité. Évaluons donc

$$\begin{aligned} v_* \circ u_* &= (j_0)_*^{-1} \circ (\psi, v)_* \circ (i_0)_*^{-1} \circ (\varphi, u)_* \\ &= (j_0)_*^{-1} \circ (k_0)_*^{-1} \circ (\psi \circ (\text{Id}, v))_* \circ (\varphi, u)_* \\ &= (v \circ u)_*. \end{aligned} \quad \square$$

Fin de la démonstration du théorème 4.6.2. Elle est conséquence immédiate de ce qui précède, on considère simplement u_t comme la composition

$$V \xrightarrow{i_t} [0, 1] \times V \xrightarrow{u} W$$

$u_t = u \circ i_t$, donc $u_* \circ (i_t)_* = (u_t)_*$... mais nous savons que $(i_0)_* = (i_1)_*$, donc $(u_0)_* = (u_1)_*$. $\square$

4.7. Suite exacte longue

Soit V une sous-variété d'une variété W . Nous montrons ici qu'il existe une suite exacte longue en homologie, complétant l'application

$$(i_0)_* : HM_k(V) \longrightarrow HM_k(W).$$

Nous allons donc utiliser des données de Morse-Smale (f, X) sur V que nous prolongerons comme au §4.6, ici à un voisinage tubulaire $\mathcal{V}$ de V dans W . Ainsi, $\mathcal{V}$ est une variété à bord, $\overline{W - \mathcal{V}}$ en est une aussi, toutes les deux ont le même bord $\partial\mathcal{V}$; nous disposons d'une fonction de Morse $\tilde{f}$, dont les points critiques dans $\mathcal{V}$ sont ceux de f sur V , et d'un champ $\tilde{X}$ vérifiant la condition de Smale, qui est entrant dans $\mathcal{V}$ (et sortant de $\overline{W - \mathcal{V}}$). L'inclusion $i_0 : V \subset W$ induit un morphisme injectif de complexes

$$(i_0)_* : (C_*(f), \partial_X) \hookrightarrow (C_*(\tilde{f}), \partial_{\tilde{X}}).$$

Le premier de ces deux complexes calcule l'homologie de V , le deuxième celle de W . Rien de nouveau jusqu'ici. Nous définissons maintenant un morphisme (de groupes)

$$C_*(\tilde{f}) \longrightarrow C_*(\tilde{f}|_{\overline{W - \mathcal{V}}}),$$

simplement en envoyant les points critiques de $\tilde{f}$ qui sont dans $\mathcal{V}$ sur 0. Les points critiques de $\tilde{f}$ qui sont dans $\mathcal{V}$ étant, nous l'avons dit, ceux de f sur V , on a une suite de groupes abéliens

$$C_*(f) \longrightarrow C_*(\tilde{f}) \longrightarrow C_*(\tilde{f}|_{\overline{W - \mathcal{V}}}).$$

Notre deuxième morphisme est aussi un morphisme de complexes : une trajectoire de $\tilde{X}$ joignant deux points critiques de $\tilde{f}$ dont aucun n'est dans $\mathcal{V}$ ne pénètre jamais dans $\mathcal{V}$. Le complexe $C_*(\tilde{f}|_{\overline{W - \mathcal{V}}}, \partial_{\tilde{X}})$ calcule, lui, l'homologie $HM_*(\overline{W - \mathcal{V}}, \partial\mathcal{V})$, puisque le champ $\tilde{X}$ est sortant de $\overline{W - \mathcal{V}}$.

Comme toutes ses semblables, cette suite exacte de complexes induit une suite exacte longue en homologie

$$\begin{array}{ccccc} HM_k(V) & \longrightarrow & HM_k(W) & \longrightarrow & HM_k(\overline{W - \mathcal{V}}, \partial\mathcal{V}) \\ & & & \nearrow \partial & \\ HM_{k-1}(V) & \longrightarrow & HM_{k-1}(W) & & \end{array}$$

On décide d'appeler, pour alléger la notation,

$$HM_k(\overline{W - \mathcal{V}}, \partial\mathcal{V}) = HM_k(W, V),$$

homologie relative⁽²⁾. Le connectant de la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccc} HM_k(V) & \longrightarrow & HM_k(W) & \longrightarrow & HM_k(W, V) \\ & & & \nearrow \partial & \\ HM_{k-1}(V) & \longrightarrow & HM_{k-1}(W) & & \end{array}$$

s'interprète facilement : à une classe dans $HM_k(\overline{W - \mathcal{V}}, \partial\mathcal{V})$, représentée par un point critique a de $\tilde{f}$ dans $\overline{W - \mathcal{V}}$, ∂ associe la classe de la combinaison linéaire des points critiques de f reliés à a par des trajectoires de $\tilde{X}$,

$$\partial a = \sum_{b \in \text{Crit}(f)} n_{\tilde{X}}(a, b).$$

Considérons maintenant une variété M à bord ∂M

$$\partial M \xrightarrow{i_0} M.$$

Nous aimerions appliquer ce qui précède au couple $(M, \partial M)$. Il n'est pourtant pas tout à fait exact que ∂M soit une sous-variété de M . On remplace donc M par une variété qui lui est difféomorphe et dont ∂M est une sous-variété.

Le bord possède un voisinage « collier », c'est-à-dire de la forme

$$\partial M \times [-\varepsilon, 0] \xrightarrow{i} M \quad \text{avec } i(x, 0) = i_0(x)$$

(où ε est un réel strictement positif bien choisi et avec les notations du paragraphe précédent⁽³⁾). Remarquons que

$$M^{-\varepsilon} = M - i([-\varepsilon, 0])$$

⁽²⁾Pour les lecteurs qui savent ce que c'est, il s'agit bien, par excision, de l'homologie relative. Voir par exemple [20].

⁽³⁾Rappelons que l'on peut obtenir un tel i en utilisant le flot d'un champ de vecteurs entrant.

est une variété à bord, difféomorphe à M et de bord $i_{-\varepsilon}(\partial M)$. On commence par ajouter à M un « symétrique » de ce collier, en considérant le recollement évident

$$M^{+\varepsilon} = M \cup \partial M \times [0, \varepsilon]$$

(voir la figure 4). Le bord ∂M est maintenant une sous-variété honnête

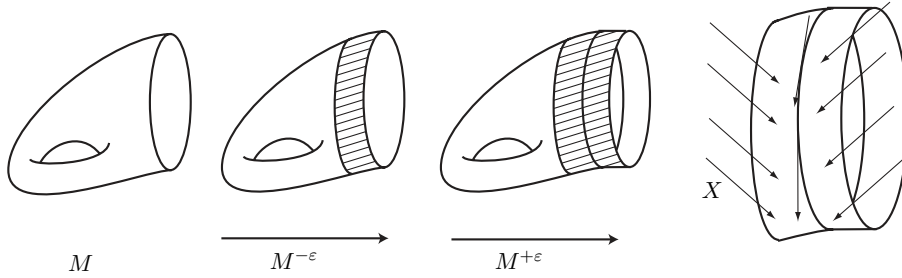


FIGURE 4

de $M^{+\varepsilon}$. De plus, il a un voisinage difféomorphe à $\partial M \times [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Considérons le couple (W, V) où $W = M^{+\varepsilon}$ et V est sa sous-variété ∂M . Comme W est difféomorphe à M , nous avons $HM_{\star}(W) = HM_{\star}(M)$. De plus, $HM_{\star}(W, V)$, qui est $HM_{\star}(\overline{W} - \mathcal{V}, \mathcal{V})$ par définition, est précisément ce que nous avons défini, au § 3.5 sur les cobordismes, comme $HM_{\star}(M, \partial M)$. Nous obtenons donc la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccc} HM_k(\partial M) & \longrightarrow & HM_k(M) & \longrightarrow & HM_k(M, \partial M) \\ & & \searrow \partial & & \\ HM_{k-1}(\partial M) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

Exemple 4.7.1. Dans le cas du disque (voir ci-dessus les exemples 3.5.1, 4.1.1 et la figure 12 du chapitre 3), la suite exacte longue donne deux isomorphismes

$$HM_0(S^{n-1}; \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{j_{\star}} HM_0(D^n; \mathbf{Z}/2)$$

et

$$HM_n(D^n, S^{n-1}; \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{\partial} HM_{n-1}(S^{n-1}; \mathbf{Z}/2)$$

(les autres groupes apparaissant dans la suite exacte sont triviaux).

4.8. Applications

4.8.a. Groupe fondamental et homologie (suite). Montrons ici, comme annoncé au § 4.5.b, qu'une variété simplement connexe n'a pas de H_1 .

Proposition 4.8.1. *Si V est simplement connexe, $HM_1(V; \mathbf{Z}/2) = 0$.*

Démonstration. On utilise un couple (f, X) Morse-Smale sur V . Commençons par décrire les 1-cycles dans V , c'est-à-dire les éléments α de $C_1(f)$ tels que $\partial_X \alpha = 0$. Ce sont des combinaisons linéaires de points critiques d'indice 1,

$$\alpha = a_1 + \cdots + a_k.$$

De plus, $\partial_X a_1 + \cdots + \partial_X a_k = 0$. Pour un point critique a d'indice 1,

$$\partial_X a = c_1 + c_2$$

où c_1 et c_2 sont deux points critiques d'indice 0, pas nécessairement distincts (figure 5) : la variété instable de a est un disque ouvert de dimension 1 et l'on continue à appliquer le théorème 2.3.2.

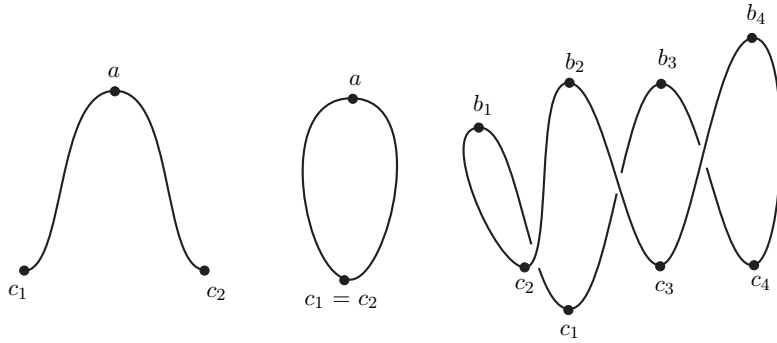


FIGURE 5

Donc notre cycle α est somme de cycles

$$\beta = b_1 + \cdots + b_s$$

avec $\partial b_i = c_i + c_{i+1}$ pour des minimums locaux $c_1, \dots, c_s$ (avec $c_{s+1} = c_1$) comme sur la figure 5.

Un tel β définit un plongement u_β du cercle S^1 dans V tel que la fonction $g_\beta = f \circ u_\beta$ ait les c_i comme minimums locaux et les b_i comme maximums locaux. Chaque β d'une base de $\text{Ker } \partial \subset C_1(f)$ définit un morphisme (injectif) de complexes

$$(u_\beta)_\bullet : C_\bullet(g_\beta, X_\beta) \longrightarrow C_\bullet(f, X)$$

(X_β est le champ de vecteurs sur S^1 dont l'image est la restriction de X) tel que

$$(u_\beta)_\star : HM_1(S^1; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_1(V; \mathbf{Z}/2)$$

ait pour image le sous-espace engendré par la classe de β .

Avec l'hypothèse de simple connexité faite sur V , toute application $v : S^1 \rightarrow V$ se prolonge en une application $\tilde{v} : D^2 \rightarrow V$. En particulier,

$$u_\beta : S^1 \hookrightarrow D^2 \xrightarrow{\tilde{u}_\beta} V$$

donne en homologie une factorisation

$$(u_\beta)_* : HM_1(S^1; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_1(D^2; \mathbf{Z}/2) \xrightarrow{(\tilde{u}_\beta)_*} HM_1(V; \mathbf{Z}/2)$$

de telle sorte que la classe de β provient de $HM_1(D^2; \mathbf{Z}/2) = 0$ et donc est nulle. $\square$

4.8.b. Le théorème du point fixe de Brouwer. Nous donnons ici une autre démonstration du théorème de Brouwer (le théorème 2.3.3).

Démonstration. Comme dans la démonstration donnée plus haut, on commence par se ramener au cas où φ est une application $\mathcal{C}^\infty$ et l'on suppose l'absence de point fixe, en déduisant une rétraction

$$r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$$

(qui associe à $x \in D^n$ le point d'intersection de la demi-droite issue de $\varphi(x)$ et passant par x avec le bord S^{n-1}). De sorte que, si x est un point de la sphère, il reste à sa place. L'application r satisfait à

$$r \circ j = \text{Id} : S^{n-1} \hookrightarrow D^n \longrightarrow S^{n-1}.$$

Ce qui fait que la composition $r_* \circ j_*$:

$$HM_{n-1}(S^{n-1}; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_{n-1}(D^n; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_{n-1}(S^{n-1}; \mathbf{Z}/2)$$

doit aussi être l'identité, de $\mathbf{Z}/2$ dans $\mathbf{Z}/2$, alors que $HM_{n-1}(D^n; \mathbf{Z}/2) = 0$ comme on l'a remarqué dans l'exemple 4.1.1. Une contradiction qui implique l'existence d'un point fixe. $\square$

On démontre de même que, si $k < n$, il n'y a pas de rétraction de la sphère S^n sur une sous-sphère $S^k \subset S^n$. Sinon, la composition

$$S^k \xrightarrow{i} S^n \xrightarrow{r} S^k,$$

donnerait, en homologie HM_k ,

$$\begin{array}{ccccc} HM_k(S^k; \mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{i_*} & HM_k(S^n; \mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{r_*} & HM_k(S^k; \mathbf{Z}/2) \\ \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 \end{array}$$

une application nulle qui devrait être l'identité.

4.8.c. Homologie modulo 2 de l'espace projectif. Considérons la sphère

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$$

et son quotient $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, l'espace projectif réel de dimension n , par la relation d'équivalence $x \sim -x$. La projection naturelle $S^n \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est notée p .

Soit f une fonction de Morse sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. La fonction $f \circ p$ est une fonction de Morse sur S^n (localement, il n'y a pas de différence entre S^n et $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$). Elle a deux points critiques d'indice k , a et $-a$, au-dessus de chaque point critique $p(a)$ de f .

De même, si X est un champ de pseudo-gradients adapté à f , il existe un unique champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur S^n , qui est un champ de pseudo-gradients pour $f \circ p$ et tel que, pour tout x sur S^n ,

$$T_x(p)(\tilde{X}_x) = X_{p(x)}.$$

Ainsi les trajectoires de $\tilde{X}$ se projettent sur celles de X . Si l'on suppose en plus que X satisfait à la propriété de Smale, il en est de même pour $\tilde{X}$. On a donc en particulier, pour tous points critiques a et b d'indices consécutifs de $f \circ p$,

$$n_{\tilde{X}}(a, b) = n_{\tilde{X}}(-a, -b).$$

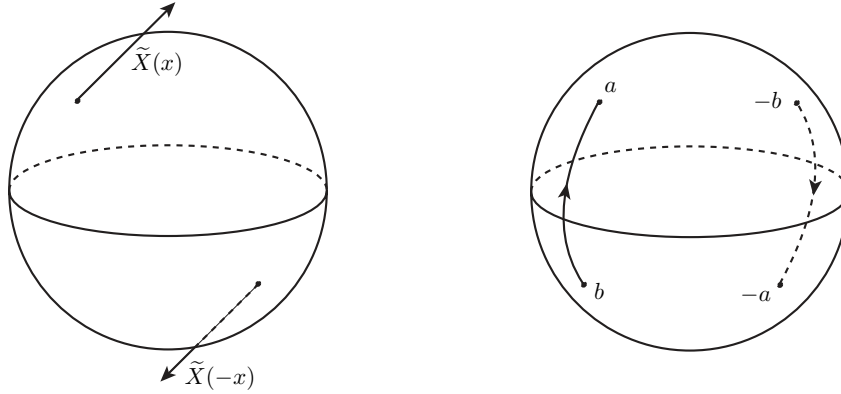


FIGURE 6

La formule $\alpha \mapsto p(\alpha)$ définit un morphisme de complexes $(C_k(\tilde{f}), \partial_{\tilde{X}}) \rightarrow (C_k(f), \partial_X)$ que nous noterons p_* (ce n'est pas vraiment un abus de notation, c'est bien le p_* défini par l'application différentiable p , comme on pourrait le vérifier en utilisant des plongements). De même, la formule

$$p(a) \mapsto a + (-a)$$

définit une application linéaire

$$p^! : C_k(f) \longrightarrow C_k(\tilde{f}).$$

Si $\alpha = p(a) = p(-a)$ est un point critique de f , on a

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{X}}(p^!\alpha) &= \partial_{\tilde{X}}(a) + \partial_{\tilde{X}}(-a) \\ &= \sum_b n_{\tilde{X}}(a, b)b + \sum_c n_{\tilde{X}}(-a, c)c. \end{aligned}$$

Mais il y a une trajectoire de a à b si et seulement si il y a une trajectoire de $-a$ à $-b$, de sorte que cette somme vaut

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{X}}(p^!\alpha) &= \sum_b n_{\tilde{X}}(a, b)b + \sum_{-b} n_{\tilde{X}}(-a, -b)(-b) \\ &= \sum_{\beta} n_X(\alpha, \beta)(b + (-b)). \end{aligned}$$

Ainsi, $p^!$ est un morphisme de complexes

$$p^! : (C_k(f), \partial_X) \longrightarrow (C_k(f \circ p), \partial_{\tilde{X}}).$$

La composition

$$(C_k, \partial_X) \xrightarrow{p^!} (C_k(f \circ p), \partial_{\tilde{X}}) \xrightarrow{p_*} (C_k(f), \partial_X)$$

envoie le point critique α successivement, d'abord sur $a + (-a)$, puis sur $p(a) + p(-a) = 2\alpha = 0$. On a plus précis, une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow (C_k(f), \partial_X) \xrightarrow{p^!} (C_k(f \circ p), \partial_{\tilde{X}}) \xrightarrow{p_*} (C_k(f), \partial_X) \longrightarrow 0.$$

En effet, une combinaison linéaire $a_1 + \cdots + a_k$ de points critiques de $\tilde{f}$, envoyée sur $p(a_1) + \cdots + p(a_k)$ ne peut être nulle que si chacun des points critiques de f apparaissant dans cette somme y apparaît deux fois, c'est-à-dire si

$$a_1 + \cdots + a_k = a_{i_1} + (-a_{i_1}) + \cdots + a_{i_r} + (-a_{i_r})$$

ou encore si cet élément est dans l'image de $p^!$.

On a donc une suite exacte de complexes, qui, comme il se doit, définit une suite exacte longue

$$HM_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_k(S^n; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad \partial \quad} \\ HM_{k-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

en homologie de Morse. On en déduit que le connectant

$$\partial : HM_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_{k-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2)$$

est un isomorphisme pour $0 \leq k \leq n$. On a donc démontré :

Théorème 4.8.2. *On a $HM_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \cong \mathbf{Z}/2$ pour $0 \leq k \leq n$.* $\square$

Pour l'homologie entière (les questions d'orientation sont ici à traiter avec soin), voir l'exercice 24 page 117.

Au paragraphe suivant, nous aurons besoin d'une description explicite du connectant de cette suite exacte. Il suffit de suivre la définition abstraite de celui-ci.

Commençons par $\partial : HM_1(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow HM_0(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2)$. Une combinaison linéaire

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_r, \quad \gamma_i \in \text{Crit}_1(f)$$

qui est un cycle ($\partial_X \alpha = 0$) s'écrit comme somme d'éléments $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ avec

$$\partial_X \alpha_i = \beta_i + \beta_{i+1}, \quad \beta_1, \dots, \beta_s, \beta_{s+1} = \beta_1 \in \text{Crit}_0(f).$$

Le cycle se représente donc comme réunion des trajectoires joignant les α_i aux β_i (de façon analogue à ce que l'on a vu sur la figure 5, on a ici un lacet dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$).

On relève maintenant ce cycle dans la sphère. Nous savons que le résultat final ne dépendra d'aucun des choix faits. Commençons donc par choisir un a_1 au-dessus de α_1 , de sorte que $\partial_{\tilde{X}} a_1 = b_1 + b_2$, avec $p(b_1) = \beta_1$ et $p(b_2) = \beta_2$. On relève ensuite α_2 en choisissant celui des deux relevés, a_2 tel que $\partial_{\tilde{X}} a_2 = b_2 + b_3$ pour le b_2 déjà déterminé. Le résultat final est un relevé $a = a_1 + \cdots + a_s$ avec $\partial_{\tilde{X}} a = b_1 + b_2 + b_2 + \cdots + b_s + b_{s+1} = b_1 + b_{s+1}$ (on a relevé le lacet en un chemin sur la sphère). Le connectant est

$$\partial(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_{s+1} = b_s \\ [p(b_1)] = [\beta_1] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement, commençons par choisir un hémisphère, sud par exemple, pour changer, de la sphère S^n . Si a est un cycle dans $(C_k(f), \partial_X)$,

$$a = a_1 + \cdots + a_r,$$

on choisit des relevés α_i des a_i dans l'hémisphère sud, obtenant une somme

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$$

dont l'image par p_* est notre cycle a . On a

$$\partial_{\tilde{X}} \alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_s,$$

une combinaison linéaire de points critiques d'indices $k-1$ de $\tilde{f}$. On a alors

$$\partial[a] = [p(\beta_1) + \cdots + p(\beta_s)].$$

4.8.d. Le théorème de Borsuk-Ulam. Démontrons maintenant le célèbre théorème :

Théorème 4.8.3 (Borsuk-Ulam). *Il n'existe pas d'application continue*

$$\varphi : S^n \longrightarrow S^{n-1}$$

telle que $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ pour tout x .

Ce théorème a des applications plus ou moins folkloriques (par exemple, le fait passionnant qu'il existe à chaque instant deux points antipodaux sur la Terre où la température et la pression ont la même valeur).

Corollaire 4.8.4. *Soit $\psi : S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application continue telle que $\psi(-x) = -\psi(x)$ pour tout x . Alors ψ s'annule en au moins un point de S^n .*

En effet, si ψ ne s'annulait pas, elle définirait une application $\varphi = \psi / \|\psi\|$ à valeurs dans S^{n-1} et interdite par le théorème. $\square$

Voici le théorème température-pression :

Corollaire 4.8.5. *Pour toute application $\psi : S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, il existe au moins un point x de S^n tel que $\psi(x) = \psi(-x)$.*

Notons en particulier qu'il n'existe pas d'injection de S^n dans $\mathbf{R}^n$. Le corollaire se démontre en considérant $\varphi(x) = \psi(x) - \psi(-x)$. $\square$

Corollaire 4.8.6. *Soient $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ des fermés non vides sur la sphère S^n dont la réunion est la sphère tout entière. Alors l'un d'eux contient deux points antipodaux.*

Il suffit d'utiliser l'application

$$\psi(x) = (d(x, F_1), d(x, F_2), \dots, d(x, F_n)). \quad \square$$

Démonstration du théorème 4.8.3. Bien sûr, comme dans le cas du théorème de Brouwer, on va montrer qu'il n'existe pas d'application $\mathcal{C}^\infty$ ayant les propriétés voulues (le résultat pour les applications continues s'en déduit). Une application φ ayant ces propriétés induirait une application $\psi : \mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$, dont nous allons montrer qu'elle ne peut exister.

Soit donc ψ une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} HM_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\psi_\star} & HM_k(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ HM_{k-1}(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\psi_\star} & HM_{k-1}(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \end{array}$$

où le « connectant » ∂ a été défini au § 4.8.c. Pour $k \leq n$, les deux flèches verticales sont des isomorphismes. Si nous avons démontré que le diagramme commute, on en déduirait que

$$\psi_* : HM_n(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_n(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2)$$

est aussi un isomorphisme, une absurdité manifeste : l'un est nul, l'autre pas.

Il reste donc à vérifier que le diagramme commute, ce qui est clair, après la description du connectant ∂ de la suite exacte longue que nous avons donnée ci-dessus. $\square$

4.9. Appendice : l'homologie de Morse est l'homologie cellulaire

Dans cet appendice, nous montrons qu'une fonction de Morse et un champ de pseudo-gradients sur une variété permettent de définir une décomposition cellulaire de cette variété, et que le complexe de Morse et le complexe cellulaire sont isomorphes.

Nous commençons par rappeler les définitions de décomposition et de complexe cellulaires. Nous décrivons ensuite, en suivant Latour [39], la décomposition cellulaire associée aux données de Morse-Smale⁽⁴⁾.

4.9.a. Complexes et homologie cellulaires. Dans ce paragraphe, nous suivons le livre de Dold [20]. On appelle décomposition cellulaire d'un espace V (ce peut être n'importe quel espace topologique séparé, nous l'appliquerons au cas des variétés compactes) une famille $\mathcal{E}$ de sous-espaces de V telle que

- chaque élément e de $\mathcal{E}$ est homéomorphe à un disque ouvert
- $\mathcal{E}$ est un recouvrement de V (par des parties disjointes)

Les e sont appelées des cellules. La réunion des cellules de dimension $\leq k$ de V est appelée k -squelette de V et notée $V^{(k)}$.

- Pour tout e de dimension k dans $\mathcal{E}$, il existe une application continue (dite application d'attachement)

$$\Phi_e : (B^k, S^{k-1}) \longrightarrow (V^{(k-1)} \cup e, V^{(k-1)})$$

dont la restriction à $B^k - S^{k-1}$ est un homéomorphisme sur e .

Nous supposons ici qu'il y a un nombre fini de cellules.

Exemples 4.9.1.

⁽⁴⁾Pour un autre point de vue, nous renvoyons à l'appendice de Laudenbach dans [9].

(1) Sur la sphère de dimension n , le complémentaire d'un point (disons, du pôle sud S , pour fixer les idées) est un disque ouvert de dimension n . Lui et le point manquant forment une décomposition cellulaire de la sphère, dont tous les squelettes de dimension $\leq n - 1$ sont le point S .

(2) L'espace projectif est réunion d'un espace affine et d'un hyperplan à l'infini, lequel est lui-même réunion d'un espace affine et d'un hyperplan à l'infini... ainsi l'espace projectif réel (resp. complexe) admet-il une décomposition cellulaire avec une cellule en chaque dimension (resp. paire).

(3) Le tore $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, vu comme un carré dont on identifie les côtés deux à deux, possède une décomposition cellulaire avec

- une cellule de dimension 2 (le carré ouvert),
- deux cellules de dimension 1 (provenant des côtés horizontaux pour l'une et verticaux pour l'autre)
- et une cellule de dimension 0 (provenant des quatre sommets du carré).

Remarque 4.9.2. Si l'on écrase le $(k - 1)$ -squelette, c'est-à-dire si l'on fabrique le quotient $V^{(k)}/V^{(k-1)}$, le résultat est un bouquet de sphères de dimension k , chacune provenant d'une cellule (un D^k) dans laquelle on a identifié tous les points du bord en un point.

Ce bouquet peut être un bouquet de zéro sphère, comme pour la sphère de dimension n et $k \leq n - 1$.

Dans l'exemple du tore de dimension 2 avec la décomposition ci-dessus, $V^{(1)}/V^{(0)}$ est un bouquet de deux cercles.

Le complexe cellulaire $K_\star$ se définit en prenant pour K_m l'espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/2$ dont une base est l'ensemble des cellules de dimension m (ou le groupe abélien libre engendré par les cellules de dimension m si l'on veut définir l'homologie entière).

La différentielle est définie par

$$\partial c = \sum_d N(c, d) d$$

où le nombre $N(c, d)$ associé à une cellule c de dimension m et une cellule d de dimension $m - 1$ est défini ainsi :

- la cellule c est, par définition, l'image d'une application Φ_c ,
- on considère la composition

$$\Phi_c|_{S^{m-1}}: S^{m-1} \longrightarrow V^{(m-1)} \longrightarrow V^{(m-1)}/V^{(m-2)},$$

– cet espace est un bouquet de $(m - 1)$ -sphères, dont l'une correspond à la cellule d (comme il a été dit dans la remarque 4.9.2), il y a donc une

application

$$\Psi_d : V^{(m-1)} / V^{(m-2)} \longrightarrow S^{m-1}$$

qui écrase toutes les sphères en un point sauf celle correspondant à d ,

– le nombre $N(c, d)$ est le degré (que nous considérerons ici modulo 2) de l'application composée

$$\Psi_d \circ \Phi_c : S^{m-1} \longrightarrow S^{m-1}.$$

On démontre que $(K_\star, \partial)$ est un complexe ($\partial \circ \partial = 0$) et que l'homologie de ce complexe ne dépend que du type topologique de V .

Dans le contexte « Morse-Smale » d'une fonction de Morse avec un champ de pseudo-gradients sur une variété V , nous allons construire une décomposition cellulaire de V dont les cellules seront les variétés instables des points critiques de la fonction.

Nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème 4.9.3. *Soit (f, X) une donnée de Morse-Smale sur une variété V . Il existe une décomposition cellulaire de la variété V et un isomorphisme*

$$F : K_\star \longrightarrow C_\star \text{ avec } \partial_X \circ F = F \circ \partial,$$

du complexe cellulaire sur le complexe de Morse.

Ainsi l'homologie de Morse est isomorphe à l'homologie cellulaire de la variété V .

4.9.b. Décomposition cellulaire associée à une donnée de Morse-Smale. Dans ce paragraphe, nous suivons les définitions et idées de Latour dans [39]. La variété compacte V est munie d'une fonction de Morse f et d'un champ de pseudo-gradients X . Nous supposons qu'ils satisfont à la propriété de Smale.

Comme nous l'avons dit dans la proposition 2.1.5, la variété instable d'un point critique de f est une boule ouverte de dimension l'indice du point critique. Nous construisons tout d'abord des compactifications de ces variétés instables en boules fermées.

Soit c un point critique. Posons

$$\overline{W}^u(c) = W^u(c) \cup \left(\overline{\mathcal{L}}(c, d) \times \bigcup_d W^u(d) \right).$$

La réunion porte sur tous les points critiques d tels que $\overline{\mathcal{L}}(c, d)$ soit non vide, c'est-à-dire sur les points critiques liés à c . Grâce à la propriété de Smale, ces points ont des indices inférieurs à celui de c . Nous munissons maintenant $\overline{W}^u(c)$ d'une topologie. Nous utilisons bien sûr la topologie définie sur les espaces de multi-liaisons $\overline{\mathcal{L}}(c, d)$ au § 3.2. Soit donc $(\lambda, x) \in \mathcal{L}(c, d_1) \times \cdots \times$

$\mathcal{L}(d_{k-1}, d) \times W^u(d)$. On décrit une base de voisinages $W(\lambda, x, U^0, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ de (λ, x) dans $\overline{W}^u(c)$ ainsi :

- bien sûr, U^0 est un voisinage de x dans V ,
- et $W(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ est un voisinage de λ dans $\overline{\mathcal{L}}(c, d)$;
- Si $(\mu, x') \in \overline{\mathcal{L}}(c, d_i) \times W^u(d_i)$ (pour un $i \leq k$), on dit que

$$(\mu, x') \in W(x, \lambda, U^0, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$$

si

- $x' \in U^0$,
- la trajectoire de d_i à x' passe dans le U_j^- pour $j \geq i$ et dans U_j^+ pour $j > i$,
- $\mu \in W(\lambda', \mathbf{U}^{-'}, \mathbf{U}^{+'})$ (où $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_i)$ et les $\mathbf{U}^{\pm'}$ sont définis comme on pense).

Par exemple, si c est un point critique d'indice 0, alors $W^u(c) = \{c\}$ et $\overline{W}^u(c)$ aussi (et c'est bien une cellule de dimension 0). Voici des exemples un peu moins triviaux.

Exemples 4.9.4.

(1) Soit c un point critique d'indice 1. Alors $W^u(c)$ est formé des points de V situés sur les trajectoires menant de c à des points critiques d'indice 0, deux trajectoires, dont les extrémités dans V seraient ces deux (ou le même) point(s) critique(s). Dans $\overline{W}^u(c)$, on ajoute un point pour chacune de ces trajectoires. Que leurs extrémités soient ou ne soient pas le même point de V , ces deux trajectoires donnent des points distincts : $\mathcal{L}(c, d) \times W^u(d)$ contient les deux points $\{\ell_1\} \times \{d\}$ et $\{\ell_2\} \times \{d\}$.

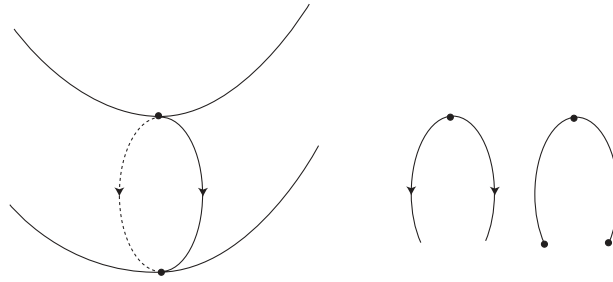


FIGURE 7. Point critique d'indice 1

Ainsi $\overline{W}^u(c)$ est un disque fermé de dimension 1 (figure 7).

(2) Soit maintenant c un point critique d'indice 2. La variété instable est un disque ouvert de dimension 2. Regardons ce qu'il faut lui ajouter :

- pour chaque point critique d d'indice 1 relié à c , on ajoute le produit de $\overline{\mathcal{L}}(c, d)$ (les trajectoires de c à d , un segment pour chacune des trajectoires en question) avec sa variété instable $W^u(d)$ (un intervalle ouvert, comme ci-dessus),
- pour chaque point critique e d'indice 0 relié à c , on ajoute le produit de l'ensemble des trajectoires de c à e (des segments ouverts ici, avec leurs bords, l'ensemble des trajectoires brisées, ce qui le raccroche aux trajectoires joignant c aux points critiques d'indice 1) avec sa variété instable (le point e lui-même).

La figure 8 montre, en dimension 2, l'exemple d'un point critique c d'indice 2 (noir), relié à un unique point critique d d'indice 1 et un unique point critique e d'indice 0. La partie gauche montre trois points critiques de la fonction (hauteur), la partie droite montre la « cellule » fermée $\overline{W}^u(c)$, avec

- le point c et sa variété instable $W^u(c)$ (un disque ouvert de dimension 2),
- l'unique trajectoire $\mathcal{L}(c, d)$ de c à d est représentée par le petit disque blanc (qui symbolise le point d sur la partie gauche de la figure,
- sur le bord du disque apparaît le produit $\mathcal{L}(c, d) \times W^u(d)$, c'est-à-dire, puisque $\mathcal{L}(c, d)$ est constitué d'un seul point, la variété instable de d , un segment ouvert (représenté ici par un trait droit et gras), constitué des deux trajectoires allant de c à d ,
- la variété instable du point e d'indice 0 est bien sûr un unique point,
- le bord du disque contient donc aussi $\overline{\mathcal{L}}(c, e) \times W^u(e)$, c'est-à-dire le segment ouvert $\mathcal{L}(c, e)$ des trajectoires de c à e , représenté ici comme un arc de cercle, ainsi que les deux trajectoires brisées de c à e (passant par d) qui sont les extrémités communes du segment gras et de l'arc de cercle maigre.

Nous allons montrer que les $W^u(c)$ constituent une décomposition cellulaire de la variété V , les applications d'attachement Φ_c étant définies sur $W^u(c)$ par l'inclusion, et sur le « bord », par leur restriction à chaque « morceau » par la projection :

$$\Phi_c|_{\overline{\mathcal{L}}(c, d) \times W^u(d)} : \overline{\mathcal{L}}(c, d) \times W^u(d) \longrightarrow W^u(d) \subset V.$$

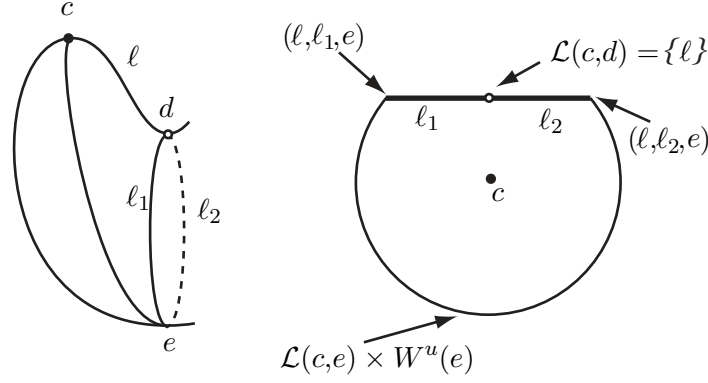


FIGURE 8. Point critique d'indice 2

Commençons par quelques exemples. Voici maintenant la description complète des différentes cellules dans le cas des exemples de fonctions de Morse et champs de pseudo-gradients utilisés ci-dessus.

Exemples 4.9.5.

(1) La sphère ronde. Pour la fonction hauteur sur la sphère ronde de dimension 2, la situation est très simple. Appelons a le maximum et b le minimum. La cellule de dimension 2 autour de a est formée d'un disque ouvert (la variété instable $W^u(a)$ et, au bord, du cercle $\mathcal{L}(a, b) \times W^u(b)$. L'application d'attachement écrase $\mathcal{L}(a, b) \times W^u(b)$ sur le point $W^u(b)$. On a ainsi la décomposition cellulaire de la sphère avec une cellule de dimension 0 et une de dimension 2.

(2) L'exemple de l'« autre » sphère est celui représenté sur la figure 8.

(3) Le tore. La figure 9 représente, à gauche la fonction de Morse sur le tore avec le pseudo-gradient du § 2.2.a, et à droite la cellule fermée autour du point critique d'indice 2. Pour représenter la cellule de dimension 2, comme sur la figure 8, nous avons représenté les $\mathcal{L}(c, d_i)$ par des petits disques blancs, les $\mathcal{L}(c, d_i) \times W^u(d_i)$ par des segments gras, et les $\mathcal{L}(c, e) \times W^u(e)$ par des arcs de cercle (ronds).

4.9.c. Démonstration du théorème 4.9.3. Il y a deux choses à démontrer :

- (1) Le fait que les $\overline{W}^u(c)$ définissent bien une décomposition cellulaire de V ,
- (2) et celui que les deux complexes sont isomorphes.

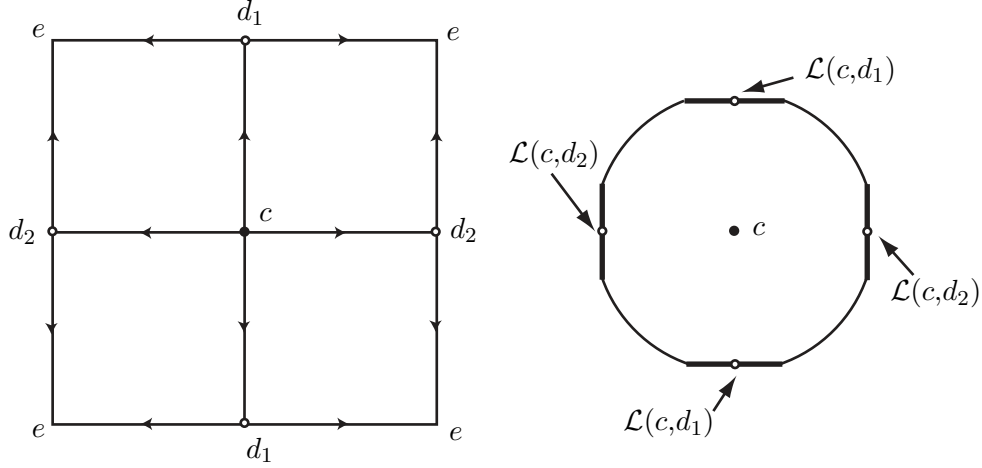


FIGURE 9. Point critique d'indice 2 sur le tore

Commençons par la deuxième.

L'isomorphisme des complexes. Le complexe $K_\star$ est défini comme au §4.9.a, chaque cellule étant définie par la variété instable d'un point critique. L'application F fait correspondre ce point critique à cette cellule. Ainsi F est-elle clairement bijective.

Le fait qu'elle soit un isomorphisme de complexes est conséquence du fait que le nombre $N(c, d)$ qui définit la différentielle de $K_\star$ est égal au nombre de trajectoires joignant c à d , le $n(c, d)$ définissant la différentielle du complexe de Morse.

En effet, $N(c, d)$ est le degré de l'application $\Psi_d \circ \Phi_c : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ définie ci-dessus, pour $m = \text{Ind}(c)$. La source de cette application est le bord de $\overline{W}^u(c)$, dont nous admettons provisoirement qu'il s'agit bien d'une sphère (c'est un des résultats démontrés au §4.9.c suivant). Le but de l'application considérée est le quotient obtenu en écrasant le $(m-2)$ -squelette et les sphères autres que celle correspondant à d , c'est-à-dire $\overline{D}^{m-1}/\partial\overline{D}^{m-1}$. On peut aussi considérer ce quotient comme compactifié de D^{m-1} par l'ajout d'un point, où le disque ouvert D^{m-1} s'identifie à la variété instable $W^u(d) \subset V$. Si $\ell \in \mathcal{L}(c, d)$, nous avons, pour $m \in W^u(d)$,

$$\Psi_d \circ \Phi_c(\ell, m) = m$$

et les autres points de $\overline{W}^u(c)$ sont envoyés sur le point image du bord.

Nous avons donc $n(c, d)$ (le nombre de trajectoires joignant c à d) disques disjoints sur S^{m-1} qui sont envoyés par des homéomorphismes sur $D^{m-1} \subset$

S^{m-1} , le complémentaire ayant comme image le point restant. Le degré $N(c, d)$ est donc bien le nombre de trajectoires $n(c, d)$.

La décomposition cellulaire. Nous l'avons vu (c'est la proposition 2.1.5, la variété instable $W^u(c)$ d'un point critique c est une boule ouverte (de dimension l'indice de c). La restriction de Φ_c à $W^u(c)$ est un homéomorphisme et son image est contenue dans $V^{\text{Ind}(c)-1}$. Il s'agit de montrer que $\overline{W}^u(c)$ est homéomorphe à une boule (fermée) de la même dimension dont l'intérieur est $W^u(c)$.

Considérons à cet effet, pour tout $A \in \mathbf{R}$,

$$\overline{W}^u(c, A) = \left\{ (x, \lambda) \in \overline{W}^u(c) \mid f(x) \geq A \right\}$$

et

$$W^u(c, A) = \left\{ (x, \lambda) \in W^u(c) \mid f(x) \geq A \right\}.$$

Pour $A = f(c) - \varepsilon$ et ε assez petit,

$$\overline{W}^u(c, A) = W^u(c) \cap \overline{\Omega}(c)$$

où $\Omega(c)$ est le domaine de la carte de Morse correspondant au paramètre ε ; $\overline{W}^u(c, A)$ est clairement homéomorphe à une boule fermée.

Pour $A < \min(f)$, on a évidemment

$$\overline{W}^u(c, A) = \overline{W}^u(c).$$

Il s'agit donc de montrer que la topologie de $\overline{W}^u(c, A)$ ne change pas lorsque A décroît de $f(c) - \varepsilon$ à des valeurs très négatives. Voici une situation où cela est facile à démontrer :

Proposition 4.9.6. *Si l'intervalle $[B, A]$ ne contient pas de valeur critique de f , alors $\overline{W}^u(c, A)$ et $\overline{W}^u(c, B)$ sont homéomorphes. De plus, l'homéomorphisme (envoie $W^u(c, A)$ sur $W^u(c, B)$ et) peut être choisi égal à l'identité sur $\overline{W}^u(c, A + \delta)$ pour $\delta > 0$.*

Démonstration. Le théorème 2.1.7, appliqué aux sous-niveaux de $-f$, fournit un difféomorphisme

$$\Gamma : \{f(x) \geq A\} \longrightarrow \{f(x) \geq B\}.$$

La formule

$$\begin{aligned} \chi : \overline{W}^u(c, A) &\longrightarrow \overline{W}^u(c, B) \\ (\lambda, x) &\longmapsto (\lambda, \Gamma(x)) \end{aligned}$$

définit un homéomorphisme χ qui possède les propriétés annoncées. □

Il reste à comprendre ce qu'il advient de $\overline{W}^u(c, A)$ quand A traverse une valeur critique. Comme nous l'avons déjà fait au § 2.2.c, nous supposons que les valeurs critiques de f sont distinctes. Nous montrons l'énoncé suivant.

Proposition 4.9.7. *Soient $d \in \text{Crit}(f)$, $A = f(d)$ et soit $\varepsilon > 0$ (définissant la carte de Morse $\Omega(d)$). Alors il existe un homéomorphisme $\overline{W}^u(c, A + \varepsilon) \rightarrow \overline{W}^u(c, A - \varepsilon)$ (qui envoie $W^u(c, A + \varepsilon)$ sur $W^u(c, A - \varepsilon)$ et qui est l'identité sur $\overline{W}^u(c, A + \varepsilon + \delta)$ pour $\delta > 0$).*

Cette proposition est illustrée par la figure 10, qui représente $\overline{W}^u(c, A)$ pour $A = f(d) - \varepsilon$ (et dans laquelle la partie grisée représente $\overline{W}^u(c, A)$ pour $A > f(d)$).

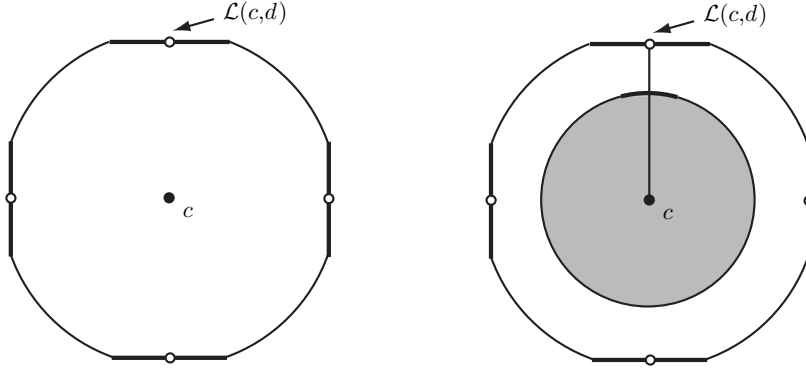


FIGURE 10

Démonstration. À cause de la façon dont il a été défini (dans la démonstration de 2.1.7), on sait que le difféomorphisme Γ envoie tout point sur un point de la même trajectoire. Pour $(\lambda, x) \in \overline{W}^u(c, A + \varepsilon)$ et si la trajectoire passant par x n'aboutit pas à d (c'est-à-dire si $x \notin W^s(d)$), on peut encore définir $\chi(\lambda, x)$ à l'aide de Γ . Définissons alors notre homéomorphisme sur un ouvert U autour de

$$P = \left\{ (\lambda, x) \in \overline{W}^u(c, A + \varepsilon) \mid x \in W^s(d) \right\}$$

de sorte qu'il se recolle bien avec l'homéomorphisme χ , qui est défini sur le complémentaire de U comme dans la proposition 4.9.6.

Commençons par le cas simple où $\text{Ind}(c) - \text{Ind}(d) = 1$ et $\text{Ind}(d) \neq 0$. Dans ce cas,

$$P \subset \mathcal{M}(c, d) \subset W^u(c) \subset \overline{W}^u(c),$$

autrement dit, P contient uniquement des points situés sur des trajectoires allant de c à d . Avec l'hypothèse faite sur la différence des indices, l'ensemble

$\mathcal{L}(c, d) = \mathcal{M}(c, d)/\mathbf{R}$ de ces trajectoires est fini. Fixons alors $\ell \in \mathcal{L}(c, d)$ et appelons $\tilde{\ell} \in \mathcal{M}(c, d)$ la trajectoire correspondante, vue comme l'ensemble de ses points dans V . Appelons a le point de cette trajectoire au niveau $A + \varepsilon$, $a = \tilde{\ell} \cap f^{-1}(A + \varepsilon)$ et $D \subset W^u(c) \cap f^{-1}(A + \varepsilon)$ un petit disque de dimension $\text{Ind}(d)$ qui intersecte $S_+(d)$ transversalement en a . La condition de Smale est utilisée ici de façon essentielle.

La proposition 3.2.10, illustrée par la figure 6 du chapitre 3 (la figure en forme de bouteille), nous apprend ce que devient $D - \{a\}$ lorsqu'on le pousse dans le niveau $f^{-1}(A - \varepsilon)$ le long des lignes de gradient.

Cette application Φ le transforme en une couronne $C = S^{\text{Ind}(d)-1} \times]0, \delta[$ qui, avec $S_-(d) \cong S^{\text{Ind}(d)-1} \times \{0\}$, forme une variété à bord. Nous reprenons cette figure (ici la figure 11) pour décrire notre homéomorphisme χ au voisinage de $\tilde{\ell} \cap \overline{W}^u(c, A + \varepsilon)$.

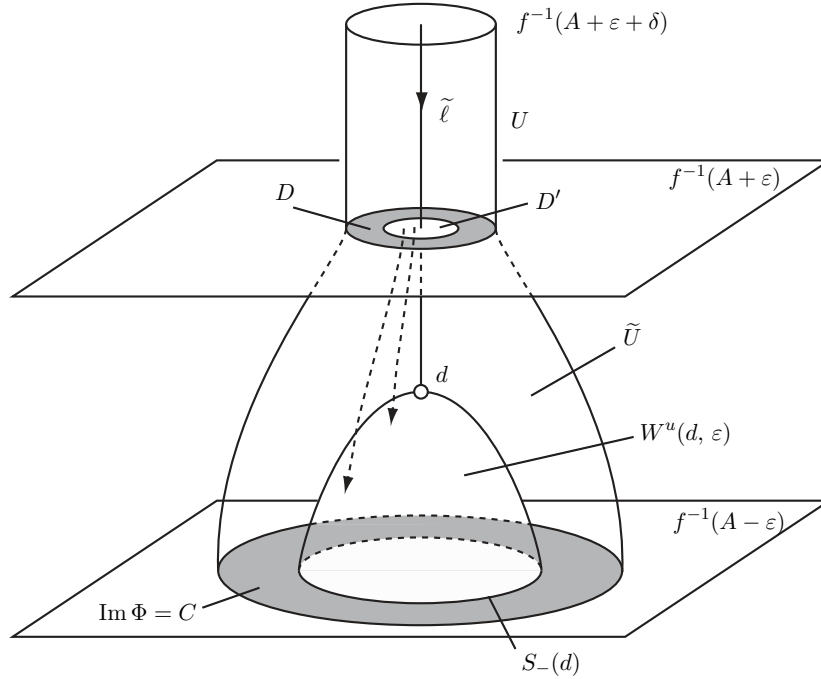


FIGURE 11

Tout d'abord, χ est l'identité sur $\overline{W}^u(c, A + \varepsilon + \delta)$. Le voisinage U de

$$\tilde{\ell} \cap (\overline{W}^u(c, A + \varepsilon) - \overline{W}^u(c, A + \varepsilon + \delta))$$

que nous considérons est un cylindre (le bouchon de la bouteille), défini par les lignes de gradient, au-dessus de D , comme sur la figure 11. Il y a

un deuxième cylindre, noté $\tilde{U}$, dans cette figure et contenu dans $f^{-1}([A - \varepsilon, A + \varepsilon])$: c'est l'intérieur de la bouteille. Il est limité, en haut par D , en bas par $C \cup W^u(d, \varepsilon)$ (et sa partie latérale est composée de lignes de gradient).

On choisit un homéomorphisme $\Gamma : U \rightarrow \tilde{U}$ comme décrit sur la figure 11 :

- Γ est l'identité sur la partie haute de U ,
- au-dessus de la partie grisée, c'est le Γ défini par la proposition 4.9.6 (en particulier, sur $D - D'$, il coïncide avec le Φ défini et utilisé pour la proposition 3.2.10),
- Γ envoie D' sur $W^u(d, \varepsilon)$

L'homéomorphisme recherché est défini sur U par

$$\begin{cases} \chi(x) = \Gamma(x) & \text{si } x \notin D' \\ \chi(x) = (\ell, \Gamma(x)) & \text{si } x \in D' \end{cases}$$

Il se recolle bien avec celui défini par la proposition 4.9.6 sur la partie latérale de U . Comme $\mathcal{L}(c, d)$ est un ensemble fini, on peut choisir des voisinages U comme ci-dessus qui sont mutuellement disjoints. On obtient un nombre fini (ce nombre est $n(c, d)$) de cylindres $U \cup \tilde{U}$ dans V , qui ne se coupent que le long de $W^u(d, \varepsilon)$. L'application χ définie ci-dessus sur la réunion de ces cylindres, vus dans $\overline{W}^u(c, A + \varepsilon)$ est injective. Elle est aussi continue comme on le vérifie facilement. L'ensemble $\mathcal{L}(c, d) \times W^u(d, \varepsilon)$ (qui se rajoute à $\overline{W}^u(c, A)$ lorsque A traverse la valeur critique $f(d)$) est bien contenu dans l'image et χ se recolle avec l'application définie par la proposition 4.9.6 en dehors des cylindres.

On vérifie sans peine que c'est un homéomorphisme et la démonstration est terminée dans ce cas.

Le cas plus général où $\text{Ind}(c) - \text{Ind}(d)$ est arbitraire (et $\text{Ind}(d) \neq 0$). Il nous faut définir χ au voisinage des points $(\lambda, x) \in \overline{W}^u(c, A + \varepsilon)$ où $x \in W^s(d)$.

(a) Considérons d'abord les points de P qui sont dans $\mathcal{M}(c, d)$, comme dans le cas précédent, c'est-à-dire les points $(\lambda, x) = x \in W^u(c) \cap W^s(d)$. On peut voir

$$\mathcal{L}(c, d) = \mathcal{M}(c, d) \cap f^{-1}(A + \varepsilon)$$

comme une sous-variété de codimension $\text{Ind}(d)$ de $W^u(c) \cap f^{-1}(A + \varepsilon)$.

Soit D un voisinage tubulaire de $\mathcal{L}(c, d)$ dans $W^u(c) \cap f^{-1}(A + \varepsilon)$. C'est un fibré en disques de dimension $\text{Ind}(d)$ sur $\mathcal{L}(c, d)$. Pour $\ell \in \mathcal{L}(c, d)$, la fibre D_ℓ est un disque qui rencontre $S_+(d)$ transversalement en $a_\ell = \tilde{\ell} \cap f^{-1}(A + \varepsilon)$. Pour chaque $\ell \in \mathcal{L}(c, d)$, nous avons donc une figure analogue à la figure 11 (D est remplacé par D_ℓ) et un homéomorphisme $\Gamma_\ell : U_\ell \rightarrow U_\ell \cup \tilde{U}_\ell$ défini de manière analogue. Les cylindres $U \cup \tilde{U}_\ell$ se rencontrent uniquement le long de $W^u(d, \varepsilon)$.

Sur le fibré en cylindres U défini au-dessus de D par les lignes de gradient, on définit alors χ par

$$\begin{cases} \chi(x) = \Gamma_\ell(x) & \text{si } x \notin D'_\ell \\ \chi(x) = (\ell, \Gamma_\ell(x)) & \text{si } x \in D'_\ell \end{cases}$$

(bien sûr, D'_ℓ est l'analogue de D').

(b) Considérons maintenant un point arbitraire de P . Il s'écrit (λ, x) où $\lambda \in \overline{\mathcal{L}}(c, d')$ et $x \in \mathcal{M}(d', d)$. Notons que pour $d' \neq c$, un tel point x n'est pas dans le cylindre U sur lequel χ vient d'être défini : en effet, U est contenu dans $\mathcal{M}(c, d)$. Comme nous venons de le montrer, nous pouvons définir $\chi = \chi_{d'}$ sur un voisinage $U = U_{d'}$ de $\mathcal{M}(d, d')$ (d' joue le rôle de c). On définit alors χ au voisinage de (λ, x) dans $W^u(c, A + \varepsilon)$ par

$$\chi(\lambda', y) = (\lambda', \chi_{d'}(y)).$$

Ainsi nous avons défini χ sur un voisinage ouvert de P . Remarquons que l'image de χ contient $\overline{\mathcal{L}}(c, d) \times W^u(d, \varepsilon)$. On le prolonge à tout $\overline{W}^u(c, A + \varepsilon)$ comme dans la proposition 4.9.6 et on vérifie sans mal que c'est un homéomorphisme.

Pour finir la démonstration, le cas où $\text{Ind}(d) = 0$. Dans ce cas,

$$P = \left\{ (\lambda, x) \in \overline{W}^u(c, A + \varepsilon) \mid x \in W^s(d) \right\}$$

est un ouvert de $\overline{W}^u(c, A + \varepsilon)$ (c'en est une composante connexe).

On définit χ sur P par $\chi(\lambda, x) = (\lambda, \ell, d)$ (ℓ désigne la trajectoire de x). Ailleurs, on définit χ par la proposition 4.9.6 et on vérifie (toujours sans peine) que c'est un homéomorphisme.

La construction montre que χ satisfait aux conditions requises, c'est-à-dire que sa restriction à $\overline{W}^u(c, A + \varepsilon + \delta)$ est l'identité et que $\chi(W^u(c, A + \varepsilon)) = W^u(c, A - \varepsilon)$. Ceci termine la démonstration de la proposition 4.9.7. $\square$

Et aussi celle du théorème 4.9.3

Exercices

Exercice 16. Existe-t-il une fonction de Morse sur $S^2 \times S^2$ qui ait un minimum, un maximum, un point critique d'indice 2, et tous ses autres points critiques d'indices 1 ou 3 ?

Exercice 17. Montrer que l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est simplement connexe.

Exercice 18. La quadrique Q de l'exercice 8 (page 18) est-elle difféomorphe à $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$?

On envoie $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ par

$$([a, b], [u, v]) \longmapsto [au, bu, av, bv].$$

Montrer que c'est un plongement dont l'image est décrite par l'équation

$$z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0.$$

Démontrer que Q est difféomorphe à $S^2 \times S^2$.

Exercice 19. La figure 12 représente le graphe d'un difféomorphisme $\varphi :]-1, 1[\rightarrow]-1, 1[$. On pose $a = \varphi(0)$. Montrer que φ est le flot au temps 1 d'un champ de vecteurs sur $] -1, 1[$, que l'on dessinera. Soit D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbf{R}^N$ et soit $a \in D$. Construire un champ de vecteurs sur D dont le flot vérifie $\varphi^1(0) = a$.

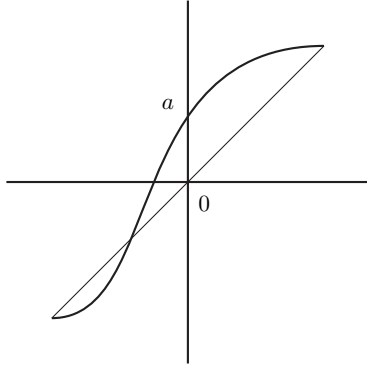


FIGURE 12

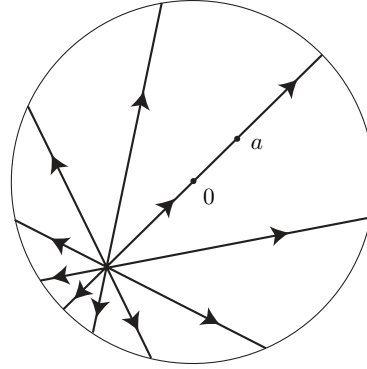


FIGURE 13

Exercice 20. Si $u : V \rightarrow W$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si V et W sont des variétés compactes et connexes, alors

$$u_* : HM_0(V; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_0(W; \mathbf{Z}/2)$$

est un isomorphisme (l'identité puisque chacun de ces deux espaces est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$).

Exercice 21. Soit V une variété compacte connexe sans bord de dimension n et soit D un disque de dimension n plongé dans V . Montrer que

$$HM_n(\overline{V - D}; \mathbf{Z}/2) = 0.$$

En déduire que, si $u : V^n \rightarrow W^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui induit une application

$$u_* : HM_n(V; \mathbf{Z}/2) \longrightarrow HM_n(W; \mathbf{Z}/2)$$

non nulle, alors elle est surjective.

Exercice 22. Soit W une variété compacte à bord de dimension $n + 1$ et soit V son bord, $V = \partial W$. On suppose que V est connexe.

(1) Montrer que l'inclusion $V \subset W$ induit l'application nulle de $HM_n(V; \mathbf{Z}/2)$ dans $HM_n(W; \mathbf{Z}/2)$.

(2) En déduire que, si $u : V \rightarrow Z$ est une application $\mathcal{C}^\infty$ de V dans une variété Z de la même dimension dont l'application u_* induite au niveau HM_n n'est pas nulle, alors u ne peut être prolongée en une application $\tilde{u} : W \rightarrow Z$.

(3) Et en particulier, il n'existe aucune application de W sur son bord qui se restreigne en l'identité sur le bord (rétraction). Le cas $W = D^{n+1}$ est celui du théorème de Brouwer.

Exercice 23. Soit V une variété compacte. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction de V sur une de ses parties strictes (voir au besoin le § 4.8.b).

Exercice 24. Décrire les variétés stables et instables, avec orientations et co-orientations, dans le cas de la fonction de Morse f considérée dans l'exercice 6 et d'un champ de pseudo-gradient X sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Calculer l'homologie du complexe $(C_*(f; \mathbf{Z}), \partial_X)$. Montrer que

$$HM_k(\mathbf{P}_2(\mathbf{R}); \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } k = 0, \\ \mathbf{Z}/2 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

PARTIE II

LA CONJECTURE D'ARNOLD, THÉORIE DE FLOER

INTRODUCTION DE LA DEUXIÈME PARTIE

La deuxième partie de ce livre est consacrée à la construction de l'homologie de Floer, en vue de démontrer la conjecture d'Arnold. Celle-ci affirme précisément que le nombre de trajectoires périodiques de période 1 d'un champ de vecteurs hamiltonien sur une variété symplectique W est supérieur ou égal à

$$\sum_k HM_k(W; \mathbf{Z}/2).$$

Nous l'avons dit dès la préface de ce livre, la juxtaposition des inégalités de Morse et de la conjecture d'Arnold n'est pas fortuite. Et en effet, la stratégie de démonstration, due à Floer, consiste à exhiber les trajectoires en question comme points critiques — non plus d'une fonction sur une variété mais d'une « fonctionnelle⁽⁵⁾ d'action » sur l'espace des lacets sur W (une trajectoire périodique est, en effet, un lacet sur W), puis à construire un complexe (le complexe de Floer) analogue à celui de Morse, dont la différentielle « compte » les solutions de l'équation de Floer. L'homologie (dite de Floer) de ce complexe est donc, par construction, reliée au nombre des trajectoires périodiques. Il faut ensuite montrer que cette homologie est isomorphe à l'homologie de Morse de la variété.

Nous détaillons cette stratégie page 146, et la mettons en application au cours de cette partie, mais donnons déjà ici à la fois les grandes lignes de la démonstration de la conjecture d'Arnold et un panorama du contenu de cette partie.

La première chose à faire est de construire la « fonctionnelle d'action » (au § 6.3), sur un espace de lacets sur notre variété, dont les points critiques soient les solutions périodiques recherchées. C'est l'analogue de la fonction

⁽⁵⁾C'est ainsi qu'il est de tradition depuis Hadamard de nommer les fonctions définies sur des espaces de dimension infinie.

de Morse. Avec ses points critiques, nous tenterons de fabriquer, comme dans le cas de Morse, un complexe. La graduation sur le $\mathbf{Z}/2$ -espace vectoriel engendré par les points critiques est donnée par l'indice de Maslov, ce qu'il nous faudra définir (nous le ferons au chapitre 7).

Pour définir la différentielle, nous utiliserons l'analogie d'un champ de pseudo-gradients, ici le gradient de la fonctionnelle d'action (voir le §6.4), dont nous montrerons que les trajectoires d'énergie finie, les solutions de l'« équation de Floer », relient deux points critiques. Comme dans le cas de Morse, nous démontrerons une propriété de compacité des espaces de trajectoires (le théorème 6.5.4). Ces espaces de trajectoires donnent, en général, des variétés, grâce à des propriétés de transversalité (au chapitre 8). Ainsi, la différentielle du complexe de Floer sera définie.

Pour démontrer que ceci est bien un complexe, c'est-à-dire que $\partial \circ \partial = 0$, nous démontrons, comme dans le cas de Morse, une propriété de recollement (au chapitre 9). Comme dans le cas de Morse toujours, nous démontrerons au chapitre 11 que l'homologie du complexe enfin défini ne dépend ni de la fonctionnelle ni du champ de vecteurs choisis. Au préalable, nous aurons montré au chapitre 10 que, dans le cas d'un hamiltonien $\mathcal{C}^2$ -petit ne dépendant pas du temps, l'homologie de Floer, coïncide avec l'homologie de Morse de la variété. Ce sera donc vrai en général. L'évidente inégalité de dimensions entre la dimension des espaces vectoriels intervenant dans le complexe donnera donc le résultat escompté, de façon complètement analogue aux inégalités de Morse (la proposition 4.4.3).

Ainsi, le complexe de Morse, qui a fait l'objet de la première partie du livre, est une sorte de guide pour cette deuxième partie. Les objets de l'étude sont ici beaucoup plus compliqués et nécessitent une analyse (c'est le cas de le dire) sophistiquée : l'équation de Floer, équation différentielle pour les « trajectoires de gradient » de la fonctionnelle d'action, est une équation aux dérivées partielles, à laquelle il est nécessaire d'appliquer des techniques de régularité elliptique (que nous explicitons au chapitre 12) ; la définition du complexe requiert le fait que la linéarisation de cette équation fournit des opérateurs de Fredholm ; la démonstration des propriétés qui permettent d'affirmer que le complexe de Floer est bien un complexe est beaucoup plus technique que l'énoncé analogue pour le complexe de Morse.

Nous avons relégué dans un chapitre (que L^AT_EX a judicieusement choisi de numéroter 13 et que les lecteurs superstitieux peuvent sauter) quelques (un certain nombre de) lemmes techniques utilisés notamment dans le recollement.

CHAPITRE 5

CE QU'IL FAUT SAVOIR EN GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Il y a de nombreux bons livres de géométrie symplectique, notamment [15] et [44] auxquels nous renvoyons pour les détails qui pourraient manquer ici.

5.1. Espaces vectoriels symplectiques

Ce sont les espaces vectoriels réels munis de formes bilinéaires alternées *non dégénérées*. L'exemple archétypique et, on va le voir, unique, est celui de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, muni de la forme

$$\omega((p, q), (p', q')) = p \cdot q' - p' \cdot q$$

(le point $\cdot$ désignant bien sûr le produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^n$).

En réalité, il n'y a qu'un exemple, comme l'affirme la proposition qui suit.

Proposition 5.1.1. *Soit ω une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension finie. Il existe une base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ (dite symplectique) telle que $\omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$, et $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$.*

Démonstration. Comme ω est non dégénérée, elle n'est pas nulle et on peut trouver deux vecteurs e_1 et f_1 tels que $\omega(e_1, f_1) = 1$. On vérifie que ω se restreint en une forme *non dégénérée* à l'orthogonal (pour ω) du plan $\langle e_1, f_1 \rangle$ et on conclut par récurrence sur la dimension, après avoir remarqué qu'une forme bilinéaire alternée sur un espace de dimension 1 est nulle. $\square$

En particulier, la dimension de E est paire et c'est le seul invariant du type d'isomorphisme de (E, ω) . Dans une base symplectique, la matrice de

la forme bilinéaire ω est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.1.2. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$, on a

$$\omega((e_i, 0), (0, e_j)) = \delta_{i,j},$$

la base

$$((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e_1), \dots, (0, e_n))$$

est une base symplectique de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

5.2. Variétés symplectiques, définition

Essayons de comprendre ce que pourrait être la définition d'une *variété symplectique*. On demandera d'abord que chaque espace tangent soit muni de la structure vectorielle définie ci-dessus : la variété W sera munie d'une 2-forme différentielle ω , c'est-à-dire, pour chaque x , d'une forme bilinéaire alternée ω_x sur $T_x W$. On veut en plus que chaque ω_x soit non dégénérée, ce qu'on peut écrire, si la dimension, nécessairement paire, de W est $2n$,

$$\omega_x^{\wedge n} = \wedge^n \omega_x \neq 0 \in \bigwedge^{2n} T_x^* W$$

pour tout x . Autrement dit, on demande que la $2n$ -forme $\omega^{\wedge n}$ soit une forme volume sur W . Notons qu'en particulier, la variété W doit posséder une forme volume et donc être orientable.

En fait, cette définition est insuffisante : on veut aussi que le calcul différentiel que ω permet de faire sur W soit localement le même que celui qu'on sait faire sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme « constante ». Écrivons donc cette forme comme une forme différentielle : les vecteurs de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ sont notés $X = (p, q)$, $X' = (p', q')$ de sorte qu'on a

$$\omega(X, X') = p \cdot q' - p' \cdot q.$$

Autrement dit

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = d\left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i\right)$$

en particulier, ω est une forme *exacte*. On pourrait demander à une forme symplectique d'être une forme exacte... malheureusement, ceci interdirait d'utiliser des variétés compactes. On a en effet :

Proposition 5.2.1. *Sur une variété compacte, il n'existe aucune 2-forme qui soit à la fois non dégénérée et exacte.*

Démonstration. On a dit que ω est non dégénérée si et seulement si $\omega^{\wedge n}$ est une forme volume. Comme W est compacte, on sait que les formes volumes ne sont pas exactes⁽¹⁾. Or, si ω était exacte, on aurait $\omega = d\alpha$, mais alors la forme volume $\omega^{\wedge n}$ serait exacte : $\omega^{\wedge n} = d(\alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)})$. $\square$

En réalité, si on veut calculer *localement* comme dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, ce qu'il faut utiliser, c'est une condition d'« exactitude locale »... c'est-à-dire de fermeture. Ce qui nous amène à la bonne définition.

Définition 5.2.2. Une *variété symplectique* est un couple (W, ω) où W est une variété et ω une 2-forme fermée non dégénérée. Une telle forme ω est dite *symplectique*.

Un difféomorphisme φ d'une variété symplectique (W_1, ω_1) dans une autre (W_2, ω_2) est dit *symplectique* s'il vérifie $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. On dit parfois aussi que φ est un *symplectomorphisme*.

Bien entendu, on commettra souvent l'abus d'appeler W une variété symplectique, sans mentionner la forme ω quand il n'y aura pas d'ambiguïté à redouter.

5.3. Exemples de variétés symplectiques

Évidemment, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme constante $\sum dp_i \wedge dq_i$, est une variété symplectique.

Les cotangents. Si V est une variété, on considère l'espace total de son fibré cotangent, avec la projection :

$$\pi : T^*V \longrightarrow V.$$

Sur T^*V , il y a une 1-forme différentielle *canonique* λ , dite *forme de Liouville*, définie par :

$$\lambda(x, \varphi)(X) = \varphi(T_{(x, \varphi)}\pi(X))$$

où $x \in V$, $\varphi \in T_x^*V$ et $X \in T_{(x, \varphi)}(T^*V)$. On vérifie aisément que $\omega = d\lambda$ est non dégénérée (et encore plus aisément qu'elle est fermée!). Si $(q_1, \dots, q_n)$ sont des coordonnées locales sur V et si $(p_1, \dots, p_n)$ sont les coordonnées « duales », alors $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ est un système de coordonnées locales dans lequel $\lambda = \sum p_i dq_i$ et $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. On dit souvent que ω

⁽¹⁾Voir les rudiments de cohomologie de de Rham par exemple dans [38] ou dans le chapitre VIII du tome I de [68].

est la « forme symplectique canonique » sur le cotangent⁽²⁾. L'exemple de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ci-dessus peut être considéré comme le cas où $V = \mathbf{R}^n$.

Les surfaces. Sur une surface W , toutes les formes différentielles de degré 2 sont fermées. De plus, en dimension 2, dire qu'une 2-forme est non dégénérée veut simplement dire qu'elle ne s'annule en aucun point. Sur une surface, la notion de forme symplectique coïncide donc avec celle de forme volume : toutes les surfaces orientables peuvent être considérées comme des variétés symplectiques.

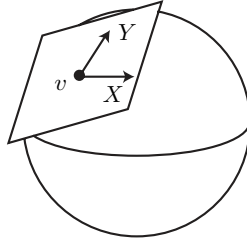


FIGURE 1. Forme symplectique sur la sphère

La sphère. On considère la sphère unité S^2 de $\mathbf{R}^3$, dont l'espace tangent en un point v est le plan orthogonal au vecteur unitaire v . On pose

$$\omega_v(X, Y) = v \cdot (X \wedge Y)$$

(figure 1). C'est une 2-forme non dégénérée (vérification immédiate) et donc une forme symplectique.

L'espace projectif complexe. Le plus agréable, pour décrire une forme symplectique sur l'espace projectif complexe, c'est d'utiliser la structure de quotient de cet espace. Considérons donc

$$\mathbf{C}^{n+1} = \{p + iq \mid p \in \mathbf{R}^{n+1}, q \in \mathbf{R}^{n+1}\} = \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1},$$

muni de la forme symplectique usuelle de $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$. L'espace projectif complexe est le quotient

$$\mathbf{C}^{n+1} - \{0\} / x \sim y \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ tel que } y = \lambda x$$

qu'il est souvent commode de considérer comme quotient de la sphère (compacte),

$$S^{2n+1} / x \sim y \iff \exists \lambda \in S^1 \text{ tel que } y = \lambda x$$

⁽²⁾Voilà encore un exemple de forme symplectique exacte, sur une variété non compacte bien sûr.

par exemple pour montrer que c'est un espace (séparé et) compact. On a ainsi un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \xrightarrow{j} & \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \\ \downarrow \pi & & \\ \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) & & \end{array}$$

La 2-forme $j^*\omega$ est forcément dégénérée. Son noyau en $x \in S^{2n+1}$ est la droite engendrée par le vecteur ix dans l'espace tangent $T_x S^{2n+1} = x^\perp$ (vérification directe) de sorte que $(j^*\omega)_x$ induit une forme bilinéaire non dégénérée sur l'espace vectoriel quotient $T_x S^{2n+1}/ix$ qui n'est autre que l'orthogonal du vecteur x pour la forme hermitienne. D'autre part, la droite réelle engendrée par ix est aussi le noyau de

$$T_x \pi : T_x S^{2n+1} \longrightarrow T_{\pi(x)} \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$$

de sorte que la formule

$$\sigma_{[x]}(Y, Z) = \omega_x(\tilde{Y}, \tilde{Z})$$

(où $x \in [x]$, $T_x \pi(\tilde{Y}) = Y$, $T_x \pi(\tilde{Z}) = Z$) définit bien une 2-forme et que l'on a montré :

Proposition 5.3.1. *Il existe une unique 2-forme σ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ telle que*

$$\pi^* \sigma = j^* \omega.$$

C'est une forme symplectique. □

Le théorème de Darboux. De même qu'il n'y a qu'un seul type d'espace vectoriel symplectique de dimension $2n$, il n'y a, localement, qu'une seule structure de variété symplectique de dimension $2n$, comme l'affirme un célèbre théorème de Darboux.

Théorème 5.3.2 (de Darboux). *Soit x un point d'une variété symplectique (W, ω) . Il existe des coordonnées locales $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ centrées en x dans lesquelles*

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

Il suffit d'intégrer un champ de vecteurs bien choisi (suivant la méthode « du chemin » de Moser [51])... Pour une démonstration complète, nous renvoyons les lecteurs à leurs livres de géométrie symplectique préférés, [44] ou [5] par exemple.

5.4. Champs de vecteurs hamiltoniens, systèmes hamiltoniens

Si $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction, la forme symplectique permet de lui associer un champ de vecteurs, une sorte de gradient, le *champ hamiltonien* X_H (parfois appelé le « gradient symplectique » de H). C'est le champ de vecteurs défini par la relation

$$\omega_x(Y, X_H(x)) = (dH)_x(Y) \quad \text{pour tout } Y \in T_x W$$

(ou par $\iota_{X_H}\omega = -dH$).

On remarque que le champ X_H s'annule en x si et seulement si x est un point critique de la fonction H :

$$X_H(x) = 0 \iff (dH)_x = 0.$$

En particulier, les singularités (ou zéros) d'un champ de vecteurs hamiltonien sont les points critiques d'une fonction.

Le système hamiltonien est le système différentiel associé à ce champ de vecteurs, c'est-à-dire,

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)).$$

On remarque que la fonction H est constante sur les trajectoires ou courbes intégrales du champ X_H : comme ω_x est alternée, on a

$$(dH)(X_H) = 0 \quad \text{ou} \quad X_H \cdot H = 0.$$

Les équations de Hamilton. Dans $\mathbf{R}^{2n}$ avec la forme symplectique $\sum dp_i \wedge dq_i$, le système différentiel, prend, dans ces coordonnées (q_i, p_i) , la forme

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Ce sont les classiques « équations de Hamilton ».

Exemple 5.4.1 (hamiltoniens « classiques »). On se place sur $\mathbf{R}^{2n}$ avec sa structure symplectique standard et on considère la fonction

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \|p\|^2 + V(q)$$

(penser à l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle). Le système hamiltonien associé est

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

de sorte que p apparaît en effet comme la vitesse (ou l'impulsion) de la particule dont q décrit la position.

Proposition 5.4.2. *Le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien est un difféomorphisme qui préserve la forme symplectique.*

Démonstration. On calcule⁽³⁾

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left((\psi^t)^* \omega \right) &= (\psi^t)^* \mathcal{L}_{X_H} \omega \\ &= (\psi^t)^* (di_{X_H} \omega) \\ &= (\psi^t)^* (-ddH) = 0.\end{aligned}$$

Donc $(\psi^t)^* \omega$ ne dépend pas de t et $(\psi^t)^* \omega = (\psi^0)^* \omega = \omega$ pour tout t . $\square$

Orbites périodiques. Si une trajectoire du flot de X_H est périodique de période 1, pour chacun de ses points, on a

$$\psi^1(x) = x,$$

ce sont donc des points fixes de ψ^1 . Par exemple, les points critiques de H sont des trajectoires périodiques. Donc le difféomorphisme symplectique ψ^1 a au moins autant de points fixes que la fonction H a de points critiques.

Exemple 5.4.3 (cas d'un hamiltonien quadratique). Considérons le cas d'une forme quadratique H sur $\mathbf{R}^{2n}$,

$$H = \frac{1}{2} \sum a_{ij} p_i p_j + \sum b_{ij} p_i q_j + \frac{1}{2} \sum c_{ij} q_i q_j.$$

Alors X_H est un champ de vecteurs linéaire

$$\begin{aligned}X_H(p, q) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \\ &= A \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -b & -c \\ a & {}^t b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & {}^t b \\ b & c \end{pmatrix} = -J \begin{pmatrix} a & {}^t b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

La matrice A est donc, à multiplication par la matrice inversible $-J$ près, la hessienne de H en 0, la matrice de la forme quadratique H . Le flot de X_H est donné par

$$\psi^t(p, q) = e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Notons que $\psi^1 = e^A$. Donc, si ψ^1 n'a pas la valeur propre 1, A n'a pas la valeur propre 0 et la forme quadratique H est non dégénérée, ou encore le point critique de H en 0 est un point critique non dégénéré.

Remarquons que la réciproque est fautive : A pourrait avoir des valeurs propres $2ik\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Voir par exemple l'exercice 18 page 488.

⁽³⁾Voir au besoin le § 14.4.b.

Hamiltoniens dépendant du temps. On va considérer ici des hamiltoniens « dépendant du temps », c'est-à-dire des fonctions

$$H : W \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},$$

et les champs hamiltoniens, notés X_t ,

$$X_t = X_{H_t}, \quad \text{si l'on note } H(x, t) = H_t(x).$$

Le système différentiel associé n'est plus autonome, c'est le système

$$\dot{x}(t) = X_t(x(t)).$$

Comme dans le cas autonome, les solutions du système permettent de définir une famille de difféomorphismes symplectiques ψ^t tels que

$$\frac{d}{dt}\psi^t = X_t \circ \psi^t \quad \text{et} \quad \psi^0 = \text{Id}.$$

De même que dans la proposition 5.4.2 (et avec la même démonstration), ψ^t préserve la forme symplectique.

Solutions périodiques non dégénérées. Une solution périodique de période 1 du système différentiel correspond à un point fixe du difféomorphisme ψ^1 . Si l'on suppose en plus que le hamiltonien H est périodique de période 1, alors les points fixes proviennent des solutions périodiques.

Définition 5.4.4. Une solution périodique x est dite *non dégénérée* si la différentielle de ψ^1 n'a pas la valeur propre 1, en symboles mathématiques si

$$\det(\text{Id} - T_{x(0)}\psi^1) \neq 0.$$

Dans le cas particulier où le hamiltonien H dépendant du temps n'en dépend pas, les points critiques de H sont des solutions périodiques (constantes) du système hamiltonien. L'exemple 5.4.3 rend plausible l'énoncé :

Proposition 5.4.5. *Si un point critique de H est non dégénéré comme solution périodique du système hamiltonien, alors il est non dégénéré comme point critique de la fonction H .*

Démonstration. On peut utiliser le théorème de Darboux au voisinage du point critique, la formule de Taylor à l'ordre 2 pour H , et déduire le résultat du calcul explicite effectué ci-dessus. Voici une autre démonstration. On commence par remarquer que, si Y et Z sont deux vecteurs tangents à W en x , on a

$$(d^2H)_x(Y, Z) = \omega_x([X_H, Z]_x, Y)$$

(on a noté Z n'importe quel champ de vecteurs prolongeant le vecteur Z au voisinage de x). En effet, prolongeons Y en un champ de vecteurs hamiltoniens X_f au voisinage de x , on a

$$\begin{aligned}\omega([X_H, Z], Y) &= \omega([X_H, Z], X_f) \\ &= df([X_H, Z]) \\ &= [X_H, Z] \cdot f \\ &= X_H \cdot (Z \cdot f) - Z \cdot (X_H \cdot f) \\ &= X_H \cdot (Z \cdot f) + Z \cdot (X_f \cdot H).\end{aligned}$$

Calculés au point critique x de H , le premier terme est nul et le deuxième est exactement

$$(d^2 H)_x(X_f(x), Z(x)) = (d^2 H)_x(Y, Z).$$

Supposons maintenant que x soit non dégénéré comme trajectoire de X_H . C'est dire que, pour tout $Z \neq 0$, on a

$$T_x \psi^1(Z) - Z \neq 0.$$

Comme $\psi^0 = \text{Id}$, il doit exister un t tel que

$$\frac{d}{dt} T_x \psi^t(Z) \neq 0,$$

mais cette dérivée est

$$T_x \psi^t([X_H, Z]),$$

donc, pour tout $Z \neq 0$, il existe un t pour lequel $T_x \psi^t([X_H, Z]) \neq 0$. On en déduit que, pour tout $Y \neq 0$, $[X_H, Z] \neq 0$. Grâce à la relation ci-dessus, ceci implique la non-dégénérescence de x comme point critique de H . $\square$

Remarque 5.4.6. Dans des coordonnées locales, la matrice de $T_x \psi^1$ est la matrice jacobienne $\text{Jac}_x \psi^1$, c'est-à-dire $\exp(J_0 \text{Hess}_x(H))$ (voir au besoin l'exercice 8 page 485), où Hess désigne la matrice hessienne. La non-dégénérescence de x comme orbite périodique est donc équivalente à l'inversibilité de $\exp(J_0 \text{Hess}_x(H)) - \text{Id}$, c'est-à-dire au fait que la hessienne de H n'a pas de valeur propre dans $2\pi\mathbf{Z}$.

Remarque 5.4.7. Si le hamiltonien H est « assez » $\mathcal{C}^2$ -petit, précisément si la norme de sa hessienne est strictement inférieure à 2π , la remarque précédente montre que la réciproque à la proposition 5.4.5 est vraie : les deux notions de non-dégénérescence coïncident.

Remarque 5.4.8. Les solutions périodiques (de période 1) constantes non dégénérées sont donc isolées, il n'y a pas de solution périodique infinitésimalement proche. Ceci est vrai plus généralement des solutions non dégénérées.

Voici une autre façon de comprendre ce fait. Soit

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow W \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

une trajectoire périodique du champ de vecteurs X_t sur W . L'équation différentielle linéarisée⁽⁴⁾ le long de la solution x a, comme tous les systèmes différentiels linéaires d'ordre $2n$, un espace vectoriel de solutions de dimension $2n$. Si $Y_1, \dots, Y_{2n}$ est une base de $T_{x(0)}W$, il existe une unique base $Y_1(t), \dots, Y_{2n}(t)$ de $T_{x(t)}W$ telle que

$$\begin{cases} Y_i(t) \text{ est une solution} \\ Y_i(0) = Y_i. \end{cases}$$

Alors $Y_1(1), \dots, Y_{2n}(1)$ est aussi une base de $T_{x(0)}W$, puisque x est périodique de période 1. Elle se déduit de $Y_1, \dots, Y_{2n}$ par un isomorphisme linéaire qui n'est autre que $T_{x(0)}\psi^1$ (voir le § 14.4.c). Dans la théorie des équations différentielles linéaires, cet isomorphisme est la *monodromie* de l'équation le long de la trajectoire x ; quand cette équation est, comme la nôtre, à coefficients périodiques, les valeurs propres de la monodromie sont des *multiplieurs de Floquet*; le fait que la monodromie n'ait pas la valeur propre 1 (c'est notre hypothèse de non-dégénérescence) est équivalent au fait que l'équation linéarisée n'ait pas de solution périodique. Cette non-dégénérescence est aussi une forme de transversalité, voir l'exercice 6 page 484.

5.5. Structures complexes

Nous montrons ici que toutes les variétés symplectiques possèdent des structures (presque) complexes compatibles avec leurs structures symplectiques en un sens que nous commençons par préciser.

Sur un espace vectoriel. Si E est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique ω , on dit qu'un endomorphisme J de E est une structure complexe calibrée par ω si $J^2 = -\text{Id}$ (J est une structure complexe),

$$\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$$

(J est symplectique) et

$$g(v, w) = \omega(v, Jw)$$

est un produit scalaire (défini positif) sur E .

⁽⁴⁾Voir si nécessaire le § 14.4.c.

Il est facile de montrer que tout espace vectoriel symplectique possède des structures complexes calibrées. Celles-ci sont des isométries et sont antisymétriques pour le produit scalaire qu'elles définissent. On peut simplement utiliser une base symplectique de l'espace vectoriel, disons $(e_1, \dots, e_{2n})$ avec

$$\omega(e_i, e_{j+n}) = \delta_{i,j}, \quad i, j \leq n.$$

Alors la formule

$$\begin{aligned} J_0(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + y_1 e_{n+1} + \dots + y_n e_{2n}) \\ = (-y_1 e_1 - \dots - y_n e_n + x_1 e_{n+1} + \dots + x_n e_{2n}) \end{aligned}$$

définit une structure complexe.

Dans le cas où l'espace vectoriel est $\mathbf{R}^{2n}$ et où l'on a utilisé la base canonique, et si l'on veut bien se souvenir que $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$, ce J_0 est la multiplication par i .

Inversement, l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$, s'il est muni d'une structure hermitienne, porte une forme symplectique. On décompose le produit scalaire hermitien en parties réelle (le produit scalaire euclidien de $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$) et imaginaire (la forme symplectique) :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum u_i e_i, \sum v_j e_j \right\rangle \\ &= \sum u_i \bar{v}_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum u_j \bar{v}_j \\ &= \sum (a_j + ib_j)(x_j - iy_j) \\ &= \sum (a_j x_j + b_j y_j) - i \sum (a_j y_j - b_j x_j) \\ &= (u, v) - i\omega(u, v). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= i \langle u, iv \rangle \\ &= i((u, iv) - i\omega(u, iv)) \\ &= \omega(u, iv) + i(u, iv), \end{aligned}$$

donc $\omega(u, iv)$ est aussi le produit scalaire euclidien de u et v . En plus, $\omega(iu, iv) = \omega(u, v)$: la multiplication par i est une « isométrie » de ω . C'est ce que la définition sur une variété va imiter.

Remarque 5.5.1. Le groupe linéaire $\text{GL}(2n; \mathbf{R})$ opère sur l'espace des structures complexes sur $\mathbf{R}^{2n}$ par $g \cdot J = gJg^{-1}$. À l'aide d'une base J -complexe, on voit que cette action est transitive et que le stabilisateur d'une structure complexe J_0 est le groupe des automorphismes *complexes* (pour J_0).

En d'autres termes, l'ensemble des structures presque complexes linéaires sur l'espace $\mathbf{R}^{2n}$ s'identifie à l'espace homogène

$$\mathcal{J}_n = \mathrm{GL}(2n; \mathbf{R}) / \mathrm{GL}(n; \mathbf{C}).$$

Structures presque complexes calibrées sur une variété symplectique. Une structure *presque complexe* J sur une variété est un endomorphisme du fibré tangent qui vérifie $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Exemples 5.5.2.

(1) Si W est une variété complexe (c'est-à-dire une variété localement modelée sur $\mathbf{C}^n$ avec changements de cartes analytiques), son espace tangent $T_x W$ en tout point est un espace vectoriel complexe, la multiplication par i est une structure presque complexe. C'est cette situation qu'imité la définition d'une structure presque complexe : J joue le rôle de la multiplication par i .

(2) Soit par exemple W une surface orientée, munie d'une métrique riemannienne, de sorte que nous avons une notion de rotation de $+\pi/2$ dans chaque plan tangent. Cette famille de rotations définit une structure presque complexe sur W . Ainsi, toutes les surfaces orientables ont des structures presque complexes⁽⁵⁾.

(3) Il n'est pas vrai que toutes les variétés, même pas que toutes les variétés de dimension paire, possèdent des structures presque complexes. Par exemple la sphère S^4 ne possède aucune structure presque complexe (et donc aucune structure symplectique!).

(4) La sphère S^6 , et de même toutes les hypersurfaces orientables de $\mathbf{R}^7$, possède une structure presque complexe. Voir l'exercice 13 page 486.

Une variété presque complexe (W, J) est dite *calibrée* par la forme symplectique ω si J qui est une isométrie de ω et si la forme bilinéaire symétrique $\omega(X, JY)$ est définie positive en chaque point, autrement dit, si J_x est calibrée par ω_x pour tout x .

(1) La structure presque complexe construite sur un espace vectoriel symplectique à l'aide d'une base symplectique comme plus haut est calibrée par la forme symplectique.

(2) Sur une variété complexe kählérienne, la forme de Kähler calibre la structure complexe.

⁽⁵⁾On peut démontrer, à la suite de Gauß, que les structures presque complexes sur les surfaces sont en fait des structures complexes. Une référence accessible est [37, Th. 3.1.11], qui démontre l'énoncé (équivalent) sous la forme « toute surface orientée munie d'une métrique riemannienne est une surface de Riemann ».

Afin de démontrer l'existence de structures presque complexes qui calibrent toutes les variétés symplectiques, revenons au cas des espaces vectoriels pour redémontrer, mais cette fois sans utiliser de base, qu'il existe des structures complexes calibrées sur tous les espaces vectoriels symplectiques. Soit (E, ω) un tel espace. Commençons par choisir un produit scalaire (X, Y) . Comme $(\cdot, \cdot)$ et ω sont non dégénérées, la relation $(X, AY) = \omega(X, Y)$ définit un isomorphisme $A : E \rightarrow E$. On écrit alors la décomposition polaire de A , c'est-à-dire $A = BJ$, où B est un endomorphisme symétrique défini positif, A et B commutent et J est une isométrie.

Lemme 5.5.3. *L'endomorphisme A est anti-symétrique, J est une isométrie de ω et satisfait $J^2 = -1$ et $JB = BJ$.*

Démonstration. On a

$$(X, AY) = \omega(X, Y) = -\omega(Y, X) = -(AX, Y)$$

donc A est antisymétrique. On a aussi $J = B^{-1}A$, donc

$${}^tJ = {}^tA {}^tB^{-1} = -AB^{-1} = -B^{-1}A = -J.$$

Comme J est une isométrie, ${}^tJJ = 1$, de sorte que J est bien une structure complexe. De plus,

$$BJ = A = -{}^tA = -{}^t(BJ) = -{}^tJ {}^tB = -{}^tJB = JB$$

donc B et J commutent, et donc A et J commutent eux aussi, ce qui donne le résultat :

$$\omega(JX, JY) = (JX, AJY) = (JX, JAY) = (X, AY) = \omega(X, Y). \quad \square$$

Le produit scalaire défini par B est

$$((X, Y)) = (BX, Y) = \omega(X, JY).$$

On a donc bien montré l'existence, sur tout espace vectoriel symplectique, de structures complexes calibrées. Remarquons que la forme $((\cdot, \cdot)) - i\omega(\cdot, \cdot)$ est hermitienne. Comme la démonstration n'utilise que la forme symplectique et le produit scalaire, elle se généralise au cas d'une variété symplectique munie d'une métrique riemannienne.

On peut aussi remarquer que cette même construction de J , faite fibre à fibre, donne une structure de fibré vectoriel complexe sur tout fibré vectoriel symplectique. Le fibré tangent d'une variété symplectique, notamment.

Très important, parce que c'est ce qui va permettre d'utiliser ces structures complexes sans trop se préoccuper de la façon dont elles ont été construites, le résultat contenu dans le corollaire 5.5.5 ci-dessous. Notons $\mathcal{J}_c(\omega)$ l'espace des structures complexes calibrées par ω .

Proposition 5.5.4. *Soit j une structure complexe sur $\mathbf{R}^{2n}$ calibrée par la forme ω . L'application*

$$J \longmapsto (J + j)^{-1} \circ (J - j)$$

est un difféomorphisme de $\mathcal{J}_c(\omega)$ sur la boule unité ouverte de l'espace vectoriel des matrices symétriques S telles que $jS + Sj = 0$.

Corollaire 5.5.5. *L'espace $\mathcal{J}_c(\omega)$ est contractile.* $\square$

On trouvera une démonstration de ces résultats classiques par exemple dans [3, 15, 44, 5].

Maintenant W est une variété de dimension $2n$ munie d'une forme symplectique ω . Le choix d'une métrique riemannienne sur W (construite à l'aide d'une partition de l'unité) permet de construire une structure presque complexe calibrée, comme il a été remarqué plus haut.

À son fibré tangent, on associe le fibré

$$\mathcal{J}_c(\omega) \longrightarrow W,$$

dont la fibre en x est $\mathcal{J}_c(\omega_x)$, des structures presque complexes calibrées sur W . Une structure complexe calibrée est une section du fibré $\mathcal{J}_c(\omega) \rightarrow W$. Comme les fibres de ce fibré sont contractiles, on a :

Proposition 5.5.6. *L'espace des structures presque complexes calibrées par ω sur W est non vide et contractile.* $\square$

Remarquons aussi :

Proposition 5.5.7. *L'espace tangent en J à $\mathcal{J}_c(\omega)$ est*

$$T_J \mathcal{J}_c(\omega) = \{S \in \text{End}(TW) \mid JS + SJ = 0 \text{ et } \omega(S\xi, \eta) + \omega(\xi, S\eta) = 0\}.$$

Démonstration. La première égalité est la version infinitésimale du fait que $J^2 = -\text{Id}$, la deuxième dit que S est symétrique (pour la métrique g définie par J) :

$$\begin{aligned} g(S\xi, \eta) &= \omega(S\xi, J\eta) \\ &= -\omega(\xi, SJ\eta) \\ &= \omega(\xi, JS\eta) \\ &= g(\xi, S\eta), \end{aligned}$$

et de même que JS est symétrique :

$$\begin{aligned}
 \omega(S\xi, \eta) + \omega(\xi, S\eta) &= g(S\xi, -J\eta) + g(\xi, -JS\eta) \\
 &= -g(S\xi, J\eta) - g(\xi, JS\eta) \\
 &= -g(JS\xi, -\eta) - g(\xi, JS\eta) \\
 &= g(JS\xi, \eta) - g(\xi, JS\eta). \quad \square
 \end{aligned}$$

Exemples 5.5.8.

- (1) Le cas de $\mathbf{R}^{2n}$ a déjà été évoqué assez longuement.
- (2) Le tore $T^{2n} = \mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n}$ hérite de toutes les structures (symplectique, presque complexe) dont est muni $\mathbf{R}^{2n}$ puisqu'elles sont invariantes par translation.
- (3) L'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est muni de la structure symplectique déduite de celle de $\mathbf{C}^{n+1}$ et que nous avons décrite plus haut (voir la proposition 5.3.1). Il hérite d'une structure presque complexe déduite de celle de $\mathbf{C}^{n+1}$ définie, pour $\xi \in T_{[x]}\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, par

$$J\xi = T_x\pi(i\xi'), \text{ si } \xi \text{ est l'image de } \xi' \in \mathbf{C}^{n+1}, \text{ avec } \langle \xi', x \rangle = 0.$$

Il est clair que le résultat ne dépend pas du choix de $x \in [x]$:

$$\xi = T_x\pi(\tilde{\xi}), \quad \text{avec } \tilde{\xi} = \xi' + \lambda ix,$$

on a

$$\xi = T_{u \cdot x}\pi(u\tilde{\xi}) \quad \text{et} \quad u\tilde{\xi} = u\xi' + \lambda(iu \cdot x).$$

On a bien sûr aussi $J(J\xi) = T_x\pi(-\xi') = -\xi$.

Gradient et champ hamiltonien. Si W est munie d'une forme symplectique ω , d'une structure presque complexe calibrée J et de la métrique riemannienne $g(X, Y) = \omega(X, JY)$, à toute fonction $H : W \rightarrow \mathbf{R}$, on sait associer deux champs de vecteurs, le champ hamiltonien X_H et le gradient $\text{grad } H$. On a

$$\omega(Y, X_H) = dH(Y) = g(Y, \text{grad } H) = \omega(Y, J \text{grad } H)$$

de sorte que

$$X_H = J \text{grad } H \quad \text{et} \quad \text{grad } H = -JX_H.$$

5.6. Le groupe symplectique

On se place ici dans $\mathbf{R}^{2n}$ muni de la forme symplectique usuelle ω et d'une structure complexe (linéaire) qui l'identifie à $\mathbf{C}^n$ et que nous notons J_0 .

Le groupe symplectique, noté $\mathrm{Sp}(2n)$ est le groupe des isométries, ou transformations symplectiques de ω . Une transformation g de $\mathbf{C}^n$ est dite *symplectique* si elle vérifie

$$\omega(gZ, gZ') = \omega(Z, Z') \quad \text{pour tous } Z, Z' \in \mathbf{C}^n.$$

Exemple 5.6.1 (le groupe $\mathrm{Sp}(2)$). Le groupe symplectique de $\mathbf{C}$ est isomorphe à $\mathrm{SL}(2; \mathbf{R})$.

5.6.a. Relations entre sous-groupes de $\mathrm{GL}(2n; \mathbf{R})$. Considérons les groupes $\mathrm{O}(2n)$, $\mathrm{GL}(n; \mathbf{C})$, $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{Sp}(2n)$ comme des sous-groupes de $\mathrm{GL}(2n; \mathbf{R})$.

Proposition 5.6.2. *On a les égalités*

$$\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n; \mathbf{C}) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n; \mathbf{C}) = \mathrm{U}(n).$$

Démonstration. Repérons les différents éléments de $\mathrm{GL}(2n; \mathbf{R})$:

(1) $g \in \mathrm{GL}(n; \mathbf{C})$ si et seulement si g est $\mathbf{C}$ -linéaire, c'est-à-dire si et seulement si

$$g(iZ) = ig(Z) \quad \text{pour tout } Z$$

(pour une matrice A , c'est dire que $AJ_0 = J_0A$).

(2) $g \in \mathrm{Sp}(2n)$ si et seulement si g préserve ω , c'est-à-dire si et seulement si $\omega(gZ, gZ') = \omega(Z, Z')$ pour tous Z et Z' . Pour une matrice A , c'est dire que

$${}^tAJ_0A = J_0.$$

(3) $g \in \mathrm{O}(2n)$ si et seulement si $(gZ, gZ') = (Z, Z')$, pour une matrice A , c'est dire que ${}^tAA = \mathrm{Id}$.

On vérifie que deux de ces conditions impliquent toujours la troisième :

– (2) et (3) impliquent que

$$\langle gZ, gZ' \rangle = \langle Z, Z' \rangle$$

donc que $g \in \mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n; \mathbf{C})$.

– (3) et (1) impliquent que

$$\omega(gZ, gZ') = \omega(gZ, -ig(iZ')) = (gZ, g(iZ')) = (Z, iZ') = \omega(Z, Z')$$

donc que $g \in \mathrm{Sp}(2n)$.

– de même (1) et (2) impliquent (3).

En termes matriciels, l'intersection $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$ est formée des matrices

$$\begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n; \mathbf{R})$$

telles que

$$\begin{cases} {}^tUV = {}^tVU \\ {}^tUU + {}^tVV = \text{Id}. \end{cases}$$

C'est exactement la condition pour que $U + iV$ soit une matrice unitaire. $\square$

5.6.b. Les valeurs propres des éléments de $\text{Sp}(2n)$. Soit $A \in \text{Sp}(2n)$. C'est dire que ${}^tAJ_0A = J_0$, ou encore que

$${}^tA = J_0A^{-1}J_0^{-1} = -J_0A^{-1}J_0.$$

En particulier tA et A^{-1} sont semblables (puisque tA et A le sont) et donc A et A^{-1} sont semblables.

Proposition 5.6.3. *Si $A \in \text{Sp}(2n)$, A , A^{-1} et tA sont semblables.* $\square$

Notons que λ est une valeur propre de A si et seulement si λ^{-1} l'est aussi. La figure 2 représente les positions des valeurs propres d'une matrice symplectique dans $\mathbf{C}$. On a même que les multiplicités de λ et λ^{-1} coïncident,

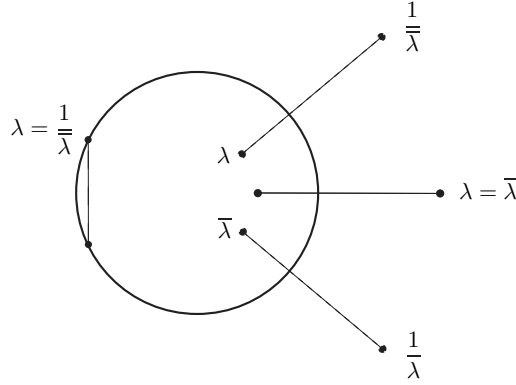


FIGURE 2

comme conséquence de l'énoncé suivant.

Proposition 5.6.4. *Le polynôme caractéristique de $A \in \text{Sp}(2n)$ est symétrique (au sens où ses coefficients sont symétriques), c'est-à-dire qu'on a*

$$\text{pour } A \in \text{Sp}(2n), \quad \det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^{2n} \det\left(A - \frac{1}{\lambda} \text{Id}\right).$$

Démonstration. On a en effet $A = -J_0 {}^t A^{-1} J_0$ et

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda \text{Id}) &= \det(-J_0 {}^t A^{-1} J_0 - \lambda \text{Id}) \\
 &= \det(-{}^t A^{-1} + \lambda \text{Id}) \quad \text{puisque } J_0^2 = -\text{Id} \\
 &= \det({}^t A^{-1}) \det(\text{Id} - \lambda {}^t A) \\
 &= \det(\lambda {}^t A - \text{Id}) \quad \text{puisque } \det A = 1 \text{ (corollaire 5.6.10)} \\
 &= \lambda^{2n} \det\left(A - \frac{1}{\lambda} \text{Id}\right) \quad \square
 \end{aligned}$$

Remarque 5.6.5. Les multiplicités de λ , λ^{-1} , $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}^{-1}$ comme valeurs propres de A sont les mêmes.

5.6.c. Les espaces propres des éléments de $\text{Sp}(2n)$. Pour étudier les sous-espaces propres de $A \in \text{Sp}(2n; \mathbf{R})$, on doit complexifier l'espace $\mathbf{R}^{2n}$ (en $\mathbf{C}^{2n}$!), on considère donc $A \in \text{GL}(2n; \mathbf{C})$ et on « prolonge » la forme symplectique ω en une forme $\mathbf{C}$ -bilinéaire

$$\omega : \mathbf{C}^{2n} \times \mathbf{C}^{2n} \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Proposition 5.6.6. Soient λ et μ deux valeurs propres de A avec $\lambda\mu \neq 1$, et soient r et s deux entiers (non nuls). Si $X \in \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})^r$ et $Y \in \text{Ker}(A - \mu \text{Id})^s$, alors $\omega(X, Y) = 0$.

Démonstration. Appelons $P_{r,s}$ la propriété. On démontre d'abord $P_{1,s}$ par récurrence sur s :

– On a $P_{1,1}$ puisque

$$\omega(X, Y) = \omega(AX, AY) = \lambda\mu\omega(X, Y).$$

– Ensuite, si on suppose $P_{1,s}$ vraie, soit X un vecteur propre de A et soit $Y \in \text{Ker}(A - \mu \text{Id})^{s+1}$, on a

$$\begin{aligned}
 \omega(X, Y) &= \omega(AX, AY) \\
 &= \lambda\omega(X, (A - \mu \text{Id})Y) + \lambda\mu\omega(X, Y) \\
 &= \lambda\mu\omega(X, Y)
 \end{aligned}$$

puisque $(A - \mu \text{Id})Y \in \text{Ker}(A - \mu \text{Id})^s$.

On a de même la propriété $P_{r,1}$. Pour montrer $P_{r,s}$, par récurrence, on vérifie que

$$P_{r,s+1} \text{ et } P_{r+1,s} \implies P_{r+1,s+1}.$$

Soient donc $X \in \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})^{r+1}$, $Y \in \text{Ker}(A - \mu \text{Id})^{s+1}$. On a

$$\begin{aligned}\omega(X, Y) &= \omega(AX, AY) \\ &= \omega((A - \lambda \text{Id})X, AY) + \lambda\omega(X, AY) \\ &= \lambda\omega(X, AY)\end{aligned}$$

puisque $P_{r,s+1}$ est supposée vraie. Ensuite,

$$\begin{aligned}\lambda\omega(X, AY) &= \lambda\omega(X, (A - \mu \text{Id})Y) + \lambda\mu\omega(X, Y) \\ &= \lambda\mu\omega(X, Y)\end{aligned}$$

en appliquant $P_{r+1,s}$. Finalement

$$\omega(X, Y) = \lambda\mu\omega(X, Y)$$

donc $\omega(X, Y) = 0$ et $P_{r+1,s+1}$ est vérifiée. $\square$

On appelle *espace caractéristique* et on note E_λ le sous-espace de $\mathbf{C}^{2n}$ défini par

$$E_\lambda = \bigcup_r \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})^r.$$

Il est classique que E_λ est un espace vectoriel complexe de dimension la multiplicité $m(\lambda)$ de la valeur propre λ et que $\mathbf{C}^{2n}$ est la somme directe des sous-espaces E_λ . Voici une conséquence immédiate de la proposition :

Corollaire 5.6.7.

- (1) Si $\lambda\mu \neq 1$, $\omega(E_\lambda, E_\mu) = 0$.
- (2) En restriction à E_1 et E_{-1} , ω est non dégénérée. En particulier, les restrictions de ω à $E_{\pm 1} \cap \mathbf{R}^{2n}$ sont des formes symplectiques et les multiplicités $m(1)$, $m(-1)$ sont paires.
- (3) Pour tout $\lambda \in \text{Spec}(A) - \{-1, +1\}$, la restriction de ω à $E_\lambda \oplus E_{1/\lambda}$ est non dégénérée. $\square$

Remarque 5.6.8. L'application $X \mapsto \overline{X}$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels réels) de E_λ sur $E_{\overline{\lambda}}$.

5.6.d. La décomposition polaire. On a vu que le groupe $\text{U}(n)$ est un sous-groupe de $\text{Sp}(2n)$. Il est classique que c'en est la composante compacte. La décomposition polaire de $\text{GL}(n; \mathbf{R})$ donne en effet un homéomorphisme

$$\begin{aligned}\text{Sp}(2n) &\longrightarrow \text{U}(n) \times C_n \\ A &\longmapsto US\end{aligned}$$

où C_n désigne l'ouvert des matrices qui sont à la fois symplectiques et symétriques définies positives. Rappelons que $S = \sqrt{{}^t A A}$ et $U = AS^{-1}$.

Proposition 5.6.9. Le groupe $\text{Sp}(2n)$ se rétracte sur $\text{U}(n)$. En particulier, il est connexe par arcs et son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Démonstration. Montrons que l'ouvert C_n est contractile. Soit $A \in C_n$, alors, A , comme toutes les matrices symétriques, a ses valeurs propres réelles (positives ici) et possède une base de vecteurs propres. Considérons une valeur propre λ , l'inverse λ^{-1} et la somme des sous-espaces propres associés, $E_\lambda \oplus E_{\lambda^{-1}}$ (il n'y a pas de différence entre sous-espaces propres et caractéristiques pour ces matrices diagonalisables).

Nous avons vu que, si $\lambda \mu \neq 1$, les vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres sont orthogonaux pour ω . Supposons que λ soit une valeur propre différente de 1. On a dit que la restriction de ω à $E_\lambda \oplus E_{\lambda^{-1}}$ est non dégénérée. Les vecteurs de E_λ sont tous orthogonaux entre eux (puisque $\lambda^2 \neq 1$), donc un vecteur de E_λ ne peut pas être orthogonal à tous les vecteurs de $E_{\lambda^{-1}}$. Dans $E_\lambda \oplus E_{\lambda^{-1}}$, on peut donc trouver une base symplectique dont les premiers vecteurs sont des vecteurs propres pour λ et les suivants des vecteurs propres pour $E_{\lambda^{-1}}$. En considérant tous les couples de valeurs propres, on obtient une base symplectique de $\mathbf{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice A est diagonale, par blocs de la forme

$$(\lambda, \dots, \lambda, \lambda^{-1}, \dots, \lambda^{-1}).$$

En écrivant $\lambda = \log \ell$, on obtient une matrice diagonale (dans la même base symplectique) dont l'exponentielle est A . On voit ainsi que A est l'exponentielle d'une matrice symétrique diagonalisable. Et, de même, qu'il y a une application continue $A \mapsto \log A$, de sorte que l'on peut rétracter C_n sur l'identité par la rétraction

$$(A, t) \longmapsto \exp(t \log A). \quad \square$$

Corollaire 5.6.10. *Le déterminant d'une matrice symplectique vaut 1.*

En effet il vaut clairement ± 1 et le groupe est connexe par arcs. $\square$

Voir aussi les exercices 16 et 35. L'isomorphisme du groupe fondamental de $\mathrm{Sp}(2n)$ avec $\mathbf{Z}$ se réalise par la composition de la projection sur $\mathrm{U}(n)$ donnée par la proposition précédente et du déterminant (complexe), une application

$$\mathrm{Sp}(2n) \longrightarrow S^1.$$

CHAPITRE 6

LA CONJECTURE D'ARNOLD ET L'ÉQUATION DE FLOER

Dans ce chapitre, nous arrivons au cœur de notre sujet, la conjecture d'Arnold. Nous énonçons cette conjecture, qui est une minoration du nombre de points fixes de certains difféomorphismes hamiltoniens. Nous identifions ensuite ces points fixes à des orbites périodiques de systèmes hamiltoniens et aux points critiques de la « fonctionnelle d'action ». Nous décrivons cette fonctionnelle, une fonction sur l'espace des lacets contractiles de la variété symplectique de départ, ainsi que l'équation différentielle définissant le flot du gradient de cette fonctionnelle, l'équation de Floer, une équation aux dérivées partielles puisqu'y interviennent la variable du lacet et celle du flot du gradient. Nous commençons à étudier l'espace des solutions de cette équation, en montrant une propriété de compacité.

6.1. La conjecture d'Arnold

Le cadre général de la conjecture d'Arnold (énoncée par Arnold dans [2, 1]) est celui d'un difféomorphisme symplectique d'une variété symplectique, le problème est d'estimer le nombre de ses points fixes. Bien entendu, il est très facile de construire des variétés symplectiques et des difféomorphismes symplectiques sur celles-ci qui n'ont *aucun* point fixe. Une rotation sur un tore par exemple (il faut faire l'exercice 22 page 489).

À l'opposé, nous avons vu (au §5.4) que le « temps 1 » du flot d'un champ de vecteurs hamiltonien a , lui, au moins autant de points fixes que la fonction qui lui a donné naissance a de points critiques. En appliquant la proposition 4.4.3, nous en déduisons :

Proposition 6.1.1. *Le nombre de solutions périodiques de période 1 d'un système hamiltonien autonome non dégénéré sur une variété symplectique compacte W est supérieur ou égal à la somme*

$$\sum_i \dim HM_i(W; \mathbf{Z}/2). \quad \square$$

La conjecture d'Arnold que nous allons étudier ici est exactement le même énoncé, à cela près que le hamiltonien n'est plus supposé autonome, il dépend du temps.

Conjecture 6.1.2 (d'Arnold). *Soit W une variété symplectique compacte et soit*

$$H : W \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

un hamiltonien dépendant du temps. Supposons que les solutions de période 1 du système hamiltonien associé soient non dégénérées. Alors leur nombre est supérieur ou égal à la somme

$$\sum_i \dim HM_i(W; \mathbf{Z}/2).$$

Rappelons qu'une solution de période 1 est dite non dégénérée si la différentielle du flot au temps 1 n'a pas de vecteur fixe (voir la définition 5.4.4).

Remarque 6.1.3. Dans cet énoncé, H peut aussi bien être supposé périodique, au sens où $H(x, t+1) = H(x, t)$. En effet,

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{\alpha(t)}) = \frac{d\alpha}{dt} X_{H_{\alpha(t)}}(\varphi^{\alpha(t)}(x)) = X_{\alpha'(t)H_{\alpha(t)}}(\varphi^{\alpha(t)}(x)),$$

donc $t \mapsto \varphi^{\alpha(t)}$ est le flot du champ de vecteurs hamiltonien associé à la fonction $K_t = \alpha'(t)H_{\alpha(t)}$. Si α est une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ nulle (et plate) près de 0, égale à 1 (et plate) près de 1, cette égalité donne à la fois le fait que $\varphi^{\alpha(1)} = \varphi^1$ et le fait que K_t peut être prolongée en une fonction périodique du temps t . $\square$

Remarques 6.1.4. Il y aurait mille autres remarques à faire. La « bonne » conjecture est que le nombre de points fixes d'un difféomorphisme qui est un « temps 1 » comme ci-dessus est supérieur ou égal au nombre minimal de points critiques d'une fonction sur la variété. Et que, si ces points fixes sont *non dégénérés*, alors leur nombre est supérieur ou égal au nombre minimal de points critiques d'une fonction *de Morse* sur cette variété⁽¹⁾.

⁽¹⁾On a vu dans la remarque 4.4.5 que le nombre minimal de points critiques d'une fonction peut être inférieur au nombre minimal de points critiques d'une fonction de Morse.

Il y a mille variantes. Comme celle qui remplace points fixes de difféomorphismes symplectiques par points d'intersection de sous-variétés lagrangiennes...

La coutume est de dresser une liste chronologique des résultats obtenus. La conjecture est désormais démontrée en toute généralité (sous sa forme homologique), de nombreux mathématiciens ont contribué à cette démonstration. Par ordre chronologique et dans la crainte d'oublier des contributions, tentons une liste, Eliashberg pour la dimension 2, Conley et Zehnder pour les tores. C'est ensuite la révolution de Floer, pour les variétés asphériques ($\pi_2 = 0$) puis pour les variétés monotones (ce qui inclut les espaces projectifs complexes), dont les méthodes ont été ensuite étendues et exploitées par Hofer, Salamon et, indépendamment par Ono pour le cas faiblement monotone, puis par Fukaya et Ono, par Liu et Tian et par Hofer et Salamon pour le cas général. Renvoyons au survol [61] de Salamon pour des références précises à ces travaux.

Démonstration pour un hamiltonien indépendant du temps et « petit ». Ce résultat n'est pas qu'un exemple où la conjecture se démontre facilement. Il jouera un rôle essentiel dans le calcul de l'homologie de Floer au chapitre 10.

Proposition 6.1.5. *Soit H une fonction sur $\mathbf{R}^{2n}$, de sorte que X_H est un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^{2n}$. Si $\|dX_H\|_{L^2} < 2\pi$, les seules solutions de période 1 du système hamiltonien associé à H sont les solutions constantes (points critiques de H).*

Remarquons ici que, lorsque le hamiltonien H est « $\mathcal{C}^2$ -petit », démontrer l'inégalité contenue dans la conjecture d'Arnold revient à démontrer les inégalités de Morse (voir la remarque 5.4.7).

Démonstration. Nous reprenons ici la démonstration donnée dans [42]. Considérons une solution x de période 1 et développons-la en série de Fourier (c'est un vecteur de $\mathbf{C}^n$) ainsi que ses dérivées $\dot{x}$ et $\ddot{x}$,

$$x(t) = \sum_n c_n(x) e^{2in\pi t}, \quad \dot{x} = \sum_n 2ni\pi c_n(x) e^{2in\pi t}, \quad \text{etc.}$$

Ensuite, la formule de Parseval donne

$$\|\ddot{x}\|_{L^2}^2 = \sum 4\pi^2 n^2 |c_n(\dot{x})|^2 \geq 4\pi^2 \sum_{n \neq 0} |c_n(\dot{x})|^2 = 4\pi^2 \|\dot{x}\|_{L^2}^2$$

puisque $c_0(\dot{x}) = 0$. Ainsi, on a

$$\|\dot{x}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi} \|\ddot{x}\|_{L^2}.$$

L'hypothèse $\|dX_H\|_{L^2} < 2\pi$ donne avec $\ddot{x} = (dX_H)_x \cdot \dot{x}$,

$$\|\ddot{x}\|_{L^2} < 2\pi \|\dot{x}\|_{L^2} \quad \text{si } \dot{x} \neq 0,$$

donc $\dot{x} = 0$ et x est constante. $\square$

En réalité, cette proposition vaut plus généralement pour un champ de vecteurs, pas nécessairement hamiltonien, mais de constante de Lipschitz strictement inférieure à 2π . De même, la proposition qui suit reste vraie pour un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ -petit.

Proposition 6.1.6. *Soit W une variété symplectique compacte et soit $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Si H est assez petit au sens $\mathcal{C}^2$, alors les seules solutions de période 1 du système hamiltonien associé à H sont les solutions constantes.*

Démonstration. Remarquons d'abord que, pour un champ hamiltonien X_H sur un disque $D^{2n} \subset \mathbf{R}^{2n}$,

$$\forall x \in D^{2n}, \forall t \in [0, 1], \quad \|\varphi^t(x) - x\| \leq \sup_{y \in D^{2n}} \|X_H(y)\|$$

en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Il s'en suit que, si $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ est suffisamment petit au sens $\mathcal{C}^2$, il existe un recouvrement fini de la variété compacte W par des cartes de Darboux relativement compactes telles que

- chaque trajectoire de période 1 est contenue dans une carte ;
- sur chaque carte (et pour la métrique de $\mathbf{R}^{2n}$), $\|dX_H\| < 2\pi$.

Appliquons alors la proposition précédente dans chaque carte. $\square$

6.2. Stratégie de la démonstration, homologie de Floer

L'outil principal que nous allons utiliser pour démontrer la conjecture d'Arnold (avec une hypothèse restrictive) est l'homologie de Floer : l'idée de Floer [24, 23, 25, 26] est de « compter » les solutions périodiques de H , ou les points fixes de son flot au temps 1, de minorer leur nombre, de façon analogue à celle qui nous a permis de minorer le nombre de points critiques d'une fonction de Morse sur une variété (dans la proposition 4.4.3).

(1) Nous allons donc d'abord définir une « fonction », la *fonctionnelle d'action* (au §6.3) sur un espace convenable (qui pourra être considéré comme une variété de dimension infinie, voir le §6.3.a). Les points critiques de cette fonctionnelle seront exactement les solutions périodiques recherchées.

(2) Avec ces points critiques, nous allons fabriquer un complexe, en considérant d'abord simplement les espaces vectoriels sur $\mathbf{Z}/2$ qu'ils engendrent. Pour définir une graduation sur ces espaces, il nous faudra un analogue de l'indice d'un point critique, que nous définirons au chapitre 7 et qui sera l'indice au sens de Morse (à un décalage près) lorsque le hamiltonien ne dépendra pas du temps (corollaire 7.2.2).

(3) Pour définir la différentielle du complexe, nous utiliserons un champ de vecteurs, le gradient (ou son opposé) de la fonctionnelle, que nous décrirons, avec la métrique qui le définit, au §6.4.

(4) L'idée ensuite est de « compter » ses trajectoires. Nous mettrons en évidence au §6.5.a une propriété, l'énergie finie, qui est automatique pour un pseudo-gradient sur une variété compacte, et qui sera utile ici.

(5) Nous montrerons que les trajectoires d'énergie finie joignent bien deux points critiques, c'est-à-dire le théorème 6.5.6, au §6.5.b.

(6) Comme dans le cas de Morse (§3.2.b), nous aurons besoin d'une propriété de compacité de l'espace des trajectoires d'énergie finie, le théorème 6.5.4.

(7) Et bien sûr, nous aurons besoin que ces espaces de trajectoires soient des variétés, une propriété de généricité, telle que la propriété de Smale pour un champ assez proche (le théorème 2.2.5), ce que nous réaliserons au chapitre 8.

(8) La différentielle du supposé complexe ainsi définie, il nous faudra encore vérifier que $\partial \circ \partial = 0$. Pour le cas de Morse, nous avons utilisé une propriété de recollement (au §3.2.c). Nous démontrerons une propriété analogue au chapitre 9.

(9) Nous montrerons, par les mêmes méthodes qu'au §3.4, que l'homologie du complexe enfin défini ne dépend ni de la fonctionnelle ni du champ de vecteurs choisis.

(10) Et enfin, en considérant le cas d'un hamiltonien autonome $\mathcal{C}^2$ -petit, cette indépendance nous donnera le fait que l'homologie ainsi construite, l'homologie de Floer, coïncide avec l'homologie de Morse de la variété. L'évidente inégalité de dimensions entre la dimension des espaces vectoriels intervenant dans le complexe donnera donc le résultat escompté, de façon complètement analogue aux inégalités de Morse (la proposition 4.4.3).

Les hypothèses. Nous ferons, sur la variété symplectique W , les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 6.2.1. Pour toute application $\mathcal{C}^\infty$, $w : S^2 \rightarrow W$,

$$\int_{S^2} w^* \omega = 0.$$

Cette hypothèse est parfois appelée, dans la littérature, « asphéricité symplectique » (la forme symplectique est nulle sur les sphères). Elle peut s'exprimer sous la forme

$$\langle \omega, \pi_2(W) \rangle = 0.$$

Hypothèse 6.2.2. *Pour toute application $\mathcal{C}^\infty$, $w : S^2 \rightarrow W$, il existe une trivialisation symplectique du fibré w^*TW .*

Cette hypothèse peut aussi s'exprimer sous la forme

$$\langle c_1(TW), \pi_2(W) \rangle = 0,$$

où $c_1(TW)$ désigne la première classe de Chern du fibré vectoriel complexe TW (voir le § 15.2).

Ces deux hypothèses sont vérifiées, par exemple, quand toutes les applications de S^2 dans W se prolongent à la boule B^3 , c'est-à-dire quand $\pi_2(W) = 0$.

6.3. La fonctionnelle d'action

6.3.a. Espace de lacets. Nous recherchons des trajectoires périodiques d'un certain champ de vecteurs, en particulier des applications $\mathcal{C}^\infty$

$$x : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow W.$$

Nous allons donc devoir considérer l'espace de ces applications (à la place de la variété V).

La composante connexe des points fixes. Bien entendu, l'espace de tous les lacets n'est en général pas connexe : il est bien clair que deux lacets qui ne sont pas homotopes ne sont pas dans la même composante connexe. Nous allons donc nous restreindre à une composante connexe, et il est naturel de considérer celle qui contient les lacets constants, puisque ceux-ci correspondent aux points critiques dans le cas autonome. Appelons donc $\mathcal{L}W$ l'espace des lacets *contractiles* sur la variété W , c'est-à-dire des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$x : S^1 \longrightarrow W$$

(des lacets libres⁽²⁾) homotopes à l'application constante.

Cet espace est muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$ et d'une distance d_∞ qui définit cette topologie (voir au besoin le § 14.3.b). Il est bien connexe par arcs (on relie chaque lacet au lacet constant par un chemin qui est une homotopie entre les deux).

⁽²⁾C'est dire que le point base des lacets n'est pas imposé. De même, les homotopies entre ces lacets sont libres.

Groupe fondamental. Fixons un point base dans l'espace de lacets, le lacet constant égal à un point x_0 choisi dans W , lacet que nous notons encore x_0 . Un lacet de base x_0 dans $\mathcal{L}W$ est une application

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] \times S^1 &\longrightarrow W \\ (s, t) &\longmapsto \gamma(s, t)\end{aligned}$$

avec

$$\gamma(0, t) = \gamma(1, t) = x_0(t) = x_0.$$

Ce qui peut être considéré comme une application $\tilde{\gamma} : S^2 \rightarrow W$ (figure 1).

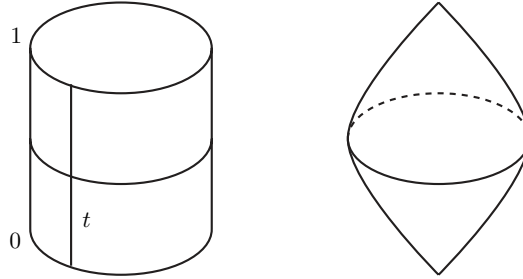


FIGURE 1

Structure de variété, espace tangent. Il est naturel de traiter $\mathcal{L}W$ comme une variété. Dans un premier temps, nous n'aurons guère besoin d'explicitier cette structure de variété : elle est utilisée ici de façon assez formelle, les équations et le travail se passent dans W . Pour préparer les considérations du chapitre 8, nous la décrivons à la fin de ce chapitre (au §6.8). Pour le moment, la seule chose à comprendre est ce qu'est un vecteur tangent en un point $x \in \mathcal{L}W$. Si un vecteur tangent en x est considéré comme une classe d'équivalence de courbes passant par x , il faut considérer une courbe $s \mapsto u(s) \in \mathcal{L}W$ avec $u(0) = x$, soit ici

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \times S^1 &\longrightarrow W \\ (s, t) &\longmapsto u(s, t) \quad \text{avec } u(0, t) = x(t).\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\frac{\partial}{\partial s} u(s, t)|_{s=0} \in T_{x(t)}W,$$

de sorte qu'il est naturel de considérer un vecteur tangent à $\mathcal{L}W$ en x comme un champ de vecteurs tangent à W défini le long de x , c'est-à-dire une section Y de x^*TW ,

$$Y(t) \in T_{x(t)}W \quad \text{pour tout } t \in S^1.$$

On peut aussi penser à Y comme à une application

$$Y : \mathbf{R} \longrightarrow TW \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} Y(t) \in T_{x(t)}W \\ Y(t+1) = Y(t) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

(voir aussi l'exercice 24 page 490).

Une 1-forme α , par exemple la différentielle d'une fonction, définit une forme linéaire sur l'ensemble de ces vecteurs tangents en x .

6.3.b. La fonctionnelle d'action. Maintenant, W est une variété munie d'une forme symplectique ω et H est un hamiltonien dépendant du temps,

$$\begin{aligned} W \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, t) &\longmapsto H_t(x) \end{aligned}$$

dont nous supposons, comme la remarque 6.1.3 nous le permet, qu'il est périodique en t , c'est-à-dire tel que

$$H_{t+1}(x) = H_t(x) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Considérons l'expression

$$\mathcal{A}_H(x) = - \int_D u^* \omega + \int_0^1 H_t(x(t)) dt$$

où u est un prolongement de $x : S^1 \rightarrow W$ au disque, c'est-à-dire une application $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\} \rightarrow W$ telle que $u(e^{2i\pi t}) = x(t)$.

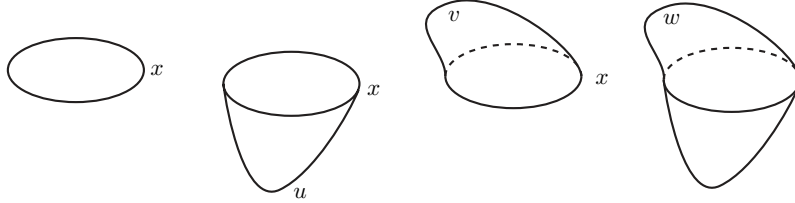


FIGURE 2

La deuxième intégrale est bien définie mais la première dépend *a priori* du choix de u . Si v est un autre prolongement, alors

$$\int_D u^* \omega - \int_D v^* \omega = \int_{S^2} w^* \omega$$

où w est définie en recollant les deux disques le long de leur bord commun (figure 2). L'hypothèse 6.2.1 signifie que la classe de cohomologie de de Rham de la forme symplectique ω s'annule sur le π_2 , ce qui s'écrit aussi, nous l'avons dit,

$$\langle \omega, \pi_2(W) \rangle = 0.$$

Elle est vérifiée, en particulier, si $\pi_2(W) = 0$, c'est-à-dire si $\mathcal{L}W$ est simplement connexe (voir aussi le §6.7, appendice à ce chapitre). En conclusion, sous l'hypothèse 6.2.1, la fonctionnelle $\mathcal{A}_H$ est bien définie.

Exemple 6.3.1. Considérons par exemple le cas où $W = \mathbf{R}^{2n}$, avec la forme symplectique

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_i = d \sum p_i dq_i.$$

Alors, sur n'importe quel disque dont le bord est notre lacet x ,

$$\int_{D^2} u^* \omega = \int_{S^1} x^* (pdq),$$

de sorte que

$$\mathcal{A}_H(x) = \int_0^1 (H_t dt - pdq)$$

... l'intégrale d'*action* des physiciens⁽³⁾.

Remarque 6.3.2. Il y a bien d'autres variétés symplectiques que $\mathbf{R}^{2n}$ qui satisfont à l'hypothèse faite, les tores $\mathbf{T}^{2n}$, les surfaces de genre au moins 1, les cotangents (en vertu de l'exercice 4 page 484). Mais, ni la sphère S^2 ni aucun de ses cousins $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ n'ont cette propriété (en vertu cette fois de l'exercice 5 (page 484)).

Sous notre hypothèse, $\mathcal{A}_H$ définit bien une application

$$\mathcal{L}W \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Et nous avons :

Proposition 6.3.3. *Un lacet x est un point critique de $\mathcal{A}_H$ si et seulement si $t \mapsto x(t)$ est une solution périodique du système hamiltonien $\dot{x} = X_t(x(t))$.*

Démonstration de la proposition. Calculons la différentielle de $\mathcal{A}_H$, au point $x(t)$, sur un vecteur tangent $Y(t)$. On prolonge x en $\tilde{x}(s, t)$, définie pour s dans un voisinage de 0, de façon que

$$\begin{cases} \tilde{x}(0, t) = x(t) \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial s}(0, t) = Y(t). \end{cases}$$

Ainsi

$$(d\mathcal{A}_H)_x(Y) = \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{A}_H(\tilde{x})|_{s=0}.$$

Évaluons donc cette dérivée.

⁽³⁾C'est la raison pour laquelle cette fonctionnelle s'appelle $\mathcal{A}_H$.

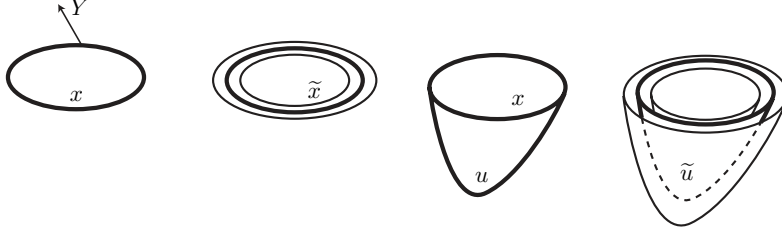


FIGURE 3

Pour cela, choisissons un prolongement de u en $\tilde{u}(s, z)$ de façon que

$$\begin{cases} \tilde{u}(0, z) = u(z) \\ \tilde{u}(s, e^{2i\pi t}) = \tilde{x}(s, t) \end{cases}$$

et prolongeons Y en posant

$$Y(z) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}(0, z).$$

Nous avons alors

$$\mathcal{A}_H(\tilde{x}(s, t)) = - \int_D \tilde{u}^* \omega + \int_0^1 H_t(\tilde{x}(s, t)) dt.$$

Dérivée le premier terme donne

$$\begin{aligned} - \int_D \left(\frac{d}{ds} \tilde{u}^* \omega \right) |_{s=0} &= - \int_D u^* (\mathcal{L}_{Y(z)} \omega) = - \int_D u^* (di_{Y(z)} \omega) \\ &= - \int_{S^1} x^* (i_{Y(t)} \omega) = - \int_0^1 \omega(Y(t), \dot{x}(t)) dt \\ &= \int_0^1 \omega(\dot{x}(t), Y(t)) dt. \end{aligned}$$

Dérivée le second donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} H_t(\tilde{x}(s, t)) |_{s=0} dt &= - \int_0^1 (dH_t)_{\tilde{x}(0, t)}(Y(t)) dt \\ &= \int_0^1 \omega_{x(t)}(Y(t), X_t(x(t))) dt. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc finalement

$$(d\mathcal{A}_H)_x(Y) = \int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_t(x), Y) dt.$$

D'où nous déduisons que la différentielle $(d\mathcal{A}_H)_x$ est nulle si et seulement si

$$\omega(\dot{x}(t) - X_t(x), Y) = 0 \quad \forall Y,$$

c'est-à-dire, grâce à la non-dégénérescence de ω , si et seulement si $\dot{x} = X_t(x)$, le résultat espéré. $\square$

Nous dirons que x est un point critique *non dégénéré* pour $\mathcal{A}_H$ si c'est une trajectoire non dégénérée (au sens explicité ci-dessus dans la définition 5.4.4).

Remarques 6.3.4 (cas d'un hamiltonien autonome).

(1) Nous avons vu que, si x est un point critique pour H , alors la trajectoire constante x est un point critique de $\mathcal{A}_H$ (et que la réciproque est vraie pour H « petit »).

(2) Nous avons vu aussi (c'est la proposition 5.4.5) que, si x est non dégénéré pour $\mathcal{A}_H$, il l'est pour H (et que la réciproque est vraie pour H « petit » — c'est la remarque 5.4.7).

(3) Si x est un point critique de $\mathcal{A}_H$ et une trajectoire *non constante*, alors il est dégénéré, puisque le champ X_H est un point fixe de $T_x\varphi^1$.

La dernière remarque est que les valeurs de $\mathcal{A}_H$ en deux points critiques distincts (géométriquement distincts, au sens où ce sont deux trajectoires géométriquement différentes) peuvent être supposées différentes, ce que nous énonçons sous forme d'un lemme (qui sera utilisé plus bas).

Lemme 6.3.5. *Si x et y sont des points critiques géométriquement distincts de $\mathcal{A}_H$, il existe une fonction $\tilde{H}$, proche de H pour la topologie $\mathcal{C}^2$, telle que $\mathcal{A}_{\tilde{H}}$ ait les mêmes points critiques que $\mathcal{A}_H$, avec des valeurs critiques différentes.*

Démonstration. Il suffit de modifier le hamiltonien H en lui ajoutant une fonction H_0 , constante au voisinage des orbites 1-périodiques de X_t , $\mathcal{C}^2$ -petite et telle que, pour tous points critiques x et y distincts de $\mathcal{A}_H$,

$$\mathcal{A}_H(x) + H_0(x(0)) \neq \mathcal{A}_H(y) + H_0(y(0)).$$

Si H_0 est assez petit, les points critiques de $\mathcal{A}_{H+H_0}$ sont ceux de $\mathcal{A}_H$ et, pour un point critique x , on a

$$\mathcal{A}_{H+H_0}(x) = \mathcal{A}_H(x) + \int_0^1 H_0(x(t)) dt = \mathcal{A}_H(x) + H_0(x(0)). \quad \square$$

6.4. Le gradient, l'équation de Floer

Comme dans le cas de Morse, nous avons besoin d'un champ de vecteurs (celui dont les trajectoires vont définir la différentielle du complexe). Nous allons utiliser le gradient pour une certaine métrique sur l'espace des lacets contractiles $\mathcal{LW}$. Attention, le gradient dépend de la métrique ; la souplesse

que nous aurons si nous devons changer de champ de vecteurs (penser à la propriété de Smale au chapitre 2), c'est à travers les métriques (et donc les structures presque complexes) que nous l'aurons.

Commençons par fixer une structures presque complexe J calibrée par ω sur W (voir le §5.5). Elle définit une métrique riemannienne g sur W , par

$$g(X, Y) = \omega(X, J(Y)).$$

Une métrique sur $\mathcal{L}W$ s'en déduit, par

$$\langle Y, Z \rangle = \int_0^1 g(Y(t), Z(t)) dt$$

(ici, Y et Z désignent des champs de vecteurs définis le long d'un lacet x). Il est clair en effet que cette formule définit une forme bilinéaire symétrique ; comme g_t est définie positive, cette forme vaut aussi

$$\langle Y, Y \rangle = \int_0^1 g(Y(t), Y(t)) dt \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $Y = 0$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Elle s'écrit encore

$$\langle Y, Z \rangle = \int_0^1 \omega_{x(t)}(Y(t), J(Z(t))) dt.$$

Si $f : \mathcal{L}W \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction, son gradient est le champ de vecteurs $\text{grad } f$ défini par

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}_x f, Y \rangle_x &= \int_0^1 g_t((\text{grad}_x f)(t), Y(t)) dt \\ &= \int_0^1 \omega_{x(t)}((\text{grad}_x f)(t), JY(t)) dt = (df)_x(Y). \end{aligned}$$

Comme nous avons aussi (voir le §6.3.b)

$$(d\mathcal{A}_H)_x(Y) = \int_0^1 \omega_{x(t)}(\dot{x}(t) - X_t(x), Y(t)) dt,$$

le gradient de $\mathcal{A}_H$ est

$$-\mathcal{X}_H(t) = (\text{grad}_x \mathcal{A}_H)(t) = J_{x(t)}(\dot{x}(t)) + \text{grad}_{x(t)} H_t$$

(le gradient de H_t est calculé pour la métrique g). Les trajectoires du champ de vecteurs $\mathcal{X} = \mathcal{X}_H$ (opposé du gradient, en cohérence avec ce qui précède), sont donc les solutions

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{L}W \\ s &\longmapsto u(s) \end{aligned}$$

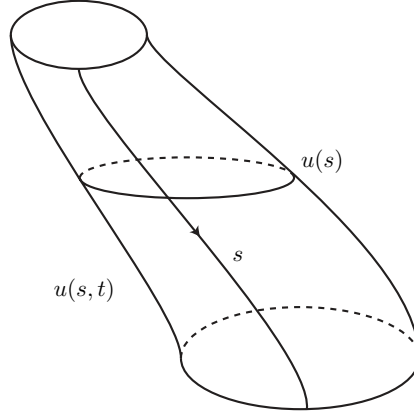


FIGURE 4

(où il est entendu que $u(s)$ est, pour chaque s , un lacet, dont nous noterons $u(s, t)$ la valeur au temps t) de l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -J_{u(s,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \text{grad}_{u(s,t)} H_t(u(s, t))$$

... ou, plus brièvement, de l'équation différentielle (aux dérivées partielles)

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H_t(u) = 0.$$

Cette équation est l'équation de Floer. Rappelons que ce sont ses solutions $\mathcal{C}^\infty$, contractiles et périodiques de période 1 en t qui nous intéressent.

Remarques 6.4.1.

(1) Si H ne dépend pas de t , les solutions u qui n'en dépendent pas non plus vérifient

$$\frac{du}{ds} + \text{grad } H(u) = 0.$$

Ce sont les trajectoires (de l'opposé) du gradient de H .

(2) En général, les solutions u qui ne dépendent pas de s vérifient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = J(u) \text{grad } H_t(u) = X_t(u).$$

C'est le fait (attendu) que les trajectoires stationnaires du flot du gradient sont les solutions périodiques du système hamiltonien.

(3) Si $H_t \equiv 0$, l'équation est simplement

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

c'est l'équation de Cauchy-Riemann, on dit que $(s + it) \mapsto u(s, t)$ est une courbe J -holomorphe.

6.5. Espace des solutions

Nous étudions ici des espaces de solutions de l'équation de Floer

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H_t(u) = 0.$$

Nous utilisons les deux points de vue schématisés sur la figure 5 : les solutions de l'équation sur W sont aussi les trajectoires du champ de vecteurs $\text{grad } \mathcal{A}_H$ sur $\mathcal{L}W$.

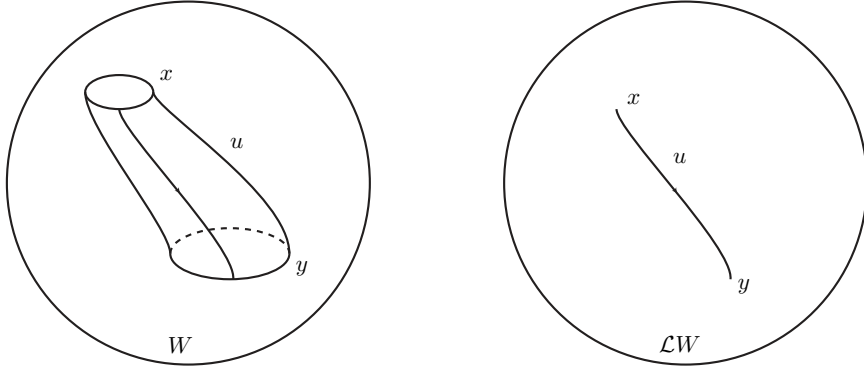


FIGURE 5

6.5.a. Définition de l'énergie. Dans le cas d'une fonction et d'un champ de pseudo-gradients adapté sur une variété V compacte sans bord, toutes les trajectoires du champ de vecteurs joignent deux points critiques.

Ce n'est pas automatiquement le cas dans le contexte où nous nous sommes placés. Pour faire comprendre les problèmes possibles, voici une analogie. Si V est une variété à bord, il peut y avoir des trajectoires du champ de pseudo-gradient qui arrivent en un point critique sans provenir d'un point critique (ou inversement), parce qu'elles proviennent du bord. Les trajectoires qui ne s'approchent pas du bord vérifient encore la propriété de joindre deux points critiques.

Remarquons que dans le cas Morse-sur-variété-compacte⁽⁴⁾, si $u : \mathbf{R} \rightarrow V$ est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{du}{ds} + X(u) = 0,$$

⁽⁴⁾Voir aussi l'exercice 27 page 491.

trajectoire du champ de pseudo-gradients X , on peut définir son *énergie*

$$E(u) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u^* df.$$

Si u joint deux points critiques a et b au sens où $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = a$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = b$, c'est simplement

$$E(u) = f(a) - f(b)$$

(le signe $-$ dans la définition fait que l'énergie est positive, le point a est au-dessus du point b pour la fonction f).

Remarque 6.5.1 (formes fermées). Remarquons qu'il est possible de remplacer la forme exacte df par une 1-forme fermée α dans cette définition. Nous verrons au § 6.7 qu'il est encore possible de construire un champ de pseudo-gradients adapté, mais il est facile de se convaincre que toutes les trajectoires d'un tel champ de vecteurs ne relient pas des zéros de la forme. Dans ce cas, les trajectoires d'énergie finie sont exactement celles qui joignent deux zéros de la forme. C'est aussi ce qui se passe pour la fonctionnelle d'action.

Dans le cas de la fonctionnelle d'action qui nous intéresse ici, définissons l'énergie d'une solution de façon analogue, ce qui revient à intégrer le carré de la norme du gradient le long d'une solution (d'où la terminologie) :

$$\begin{aligned} E(u) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \mathcal{A}_H(u(s)) ds \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} - \|\text{grad } \mathcal{A}_H\|^2 ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{S^1} \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{S^1} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} - X_t(u) \right|^2 \right) dt \right) ds. \end{aligned}$$

Remarquons que, comme u est une solution, les deux termes dans l'intégrale sont égaux, on a donc

$$E(u) = \int_{\mathbf{R} \times S^1} \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 ds dt.$$

Remarques 6.5.2.

- (1) L'énergie est positive.
- (2) L'énergie d'une solution est nulle si et seulement si $\partial u / \partial s$ est nulle, c'est-à-dire si u ne dépend pas de s ... et u est solution de l'équation de Floer, c'est-à-dire si et seulement si u est un point critique de la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H$.

(3) Si la solution u considérée joint deux points critiques, c'est-à-dire s'il existe x et y , points critiques de $\mathcal{A}_H$, tels que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u_s(t) = x, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} u_s(t) = y,$$

alors

$$E(u) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y) < +\infty.$$

Les solutions qui joignent deux points critiques sont d'énergie finie.

Considérons donc l'espace $\mathcal{M}$ défini par

$$\mathcal{M} = \{u : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow W \mid u \text{ est une solution contractile, } \mathcal{C}^\infty, \text{ et d'énergie finie}\}.$$

Pour éviter les problèmes de définition de la topologie sur cet espace, nous considérerons toujours que la variété symplectique compacte W est plongée dans un espace euclidien $\mathbf{R}^m$ (pour m assez grand). Nous utiliserons la topologie $\mathcal{C}^\infty$ pour les applications de S^1 dans $\mathbf{R}^m$ et la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{C}^\infty$ sur les compacts de $\mathbf{R} \times S^1$, avec les notations $\mathcal{C}^\infty(S^1, W)$, $\mathcal{C}^\infty(S^1; \mathbf{R}^m)$, $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; W)$, $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$.

Un puissant résultat de régularité elliptique permet de démontrer l'indispensable propriété contenue dans la proposition que voici.

Proposition 6.5.3. *Toute solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation de Floer est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, sur $\mathcal{M}$, les topologies $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$, $\mathcal{C}_{\text{loc}}^1$ et $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ coïncident.*

Démonstration. La démonstration est une conséquence immédiate du lemme de régularité elliptique 12.1.1 et de la proposition 6.6.2. $\square$

Une propriété importante de cet espace $\mathcal{M}$ est sa compacité, une propriété essentielle, que nous démontrons ci-dessous (au §6.6) et que nous énonçons ici :

Théorème 6.5.4. *Supposons que la variété symplectique compacte (W, ω) satisfait à l'hypothèse 6.2.1, c'est-à-dire à*

$$\forall f : S^2 \longrightarrow W, \quad \int_{S^2} f^* \omega = 0.$$

Alors, $\mathcal{M}$ est compact dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R} \times S^1, W)$.

Remarque 6.5.5. Dans tout ce paragraphe, nous nous plaçons dans $\mathcal{M}$. Nous n'avons pas démontré que l'équation de Floer possède des solutions (attention, ce n'est pas un problème de Cauchy).

6.5.b. Les solutions d'énergie finie tendent vers des points critiques. Nous allons montrer une réciproque à la dernière des remarques 6.5.2, précisément le théorème suivant.

Théorème 6.5.6. *Supposons que toutes les trajectoires périodiques de X_t sont non dégénérées. Alors, pour tout $u \in \mathcal{M}$, il existe deux points critiques x et y de $\mathcal{A}_H$ tels que*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, \cdot) = x, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, \cdot) = y$$

dans $\mathcal{C}^\infty(S^1; W)$. De plus,

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) = 0$$

uniformément en t .

Le long d'une trajectoire, la fonction tend vers une valeur critique.
Pour commencer, montrons un résultat plus faible.

Proposition 6.5.7. *Soit $u \in \mathcal{M}$. Il existe deux points critiques x et y de $\mathcal{A}_H$ tels que*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \mathcal{A}_H(u_s) = \mathcal{A}_H(x), \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_H(u_s) = \mathcal{A}_H(y).$$

Remarque 6.5.8. Une application évidente de cette proposition est le fait que, si $\mathcal{M}$ n'est pas vide, alors $\mathcal{A}_H$ a, en effet, des points critiques.

Démonstration. Nous nous contenterons du cas $s \rightarrow +\infty$, l'autre cas étant analogue. La fonction (réelle de variable réelle) $s \mapsto \mathcal{A}_H(u_s)$ est décroissante (sa dérivée est l'opposé de la norme du gradient, qui est négative). Il suffit donc de montrer qu'il existe un point critique y de $\mathcal{A}_H$ et une suite s_k de réels tendant vers l'infini tels que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_H(u_{s_k}) = \mathcal{A}_H(y).$$

Ce que nous allons démontrer en trois temps :

- (1) Il existe une suite s_k telle que u_{s_k} converge pour la topologie $\mathcal{C}^0(S^1; W)$ vers une limite y .
- (2) Cette limite y est $\mathcal{C}^\infty$ et c'est un point critique de $\mathcal{A}_H$.
- (3) $\mathcal{A}_H(u_{s_k})$ tend bien vers $\mathcal{A}_H(y)$.

Premier temps. Soit $u \in \mathcal{M}$. Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{S^1} \left| \frac{\partial u}{\partial t} - X_t(u) \right|^2 dt \right) ds < +\infty,$$

l'intégrale de la norme L^2 de $\partial u / \partial t - X_t(u)$ est finie. Il existe donc une suite (s_k) avec $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = +\infty$ (resp. $-\infty$) telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s_k, t) - X_t(u(s_k, t)) \right\|_{L^2} = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, posons $u_{s_k} = u_k$. Et pour simplifier la compréhension, remarquons que la norme qui figure dans les intégrales que nous venons d'écrire est, en principe, la norme définie par $J \dots$ mais la variété W est compacte et plongée dans $\mathbf{R}^m$, l'application tangente au plongement a donc une norme opératorielle bornée pour la norme définie par J à la source, et la norme euclidienne au but, ce qui fait que nous pouvons oublier (comme nous l'avons fait en anticipant cette remarque) la dépendance en t de la norme dans l'intégrale.

Nous avons donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 \|\dot{u}_k - X_t(u_k)\|^2 dt = 0$$

ou encore

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\dot{u}_k - X_t(u_k)\|_{L^2(S^1; \mathbf{R}^m)} = 0.$$

Comme la variété W est compacte, $X_t(u(s_k, t))$ est borné et il existe donc un $B > 0$ tel que

$$\|\dot{u}_k\|_{L^2} \leq B.$$

La famille (u_k) est donc équicontinue :

$$\begin{aligned} \|u_k(t_1) - u_k(t_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} \dot{u}_k(t) dt \right\| \\ &\leq \int_{S^1} \mathbf{1}_{[t_0, t_1]} \|\dot{u}_k\| \\ &\leq \sqrt{t_1 - t_0} \|\dot{u}_k\|_{L^2} \quad (\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq B \sqrt{t_1 - t_0}. \end{aligned}$$

L'image de u_k est contenue dans W qui est compacte. La suite u_k est donc justiciable du théorème d'Ascoli⁽⁵⁾ et nous concluons que la suite u_k a bien une limite y pour la topologie $\mathcal{C}^0(S^1; \mathbf{R}^m)$, c'est-à-dire dans la topologie $\mathcal{C}^0(S^1; W)$. Ce qui achève le premier pas de cette démonstration.

⁽⁵⁾Un énoncé en est rappelé au § 16.1.

Deuxième temps. Montrons que la limite y est $\mathcal{C}^\infty$ et solution du système hamiltonien $\dot{x} = X_t(x)$.

Lemme 6.5.9. *La limite y vérifie*

$$y(t) - y(0) = \int_0^t X_t(y(\tau)) d\tau.$$

Le résultat attendu découle du lemme puisque celui-ci implique que y , étant continue, est $\mathcal{C}^1$, puis $\mathcal{C}^2 \dots$ et que c'est une solution. Elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ (un « bootstrapping⁽⁶⁾ » bien visible ici). On obtient ainsi la convergence, au sens $\mathcal{C}^0$, vers une solution $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration du lemme. Évaluons la différence

$$y(t) - y(0) - \int_0^t X_t(y(\tau)) d\tau = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(u_k(t) - u_k(0) - \int_0^t X_t(y(\tau)) d\tau \right)$$

(c'est l'avantage d'être dans $\mathbf{R}^m$, un espace vectoriel). Ensuite

$$\begin{aligned} y(t) - y(0) - \int_0^t X_t(y(\tau)) d\tau &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t \dot{u}_k(\tau) d\tau - \int_0^t X_t(y(\tau)) d\tau \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t \dot{u}_k(\tau) - X_t(u_k(\tau)) d\tau \right) \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t (X_t(u_k(\tau)) - X_t(y(\tau))) d\tau \right). \end{aligned}$$

Chacun des deux termes tend vers 0. Le fait que u_k tende vers y au sens $\mathcal{C}^0$ implique que le deuxième terme tend vers 0. Pour le premier terme, utilisons le fait que $\|\dot{u}_k - X_t(u_k)\|_{L^2}$ tend vers 0 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_0^t (\dot{u}_k(\tau) - X_\tau(u_k)) d\tau \right| = \left| \int_0^1 1_{[0,t]}(\dot{u}_k - X_t(u_k)) \right| \leq \sqrt{t} \|\dot{u}_k - X_t(u_k)\|_{L^2}$$

qui tend bien vers 0. □

La convergence $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) découle de ces arguments.

⁽⁶⁾Cette expression anglo-saxonne désigne le fait de réussir à se soulever, à entrer en lévitation, juste en tirant sur ses lacets de chaussures. Elle désigne d'ordinaire ce que l'on appelle en français la « régularité elliptique », où une solution faible, au sens des distributions, d'une équation aux dérivées partielles arrive à être automatiquement une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Voir le chapitre 16.

Troisième temps. Montrons donc que $\mathcal{A}_H(u_k)$ tend vers $\mathcal{A}_H(y)$. Clairement, la partie intégrale du hamiltonien ne pose pas de problème et

$$\int_0^1 H_t(u_k) dt \text{ tend vers } \int_0^1 H_t(y(t)) dt$$

puisque u_k tend vers y pour la topologie $\mathcal{C}^0$.

Étudions donc l'autre morceau de la fonctionnelle d'action. Pour cela, choisissons des prolongements $\tilde{u}_k$ et $\tilde{u}_y$ de u_k et de y (respectivement) au disque. Nous devons montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{D^2} \tilde{u}_k^* \omega - \int_{D^2} \tilde{u}_y^* \omega \right) = 0.$$

Si la forme ω était exacte, $\omega = d\lambda$, nous aurions

$$\begin{aligned} \int_{D^2} \tilde{u}_k^* \omega - \int_{D^2} \tilde{u}_y^* \omega &= \int_{S^1} u_k^* \lambda - \int_{S^1} y^* \lambda \\ &= \int_0^1 (\lambda(\dot{u}_k) - \lambda(\dot{y})) dt \\ &= \int_0^1 \lambda(\dot{u}_k - X_t(u_k)) dt - \int_0^1 \lambda(X_t(u_k) - X_t(y)) dt. \end{aligned}$$

La dernière intégrale tend vers 0 parce que u_k tend vers y . Pour la première,

$$\left| \int_0^1 (\lambda(\dot{u}_k) - X_t(u_k)) dt \right| \leq \sup \|\lambda\| \|\dot{u}_k - X_t(u_k)\|_{L^1}$$

... norme L^1 que l'on peut remplacer par la norme L^2 grâce à la compacité de S^1 . D'où le résultat espéré puisque cette norme L^2 tend vers 0, comme nous l'avons remarqué au cours du premier temps.

Sauf que W est compacte et que donc, ω n'est pas exacte. Choisissons un voisinage $\mathcal{U}$ de l'image de y dans W , qui se rétracte sur y de sorte que $\omega|_{\mathcal{U}}$ est exacte. Pour k assez grand, l'image de u_k est contenue dans $\mathcal{U}$. Fabriquons maintenant une sphère S^2 en recollant

- un cylindre $C \rightarrow \mathcal{U}$, homotopie entre u_k et y contenue dans $\mathcal{U}$,
- le disque $\tilde{u}_y$ de bord y ,
- le disque $\tilde{u}_k$ de bord u_k .

Avec l'hypothèse 6.2.1 suivant laquelle l'intégrale de ω est nulle sur les sphères, il est clair que la différence

$$\int_{D^2} \tilde{u}_k^* \omega - \int_{D^2} \tilde{u}_y^* \omega$$

est l'intégrale de ω sur le cylindre C , sur lequel ω est exacte et où le calcul précédent s'applique. $\square$

Les trajectoires tendent vers des points critiques. Montrons maintenant que les trajectoires tendent bien vers des *points* critiques, c'est-à-dire le théorème 6.5.6. Le point important est le fait que l'espace $\mathcal{M}$ est *compact*, ce que nous démontrerons plus bas (c'est le théorème 6.5.4).

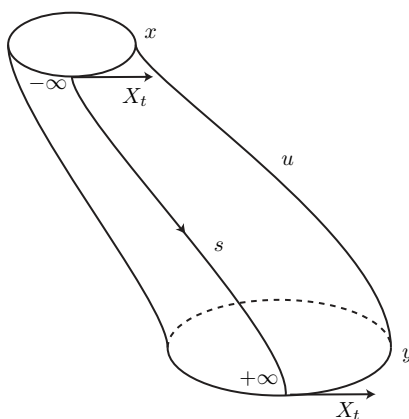


FIGURE 6

Supposons donc ici que toutes les trajectoires périodiques de X_t sont non dégénérées.

Lemme 6.5.10. *Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, les points critiques de A_H , trajectoires périodiques de X_t sont en nombre fini.*

Démonstration. Ces points critiques sont les points d'intersection dans la variété compacte $W \times W$ des deux sous-variétés (de dimension moitié $2n$) que sont

- la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in W\}$
- et le graphe du flot au temps 1 de X_t .

L'hypothèse de non-dégénérescence est équivalente à la transversalité⁽⁷⁾ de ces deux sous-variétés. Leur intersection est alors une sous-variété fermée de dimension 0 de W , donc un nombre fini de points puisque celle-ci est compacte. $\square$

Notons une conséquence de la proposition 6.5.7.

Corollaire 6.5.11. *Il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{M}$,*

$$-C \leq A_H(u) \leq C \quad \text{et} \quad 0 \leq E(u) \leq C.$$

⁽⁷⁾ Comme en théorie de Morse, la non-dégénérescence se traduit en transversalité.

Démonstration. L'ensemble des points critiques de $\mathcal{A}_H$ est fini (et non vide comme nous l'avons remarqué page 159), donc $\mathcal{A}_H$ est bornée sur cet ensemble⁽⁸⁾. Après quoi il reste à utiliser

- que $s \mapsto \mathcal{A}_H(u_s)$ est strictement décroissante
- et, pour u dans $\mathcal{M}$, et pour des points critiques x et y comme dans l'énoncé de la proposition 6.5.7 (c'est-à-dire tels que $\mathcal{A}_H(u_s)$ va de $\mathcal{A}_H(x)$ à $\mathcal{A}_H(y)$), que

$$E(u) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y). \quad \square$$

Remarque 6.5.12. Le groupe additif $\mathbf{R}$ opère à droite sur $\mathcal{M}$ par

$$(u \cdot \sigma)(s, t) = u(s + \sigma, t).$$

C'est dire que, si u est une solution de l'équation de Floer, alors $u \cdot \sigma$ en est une aussi (vérification immédiate), comme dans le cas d'un flot de gradient. Cette opération est continue, c'est-à-dire que si (u_n) tend vers u et (σ_n) tend vers σ , alors la suite $(u_n \cdot \sigma_n)$ tend vers $u \cdot \sigma$. Nous reviendrons plus bas sur ses propriétés.

Pour démontrer le théorème 6.5.6, commençons par démontrer un lemme.

Lemme 6.5.13. Soit $u \in \mathcal{M}$ et soit (s_k) une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$. Il existe une sous-suite $(s_{k'})$ de (s_k) et un point critique y de $\mathcal{A}_H$ tels que

$$\lim_{k' \rightarrow +\infty} u(s_{k'}) = y.$$

Démonstration du lemme. Notons $u_k = u \cdot s_k$. Comme $\mathcal{M}$ est compact (théorème 6.5.4 ci-dessus), il existe une sous-suite de (u_k) (que nous noterons encore (u_k)) qui converge vers un $v \in \mathcal{M}$. C'est dire que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, $\lim u_k(s, t) = v(s, t)$. Fixons donc s_0 et notons $v_{s_0}(t) = v(s_0, t)$. Nous avons

$$\mathcal{A}_H(v_{s_0}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_H(u_{s_0+s_k}) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_H(u_s),$$

puisque nous avons vu dans la proposition 6.5.7 que cette limite existe (et même que $\mathcal{A}_H(u_s)$ tend vers une valeur critique). Donc l'énergie de la trajectoire v est nulle, et donc v est une orbite périodique y (c'est la remarque 6.5.2 (2) ci-dessus).

Pour finir, $u_k(0) = u_{s_k}$ tend vers $v = y$ dans $\mathcal{C}^\infty(S^1, W)$. $\square$

Démonstration du théorème. Nous nous contenterons bien entendu d'étudier le cas où $s \rightarrow +\infty$. Rappelons que d_∞ désigne la distance $\mathcal{C}^\infty$ dans

⁽⁸⁾Voir aussi, en supprimant l'hypothèse de non-dégénérescence, l'exercice 30 page 492.

l'espace $\mathcal{LW}$ (voir le § 14.3.b). On considère, pour x point critique de $\mathcal{A}_H$, la boule ouverte

$$B(x, \varepsilon) = \{\gamma \in \mathcal{LW} \mid d_\infty(x, \gamma) < \varepsilon\}.$$

Comme nous l'avons dit, les points critiques de $\mathcal{A}_H$ sont en nombre fini⁽⁹⁾, de sorte que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, les boules $B(x, \varepsilon)$ sont disjointes. Appelons U_ε leur réunion (disjointe)

$$U_\varepsilon = \bigcup_{x \in \text{Crit } \mathcal{A}_H} B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{LW}.$$

Pour tout ε assez petit, il existe un s_ε tel que

$$u([s_\varepsilon, +\infty[\times S^1) \subset U_\varepsilon$$

(si cette assertion n'était pas vraie, il existerait un $\varepsilon_0 > 0$ et une suite (s_k) tendant vers $+\infty$ et telle que $u_{s_k} \notin U_{\varepsilon_0}$, mais d'après le lemme précédent, une sous-suite de u_{s_k} doit tendre vers un point critique, ce qui serait une contradiction).

Toujours d'après le lemme précédent, il existe un point critique de $\mathcal{A}_H$, $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_H$ tel que

$$u([s_\varepsilon, +\infty[\times S^1) \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Comme $u([s_\varepsilon, +\infty[\times \cdot)$ est connexe dans $\mathcal{LW}$ et comme les boules $B(x, \varepsilon)$ sont disjointes, on a

$$u([s_\varepsilon, +\infty[\times \cdot) \subset B(y, \varepsilon),$$

autrement dit, $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = y$.

Il reste à démontrer l'assertion sur $\partial u / \partial s$. Mais u est une solution donc

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -J\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \text{grad}_u H_t(u).$$

Lemme 6.5.14. Dans $\mathcal{C}^\infty(S^1; TW)$, on a :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{y}.$$

Démonstration. Supposons le contraire. Il existe alors une suite s_k tendant vers $+\infty$ telle que $\partial u_{s_k} / \partial t$ ne tend pas vers $\dot{y}$ quand k tend vers $+\infty$. Posons $u_k = u_{s+s_k}$. Alors $u_k, y \in \mathcal{M}$ et u_k tend vers y au sens $\mathcal{C}^0$. La régularité elliptique (proposition 6.5.3) implique alors que u_k tend vers y au sens $\mathcal{C}^\infty$, ce qui est une contradiction. $\square$

⁽⁹⁾C'est ici que sert l'hypothèse de non-dégénérescence.

En passant à la limite, on obtient donc

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) &= -J(\dot{y}) - \text{grad}_y H_t(y) \\ &= -J(\dot{y}) + JX_t \\ &= J(X_t(y) - \dot{y}) = 0.\end{aligned}\quad \square$$

Remarquons que l'on a aussi :

Proposition 6.5.15. *Soit u une solution de l'équation de Floer. Alors (vues dans $\mathbf{R}^m$) les dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

tendent vers 0, uniformément en t , lorsque s tend vers $\pm\infty$.

En effet, il suffit d'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -J\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_t\right)$$

(puisque u est une solution). Mais

$$\frac{\partial u}{\partial t} - X_t \text{ tend vers } 0 \text{ au sens } \mathcal{C}^\infty$$

puisque $X_t(u)$ tend vers $X_t(y)$ et $\partial u / \partial t$ tend vers $\dot{y}$. En dérivant la relation par rapport à t , on obtient que $\partial^2 u / \partial s \partial t$ tend vers 0, puis on dérive la même relation par rapport à s en appliquant ce qui précède. $\square$

Remarque 6.5.16. On peut démontrer de même, et par récurrence, que, pour $k \geq 1$,

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^m u}{\partial^k s \partial^{m-k} t} = 0.$$

Appelons

$$\mathcal{M}(x, y) = \left\{ u \in \mathcal{M} \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, \cdot) = x \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, \cdot) = y \right\}.$$

Nous avons remarqué (dans les remarques 6.5.2) que, pour $u \in \mathcal{M}(x, y)$,

$$E(u) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y).$$

Remarquons aussi que $\mathcal{M}(x, x) = \{x\}$. En effet, toute solution joignant x à lui-même doit être d'énergie nulle, et donc constante par rapport à s .

6.6. Démonstration de la compacité

Nous démontrons maintenant le théorème 6.5.4. Comme nous l'avons remarqué (remarques 6.4.1), dans le cas où H est nul, l'équation de Floer n'est autre qu'une équation de Cauchy-Riemann, dont les solutions sont tout simplement les courbes J -holomorphes de Gromov [36]. Le théorème de compacité de Gromov (voir aussi [56]) reste vrai ici, en présence d'un hamiltonien non nul. Pour ce paragraphe, nous suivons d'assez près l'exposé de [42].

Remarque 6.6.1. Nous avons déjà utilisé l'hypothèse d'asphéricité 6.2.1 pour définir la fonctionnelle d'action. Nous verrons que, pour obtenir la propriété de compacité, c'est une hypothèse importante (nous expliquerons précisément à quel endroit nous l'utiliserons).

Le théorème est conséquence de la proposition suivante.

Proposition 6.6.2. *Sous l'hypothèse 6.2.1 (c'est-à-dire $\langle [\omega], \pi_2(W) \rangle = 0$), il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$\forall u \in \mathcal{M}, \forall (s, t) \in \mathbf{R} \times S^1, \quad \|\text{grad}_{(s,t)} u\| \leq A.$$

Démonstration du théorème. La stratégie est, comme ci-dessus, de montrer que, étant donnée une suite $u_n \in \mathcal{M}$,

- d'abord, u_n a une sous-suite qui converge vers u_0 dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0(\mathbf{R} \times S^1; W)$;
- puis la limite u_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que c'est une solution de l'équation de Floer ;
- et enfin u_n tend bien vers u_0 dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; W)$.

La proposition 6.6.2 donne l'équicontinuité des éléments de $\mathcal{M}$. Donc l'adhérence de $\mathcal{M}$ dans l'ensemble des applications continues de $\mathbf{R} \times S^1$ dans W est compacte (toujours Ascoli), ce qui achève la première étape. Ensuite, un argument de régularité elliptique permet de réaliser les deux autres. Remarquons qu'il n'est pas possible d'utiliser la proposition 6.5.3, puisque u_0 est seulement continue ; un énoncé plus général est nécessaire, qui sera le lemme 12.1.1. Puis, d'après la proposition 6.5.3, les topologies $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$ et $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ coïncident sur $\mathcal{M}$. Celui-ci est donc aussi compact pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Démonstration de la proposition. Soit $u : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow W$ une solution. Il sera plus commode de la considérer comme une application (périodique en la variable t) de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans W , ce que nous ferons. Raisonnons par l'absurde en supposant la conclusion de la proposition fausse. C'est dire qu'il existe

une suite (u_k) d'éléments de $\mathcal{M}$ et une suite (s_k, t_k) d'éléments de $\mathbf{R}^2$ tels que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\text{grad}_{(s_k, t_k)} u_k\| = +\infty.$$

Dans cette démonstration, nous considérons donc une suite divergente d'éléments de $\mathcal{M}$ et montrons qu'en fait, elle va converger vers quelque chose dont l'existence est interdite par nos hypothèses, la bulle représentée sur les figures 7 et 8.

Soit (ε_k) une suite de nombres positifs tendant vers 0 et telle que

$$\lim_k \varepsilon_k \|\text{grad}_{(s_k, t_k)} u_k\| = +\infty.$$

Appliquons à la fonction $g = \|\text{grad } u\|$ le lemme ci-dessous⁽¹⁰⁾, dit du « demi-maximum ».

Lemme 6.6.3. *Soit $g : X \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction continue sur un espace métrique complet. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $y \in X$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ tels que*

$$\begin{cases} d(y, x_0) \leq 2\varepsilon \\ \varepsilon g(y) \geq \varepsilon_0 g(x_0) \\ g(x) \leq 2g(y) \end{cases} \quad \forall x \in B(y, \varepsilon).$$

Démonstration du lemme. Si $g(x) \leq 2g(x_0)$ sur toute la boule $B(x_0, \varepsilon_0)$, il n'y a rien à faire, il suffit de poser $y = x_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$. Sinon, il existe un x_1 dans la boule tel que $g(x_1) > 2g(x_0)$. Posons $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2$. Ainsi,

$$\varepsilon_1 g(x_1) > \varepsilon_0 g(x_0).$$

Si x_1 et ε_1 fonctionnent, nous nous arrêtons. Sinon, nous continuons. Nous construisons ainsi une suite x_n de points de la boule et une suite ε_n de nombres positifs tels que

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \\ \varepsilon_n g(x_n) \geq \varepsilon_0 g(x_0). \end{cases}$$

Évidemment, la première ligne fait tendre ε_n vers 0 et x_n vers une limite (notre espace est complet), de sorte que l'inégalité qui suit interdit au processus de continuer indéfiniment : on trouve un x_n et un ε_n qui conviennent au bout d'un nombre fini d'essais. $\square$

⁽¹⁰⁾C'est un lemme classique dans la théorie. Il semble que la paternité en revienne à Ekeland. Le début du chapitre IV de son livre [21] contient des variations sur ce thème.

Le lemme nous vend une (autre) suite ε_k et une (autre) suite (s_k, t_k) telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \|\text{grad}_{(s_k, t_k)} u_k\| = +\infty$$

$$\text{et} \quad 2\|\text{grad}_{(s_k, t_k)} u_k\| \geq \|\text{grad}_{(s, t)} u_k\| \quad \text{pour } (s, t) \in B((s_k, t_k), \varepsilon_k).$$

Posons $R_k = \|\text{grad}_{(s_k, t_k)} u_k\|$, ainsi $\varepsilon_k R_k \rightarrow +\infty$ et

$$v_k(s, t) = u_k\left(\frac{(s, t)}{R_k} + (s_k, t_k)\right),$$

de sorte que

$$\text{grad}_{(s, t)} v_k = \frac{1}{R_k} \text{grad}_{\frac{(s, t)}{R_k} + (s_k, t_k)} u_k,$$

en particulier, en $(s, t) = (0, 0)$,

$$\text{grad}_{(0, 0)} v_k = \frac{1}{R_k} \text{grad}_{(s_k, t_k)} u_k.$$

Ainsi, par construction, $\|\text{grad}_{(0, 0)} v_k\| = 1$ et, sur $B(0, \varepsilon_k R_k)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\text{grad}_{(s, t)} v_k\| &= \frac{1}{R_k} \|\text{grad}_{\frac{(s, t)}{R_k} + (s_k, t_k)} u_k\| \\ &\leq \frac{2}{R_k} \|\text{grad}_{(s_k, t_k)} u_k\| \leq 2, \end{aligned}$$

de sorte que le gradient est borné. Enfin, les u_k sont des solutions, donc v_k satisfait à

$$\frac{\partial v_k}{\partial s} + J(v_k) \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{1}{R_k} \text{grad}_{(t_k + \frac{t}{R_k}, v_k)} H = 0.$$

Appliquons alors le lemme de régularité elliptique 12.1.1, la suite v_k tend (à extraction d'une sous-suite près), vers une limite v , qui est dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}^2; W)$, et qui est une solution de l'équation de Floer. De plus,

$$\begin{cases} \|\text{grad}_{(0, 0)} v\| = 1, & \text{en particulier } v \text{ n'est pas constante,} \\ \|\text{grad}_{(s, t)} v\| \leq 2 & \text{pour tous } (s, t) \in \mathbf{R}^2, \\ \frac{\partial v}{\partial s} + J(v) \frac{\partial v}{\partial t} = 0, & \text{donc } v \text{ est } J\text{-holomorphe.} \end{cases}$$

Montrons enfin que v est d'énergie finie. Posons $B_k = B((s_k, t_k), \varepsilon_k)$.

$$\begin{aligned}
\int_{B(0, \varepsilon_k R_k)} \|\text{grad } v_k\|^2 &= \int_{B_k} \|\text{grad } u_k\|^2 dt ds \\
&\leq \int_{B_k} \left(\left\| \frac{\partial u_k}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\|^2 \right) dt ds \\
&= \int_{B_k} \left(\left\| \frac{\partial u_k}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} - X_t(u_k) + X_t(u_k) \right\|^2 \right) dt ds \\
&\leq \int_{B_k} \left(\left\| \frac{\partial u_k}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} - X_t(u_k) \right\|^2 \right) dt ds \\
&\quad + \int_{B_k} \left(\|X_t(u_k)\|^2 + 2 \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} - X_t(u_k) \right\| \|X_t(u_k)\| \right) dt ds \\
&\leq \int_{B_k} \left(\left\| \frac{\partial u_k}{\partial s} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} - X_t(u_k) \right\|^2 + 2 \|X_t\|^2 \right) dt ds \\
&\leq 3E(u_k) + 2 \int_{B_k} \|X_t\|^2 dt ds \leq 3C + 2 \int_{B_k} \|X_t\|^2 dt ds
\end{aligned}$$

où C est la constante donnée par le corollaire 6.5.11 (qui est conséquence de la proposition 6.5.7).

La dernière intégrale tend vers 0 quand k tend vers l'infini (B_k est une boule de rayon ε_k tendant vers 0), donc, pour k assez grand,

$$\int_{B(0, \varepsilon_k R_k)} \left\| \frac{\partial v_k}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\|^2 \leq 4C$$

et $B(0, \varepsilon_k R_k)$ tend à recouvrir $\mathbf{R}^2$, donc v est d'énergie finie en application du lemme de Fatou⁽¹¹⁾.

Nous assistons ici à la formation d'une « bulle », qui sera interdite par notre hypothèse sur les sphères : autour du point (s_k, t_k) , le lacet bord de la boule de rayon ε_k est de plus en plus petit, mais le gradient de u_k en ce point, lui, explose. C'est pourquoi nous avons reparamétrisé (c'est la ruse du $\varepsilon_k R_k$), comme le montre la figure 7.

Un bon calcul valant mieux qu'un long discours, évaluons l'aire symplectique de l'image de v .

Lemme 6.6.4. *L'aire symplectique de v est finie et non nulle.*

⁽¹¹⁾Pour lequel nous renvoyons par exemple à [58].

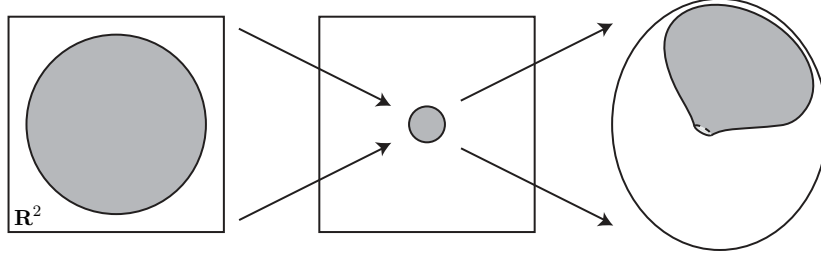


FIGURE 7

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R}^2} v^* \omega &= \int_{\mathbf{R}^2} \omega \left(\frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial t} \right) ds dt \\
 &= \int_{\mathbf{R}^2} \omega \left(-J(v) \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right) ds dt \quad \text{puisque } \frac{\partial v}{\partial t} = -J(v) \frac{\partial v}{\partial s} \\
 &= \int_{\mathbf{R}^2} \omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}, J(v) \frac{\partial v}{\partial t} \right) ds dt \\
 &= \int_{\mathbf{R}^2} \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|^2 ds dt < +\infty
 \end{aligned}$$

en utilisant l'estimation précédente. Par ailleurs cette aire n'est pas nulle puisque v n'est pas constante. $\square$

Lemme 6.6.5. *Il existe une suite r_k tendant vers $+\infty$ telle que la longueur de l'image $v(\partial B(0, r_k))$ tende vers 0 quand k tend vers $+\infty$.*

Acceptons le lemme. Alors l'image du bord de la boule s'écrase sur un point $w_0 \in W$. Pour k assez grand, elle est donc contenue dans une carte de Darboux U de W . Dans U , la forme ω est une forme fermée sur $\mathbf{R}^{2n}$, elle admet une primitive, $\omega = d\lambda$. Nous pouvons même supposer que U est une boule fermée. La courbe $v(\partial B_r)$ est le bord d'un petit disque D_r dans U . La réunion de $v(B_r)$ et de D_r est une sphère S_r^2 et nous avons, grâce à l'hypothèse que les sphères ont une aire symplectique nulle,

$$0 = \int_{S_r^2} \omega = \int_{D_r} \omega + \int_{v(B_r)} \omega.$$

La première intégrale est

$$\int_{D_r} \omega = \int_{D_r} d\lambda = \int_{v(\partial B_r)} \lambda$$

donc

$$\left| \int_{D_r} \omega \right| \leq \left| \int_{v(\partial B_r)} \lambda \right| \leq \ell(v(\partial B_r)) \sup_U \|\lambda\|$$

(ℓ est la longueur) tend vers 0 quand r tend vers l'infini.

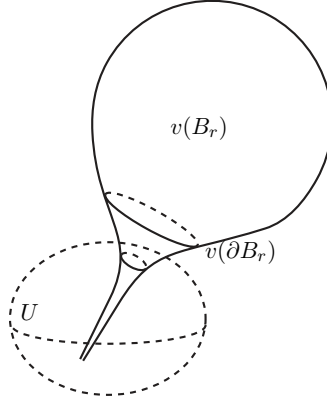


FIGURE 8. Une bulle

La deuxième intégrale converge, elle, vers l'aire de $v(\mathbf{R}^2)$, un nombre non nul. C'est la contradiction recherchée. Les cercles concentriques ont des longueurs de plus en plus petites, c'est pourquoi un tel objet est appelé une bulle. Voir la figure 8.

Démonstration du lemme. Comme v est J -holomorphe, la forme $v^*\omega$ est une forme symplectique sur $\mathbf{R}^2$. Elle s'écrit donc

$$v^*\omega_{(\rho,\theta)} = f(\rho,\theta)\rho d\theta \wedge d\rho$$

pour une fonction f positive. Comme v est J -holomorphe, cette forme symplectique, avec la structure presque complexe usuelle, donne une métrique riemannienne sur $\mathbf{R}^2$ qui est $f(\rho,\theta)(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2)$ et qui permet de calculer la longueur $\ell(r)$ du bord $v(\partial B_r)$:

$$\ell(r) = r \int_0^{2\pi} \sqrt{f(r,\theta)} d\theta.$$

De même

$$A(r) = \int_{B_r} v^*\omega = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r f(\rho,\theta)\rho d\rho \right) d\theta.$$

Ainsi,

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = \int_0^{2\pi} f(r,\theta)r d\theta.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \ell(r) &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{f(r,\theta)} d\theta \leq r \sqrt{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} f(r,\theta) d\theta} \\ &= r \sqrt{2\pi \frac{A'(r)}{r}} \end{aligned}$$

et donc

$$\ell(r)^2 \leq 2\pi r A'(r).$$

Il reste à vérifier que, la fonction $r \mapsto A(r)$ étant *bornée* et dérivable, il existe une suite r_k tendant vers $+\infty$ telle que $\lim r_k A'(r_k) = 0$. C'est un exercice facile : comme A est bornée,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A(k^2) - A(k)}{\ln k} = 0.$$

Mais ce rapport s'écrit aussi

$$\frac{A(k^2) - A(k)}{\ln k} = \frac{A(k^2) - A(k)}{\ln k^2 - \ln k} = \frac{A'(r_k)}{(1/r_k)}$$

pour un r_k compris entre k et k^2 (et donc tendant vers l'infini) en vertu du théorème des accroissements finis. $\square$

Ce qui achève la démonstration de la proposition et donc aussi du théorème de compacité. $\square$

6.6.a. Un exemple de bulle dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Nous venons de montrer que le fait que la variété symplectique W ne contienne pas de sphère d'aire symplectique non nulle empêche la formation de bulles. Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si $\omega|_{\pi_2(W)} \neq 0$, un argument de type « singularité apparente » permet de prolonger v à $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, c'est ce qu'on appelle une « bulle ».

Pour clarifier la situation, montrons donc ici un exemple classique de bulle, dans le plan projectif complexe. Remarquons que, dans cette variété symplectique, il y a des sphères : une droite projective est un $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et donc aussi une sphère S^2 . De plus, la forme symplectique que nous avons construite au § 5.3 donne une aire positive à toutes les droites projectives : une droite projective est une courbe complexe (holomorphe) et en particulier, la forme symplectique se restreint en une forme volume sur une telle courbe. Donc l'espace projectif complexe ne satisfait pas à notre hypothèse. L'exemple présenté ici est le plus simple possible : on observe une famille de coniques lisses dégénérant sur la réunion de deux droites.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, considérons la courbe (conique)

$$\begin{aligned} v_\alpha : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) &\longrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \\ [x, y] &\longmapsto [x^2, \alpha y^2, xy]. \end{aligned}$$

C'est simplement la complétion de

$$\begin{aligned} v_\alpha : \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C}^2 \\ z &\longmapsto (z, \alpha/z). \end{aligned}$$

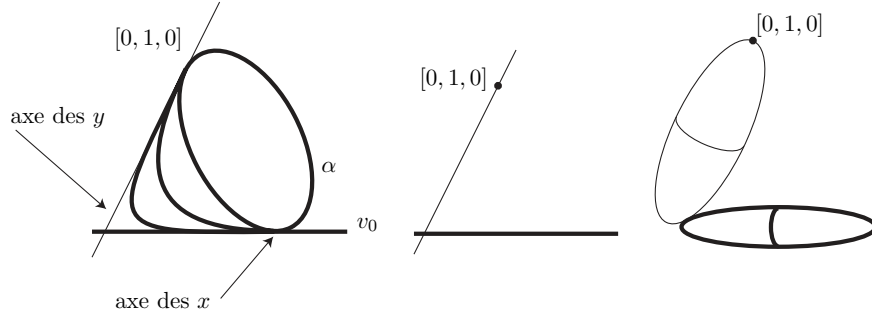


FIGURE 9

Pour $\alpha = 0$, l'image est l'« axe des x ». Pour $\alpha \neq 0$, c'est une conique. Toutes les courbes images de v_α contiennent le point à l'infini de l'axe des y , le point $[0, 1, 0]$ en coordonnées homogènes. Quand α tend vers 0, ce point tire une bulle à lui. La figure 9 illustre cette situation en présentant divers états de la conique $v_\alpha(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ et la « courbe » limite, c'est-à-dire les deux axes des x et des y , représentée

- une fois comme réunion de deux droites sécantes,
- une autre fois comme une « courbe à bulle », figure dans laquelle chacune des deux droites projectives complexes est représentée comme une sphère S^2 .

Remarquons encore que

- la courbe limite n'est *pas* l'image d'une application $v_0 : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$;
- par contre, sur le complémentaire du point $0 = [0, 1]$, il y a bien une limite, $z \mapsto (z, 0)$;
- le cercle $|z|^2 = \alpha$ borde un disque ($|z|^2 \leq \alpha$) qui occupe de plus en plus de place dans l'image. Voir la figure 10.

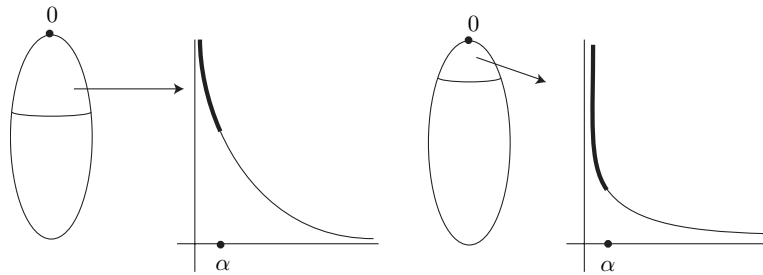


FIGURE 10

6.7. Appendice : fonctions, formes fermées, revêtements

La question que nous considérons ici est : est-il possible d'étendre la définition de la fonctionnelle d'action à des variétés symplectiques pour lesquelles la forme symplectique ne s'annule pas sur le π_2 , autrement dit est-il possible de se débarrasser de l'hypothèse 6.2.1 ?

Commençons donc par rappeler les relations entre groupe fondamental, revêtements et 1-formes fermées.

6.7.a. Revêtement associé à une forme fermée. Du point de vue local, il n'y a aucune différence entre formes fermées et exactes, par exemple entre une 1-forme fermée α et la différentielle d'une fonction f . D'après le lemme de Poincaré⁽¹²⁾ en effet, toute forme fermée, c'est-à-dire telle que $d\alpha = 0$, est localement exacte, c'est-à-dire qu'il existe localement une fonction f telle que $\alpha = df$.

Globalement, c'est une autre histoire. Considérons par exemple (mais ce n'est pas un exemple innocent) la 1-forme fermée (dont nous allons voir qu'elle est improprement) appelée $d\theta$ (ou dz/iz) sur le cercle S^1 . Elle vérifie

$$\int_{S^1} d\theta = 2\pi$$

et donc n'est pas exacte (il n'y a pas de fonction « θ », de détermination de l'argument, sur le cercle). Par contre, la forme $d\theta$ relevée au revêtement $\exp : \mathbf{R} \rightarrow S^1$ est, elle, exacte : sur $\mathbf{R}$, il y a bien une fonction θ .

Considérons plus généralement une 1-forme fermée α sur une variété V . Comme α est fermée, elle définit un homomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \pi_1(V) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ [\gamma] &\longmapsto \int_\gamma \alpha \end{aligned}$$

(nous supposons V connexe et n'indiquons pas le point base). Le noyau de φ_α est un sous-groupe (distingué) de $\pi_1(V)$. Il lui correspond donc un revêtement connexe (et galoisien) $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$. Par définition, la forme $\pi^*\alpha$ a la propriété que

$$\varphi_{\pi^*\alpha}[\gamma] = 0 \quad \text{pour tout } [\gamma] \in \pi_1\tilde{V}.$$

Donc $\pi^*\alpha$ est une forme exacte : une primitive $\tilde{f}$ est définie en choisissant un point $y_0 \in \tilde{V}$ et en posant

$$\tilde{f}(y) = \int_{y_0}^y \pi^*\alpha$$

⁽¹²⁾Voir par exemple [38, Chap. V].

en intégrant le long de n'importe quel chemin joignant y_0 à y , le résultat n'en dépendant pas. Bien sûr $d\tilde{f} = \pi^*\alpha$.

Le revêtement $\tilde{V} \rightarrow V$ est « le plus petit revêtement⁽¹³⁾ de V sur lequel α est exacte », appelé le *revêtement d'intégration* de α .

Comparons maintenant les points critiques de $\pi^*\alpha$ et ceux de $\tilde{f}$. Comme

$$(d\tilde{f})_y = 0 \iff \alpha_{\pi(y)} = 0,$$

les points critiques sont les mêmes — ainsi que les propriétés de non-dégénérescence et les indices.

Un champ de pseudo-gradients pour α (définition analogue à celle donnée dans le cas d'une fonction) se relève en un champ de pseudo-gradients pour $\tilde{f}$. Il est donc possible d'essayer de fabriquer un complexe avec les points critiques de α comme nous l'avons fait au chapitre 3. C'est ce que fait Latour dans [39]. La seule grosse différence est que $\tilde{V}$ n'a aucune raison d'être compacte, elle ne l'est même jamais (si la forme α n'est pas exacte).

Pour comprendre la difficulté issue de cette généralisation, remarquons que le champ de pseudo-gradients pour $\tilde{f}$ et les trajectoires entre deux zéros d'indices consécutifs de α proviennent des trajectoires joignant les points de $\pi^{-1}(c)$ à des points de $\pi^{-1}(d)$. Il peut donc y en avoir un nombre infini.

6.7.b. La forme d'action. Soit α_H la forme définie sur l'espace des lacets contractiles $\mathcal{L}W$ de W par

$$(\alpha_H)_x(Y) = \int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_t(x(t)), Y(t)) dt.$$

C'est une forme fermée : on vérifie sans mal (exercice 26 page 491) que α_H est localement exacte.

Nous avons vu (c'est le calcul de $d\mathcal{A}_H$ dans la proposition 6.3.3, voir l'exercice 26) que, si la variété symplectique (W, ω) vérifie l'hypothèse 6.2.1, la fonction $\mathcal{A}_H$ est une primitive de α_H , de sorte que α_H est une forme exacte.

Supprimons maintenant l'hypothèse 6.2.1 et considérons l'espace

$$\mathcal{D}W = \{(x, u) \mid x \in \mathcal{L}W \text{ et } u : D \rightarrow W \text{ un prolongement au disque}\}.$$

Disons que $(x, u) \sim (x, v)$ si

$$\int_D u^*\omega = \int_D v^*\omega$$

⁽¹³⁾Pour la théorie des revêtements, nous renvoyons à [4].

et appelons $\widetilde{\mathcal{L}W}$ le quotient de $\mathcal{D}W$ par la relation d'équivalence $\sim$. Il est muni d'une projection

$$\pi : \widetilde{\mathcal{L}W} \longrightarrow \mathcal{L}W$$

(oublier le disque) qui en fait un revêtement de groupe $\pi_2(W)/\text{Ker}(\omega : \pi_2(W) \rightarrow \mathbf{R})$. L'expression

$$\mathcal{A}_H(x, u) = - \int_D u^* \omega + \int_0^1 H_t(x(t)) dt$$

définit une fonction sur $\widetilde{\mathcal{L}W}$ qui satisfait à la relation

$$\pi^* \alpha_H = d\mathcal{A}_H,$$

le revêtement $\pi : \widetilde{\mathcal{L}W} \rightarrow \mathcal{L}W$ est le revêtement d'intégration de la forme d'action.

Voir aussi l'exercice 34 page 493.

6.8. Appendice : structure de variété de Banach sur $\mathcal{L}W$

Les espaces de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ ne sont pas des espaces de Banach (ce sont des espaces de Fréchet). Nous allons nous contenter ici des espaces de lacets de classe $W^{1,p}$, ce que nous décrivons précisément maintenant.

Rappelons que tout fibré vectoriel symplectique sur S^1 est trivialisable. C'est donc notamment le cas, pour $x \in \mathcal{L}W$, de

$$x^*TW = \{(t, Y) \in S^1 \times TW \mid x(t) = p(Y)\}.$$

Soit donc φ une trivialisation

$$\varphi : x^*TW \longrightarrow S^1 \times \mathbf{R}^{2n}.$$

Elle permet d'associer à toute section Y du fibré x^*TW , une section φY du fibré trivial $S^1 \times \mathbf{R}^{2n}$, c'est-à-dire une application $\varphi Y : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$. Pour $p > 1$, notons

$$W^{1,p}(x^*TW) = \{Y \mid \varphi Y \in W^{1,p}(S^1; \mathbf{R}^{2n})\}$$

(la définition des espaces de Sobolev $W^{1,p}$ est rappelée au § 16.4 — signalons quand même ici que $W^{1,p}$ est contenu dans $\mathcal{C}^0$, ce qui est rassurant). Une autre trivialisation ψ diffère de φ par une application

$$g : S^1 \longrightarrow \text{GL}(2n; \mathbf{R})$$

et, pour $Y \in W^{1,p}(S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on a

$$\|gY\|_{W^{1,p}} \leq c(g) \|Y\|_{W^{1,p}}$$

pour une certaine constante $c(g)$, qui est la norme opératorielle de g . Donc φ et ψ définissent la même topologie d'espace de Banach sur $W^{1,p}(x^*TW)$

(celle-ci ne dépend donc pas du choix de φ , comme la notation utilisée l'anticipait).

L'analogue $W^{1,p}$ de l'espace des champs de vecteurs le long de x , dont nous avons vu (au §6.3.a) qu'il devait être l'espace tangent en x à l'espace de lacets, est ainsi muni d'une structure d'espace de Banach. L'idée de ce qui suit est d'utiliser les espaces tangents pour définir des cartes locales sur l'espace de lacets lui-même. Pour cela, nous utilisons l'exponentielle d'une métrique riemannienne fixée sur W (voir le §14.5). Celle-ci est définie sur un voisinage $\mathcal{D}$ de la section nulle dans TW (un fibré en disques)⁽¹⁴⁾. Pour tout lacet x de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$\begin{aligned} \exp_x : W^{1,p}(x^*\mathcal{D}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(S^1; W) \\ Y &\longmapsto (\exp_x Y : t \mapsto \exp_{x(t)} Y(t)). \end{aligned}$$

Rappelons que $W^{1,p}(S^1; \mathbf{R}^{2n}) \subset \mathcal{C}^0(S^1; \mathbf{R}^{2n})$ pour $p > 1$. Dans la formule, x est de classe $\mathcal{C}^\infty$, Y est de classe $W^{1,p}$ et $\exp_x Y$ est de classe $W^{1,p}$, en particulier continue.

Considérons donc l'ensemble de tous les couples

$$(W^{1,p}(x^*\mathcal{D}), \exp_x) \quad \text{pour } x \in \mathcal{L}W$$

et l'espace, noté $\mathcal{L}^{1,p}W$, des applications continues $y : S^1 \rightarrow W$ telles qu'il existe $x \in \mathcal{L}W$ et $Y \in W^{1,p}(x^*\mathcal{D})$ tels que $y(t) = \exp_{x(t)} Y(t)$.

Théorème 6.8.1. *L'espace $\mathcal{L}^{1,p}W$ est muni d'une structure de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ par l'atlas*

$$(W^{1,p}(x^*\mathcal{D}), \exp_x)_{x \in \mathcal{L}W}.$$

La structure ainsi définie ne dépend pas de la métrique riemannienne utilisée. De plus,

$$\mathcal{L}W = \mathcal{C}^\infty(S^1; W) \subset \mathcal{L}^{1,p}W \subset \mathcal{C}^0(S^1; W)$$

chacun des espaces étant dense dans le suivant.

Voici l'idée de la démonstration, pour les détails de laquelle nous renvoyons à [63]. Pour $x \in W$, l'application $\exp_x$ est un difféomorphisme de la fibre $\mathcal{D}_x \subset T_x W$ sur son image. Ainsi, pour tout t , l'égalité $\exp_{x(t)} Y(t) = \exp_{x(t)} Z(t)$ implique que $Y(t) = Z(t)$. Le « changement de carte »

$$Y \longmapsto \exp_{x'}^{-1}(\exp_x Y)$$

⁽¹⁴⁾Le rayon maximal des disques d'un tel fibré est le *rayon d'injectivité* de la variété riemannienne W .

envoie une section $W^{1,p}$ sur une section $W^{1,p}$ parce que l'exponentielle est $\mathcal{C}^\infty$ et ce changement de carte est aussi différentiable que les lacets x et x' qui le définissent. C'est bien une structure de variété sur $\mathcal{L}^{1,p}W$.

La compatibilité des atlas définis par différentes métriques riemanniennes vient une fois encore du fait que l'exponentielle de toute métrique riemannienne est une application $\mathcal{C}^\infty$, ce qui donne à la composition

$$W^{1,p}(x^*\mathcal{D}_g) \xrightarrow{(\exp_g)_x} \mathcal{C}^0(S^1; W) \xrightarrow{(\exp_{g'})_{x'}^{-1}} W^{1,p}(x'^*\mathcal{D}_{g'})$$

(avec des notations évidentes) la différentiabilité voulue.

Enfin les inclusions sont claires et la dernière assertion est conséquence de la densité de $\mathcal{C}^\infty(S^1; W)$ dans $\mathcal{C}^0(S^1; W)$. $\square$

Remarquons que l'espace tangent en un point $y \in \mathcal{L}^{1,p}W$ à cette variété de Banach est, par construction,

$$T_y \mathcal{L}^{1,p}W = W^{1,p}(y^*TW).$$

CHAPITRE 7

GÉOMÉTRIE DU GROUPE SYMPLECTIQUE, INDICE DE MASLOV

Dans ce chapitre, nous allons définir l'*indice* des points critiques de la fonctionnelle d'action.

Traditionnellement, l'*indice de Maslov* désigne un nombre entier relatif associé à un lacet dans la grassmannienne Λ_n de tous les sous-espaces lagrangiens dans $\mathbf{R}^{2n}$. Ceci parce que le groupe fondamental de cette grassmannienne est isomorphe à $\mathbf{Z}$ (voir par exemple l'exercice 40 page 495 ou le livre [44]) et, en dernière instance, parce que celui du groupe unitaire $U(n)$ est, lui aussi, isomorphe à $\mathbf{Z}$. L'indice dont nous allons parler ici est un nombre entier associé à des chemins dans le groupe symplectique $Sp(2n)$, lequel se rétracte sur $U(n)$ et a donc, lui aussi un groupe fondamental infini cyclique. Dans ce cadre, on l'appelle aussi indice de Conley-Zehnder (voir [62, 61] et [42], dont nous nous sommes inspirés ici, pour des références).

7.1. Vers la définition de l'indice

On se place dans la situation du chapitre précédent, un hamiltonien

$$H : W \times S^1 \longrightarrow \mathbf{R}$$

dépendant du temps et une solution $x(t)$ périodique de période 1 de $\dot{x} = X_t(x)$ dont nous supposons que c'est un lacet contractile. Nous avons vu que ces lacets sont les points critiques de $\mathcal{A}_H$. Nous voulons donc définir un *indice* pour ces points critiques.

Nous allons le faire en trois étapes. Partons d'une orbite x non dégénérée (et contractile).

(1) Nous lui associons un *chemin* $t \mapsto A(t)$ de matrices *symplectiques*, avec $A(0) = \text{Id}$ et $1 \notin \text{Spec } A(1)$.

(2) À tout tel chemin, nous associons un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ avec $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = \pm 1$.

(3) Et à tout tel chemin (à valeurs dans S^1), nous associons un entier.

Nous aurons ainsi associé un entier $\mu(x) \in \mathbf{Z}$ au point critique non dégénéré x .

7.1.a. Première étape. On a donc fixé cette orbite périodique $x(t) = \varphi^t(x(0))$. On choisit une base symplectique

$$Z(0) = (Z_1(0), \dots, Z_{2n}(0))$$

de $T_{x(0)}W$. Rappelons (voir le § 5.4) que φ^t préserve ω . En particulier, la matrice $A(1)$ de l'application linéaire $T_{x(0)}\varphi^1$ dans la base $Z(0)$ est une matrice symplectique, $A(1) \in \mathrm{Sp}(2n)$ (voir le § 5.6 pour le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n)$) et $1 \notin \mathrm{Spec} A(1)$ puisque la solution x est supposée non dégénérée.

Remarquons qu'il existe une famille $\mathcal{C}^\infty$ en t de bases symplectiques

$$Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_{2n}(t))$$

de $T_{x(t)}W$, en vertu du classique théorème que voici (voir par exemple [69]).

Théorème 7.1.1. *Pour toute application continue*

$$\psi : D^k \longrightarrow W$$

*le fibré symplectique ψ^*TW est trivialisable et toutes ses trivialisations sont homotopes.* $\square$

Nous ne démontrons pas ce théorème ici, il découle du fait que le disque D^k est contractile. Par exemple, le fait que toutes les trivialisations soient homotopes se déduit du fait que deux trivialisations sont liées par une application $D^k \rightarrow \mathrm{Sp}(2n)$ et utilise tout simplement le fait (c'est la proposition 5.6.9) que $\mathrm{Sp}(2n)$ est connexe par arcs.

Mais revenons à nos moutons. Notre orbite périodique x est contractile, on la prolonge en une application $u : D^2 \rightarrow W$, on déduit du théorème une trivialisations, c'est-à-dire un repère symplectique $Z(z)$ pour $z \in D^2$ et en particulier un repère symplectique le long de x .

De telle sorte que, pour tout t , on peut considérer la matrice $A(t)$ de l'application linéaire $T_{x(0)}\varphi^t$ dans les bases $Z(0)$ (de $T_{x(0)}W$) et $Z(t)$ (de $T_{x(t)}W$), et que l'application

$$t \longmapsto A(t)$$

est un chemin avec $A(0) = \mathrm{Id}$ et $A(1)$ n'a pas la valeur propre 1.

Appelons donc

$$\mathrm{Sp}(2n)^* = \{A \in \mathrm{Sp}(2n) \mid \det(A - \mathrm{Id}) \neq 0\}$$

et $\mathcal{S}$ l'espace des chemins joignant Id à un élément de $\mathrm{Sp}(2n)^*$:

$$\mathcal{S} = \{\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n) \mid \gamma(0) = \mathrm{Id} \text{ et } \gamma(1) \in \mathrm{Sp}(2n)^*\}.$$

Si Z' est un autre repère symplectique le long de x , les chemins $A(t)$ et $A'(t)$ sont homotopes dans $\mathcal{S}$. Plus généralement, si v est un autre prolongement de x au disque D^2 et si Z' est une trivialisation le long de v , on peut former, en recollant u et v , une application $w : S^2 \rightarrow W$ (comme au §6.3.b, où l'on contempera la figure 2). Nous avons donc

- le chemin $A(t)$ donné par la trivialisation Z le long de u ,
- le chemin $A'(t)$ donné par Z' le long de v ,
- et un chemin $A''(t)$, donné par une trivialisation Z'' le long de w , grâce à l'hypothèse 6.2.2,

et ces trois chemins sont homotopes dans $\mathcal{S}$.

Ainsi nous avons réalisé notre première étape, c'est-à-dire associé, à l'orbite x , un chemin dans $\mathcal{S}$, unique à homotopie près.

Remarque 7.1.2. Dans le cas d'un point critique x d'un hamiltonien autonome H , on a déjà (au §5.4.3 et dans l'exercice 8 (page 485)) construit le chemin $t \mapsto A(t)$: c'est

$$A(t) = e^{tJ_0 \mathrm{Hess}_x}$$

où Hess_x est la hessienne de H en x , que nous noterons S pour simplifier. En particulier, si S est non singulière avec $\|S\| < 2\pi$, alors $J_0 S$ n'a pas de valeur propre $2ik\pi$ et donc $e^{J_0 S}$ n'a pas la valeur propre 1.

7.1.b. Deuxième étape (début). Pour l'étape 2, nous devons associer, à un chemin $A(t) \in \mathcal{S}$, un chemin

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow S^1 \quad \text{avec } \gamma(0) = 1 \text{ et } \gamma(1) = \pm 1.$$

Pour ceci, nous avons besoin de quelques propriétés du groupe symplectique, celles vues au chapitre 5, et quelques précisions supplémentaires.

Nous avons dit au §5.6.d qu'il existe une application $\mathrm{Sp}(2n) \rightarrow S^1$ qui induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux. Dans ce paragraphe, nous sommes plus explicites sur les propriétés d'une telle application ρ . À l'origine de la construction présentée ici, il y a l'utilisation de [31] par Salamon et Zehnder dans [62]. Nous donnons ici une description légèrement différente quoique équivalente et avons rédigé des démonstrations détaillées des résultats d'algèbre linéaire utilisés.

Théorème 7.1.3 ([62]). *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une application continue*

$$\rho : \mathrm{Sp}(2n) \longrightarrow S^1$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) *Naturalité : Si A et $T \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R})$,*

$$\rho(TAT^{-1}) = \rho(A).$$

- (2) *Produit : Si $A \in \mathrm{Sp}(2m; \mathbf{R})$, $B \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R})$,*

$$\rho \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \rho(A)\rho(B).$$

- (3) *Déterminant : Si $A \in \mathrm{U}(n) = \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R}) \cap \mathrm{O}(2n)$, alors*

$$\rho(A) = \det_{\mathbf{C}}(X + iY), \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$

En particulier, ρ induit un isomorphisme

$$\rho_* : \pi_1(\mathrm{Sp}(2n); \mathbf{R}) \longrightarrow \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}.$$

- (4) *Normalisation : Si $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbf{R}$, alors*

$$\rho(A) = (-1)^{m_0/2}$$

où m_0 est la multiplicité totale des valeurs propres réelles négatives.

- (5) $\rho({}^t A) = \rho(A^{-1}) = \overline{\rho(A)}.$

La construction d'une telle application ρ est assez technique. Nous en donnons tous les détails dans l'appendice (le § 7.3). Disons quand même d'ores et déjà que, pour une matrice A dont toutes les valeurs propres sont distinctes, c'est « tout simplement » :

$$\rho(A) = (-1)^{m_0/2} \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \cap S^1 \\ \mathrm{Im}(\lambda) > 0}} \lambda^{\mathrm{sign} \, \mathrm{Im} \, \omega(\overline{X}, X)}$$

(on a choisi, pour chaque λ , un vecteur propre X).

7.1.c. Le sous-ensemble $\mathrm{Sp}(2n)^*$. Reprenons le fil de notre construction de l'indice μ pour l'orbite périodique x .

Les transformations qui n'ont pas la valeur propre 1. Les transformations symplectiques que nous avons à considérer n'ont pas la valeur propre 1 (c'est notre hypothèse de non-dégénérescence). C'est pourquoi nous avons dû considérer l'ouvert

$$\mathrm{Sp}(2n)^* = \{A \in \mathrm{Sp}(2n) \mid \det(A - \mathrm{Id}) \neq 0\}.$$

C'est le complémentaire de l'hypersurface Σ définie par

$$\Sigma = \{A \in \mathrm{Sp}(2n) \mid \det(A - \mathrm{Id}) = 0\}.$$

Ce qui nous rapproche de la définition habituelle de l'indice de Maslov dans la grassmannienne des lagrangiens.

Il est clair que $\mathrm{Sp}(2n)^*$ ne peut être connexe, puisqu'il est réunion des deux ouverts disjoints définis par $\det(A - \mathrm{Id}) > 0$ et $\det(A - \mathrm{Id}) < 0$. Remarquons aussi que le signe de $\det(A - \mathrm{Id})$ est celui du produit $\prod (\lambda_i - 1)$ où les λ_i sont les valeurs propres réelles positives de A .

L'exemple de $\mathrm{Sp}(2)$. Dans le cas où $n = 1$, $\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{SL}(2; \mathbf{R})$. Ce groupe est la quadrique (affine réelle) des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ réelles avec $ad - bc = 1$, une sous-variété de dimension 3. La décomposition polaire le fait se rétracter sur le cercle des matrices $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (c'est le groupe $\mathrm{U}(1)$). L'hypersurface Σ des matrices qui ont la valeur propre 1 est celle des $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$ et $a + d = 2$. Elle est lisse sauf au point Id . Le complémentaire de Σ est formé des deux ouverts définis respectivement par

$$\mathrm{tr} A > 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr} A < 2.$$

On voit aisément que ces deux ouverts sont connexes, puisque

- les matrices de trace plus grande que 2 sont celles qui sont semblables à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ (avec $\lambda > 0$),
- celles de trace plus petite que 2 sont celles qui sont semblables à

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{avec } \lambda < 0), \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dots$$

toutes ces matrices se connectant sans mal à $-\mathrm{Id}$.

Topologie de $\mathrm{Sp}(2n)^*$. La proposition qui suit est due à Conley et Zehnder.

Proposition 7.1.4 ([18]). *L'ouvert $\mathrm{Sp}(2n)^*$ a deux composantes connexes. L'inclusion de chacune d'elles dans $\mathrm{Sp}(2n)$ induit l'homomorphisme nul sur les groupes fondamentaux.*

Démonstration. On a dit que $\mathrm{Sp}(2n)^*$ n'est pas connexe. Il reste à montrer que chacun des sous-espaces

$$\mathrm{Sp}(2n)^+ = \{A \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R}) \mid \det(A - \mathrm{Id}) > 0\}$$

et
$$\mathrm{Sp}(2n)^- = \{A \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R}) \mid \det(A - \mathrm{Id}) < 0\}$$

est connexe par arcs. La démonstration de ce fait est fondée sur le lemme que voici.

Lemme 7.1.5. *Soit $A \in \mathrm{Sp}(2n)^*$. Il existe un chemin dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$ qui joint A à une matrice B dont toutes les valeurs propres sont distinctes et qui a exactement zéro (si $A \in \mathrm{Sp}(2n)^+$) ou deux (si $A \in \mathrm{Sp}(2n)^-$) valeurs propres réelles positives.*

Ce lemme étant (provisoirement) admis, on l'utilise pour montrer que toute matrice A de $\mathrm{Sp}(2n)^*$ se connecte par un chemin dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$ à la matrice

$$\begin{cases} -\mathrm{Id} \in \mathrm{Sp}(2n)^+ & \text{si } A \in \mathrm{Sp}(2n)^+, \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \\ \hline 0 & & -\mathrm{Id} \end{array} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On connecte d'abord A à une matrice B comme le lemme nous y autorise. Il reste à connecter B à l'une des deux matrices ci-dessus. Choisissons une base de vecteurs propres de B qui soit symplectique et invariante par conjugaison complexe. Comme les valeurs propres de B sont distinctes, on peut appeler X_λ « le » vecteur propre associé à λ . On choisit, pour chaque valeur propre λ de B qui n'est pas réelle positive, un chemin $\lambda(s)$ joignant λ à -1 en évitant 1 et tel que si $\lambda(s)$ est le chemin choisi pour λ ,

- celui choisi pour $\bar{\lambda}$ est $\bar{\lambda}(s)$...
- et celui choisi pour $1/\lambda$ est $1/\lambda(s)$.

On définit le chemin $s \mapsto B(s)$ par

$$B(s) \cdot X_\lambda = \begin{cases} \lambda(s)X_\lambda & \text{si } \lambda \notin \mathbf{R}_+ \\ \lambda X_\lambda & \text{si } \lambda \in \mathbf{R}_+. \end{cases}$$

La matrice $B(s)$ ainsi définie est réelle et dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$, $B(0) = B$ et

$$B(1) \cdot X_\lambda = \begin{cases} -X_\lambda & \text{si } \lambda \notin \mathbf{R}_+ \\ \lambda X_\lambda & \text{si } \lambda \in \mathbf{R}_+. \end{cases}$$

On a donc deux possibilités :

- Soit B n'avait aucune valeur propre réelle positive, alors $B(1) = -\mathrm{Id}$.
- Soit B avait deux valeurs propres réelles positives, λ et $1/\lambda$. Dans ce cas, la matrice $B(1)$ dans la base symplectique des vecteurs propres X_λ (convenablement ordonnée) est

$$B(1) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & \\ \hline 0 & & -\mathrm{Id} \end{array} \right).$$

Comme le groupe $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R})$ est connexe par arcs, on peut connecter cette matrice par un chemin à la matrice qui a la même forme dans la base canonique, puis à la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \\ \hline 0 & & -\mathrm{Id} \end{array} \right).$$

Donc les deux ouverts $\mathrm{Sp}(2n)^\pm$ sont bien les composantes connexes de $\mathrm{Sp}(2n)^*$.

Montrons maintenant que l'inclusion de chacune d'elles dans $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R})$ induit le morphisme trivial au niveau des groupes fondamentaux. Il suffit de relever l'application ρ , ce que le lemme suivant nous autorise à faire.

Lemme 7.1.6. *Il existe deux applications continues $\tilde{\rho}_\pm : \mathrm{Sp}(2n)^\pm \rightarrow \mathbf{R}$ telles que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{R} \\ & \nearrow \tilde{\rho}_\pm & \downarrow \exp \\ \mathrm{Sp}(2n)^\pm & \xrightarrow{i} \mathrm{Sp}(2n) & \xrightarrow{\rho} S^1 \end{array}$$

commutent.

En effet, on a montré que ρ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux. Donc, comme

$$\rho_* \circ i_* = \exp_* \circ (\tilde{\rho}_\pm)_* = 0,$$

le morphisme

$$i_* : \pi_1 \mathrm{Sp}(2n)^\pm \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Sp}(2n))$$

est nul. □

Le lemme 7.1.6 repose sur les détails de la construction de ρ . Les démonstrations des deux lemmes 7.1.6 et 7.1.5 sont élémentaires au sens où elles n'utilisent que de l'algèbre linéaire élémentaire. Il nous a pourtant semblé utile de les faire figurer complètement ici. On les trouvera, logiquement, à la suite de la construction de ρ , dans l'appendice (au § 7.3.d).

Nous avons terminé l'étape (2), il reste à définir l'indice, un entier.

7.2. L'indice de Maslov d'un chemin

7.2.a. Définition de l'indice de Maslov. Appelons W^+ , respectivement W^- , des matrices fixées dans $\mathrm{Sp}(2n)^+$, respectivement $\mathrm{Sp}(2n)^-$, par exemple celles que nous avons utilisées dans les démonstrations du paragraphe précédent,

$$W^+ = -\mathrm{Id}, \quad W^- = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & & -\mathrm{Id} \end{array} \right).$$

Pour tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathrm{Sp}(2n)$, on choisit un relevé $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de $\rho \circ \gamma$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{R} \\ & \nearrow \alpha & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Sp}(2n) & \xrightarrow{\rho} S^1 \end{array}$$

et on définit

$$\Delta(\gamma) = \frac{\alpha(1) - \alpha(0)}{\pi}.$$

Si $A \in \mathrm{Sp}(2n)^*$, on choisit un chemin γ_A (dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$) de A à la matrice $W^\pm$ de $\mathrm{Sp}(2n)^\pm$. Grâce à la proposition 7.1.4, la classe d'homotopie de γ_A est bien définie et en particulier, $\Delta(\gamma_A)$ ne dépend que de A . On pose donc $r(A) = \Delta(\gamma_A)$.

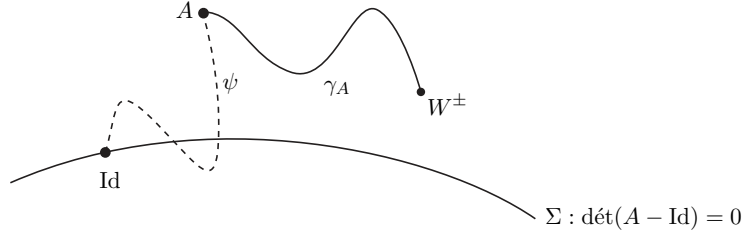


FIGURE 1

Supposons maintenant que ψ soit un chemin joignant Id à un élément de $\mathrm{Sp}(2n)^*$. On définit l'indice de Maslov $\mu(\psi)$ de ce chemin par

$$\mu(\psi) = \Delta(\psi) + r(\psi(1)).$$

C'est le nombre de « moitiés de tours » que l'image par ρ du chemin composé de ψ et γ_A parcourt sur le cercle.

Proposition 7.2.1. *L'indice de Maslov est un nombre entier. Deux chemins ψ_0 et ψ_1 sont homotopes avec extrémité dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$ si et seulement si ils ont le même indice. De plus on a*

- le signe de $\det(\psi(1) - \mathrm{Id})$ est $(-1)^{\mu(\psi) - n}$,
- si S est une matrice symétrique inversible de norme $\|S\| < 2\pi$ et si $\psi(t) = \exp(tJS)$,

$$\mu(\psi) = \mathrm{Ind}(S) - n$$

où $\mathrm{Ind}(S)$ désigne le nombre de valeurs propres négatives de S .

Démonstration. Pour commencer, composons notre chemin ψ avec un chemin contenu dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$ et joignant $\psi(1)$ à la matrice $W^\pm$, comme nous y autorise la proposition 7.1.4. Appelons γ le chemin composé. On a

$$\mu(\psi) = \Delta(\gamma) \in \mathbf{Z}$$

puisque $\rho(W^\pm) = \pm 1$.

De plus, grâce à la même proposition, deux chemins ψ_0 et ψ_1 sont homotopes si et seulement si les deux prolongements γ_0 et γ_1 sont homotopes (à extrémités fixées). L'application ρ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux, donc ceci est équivalent à l'égalité $\Delta(\gamma_0) = \Delta(\gamma_1)$, c'est-à-dire à l'égalité des indices de Maslov de ψ_0 et ψ_1 .

Soit ψ un chemin et γ un prolongement comme ci-dessus. Si $\psi(1) \in \mathrm{Sp}(2n)^+$, c'est-à-dire si $\det(\psi(1) - \mathrm{Id}) > 0$, l'extrémité de γ est en $W^+ = -\mathrm{Id}$ et donc $\rho(\gamma(1)) = (-1)^n$. Dans ce cas, $\mu(\psi) - n$ est donc pair. Si, au contraire, $\det(\psi(1) - \mathrm{Id}) < 0$, γ va à W^- et $\rho(\gamma(1)) = (-1)^{n-1}$, de sorte que $\mu(\psi) - n$ est impair.

Il reste à démontrer l'énoncé sur les matrices symétriques. On vérifie sans mal (exercice 15 page 487) que, si S est symétrique, $\exp(tJS)$ est symplectique. Ensuite, comme S est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée et il existe un chemin $\lambda \mapsto P(\lambda)$ de matrices dans $O^+(2n)$ tel que $P(0) = \mathrm{Id}$ et $S(1) = {}^tP(1)SP(1)$ soit une matrice diagonale. Posons

$$S(\lambda) = {}^tP(\lambda)SP(\lambda) \quad \text{et} \quad \psi_\lambda(t) = \exp(tJS(\lambda)).$$

L'indice (au sens des formes quadratiques) de la matrice symétrique S_λ ne dépend pas de λ . Le fait que la norme de S soit inférieure à 2π garantit que $\exp(JS(\lambda))$ n'a pas la valeur propre 1. On peut donc calculer l'indice de Maslov du chemin ψ_λ , pour n'importe quel λ (puisque l'indice n'en dépend pas et $\psi_\lambda \in \mathcal{S}$) et donc, on est ramené à démontrer l'égalité voulue dans le cas où la matrice symétrique est tout simplement diagonale. On peut même supposer, en utilisant le même argument, que S a pour valeurs propres π et $-\pi$. On décompose ensuite $\mathbf{R}^{2n}$ en somme de n plans symplectiques, ce qui fait qu'il suffit de calculer l'indice de Maslov dans le cas des matrices symétriques

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}.$$

En effet, la propriété de multiplicativité de ρ dans le théorème 7.1.3 se traduit en additivité de l'indice de Maslov.

Pour la première,

$$\exp(tJS) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & \sin \pi t \\ -\sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}$$

est une rotation d'angle $-\pi$. Cette matrice est la matrice unitaire $\exp(-it\pi)$, de sorte que son image par ρ est $\exp(-it\pi)$. Il en résulte un indice de Maslov

$$\mu(\exp(tJS)) = -1 (= \text{Ind}(S) - 1).$$

Le même calcul pour la troisième matrice donne

$$\exp(tJS) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix},$$

une rotation d'angle π cette fois, de sorte que son image par ρ est $\exp(it\pi)$. Il en résulte un indice de Maslov

$$\mu(\exp(tJS)) = 1 (= \text{Ind}(S) - 1).$$

La deuxième matrice symétrique donne

$$\exp(tJS) = \begin{pmatrix} \text{ch } \pi t & -\text{sh } \pi t \\ -\text{sh } \pi t & \text{ch } \pi t \end{pmatrix},$$

une matrice dont les valeurs propres sont $e^{\pi t}$ et $e^{-\pi t}$, deux nombres réels positifs, de sorte que ρ envoie cette matrice sur 1 et que

$$\mu(\exp(tJS)) = 0 (= \text{Ind}(S) - 1).$$

On a bien la formule annoncée (avec $n = 1$) dans ces trois cas et donc en général par additivité. $\square$

7.2.b. Bilan, troisième étape. Sous l'hypothèse 6.2.2, à toute orbite périodique de période 1, non dégénérée et contractile, on a ainsi associé un entier, son *indice de Maslov*.

Notons que le calcul de l'indice de Maslov pour les matrices symétriques effectué ci-dessus donne, dans le cas d'un hamiltonien autonome et d'une orbite stationnaire :

Corollaire 7.2.2. *Soit W une variété symplectique de dimension $2n$, soit $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ un hamiltonien (autonome) et soit x un point critique de H . On suppose que H est petit au sens de la topologie $\mathbb{C}^2$, ici que $\|\text{Hess}_x(H)\| < 2\pi$. Alors l'indice de Maslov $\mu(x)$ de x comme solution périodique du système hamiltonien et son indice $\text{Ind}(x)$ comme point critique de la fonction H sont reliés par*

$$\mu(x) = \text{Ind}(x) - n.$$

$\square$

7.2.c. Lien entre matrices symplectiques et symétriques. Nous savons (grâce à l'exercice 15 (page 487) et à la proposition 7.2.1) que, lorsque S est une matrice symétrique, $\exp(tJS)$ est une matrice symplectique. On a plus généralement :

Lemme 7.2.3. *Soit $S : [0, 1] \rightarrow M(2n; \mathbf{R})$ un chemin continu de matrices symétriques. Alors le chemin $R : [0, 1] \rightarrow M(2n; \mathbf{R})$ solution de*

$$\frac{d}{dt}R(t) = JS(t)R(t), \quad R(0) = \text{Id}$$

est dans $\text{Sp}(2n)$. Réciproquement, si $R : [0, 1] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$, alors le chemin

$$S(t) = -JR'(t)R(t)^{-1}$$

est formé de matrices symétriques.

Démonstration. On a noté par $'$ la dérivée par rapport à t . On a d'abord

$${}^tR(t)' = -{}^tR(t)S(t)J,$$

puis

$$\begin{aligned} ({}^tRJR)' &= {}^tR'JR + {}^tRJR' \\ &= -{}^tRSJ^2R + {}^tRJ^2SR \\ &= {}^tRSR - {}^tRSR = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que ${}^tRJR = J$ pour tout $t \in [0, 1]$, et donc que $R(t) \in \text{Sp}(2n)$.

Réciproquement, c'est encore un calcul :

$$\begin{aligned} {}^tS &= -{}^t(JR'R^{-1}) = -{}^tR^{-1}{}^tR'{}^tJ \\ &= {}^tR^{-1}{}^tR'J \quad \text{puisque } J \text{ est anti-symétrique} \\ &= {}^tR^{-1}({}^tRJ)' \\ &= {}^tR^{-1}(JR^{-1})' \quad \text{puisque } {}^tRJR = J \Rightarrow {}^tRJ = JR^{-1} \\ &= {}^tR^{-1}J(R^{-1})' \\ &= JR(R^{-1})' \quad \text{puisque de même } {}^tR^{-1}J = JR \\ &= -JR'R^{-1} \quad \text{puisque } RR^{-1} = \text{Id} \Rightarrow R'R^{-1} + RR'^{-1} = 0 \\ &= S. \end{aligned} \quad \square$$

7.2.d. Chemins d'indice de Maslov prescrit.

Lemme 7.2.4. *Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, il existe une matrice diagonale $S_k \in M(2n; \mathbf{R})$ telle que le chemin associé $R(t) = \exp(tJS_k)$ soit dans $\mathcal{S}$ et vérifie*

$$\mu(R(t)) = k.$$

Démonstration. Commençons par généraliser un calcul déjà effectué page 188 en dimension 2. On choisit un entier ℓ impair et on considère la matrice diagonale $S = \begin{pmatrix} \ell\pi & 0 \\ 0 & \ell\pi \end{pmatrix}$. Alors,

$$e^{tJS} = \begin{pmatrix} \cos \ell\pi t & \sin \ell\pi t \\ -\sin \ell\pi t & \cos \ell\pi t \end{pmatrix}$$

est un chemin dans $\mathcal{S}$ qui aboutit en $-\text{Id} = W^+ \in \text{Sp}(2)^+$. La matrice e^{tJS} est la matrice unitaire $e^{-i\ell t} \in \text{U}(1) \subset \text{Sp}(2)$, de sorte que $\mu(e^{tJS}) = -\ell$. Pour $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a

$$e^{tJS} = \begin{pmatrix} \text{ch } t & -\text{sh } t \\ -\text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix},$$

chemin dans $\mathcal{S}$ formé de matrices dont les valeurs propres e^t et e^{-t} sont réelles positives et distinctes pour $t > 0$, de sorte que $\mu(e^{tJS}) = 0$.

Par additivité de l'indice de Maslov, les matrices diagonales (écrites dans les coordonnées $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n$)

$$S_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{bmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix} \\ & & & & \begin{bmatrix} (n-k-1)\pi & 0 \\ 0 & (n-k-1)\pi \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

si $k \equiv n \pmod{2}$, respectivement

$$S_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{bmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ & & & & \begin{bmatrix} (n-k-2)\pi & 0 \\ 0 & (n-k-2)\pi \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

si $k \equiv n-1 \pmod{2}$, définissent des chemins d'indice de Maslov k . □

Nous réutiliserons ces matrices S_k , sous ce nom, au chapitre 8.

7.3. Appendice : construction et propriétés de ρ

7.3.a. Préliminaires. Soit B la forme

$$\mathbf{C}^{2n} \times \mathbf{C}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}$$

définie par

$$B(X_1, X_2) = \operatorname{Im} \omega(\overline{X}_1, X_2).$$

Lemme 7.3.1. *La forme B est une forme $\mathbf{R}$ -bilinéaire, symétrique et non dégénérée. De plus, elle satisfait à*

$$B(iX_1, iX_2) = B(X_1, X_2) \quad \text{et} \quad B(\overline{X}_1, \overline{X}_2) = -B(X_1, X_2).$$

Démonstration du lemme. Il est bien clair que B est $\mathbf{R}$ -bilinéaire. On vérifie directement qu'elle est symétrique

$$\begin{aligned} B(X_2, X_1) &= \operatorname{Im} \omega(\overline{X}_2, X_1) \\ &= -\operatorname{Im} \omega(X_1, \overline{X}_2) \\ &= \operatorname{Im} \overline{\omega(X_1, \overline{X}_2)} \\ &= \operatorname{Im} \omega(\overline{X}_1, X_2) = B(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Pour montrer qu'elle est non dégénérée, supposons que X soit tel que $B(X, Y) = 0$ pour tout Y . On a donc

$$\operatorname{Im} \omega(\overline{X}, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathbf{C}^{2n},$$

et donc aussi

$$\operatorname{Im} \omega(\overline{X}, iY) = 0 \quad \forall Y \in \mathbf{C}^{2n},$$

et par conséquent

$$\omega(\overline{X}, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathbf{C}^{2n},$$

donc $\overline{X} = 0$ puisque ω est non dégénérée.

Les deux égalités ont aussi des démonstrations directes :

$$B(iX_1, iX_2) = \operatorname{Im} \omega(-i\overline{X}_1, iX_2) = \operatorname{Im} \omega(\overline{X}_1, X_2) = B(X_1, X_2)$$

pour la première, et

$$\begin{aligned} B(\overline{X}_1, \overline{X}_2) &= \operatorname{Im} \omega(X_1, \overline{X}_2) \\ &= -\operatorname{Im} \overline{\omega(X_1, \overline{X}_2)} \\ &= -\operatorname{Im} \omega(\overline{X}_1, X_2) \\ &= -B(X_1, X_2) \end{aligned}$$

pour la seconde. □

Corollaire 7.3.2. *La forme quadratique $Q(X) = B(X, X) = \operatorname{Im} \omega(\overline{X}, X)$ est non dégénérée et sa signature est nulle.* □

Ici on a utilisé la terminologie où la *signature* d'une forme quadratique est la différence

$$\sigma(Q) = m_+(Q) - m_-(Q)$$

où m_+ , resp. m_- , est la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels Q est définie positive, resp. négative (m_- est ce que nous avons appelé l'indice dans le contexte des points critiques).

Lemme 7.3.3. *Soient λ et μ deux valeurs propres de A . Si $\bar{\lambda}\mu \neq 1$ alors les sous-espaces caractéristiques E_λ et E_μ sont orthogonaux pour B .*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.6.6 : si $X_1 \in E_\lambda$ et $X_2 \in E_\mu$, alors $\bar{X}_1 \in E_{\bar{\lambda}}$ et $\omega(\bar{X}_1, X_2) = 0$. $\square$

Corollaire 7.3.4.

- (1) *Soit $\lambda \in S^1$. Alors B et Q sont non dégénérées en restriction à E_λ .*
- (2) *Soit $\lambda \in \mathbf{C} - S^1$. Alors B et Q sont non dégénérées en restriction à $E_\lambda \oplus E_{1/\bar{\lambda}}$. De plus, la signature de la restriction de Q à ce sous-espace est nulle.*

Démonstration du corollaire. La seule assertion qui mérite une vérification est celle sur la signature. Nous savons que la restriction de ω à $E_\lambda \oplus E_{1/\bar{\lambda}}$ est non dégénérée (c'est le corollaire 5.6.7) et que les deux sous-espaces caractéristiques sont isotropes. On peut donc trouver une base $(X_1, \dots, X_k)$ de E_λ et une base $(Y_1, \dots, Y_k)$ de $E_{\bar{\lambda}}$ telles que $(X_1, \dots, X_k, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k)$ soit une base symplectique de $E_\lambda \oplus E_{1/\bar{\lambda}}$. Posons

$$u_j = X_j + iY_j, \quad v_j = X_j - iY_j.$$

On a alors

$$\begin{aligned} B(u_j, u_k) &= B(X_j + iY_j, X_k + iY_k) \\ &= B(iY_j, X_k) + B(iY_k, X_j) \\ &= \operatorname{Im} \omega(-i\bar{Y}_j, X_k) + \operatorname{Im} \omega(-i\bar{Y}_k, X_j) \\ &= 2\delta_{j,k}, \end{aligned}$$

par suite Q est définie positive sur le sous-espace engendré par les u_j , et

$$\begin{aligned} B(u_j, v_k) &= B(X_j + iY_j, X_k - iY_k) \\ &= B(iY_j, X_k) - B(iY_k, X_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc les sous-espaces engendrés par les u_j et les v_j sont orthogonaux, enfin

$$\begin{aligned} B(v_j, v_k) &= B(X_j - iY_j, X_k - iY_k) \\ &= -B(iY_j, X_k) - B(iY_k, X_j) \\ &= -2\delta_{j,k}, \end{aligned}$$

donc Q est négative sur le sous-espace engendré par les v_j . Donc sa signature est nulle. $\square$

7.3.b. Définition de ρ . Définissons maintenant l'application ρ . Si $\lambda \in S^1 - \mathbf{R}$ est une valeur propre, on écrit le sous-espace caractéristique

$$E_\lambda = E_\lambda^+ \oplus E_\lambda^-$$

comme somme de deux sous-espaces vectoriels réels de $\mathbf{C}^{2n}$, sur lesquels la forme Q est définie positive, respectivement définie négative. Comme $Q(iX) = Q(X)$, les deux sous-espaces sont stables par la multiplication par i et sont donc en fait des sous-espaces vectoriels *complexes* de $\mathbf{C}^{2n}$.

On appelle $m_+(\lambda)$ et $m_-(\lambda)$ les dimensions complexes de ces espaces,

$$m_+(\lambda) = \dim_{\mathbf{C}} E_\lambda^+, \quad m_-(\lambda) = \dim_{\mathbf{C}} E_\lambda^-,$$

de sorte que

$$m_+(\lambda) + m_-(\lambda) = \dim_{\mathbf{C}} E_\lambda = m(\lambda),$$

la multiplicité de λ . On définit ensuite la *signature* de la valeur propre λ comme

$$\sigma(\lambda) = m_+(\lambda) - m_-(\lambda).$$

Rappelons que la multiplicité de -1 comme (éventuelle) valeur propre est paire, puisque E_{-1} est symplectique (c'est le corollaire 5.6.7), ainsi la somme des multiplicités des valeurs propres réelles négatives est un nombre pair,

$$m_0 = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A) \cap \mathbf{R}_-} m(\lambda) \in 2\mathbf{N}.$$

Ce qui fait que l'on peut enfin poser

$$\rho(A) = (-1)^{m_0/2} \prod_{\lambda \in \text{Spec}(A) \cap (S^1 - \mathbf{R})} \lambda^{m_+(\lambda)}.$$

C'est l'application annoncée dans l'énoncé du théorème 7.1.3, comme nous allons le démontrer. Commençons par remarquer qu'on aurait pu utiliser seulement les valeurs propres à partie imaginaire positive.

Proposition 7.3.5.

$$\rho(A) = (-1)^{m_0/2} \prod_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(A) \cap S^1 \\ \text{Im}(\lambda) > 0}} \lambda^{\sigma(\lambda)}.$$

Démonstration. Nous avons dit (c'est la remarque 5.6.8) que $X \mapsto \bar{X}$ est un isomorphisme de sous-espaces vectoriels réels de E_λ sur $E_{\bar{\lambda}}$. Comme $Q(\bar{X}) = -Q(X)$, on a, pour $\lambda \in S^1$,

$$\begin{cases} m_+(\bar{\lambda}) = m_-(\lambda) \\ m_-(\bar{\lambda}) = m_+(\lambda) \\ \sigma(\bar{\lambda}) = -\sigma(\lambda), \end{cases}$$

de sorte que

$$\lambda^{m_+(\lambda)} \cdot \bar{\lambda}^{m_+(\lambda)} = \lambda^{\sigma(\lambda)} = \bar{\lambda}^{\sigma(\bar{\lambda})}.$$

En regroupant les valeurs propres de module 1 par paires $(\lambda, \bar{\lambda})$ dans la définition de ρ , on obtient la formule annoncée. $\square$

7.3.c. Propriétés de ρ . Commençons maintenant à vérifier les propriétés espérées pour ρ , c'est-à-dire à démontrer le théorème 7.1.3.

Continuité de ρ . Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite dans $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R})$ convergeant vers une matrice $A \in \mathrm{Sp}(2n)$. Nous allons montrer que la suite des $\rho(A_k)$ converge vers $\rho(A)$. Il est clair qu'il suffit de le faire pour une sous-suite de (A_k) . Nous allons utiliser le fait que les valeurs propres dépendent continûment des coefficients de la matrice, un fait classique dont voici un énoncé précis⁽¹⁾ :

Proposition 7.3.6. *Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices carrées $m \times m$ tendant vers une limite A . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de A , écrites avec leur multiplicité. Alors il existe une numérotation $\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k$ des valeurs propres de A_k telle que*

$$\forall i \in [1, m] \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = \lambda_i.$$

Nous aurons aussi besoin d'un résultat de continuité des sous-espaces caractéristiques :

Proposition 7.3.7. *Sous les mêmes hypothèses, soit λ une valeur propre de A . Alors, à extraction d'une sous-suite près*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bigoplus_{\substack{\lim \lambda_i^k = \lambda \\ i \neq j \Rightarrow \lambda_i^k \neq \lambda_j^k}} E_{\lambda_i^k}(A_k) = E_\lambda(A).$$

⁽¹⁾Dont la démonstration est laissée en exercice aux lecteurs volontaires ; nous proposons, dans l'exercice 43 page 497, une démonstration fondée sur le théorème de Rouché.

Dans cet énoncé, la convergence d'une suite de sous-espaces vectoriels de même dimension (de $\mathbf{C}^m$) vers un sous-espace de cette dimension est définie (comme convergence dans la grassmannienne correspondante c'est-à-dire) par $\lim V_k = V$ s'il existe pour tout k une base unitaire $\mathcal{B}_k$ de V_k telle que la suite des $\mathcal{B}_k$ converge vers une base $\mathcal{B}$ de V .

Démonstration. Notons $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_{r_k}^k$ les valeurs propres (distinctes) de A_k dont les sous-espaces caractéristiques apparaissent dans la somme directe. Grâce à la proposition 7.3.6, nous savons que la somme de leurs multiplicités est la multiplicité de la limite λ . Appelons V_k cette somme directe et remarquons que

$$V_k \subset \text{Ker}(A - \lambda_1^k \text{Id})^{m(\lambda_1^k)} (A - \lambda_2^k \text{Id})^{m(\lambda_2^k)} \dots (A - \lambda_{r_k}^k \text{Id})^{m(\lambda_{r_k}^k)}.$$

En effet, $(A - \lambda_j^k \text{Id})^{m(\lambda_j^k)}$ s'annule sur le sous-espace caractéristique $E_{\lambda_j^k}(A_k)$ (par définition des sous-espaces caractéristiques). Donc, si $v_k \in V_k$ est une suite de vecteurs qui converge vers v , on a

$$(A - \lambda \text{Id})^{m(\lambda)} v = 0,$$

et par suite $v \in E_\lambda(A)$. $\square$

De la proposition 7.3.6, on déduit sans mal un autre résultat qui nous sera utile :

Proposition 7.3.8. *Si $(V_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^m$ de la même dimension convergeant vers un sous-espace V et si Q est une forme quadratique sur $\mathbf{C}^m$ dont la restriction à chacun des V_k et à V est non dégénérée, alors, pour k assez grand, la signature de $Q|_{V_k}$ est constante et égale à celle de $Q|_V$.*

Démonstration. On choisit une suite de bases unitaires des V_k qui converge vers une base unitaire de V ; la matrice de la restriction de Q à V_k tend vers celle de la restriction de Q à V ; le nombre de valeurs propres positives comptées avec multiplicité est donc constant pour k assez grand. $\square$

Venons-en maintenant à la démonstration de la continuité de ρ . Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices symplectiques convergeant vers $A \in \text{Sp}(2n)$ et soit $\lambda \in S^1 \cap \{\text{Im}(z) > 0\}$ une valeur propre de A . Avec les notations utilisées ci-dessus, écrivons

$$E_\lambda(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} E_{\lambda_1^k}(A_k) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_{r_k}^k}(A_k).$$

La valeur propre λ peut être approchée par une suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbf{N}}$ de valeurs propres de A_k qui sont sur le cercle ou par une suite $(\mu^k)_{k \in \mathbf{N}}$ de nombres

à l'extérieur du cercle mais dans ce cas, aussi par la suite des $(1/\bar{\mu}^k)_{k \in \mathbb{N}}$. C'est ce qui est illustré sur la figure 2.

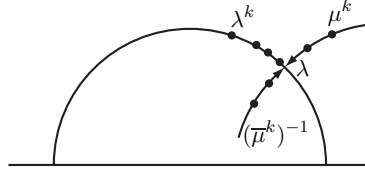


FIGURE 2

Appelons $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{s_k}^k$ (pour $s_k \leq r_k$) celles des valeurs propres qui sont sur le cercle pour k assez grand. Voici un corollaire de la proposition 7.3.8

Corollaire 7.3.9.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\lambda_1^k)^{\sigma(\lambda_1^k)} \dots (\lambda_{s_k}^k)^{\sigma(\lambda_{s_k}^k)} = \lambda^{\sigma(\lambda)}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 7.3.8 lorsque $s_k = r_k$, puisqu'alors

$$\sigma(\lambda_1^k) + \dots + \sigma(\lambda_{s_k}^k) = \sigma(\lambda)$$

pour k assez grand, ce qui donne le résultat voulu. Si $s_k < r_k$, les valeurs propres $\lambda_{s_k+1}^k, \dots, \lambda_{r_k}^k$ peuvent être regroupées par paires $\mu, \bar{\mu}^{-1}$ de même multiplicité (comme indiqué sur la figure 2). Mais, d'après le corollaire 7.3.4, la signature de Q sur $E_\mu(A_k) \oplus E_{\bar{\mu}^{-1}}(A_k)$ est nulle. La relation entre les signatures est encore satisfaite et le corollaire démontré. $\square$

Pour finir la démonstration de la continuité, il reste à analyser les suites de valeurs propres des matrices A_k tendant vers une valeur propre réelle λ de A .

Commençons par le cas d'un $\lambda > 0$. Si $\lambda \neq 1$, λ_i^k et λ n'interviennent pas dans la définition de ρ . Si $\lambda = 1$, seules interviennent dans la définition de ρ des suites qui sont sur $S^1 \cap \{\text{Im}(z) > 0\}$ pour k assez grand (figure 3). Pour chacune de celles-ci,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\lambda^k)^{\sigma(\lambda_k)} = 1 \quad \text{puisque} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^k = 1.$$

Passons maintenant au cas d'un $\lambda < 0$ (figures 4 et 5). Appelons

- (comme ci-dessus) $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{s_k}^k$ les suites de valeurs propres de A_k qui sont dans $S^1 \cap \{\text{Im}(z) > 0\}$ pour k assez grand (s'il y en a au moins une, alors $\lambda = -1$),
- $\lambda_{s_k+1}^k, \dots, \lambda_{t_k}^k$ les suites réelles,
- $\lambda_{t_k+1}^k, \dots, \lambda_{r_k}^k$ les autres.

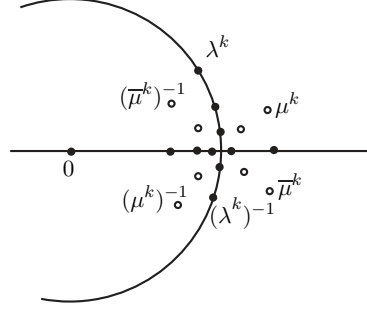


FIGURE 3

Nous démontrons :

Proposition 7.3.10.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\lambda_1^k)^{\sigma(\lambda_1^k)} \dots (\lambda_{s_k}^k)^{\sigma(\lambda_{s_k}^k)} \cdot (-1)^{(m(\lambda_{s_k+1}^k) + \dots + m(\lambda_{t_k}^k))/2} = (-1)^{m(\lambda)/2}.$$

Démonstration. Si $\lambda \neq -1$, alors $s_k = 0$ et les valeurs propres $\lambda_{t_k+1}, \dots, \lambda_{r_k}$ peuvent être regroupées en quadruples $\mu, 1/\mu, \bar{\mu}, 1/\bar{\mu}$ (figure 4), de sorte que

$$m(\mu) + m(1/\mu) + m(\bar{\mu}) + m(1/\bar{\mu}) = 4m(\mu).$$

La continuité des valeurs propres (proposition 7.3.6) donne donc, pour k assez grand, que

$$\frac{m(\lambda)}{2} = \sum_{i=1}^{r_k} \frac{m(\lambda_i^k)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{t_k} \frac{m(\lambda_i^k)}{2}$$

ont la même parité, et la démonstration est terminée.

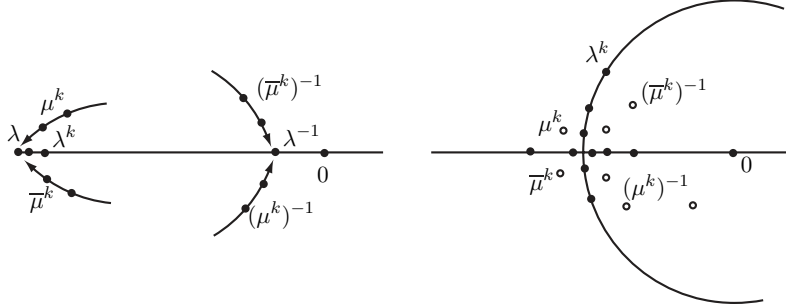


FIGURE 4

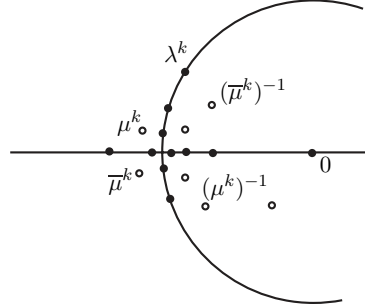


FIGURE 5

Si $\lambda = -1$, les valeurs propres $\lambda_{t_k+1}, \dots, \lambda_{r_k}$ sont, pour une partie les conjugués $\bar{\lambda}_1^k, \dots, \bar{\lambda}_{s_k}^k$, pour le restant des quadruples $\mu, 1/\mu, \bar{\mu}, 1/\bar{\mu}$ (figure 5). On a cette fois, pour k assez grand, et modulo 2

$$\begin{aligned} \frac{m(\lambda)}{2} &\equiv \sum_{i=1}^{s_k} \frac{m(\lambda_i^k)}{2} + \sum_{i=1}^{s_k} \frac{m(\bar{\lambda}_i^k)}{2} + \sum_{i=s_k+1}^{t_k} \frac{m(\lambda_i^k)}{2} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{s_k} m(\lambda_i^k) + \sum_{i=s_k+1}^{t_k} \frac{m(\lambda_i^k)}{2} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{s_k} \sigma(\lambda_i^k) + \sum_{i=s_k+1}^{t_k} \frac{m(\lambda_i^k)}{2}, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que m et σ ont la même parité. C'est le résultat annoncé. $\square$

Ceci (c'est-à-dire le corollaire 7.3.9 et la proposition 7.3.10) finit la démonstration de la continuité de ρ . $\square$

Montrons maintenant que l'application continue ρ ainsi construite satisfait bien toutes les propriétés annoncées dans le théorème 7.1.3.

Naturalité. Les matrices TAT^{-1} et A ont le même spectre, avec multiplicité. De plus, les sous-espaces caractéristiques se correspondent, par

$$E_\lambda^{TAT^{-1}} = T(E_\lambda^A).$$

Enfin, comme T n'est pas n'importe quelle matrice inversible, mais un élément de $\text{Sp}(2n; \mathbf{R})$, elle préserve la forme symplectique ω et tout ce qui s'en déduit, en particulier, $Q(T(X)) = Q(X)$, donc

$$m_\pm^{TAT^{-1}}(\lambda) = m_\pm^A(\lambda) \quad \text{et enfin} \quad \rho(TAT^{-1}) = \rho(A). \quad \square$$

Produit. Le spectre de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est la réunion des spectres de A et B (avec multiplicités) et de même (avec la convention que $E_\lambda = 0$ si λ n'est pas une valeur propre),

$$E_\lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = E_\lambda(A) \oplus E_\lambda(B).$$

Les $m_\pm$ s'ajoutent, eux aussi, et donc

$$\rho \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \rho(A)\rho(B). \quad \square$$

Normalisation. Cette propriété ($\rho = \pm 1$ si les valeurs propres sont réelles) est une conséquence immédiate de la définition de ρ . $\square$

Déterminant. Soit $A \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R}) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{U}(n)$,

$$A = \begin{pmatrix} M & -N \\ N & M \end{pmatrix}, \quad \text{identifiée à } U = M + iN \in \mathrm{U}(n).$$

Remarquons d'abord que les valeurs propres de A sont bien les valeurs propres de U . On a d'une part

$$U(z) = \lambda z \implies A \begin{pmatrix} z \\ -iz \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z \\ -iz \end{pmatrix}$$

et de l'autre

$$\begin{pmatrix} M & -N \\ N & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \implies (M + iN)(v + iw) = \lambda(v + iw)$$

(si par hasard $v + iw = 0$, on a $(M + iN)v = \lambda v$, de sorte que λ est bien une valeur propre de U). En particulier, les valeurs propres de A sont, comme celles de U puisque ce sont les mêmes, des éléments de S^1 .

Lemme 7.3.11. Soit $A \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R}) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{U}(n)$ et soit λ une valeur propre non réelle de A . Alors

$$m_+^A(\lambda) = m^U(\lambda) \quad \text{et} \quad m^A(-1) = 2m^U(-1).$$

Démonstration. Les matrices A et U sont diagonalisables sur $\mathbf{C}$, donc les sous-espaces caractéristiques E_λ sont tout simplement les sous-espaces propres. Soit J_0 la structure complexe

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de sorte que } J_0^2 = -\mathrm{Id}, \quad AJ_0 = J_0A$$

et $\omega(X, J_0Y) = (X, Y)$, le produit scalaire de $\mathbf{R}^{2n}$. Comme A commute avec J_0 , on a

$$J_0(E_\lambda^A) = E_\lambda^A.$$

Par ailleurs, $J_0 \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R}) \cap \mathrm{O}(2n)$ est, elle aussi, diagonalisable sur $\mathbf{C}$, ses valeurs propres sont i et $-i$, avec multiplicité n pour chacune, ses sous-espaces propres sont

$$E_i^{J_0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{C}^n \right\} \quad \text{et} \quad E_{-i}^{J_0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{C}^n \right\}.$$

En particulier, pour $v \in E_i^{J_0}$, on a

$$\omega(\bar{v}, v) = \omega(\bar{v}, -iJ_0v) = -i\omega(\bar{v}, J_0v) = -i(\|\mathrm{Ré} v\|^2 + \|\mathrm{Im} v\|^2),$$

donc Q est définie négative sur $E_i^{J_0}$. Un calcul analogue montre qu'elle est définie positive sur $E_{-i}^{J_0}$. On en déduit que les sous-espaces propres de A satisfont à

$$E_\lambda^+ = E_\lambda \cap E_{-i}^{J_0}, \quad E_\lambda^- = E_\lambda \cap E_i^{J_0}.$$

Donc

$$\begin{aligned} E_\lambda^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{2n} \mid \begin{pmatrix} M & -N \\ N & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{x \in \mathbf{C}^n \mid (M + iN)x = \lambda x\} \end{aligned}$$

ce qui est exactement le sous-espace propre pour λ de la matrice U . Par conséquent, on a bien $m_+^A(\lambda) = m^U(\lambda)$. Le cas de la valeur propre -1 se traite de façon analogue : on vérifie que

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in E_{-1}^A \cap \mathbf{R}^{2n} \iff (v + iw) \in E_{-1}^U,$$

de sorte que les sous-espaces propres de A et de U pour la valeur propre -1 sont isomorphes comme sous-espaces vectoriels réels, et que

$$m^A(-1) = \dim_{\mathbf{R}}(E_{-1}^A \cap \mathbf{R}^{2n}) = \dim_{\mathbf{R}} E_{-1}^U = \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{C}} E_{-1}^U = \frac{1}{2} m^U(-1)$$

... ce qui finit la démonstration du lemme... $\square$

et qui démontre que $\rho(A) = \det_{\mathbf{C}}(U)$. $\square$

Passage à l'inverse. On a vu que ${}^tA = J_0^{-1}A^{-1}J_0$, donc, en appliquant la naturalité, $\rho({}^tA) = \rho(A^{-1})$. Ensuite, λ est une valeur propre de A^{-1} si et seulement si $1/\lambda$ en est une de A et les sous-espaces caractéristiques sont les mêmes

$$E_\lambda(A^{-1}) = E_{1/\lambda}(A),$$

en particulier,

$$m_+^{A^{-1}}(\lambda) = m_+^A(1/\lambda) \quad \text{et} \quad m^{A^{-1}}(-1) = m^A(-1), \quad \text{donc} \quad m_0^{A^{-1}} = m_0^A.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \rho(A^{-1}) &= (-1)^{m_0^{A^{-1}}/2} \prod_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(A^{-1}) \\ \lambda \in S^1 - \mathbf{R}}} \lambda^{m_+^{A^{-1}}(\lambda)} \\ &= (-1)^{m_0^A/2} \prod_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(A^{-1}) = \text{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 - \mathbf{R}}} \lambda^{m_+^A(1/\lambda)}. \end{aligned}$$

En changeant λ en $1/\lambda$, on trouve

$$\rho(A^{-1}) = (-1)^{m_0^A/2} \prod_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 - \mathbf{R}}} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{m_+^A(\lambda)} = \frac{1}{\rho(A)} = \overline{\rho(A)}.$$

7.3.d. Les lemmes sur $\mathrm{Sp}(2n)^*$

Démonstration du lemme 7.1.6. On utilise la description précise de ρ donnée dans la proposition 7.3.5 pour construire $\tilde{\rho}$ et des énoncés analogues à ceux prouvant la continuité de ρ pour démontrer celle du relevé.

Pour $\lambda \in S^1$, *non réel*, on appelle $\arg(\lambda)$ le nombre

$$\arg(\lambda) \in]0, 2\pi[\text{ tel que } \exp(i \arg(\lambda)) = \lambda.$$

On définit $\tilde{\rho} : \mathrm{Sp}(2n)^* \rightarrow \mathbf{R}$ par les formules

$$\tilde{\rho}(A) = \begin{cases} \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 - \mathbf{R}}} m_+(\lambda) \arg(\lambda) + \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \notin S^1 - \mathbf{R}}} \frac{\pi}{2} m(\lambda) & \text{si } A \in \mathrm{Sp}(2n)^+ \\ \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 - \mathbf{R}}} m_+(\lambda) \arg(\lambda) + \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \notin S^1 - \mathbf{R}}} \frac{\pi}{2} m(\lambda) + \pi & \text{si } A \in \mathrm{Sp}(2n)^-. \end{cases}$$

Remarquons que la première somme peut s'écrire en n'utilisant que les valeurs propres à partie imaginaire positive :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 - \mathbf{R}}} m_+(\lambda) \arg(\lambda) &= \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}}} (m_+(\lambda) \arg(\lambda) + m_+(\bar{\lambda}) \arg(\bar{\lambda})) \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}}} (m_+(\lambda) \arg(\lambda) + m_-(\lambda)(2\pi - \arg(\lambda))) \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}}} (m_-(\lambda)(2\pi) + \sigma(\lambda) \arg(\lambda)). \end{aligned}$$

Puis, les valeurs propres non réelles de $A \in \mathrm{Sp}(2n)$ peuvent être groupées par paires $\lambda, \bar{\lambda}$ de même multiplicité. On en déduit une expression de $\tilde{\rho}$ ne faisant intervenir que les valeurs propres de partie imaginaire positive :

– pour $A \in \mathrm{Sp}(2n)^+$,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}}} 2\pi(m_-(\lambda) + \sigma(\lambda) \arg(\lambda)) \\ &\quad + \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in \{\mathrm{Im}(z) > 0\} - S^1}} \pi m(\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \cap \mathbf{R}} \frac{\pi}{2} m(\lambda), \end{aligned}$$

– et pour $A \in \mathrm{Sp}(2n)^-$,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = & \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}}} 2\pi(m_-(\lambda) + \sigma(\lambda) \arg(\lambda)) \\ & + \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in \{\mathrm{Im}(z) > 0\} - S^1}} \pi m(\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \cap \mathbf{R}} \frac{\pi}{2} m(\lambda) + \pi. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant que $\tilde{\rho}$ a les propriétés requises. Soit $A \in \mathrm{Sp}(2n)^+$. Les valeurs propres de A qui ne sont ni réelles ni de module 1 arrivent par groupes de quatre, avec même multiplicité. La multiplicité totale des valeurs propres réelles positives est elle aussi divisible par 4 : elles arrivent par paires $(\lambda, 1/\lambda)$ et

$$\begin{aligned} 0 < \det(A - \mathrm{Id}) &= \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} (\lambda - 1) \\ &\text{est de même signe que } \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \cap \mathbf{R}_+} (\lambda - 1). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\exp \left(i \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \notin S^1 - \mathbf{R}}} m(\lambda) \frac{\pi}{2} \right) = \exp \left(i \frac{m_0}{2} \pi \right) = (-1)^{m_0/2}$$

(rappelons que m_0 est la multiplicité totale des valeurs propres réelles négatives de A). On a donc bien

$$\exp(i\tilde{\rho}(A)) = \rho(A) \quad \forall A \in \mathrm{Sp}(2n)^+.$$

Pour le cas de $\mathrm{Sp}(2n)^-$, la multiplicité totale des valeurs propres réelles positives de A est, grâce au même argument, un entier de la forme $4k + 2$, mais nous avons un π supplémentaire dans la formule définissant $\tilde{\rho}$, de sorte que

$$\exp \left(i \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \\ \lambda \in S^1 - \mathbf{R}}} m(\lambda) \frac{\pi}{2} + \pi \right) = \exp \left(i \left(\frac{m_0}{2} \pi + 2\ell\pi \right) \right) = (-1)^{m_0/2},$$

et donc ici encore,

$$\exp(i\tilde{\rho}(A)) = \rho(A) \quad \forall A \in \mathrm{Sp}(2n)^-.$$

Donc $\tilde{\rho}_{\pm}$ est un relevé de ρ .

Montrons maintenant que cette application $\tilde{\rho}$ est continue, en utilisant des arguments similaires à ceux qui nous ont déjà servi à montrer la continuité de ρ . Nous ne le faisons que sur $\mathrm{Sp}^+(2n)$, la démonstration pour $\mathrm{Sp}(2n)^-$ étant complètement analogue. Nous procédons comme pour la continuité

de ρ , avec une suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ convergeant vers A dans $\mathrm{Sp}(2n)^+$. Si λ est une valeur propre de A , notons comme ci-dessus $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{r_k}^k$ les valeurs propres (distinctes) de A_k telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = \lambda$. Comme ci-dessus, nous devons distinguer plusieurs cas. Nous utilisons dans chacun d'eux la formule donnant ρ en fonction des seules valeurs propres à partie imaginaire positive.

(1) $\lambda \in \{\mathrm{Im}(z) > 0\} - S^1$. Alors, toujours par continuité des valeurs propres,

$$\sum_{i=1}^{r_k} \pi m(\lambda_i^k) = \pi m(\lambda).$$

(2) $\lambda \in \{\mathrm{Im}(z) > 0\} \cap S^1$. Comme dans le corollaire 7.3.9, notons $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{s_k}^k$ les suites qui sont sur S^1 (pour k assez grand). Les autres sont regroupées par paires $\mu, 1/\bar{\mu}$ (comme sur la figure 2). Rappelons (c'est le corollaire 7.3.4) que la signature de Q sur un espace $E_\mu \oplus E_{1/\bar{\mu}}$ est nulle, de sorte que l'on a, pour k assez grand

$$\sum_{i=1}^{s_k} \sigma(\lambda_i^k) = \sigma(\lambda)$$

(comme dans la démonstration du corollaire 7.3.9). En appliquant le fait que

$$m_-(Q|_{E_\mu \oplus E_{1/\bar{\mu}}}) = m_+(Q|_{E_\mu \oplus E_{1/\bar{\mu}}}) = m(\mu) = \frac{1}{2}(m(\mu) + m(1/\bar{\mu})),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^{s_k} (2\pi m_-(\lambda_i^k) + \sigma(\lambda_i^k) \arg(\lambda_i^k)) + \sum_{i=s_k+1}^{r_k} \pi m(\lambda_i^k) \right) \\ = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left((2\pi m_-(Q|_{\oplus_{i=1}^{r_k} E_{\lambda_i^k}(A_k)})) + \left(\sum_{i=1}^{s_k} \sigma(\lambda_i^k) \right) \arg(\lambda) \right) \\ = 2\pi m_-(\lambda) + \sigma(\lambda) \arg(\lambda). \end{aligned}$$

(3) $\lambda \in \mathbf{R}$, $|\lambda| \neq 1$. Appelons $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{t_k}^k$ les valeurs propres de A_k qui sont réelles pour k assez grand. Les autres arrivent par quadruplets $\mu, \bar{\mu}, 1/\mu, 1/\bar{\mu}$ (comme sur la figure 4), tous les éléments du quadruplet ayant la même multiplicité. Toujours par continuité des valeurs propres,

$$\frac{\pi}{2} m(\lambda) = \sum_{i=1}^{r_k} \frac{\pi}{2} m(\lambda_i^k) = \sum_{i=1}^{t_k} \frac{\pi}{2} m(\lambda_i^k) + \pi \sum_{\substack{i=t_k+1 \\ \mathrm{Im}(\lambda_i^k) > 0}}^{r_k} m(\lambda_i^k).$$

(4) $\lambda = -1$. Il y a d'abord les valeurs propres $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{s_k}^k$ qui sont dans S^1 pour k assez grand; elles se regroupent par paires $\mu, \bar{\mu}$ (voir la figure 5).

Pour une suite de ce type avec $\text{Im}(\lambda_i^k) > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow +\infty} (2\pi m_-(\lambda_i^k) + \sigma(\lambda_i^k) \arg(\lambda_i^k)) - \pi m(\lambda_i^k) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (\sigma(\lambda_i^k)(\arg(\lambda_i^k) - \pi) + \pi (2m_-(\lambda_i^k) + \sigma(\lambda_i^k) - m(\lambda_i^k))) = 0. \end{aligned}$$

Il y a aussi des valeurs propres $\lambda_{s_k+1}^k, \dots, \lambda_{t_k}^k$ réelles pour k assez grand, les valeurs propres restantes $\lambda_{t_k+1}^k, \dots, \lambda_{r_k}^k$ qui ne sont ni réelles ni de module 1 et qui arrivent par quadruples $\mu, \bar{\mu}, 1/\mu, 1/\bar{\mu}$ (voir la figure 5). On trouve cette fois

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} m(\lambda) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{r_k} m(\lambda_i^k) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left(\sum_{i=1}^{s_k} m(\lambda_i^k) + \sum_{i=s_k+1}^{t_k} m(\lambda_i^k) + \sum_{i=t_k+1}^{r_k} m(\lambda_i^k) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ \text{Im}(\lambda_i^k) > 0}}^{s_k} m(\lambda_i^k) + \sum_{i=s_k+1}^{t_k} m(\lambda_i^k) + 2 \sum_{\substack{i=t_k+1 \\ \text{Im}(\lambda_i^k) > 0}}^{r_k} m(\lambda_i^k) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ \text{Im}(\lambda_i^k) > 0}}^{s_k} (2\pi m_-(\lambda_i^k) + \sigma(\lambda_i^k) \arg(\lambda_i^k)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \sum_{i=s_k+1}^{t_k} m(\lambda_i^k) + \pi \sum_{\substack{i=t_k+1 \\ \text{Im}(\lambda_i^k) > 0}}^{r_k} m(\lambda_i^k) \right). \end{aligned}$$

Les relations obtenues dans ces quatre cas donnent la continuité de $\tilde{\rho}$. $\square$

Démonstration du lemme 7.1.5. On part d'une matrice symplectique A qui n'a pas la valeur propre 1, on veut la connecter à une matrice B ayant la même propriété, toutes ses valeurs propres distinctes et exactement deux valeurs propres réelles positives.

Commençons par connecter A à une matrice symplectique dont toutes les valeurs propres sont distinctes. S'il y a quelque chose à faire, c'est que A a des valeurs propres multiples.

(1) Considérons d'abord le cas d'une valeur propre multiple $\lambda \in \mathbf{C} - (S^1 \cup \mathbf{R})$. Soient X et Y des vecteurs propres pour λ et $1/\lambda$ respectivement, choisis de façon que $\omega(X, Y) = 1$ (ce qui est possible puisque ω est symplectique sur $E_\lambda \oplus E_{1/\lambda}$). Le sous-espace F de $\mathbf{C}^{2n}$ engendré par $X, Y, \bar{X}, \bar{Y}$ est symplectique et ces quatre vecteurs en forment une base symplectique.

Soit $\beta : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{C}^*$ un chemin de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'origine 1. Définissons $A(s)$, pour $s \in [0, \varepsilon]$, par

$$\begin{aligned} A(s)(X) &= \beta(s)\lambda X, & A(s)(\bar{X}) &= \bar{\beta}(s)\bar{\lambda}\bar{X}, \\ A(s)(Y) &= \frac{1}{\beta(s)\lambda}Y, & A(s)(\bar{Y}) &= \frac{1}{\bar{\beta}(s)\bar{\lambda}}\bar{Y} \end{aligned}$$

et $A(s) = A$ sur l'orthogonal symplectique F° de F . On vérifie sans difficulté que $A(s)$ est réelle et symplectique. Ainsi,

$$\begin{cases} A(s)|_{E_\mu} = A|_{E_\mu} & \text{pour } \mu \notin \{\lambda, 1/\lambda, \bar{\lambda}, 1/\bar{\lambda}\}, \\ A(s)|_{E_\mu \cap F^\circ} = A|_{E_\mu \cap F^\circ} & \text{pour } \mu \in \{\lambda, 1/\lambda, \bar{\lambda}, 1/\bar{\lambda}\}, \end{cases}$$

(pour s assez petit). De sorte qu'en choisissant bien β , on aura, pour s assez petit, $\beta(s)\lambda \in \mathbf{C} - (S^1 \cup \mathbf{R})$, $A(s) \in \mathrm{Sp}(2n)^*$, et

$$\dim_{\mathbf{C}} E_\mu(A(s)) = \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} E_\mu(A) & \text{si } \mu \in \mathrm{Spec}(A) \text{ et } \mu \notin \{\lambda, 1/\lambda, \bar{\lambda}, 1/\bar{\lambda}\} \\ \dim_{\mathbf{C}} E_\mu(A) - 1 & \text{si } \mu \in \{\lambda, 1/\lambda, \bar{\lambda}, 1/\bar{\lambda}\} \\ 1 & \text{si } \mu \in \{\beta\lambda, 1/\beta\lambda, \bar{\beta}\lambda, 1/\bar{\beta}\lambda\}, \end{cases}$$

de sorte que l'on a baissé la multiplicité de λ d'une unité, sans augmenter les multiplicités des autres valeurs propres.

(2) Voyons maintenant le cas d'une valeur propre multiple dans $S^1 - \mathbf{R}$. Soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ . Alors $\bar{X}$ est vecteur propre pour $\bar{\lambda}$. Le sous-espace engendré par X et $\bar{X}$ peut être ou ne pas être symplectique.

– Si $\omega(X, \bar{X}) \neq 0$, on peut procéder exactement comme ci-dessus, c'est-à-dire choisir un chemin β à valeurs dans S^1 et définir $A(s) \in \mathrm{Sp}(2n)^*$ de sorte qu'elle multiplie X par $\beta(s)\lambda$ et $\bar{X}$ par son conjugué et qu'elle soit identique à A sur l'orthogonal symplectique, ce qui fait baisser la multiplicité de la valeur propre λ de 1.

– Si $\omega(X, \bar{X}) = 0$, comme ω est symplectique sur $E_\lambda \oplus E_{\bar{\lambda}}$, il existe un vecteur Y dans le sous-espace caractéristique $E_\lambda(A)$ tel que $\omega(X, \bar{Y}) = 1$ et $\omega(Y, \bar{Y}) = 0$. Les quatre vecteurs $X, \bar{Y}, \bar{X}, Y$ forment une base symplectique du sous-espace F qu'ils engendrent. On utilise encore un chemin de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\beta : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{C}$, tel que $\beta(0) = 1$ et $\beta(s) \in \mathbf{C} - S^1$ pour $s > 0$, pour poser

$$\begin{aligned} A(s)X &= \beta(s)\lambda X, & A(s)\bar{X} &= \bar{\beta}(s)\bar{\lambda}\bar{X}, \\ A(s)Y &= \frac{1}{\beta(s)}AY, & A(s)\bar{Y} &= \frac{1}{\bar{\beta}(s)}A\bar{Y} \end{aligned}$$

et $A(s) = A$ sur F° . Comme précédemment, $A(s) \in \mathrm{Sp}(2n)^*$ et les dimensions des sous-espaces caractéristiques pour les valeurs propres

autres que λ et $\bar{\lambda}$ sont inchangées. On a introduit de nouvelles valeurs propres, $\beta(s)\lambda$ et $\bar{\beta}(s)\bar{\lambda}(s) \in \mathbf{C} - (S^1 - \mathbf{R})$ pour la matrice $A(s)$, de sorte que $1/\beta(s)\lambda(s)$ et $1/\bar{\beta}(s)\bar{\lambda}(s)$ sont aussi des valeurs propres. La dimension du sous-espace caractéristique associé à λ (et de même celle de celui associé à $\bar{\lambda}$) a baissé de 2, de sorte que ces nouvelles valeurs propres sont forcées à être simples.

(3) Supposons que λ soit une valeur propre multiple réelle différente de ± 1 ; alors $1/\lambda$ est aussi une valeur propre, avec la même multiplicité. Soit X un vecteur propre réel de A pour la valeur propre λ . Nous savons (c'est le corollaire 5.6.7) que $E_\lambda \oplus E_{1/\lambda}$ est un sous-espace symplectique. Il existe donc, dans $E_{1/\lambda}$, un vecteur X' tel que $\omega(X, X') = 1$. Comme $\lambda \in \mathbf{R}$, on peut même supposer (et nous le faisons) que X' est réel. Choisissons un chemin (non constant) $\beta : [0, \varepsilon] \rightarrow]0, +\infty[$ avec $\beta(0) = 1$ et définissons $A(s)$ par

$$A(s)(X) = \beta(s)\lambda X, \quad A(s)(X') = \frac{1}{\beta(s)}A(X'),$$

et $A(s) = A$ sur l'orthogonal (symplectique) du plan (symplectique) engendré par X et X' . La matrice $A(s)$ est réelle, symplectique, et $\beta(s)\lambda$ est une de ses valeurs propres, de même bien sûr (en vertu de la proposition 5.6.3) que $1/(\beta(s)\lambda)$. De plus, ces deux valeurs propres sont simples (pour $s \neq 0$) puisque $\dim_{\mathbf{C}} E_\lambda(A(s)) = \dim_{\mathbf{C}} E_\lambda(A) - 1$, et de même pour $1/\lambda$. Enfin, $A(s) \in \mathrm{Sp}(2n)^*$ (en choisissant β convenablement).

(4) Reste à considérer le cas où -1 est valeur propre de A . Cette valeur propre a une multiplicité paire, en particulier elle est multiple. Rappelons que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace symplectique, de sorte que l'on peut y trouver deux vecteurs X et Y tels que $\omega(X, Y) = 1$. On peut supposer que X est un vecteur propre et que X et Y sont réels. Appelons F le sous-espace complexe qu'ils engendrent. On choisit maintenant un chemin β dans $\mathbf{R}$ avec $\beta(0) = 1$ et l'on pose

$$A(s)X = \beta(s)A(X), \quad A(s)Y = \frac{1}{\beta(s)}A(Y)$$

et $A(s) = A$ sur F° . La matrice $A(s)$ est encore dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$ et $-\beta(s)$ est une de ses valeurs propres (de sorte que $-1/\beta(s)$ en est une aussi). Encore une fois, la dimension du sous-espace caractéristique a baissé de 2, et donc les valeurs propres $-\beta(s)$ et $-1/\beta(s)$ sont simples.

Il est bien clair qu'en itérant assez souvent les procédés décrits ci-dessus, on connecte notre matrice A à une matrice A' dont les valeurs propres sont distinctes et ceci par un chemin dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$. Il reste à connecter A' à une matrice qui a zéro ou deux valeurs propres réelles positives.

Si A' a deux valeurs propres λ et μ dans $]1, +\infty[$, on commence par les connecter pour se ramener au cas d'une valeur propre double μ : on choisit un vecteur propre réel X pour λ et un $X' \in E_{1/\lambda}$ tels que $\omega(X, X') = 1$. On modifie A' sur le sous-espace qu'ils engendrent en posant

$$A'(s)(X) = ((1-s)\lambda + s\mu)X, \quad A'(s)(X') = \frac{1}{(1-s)\lambda + s\mu}X'$$

de sorte que $A'(0) = A'$ et $A'(1)$ n'a plus les valeurs propres λ et $1/\lambda$ mais μ et $1/\mu$ avec multiplicité 2. Remarquons que $A'(1)$ est diagonalisable puisqu'elle admet la même base de vecteurs propres que $A'(0) = A'$.

Soient X et Y deux vecteurs propres indépendants de $A'(1)$ pour la valeur propre μ . Les sous-espaces caractéristiques E_λ et $E_{1/\lambda}$ sont isotropes et leur somme est symplectique (en application du corollaire 5.6.7). Il existe des vecteurs X' et Y' de $E_{1/\lambda}$ tels que

$$\omega(X, X') = \omega(Y, Y') = 1, \quad \omega(X, Y') = \omega(Y, X') = 0,$$

bref tels que X, X', Y, Y' soit une base symplectique du sous-espace vectoriel complexe F que ces vecteurs engendrent. Comme ces vecteurs sont dans des sous-espaces caractéristiques correspondant à des valeurs propres réelles, on peut les choisir réels. On choisit encore une fois un chemin $\beta(s)$ avec $\beta(0) = 1$ et $\beta(s) \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ pour $s > 0$ et l'on définit $A(s)$ par

$$\begin{aligned} A(s)(X + iY) &= \beta(s)\mu(X + iY), & A(s)(X - iY) &= \bar{\beta}(s)\mu(X - iY), \\ A(s)(X' + iY') &= \frac{1}{\bar{\beta}(s)}A(X' + iY'), & A(s)(X' - iY') &= \frac{1}{\beta(s)}A(X' - iY'), \end{aligned}$$

et $A(s) = A$ sur F° (on a noté $A'(1) = A$ pour simplifier). À nouveau, la matrice $A(s)$ est réelle, symplectique, et dans $\mathrm{Sp}(2n)^*$ pour β bien choisi. Elle admet les valeurs propres $\beta(s)\mu$, $\bar{\beta}(s)\mu$, et donc aussi leurs inverses. Comme précédemment, toutes ces valeurs propres sont simples, puisque

$$\dim_{\mathbf{C}} E_\mu(A(s)) = \dim_{\mathbf{C}} E_\mu(A) - 2$$

(et de même pour $1/\mu$).

Ce procédé permet de supprimer tous les quadruplets de valeurs propres de la forme

$$\{\lambda, \mu, 1/\lambda, 1/\mu\} \subset \mathbf{R}_+ - \{1\}.$$

Il reste à A' au plus deux valeurs propres réelles positives, en fait aucune si $\det(A - \mathrm{Id}) > 0$ (ce signe est le même que celui de $\det(A' - \mathrm{Id})$) et exactement deux si $\det(A - \mathrm{Id}) < 0$. $\square$

CHAPITRE 8

LINÉARISATION ET TRANSVERSALITÉ

Dans ce chapitre, nous montrons que les espaces de solutions de l'équation de Floer jouissent d'une propriété de régularité. Plus précisément : si H est un hamiltonien sur W , et si x et y sont deux orbites périodiques (de période 1) de H , on peut considérer, pour toute structure presque complexe J , l'espace $\mathcal{M}(x, y)$ des solutions de l'équation de Floer joignant l'orbite x à l'orbite y . Nous montrons qu'en perturbant au besoin H (sans le modifier près de x et de y , de sorte que ceux-ci en restent des orbites périodiques), on peut supposer que l'espace $\mathcal{M}(x, y)$ est une variété de dimension $\mu(x) - \mu(y)$. La stratégie consiste à décrire l'espace $\mathcal{M}(x, y)$ comme ensemble des zéros d'une section d'un fibré vectoriel sur une variété de Banach (de dimension infinie) $\mathcal{P}(x, y)$. Nous utiliserons l'analogue du théorème de Sard en dimension infinie (le théorème de Sard-Smale, ici 8.5.6) pour montrer que, après une perturbation de H , l'espace $\mathcal{M}(x, y)$ est la pré-image d'une valeur régulière d'une certaine application. Dans ce cadre, l'application du théorème de Sard nécessite l'hypothèse que les applications tangentes sont des opérateurs de Fredholm. Nous le démontrerons et nous calculerons l'indice de ces opérateurs, qui vaudra $\mu(x) - \mu(y)$ — la dimension de l'espace $\mathcal{M}(x, y)$.

8.1. Les résultats : énoncés

Nous utilisons l'application de Floer

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; W) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; TW) \\ u &\longmapsto \frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u(H_t) \end{aligned}$$

et plus exactement une version $W^{1,p}$ de cette application (que nous précisons au § 8.2.d). L'espace des solutions $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; TW)$ est l'espace total d'un fibré $E \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; W)$ dont la fibre E_u en u est l'espace des champs de vecteurs tangents à W le long de u . Par abus de notations, nous

écrivons $\mathcal{F}(u) = 0$ pour signifier que $\mathcal{F}(u)$ est dans la section nulle de E . Il est aussi possible d'utiliser les plongements

$$W \subset \mathbf{R}^m \text{ et } TW \subset W \times \mathbf{R}^m$$

(et d'éviter cet abus).

Remarquons que si $\mathcal{F}$ était transverse à la section nulle de E , l'espace des solutions de l'équation de Floer serait une variété. Cette transversalité en une solution u dans l'image inverse de la section nulle équivaut au fait que la projection de $\text{Im}(d\mathcal{F})_u$ sur la fibre E_u est surjective. Ici encore, nous utiliserons abusivement la notation $(d\mathcal{F})_u$ pour désigner la composée $\text{pr}_{E_u} \circ (d\mathcal{F})_u$ avec la projection. L'autre possibilité est de considérer $\mathcal{F}$ comme à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ (voir le § 8.4).

L'équation de Floer fait intervenir une structure presque complexe J et un hamiltonien H . Notre but est de perturber H (à J fixé) pour que cette propriété de transversalité devienne vraie. Nous appellerons *régulier* un couple (H, J) qui la vérifie et $(\mathcal{J} \times \mathcal{H})_{\text{rég}}$ l'ensemble des couples réguliers. Pour rendre (H, J) régulier, nous définissons (au § 8.3) un espace de Banach $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H)$ de perturbations de H qui ont les mêmes orbites périodiques que H . Ensuite, la démonstration se déroulera en deux temps :

- nous démontrerons d'abord que l'espace $\mathcal{Z}(x, y, J)$ des solutions allant de x à y pour tous les hamiltoniens perturbés est une variété de Banach (de dimension infinie),
- nous démontrerons ensuite que le théorème de Sard-Smale s'applique à la projection

$$\pi : \mathcal{Z}(x, y, J) \longrightarrow \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H),$$

ce qui nous permettra de conclure puisque, par définition,

$$\mathcal{M}(x, y, J, H) = \pi^{-1}(H).$$

Dans les deux étapes, la propriété de Fredholm du linéarisé $(d\mathcal{F})_u$ est utilisée de façon cruciale. Pour obtenir cette propriété, on doit remplacer les espaces source et but de l'application $\mathcal{F}$ par des variétés de Banach plus grandes, modélées sur des espaces de Sobolev $W^{1,p}$, resp. L^p . Dans ce cadre, nous aurons

$$(d\mathcal{F})_u : W^{1,p}(u^*TW) \longrightarrow L^p(u^*TW)$$

(espaces des champs de vecteurs $W^{1,p}$, resp. L^p , tangents à W , le long de u , définis à l'aide du plongement $TW \subset W \times \mathbf{R}^m$, voir le § 8.2.c)... où, comme précisé ci-dessus, $(d\mathcal{F})_u$ désigne la composée avec la projection sur la fibre E_u du fibré E , qui sera précisé au § 8.2.

Voici maintenant les énoncés.

Théorème 8.1.1. *Soit H_0 un hamiltonien non dégénéré fixé. Il existe un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ et une intersection dénombrable d'ouverts denses $\mathcal{H}_{\text{rég}}$ dans ce voisinage telle que, si $h \in \mathcal{H}_{\text{rég}}$, $H = H_0 + h$ est non dégénéré et, pour $u \in \mathcal{M}(H_0 + h, J)$, l'application $(d\mathcal{F})_u$ est surjective.*

La notion de non-dégénérescence utilisée ici est celle définie au § 5.4 (définition 5.4.4). De ce résultat, nous déduirons celui qui est notre objectif dans ce chapitre :

Théorème 8.1.2. *Pour tout $h \in \mathcal{H}_{\text{rég}}$, pour toutes orbites contractiles x et y de période 1 de H_0 , $\mathcal{M}(x, y, H_0 + h)$ est une variété de dimension $\mu(x) - \mu(y)$.*

Proposition 8.1.3. *Soit*

$$\mathcal{Z}(x, y, J) = \{(u, H = H_0 + h) \mid h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) \text{ et } u \in \mathcal{M}(x, y, J, H)\}.$$

Pour $x \neq y$, $\mathcal{Z}(x, y, J)$ est une variété (de Banach).

Ce sera une conséquence, *via* le théorème des fonctions implicites, de la proposition, dite de transversalité :

Proposition 8.1.4. *Si $(u, H) \in \mathcal{Z}(x, y)$, alors*

$$\begin{aligned} \Gamma : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) &\longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \\ (Y, h) &\longmapsto (d\mathcal{F}^H)_u(Y) + \text{grad}_u h \end{aligned}$$

(où $H = H_0 + h$ et $\mathcal{F}^H$ est l'opérateur de Floer correspondant) est surjective.

Nous explicitons la définition de Γ , et surtout le fait qu'elle soit définie sur les espaces considérés, au § 8.5.a. Pour finir de démontrer les théorèmes 8.1.1 et 8.1.2, il restera à démontrer :

Théorème 8.1.5. *Pour tout hamiltonien H non dégénéré, pour toute structure presque complexe J calibrée par ω , pour tout $u \in \mathcal{M}(x, y, J, H)$, $(d\mathcal{F})_u$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\mu(x) - \mu(y)$.*

Rappelons qu'un opérateur linéaire (continu) $L : E \rightarrow F$ d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est un *opérateur à indice* ou *de Fredholm* si son image est un sous-espace fermé et si son noyau et son conoyau sont des sous-espaces de dimension finie. *L'indice* d'un opérateur à indice est la différence

$$\text{Ind } L = \dim \text{Ker } L - \dim \text{Coker } L.$$

Une application différentiable d'un espace de Banach dans un autre est une *application de Fredholm* si sa différentielle est, en chaque point, un opérateur à indice. Dans la pratique, nous utiliserons souvent indifféremment Fredholm (même pour les opérateurs linéaires) ou à indice (même

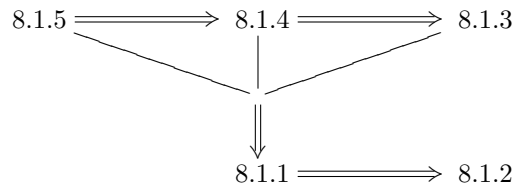
pour les non linéaires). Les propriétés utiles des opérateurs à indice et/ou de Fredholm sont rassemblées au § 16.2.

Voici comment ce chapitre est organisé : pour commencer, nous décrivons les espaces de trajectoires qui nous intéressent ici, en utilisant les normes de Sobolev $(1, p)$ (au § 8.2). Nous définissons ensuite l'espace de Banach des perturbations du hamiltonien (au § 8.3). Nous en venons ensuite aux démonstrations proprement dites :

- au § 8.4, nous calculons la différentielle de l'application de Floer,
- au § 8.5, nous démontrons la propriété de transversalité (c'est-à-dire les propositions 8.1.3 et 8.1.4), modulo quelques propriétés des solutions de l'équation de Floer — en utilisant la propriété de Fredholm (ici le théorème 8.1.5) de l'application de Floer...
- ... que nous démontrons au § 8.7.
- Auparavant, au § 8.6, nous établissons les propriétés des solutions de l'équation de Floer (« injectivité », principe de prolongement) que nous avons utilisées.
- Le calcul de l'indice fait l'objet du § 8.8.
- Au § 8.9, nous démontrons une indispensable propriété de décroissance (exponentielle) à l'infini des solutions de l'équation de Floer.

Nous aurions pu aussi bien adopter l'ordre 8.4, 8.7, 8.8, 8.9, 8.6, 8.5...

Le plan qui suit devrait aider les lecteurs à se repérer dans le labyrinthe des énoncés de ce chapitre.



8.2. La variété de Banach $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$

8.2.a. Les espaces de Sobolev utilisés. Nous avons besoin de travailler dans des espaces de Banach, ce que les espaces d'applications $\mathcal{C}^\infty$ ne sont pas. De même qu'au § 6.8 nous avons considéré les lacets de classe $W^{1,p}$ sur W , nous allons considérer ici une structure analogue sur l'espace des u . C'est un peu plus compliqué, et ceci pour deux raisons,

- d'abord parce que les u sont définis sur un espace de dimension 2, l'espace $\mathbf{R} \times S^1$ des (s, t) ,
- ensuite parce que la variable s varie dans l'espace non compact $\mathbf{R}$.

Les espaces fonctionnels que nous utilisons sont des complétions des espaces de sections $\mathcal{C}^\infty$ (avec décroissance suffisante à l'infini), pour les « normes de Sobolev »

$$\|Y\|_{L^p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \|Y(s, t)\|^p ds dt \right)^{1/p}$$

et

$$\|Y\|_{W^{1,p}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \|Y(s, t)\|^p + \left\| \frac{\partial Y}{\partial s}(s, t) \right\|^p + \left\| \frac{\partial Y}{\partial t}(s, t) \right\|^p ds dt \right)^{1/p}$$

pour $p \in]1, +\infty[$, des espaces de Sobolev (des espaces de Banach, par définition), respectivement

$$L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \quad \text{et} \quad W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Remarque 8.2.1. Les espaces de Sobolev $W^{1,p}$ peuvent aussi être définis comme des espaces de distributions. C'est le meilleur point de vue, puisqu'ainsi un élément de $W^{1,p}$ n'est pas une classe d'équivalence de suites de Cauchy de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ mais une distribution, de sorte qu'à ce titre il a une dérivée, etc. Voir le § 16.4.

Remarquons immédiatement une difficulté. En dimension 1, c'est-à-dire pour un intervalle borné I de $\mathbf{R}$, $W^{1,p}(I)$ est contenu dans l'espace des fonctions continues sur $\bar{I}$, et ceci pour tout $p \geq 1$. Ce n'est plus vrai en dimension ≥ 2 (et nous avons malheureusement affaire à un espace de départ, $\mathbf{R} \times S^1$, qui est de dimension 2). Pour U borné (et à bord assez régulier) dans $\mathbf{R}^m$, on n'a

$$W^{1,p}(U) \subset C^0(\bar{U})$$

que pour $p > m$ (voir le § 16.4). Une des difficultés de ce qui suit vient du fait que les éléments de $W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ ne sont pas des fonctions continues⁽¹⁾. Quel que soit notre désir de rester dans ce sympathique espace de Hilbert, il va donc nous falloir travailler avec des $W^{1,p}$ pour $p > 2$ (pour des explications détaillées de l'utilisation de cette condition cruciale, voir le § 12.1.b).

8.2.b. Les normes qui vont intervenir. La variété symplectique W est toujours plongée dans un grand $\mathbf{R}^m$. Nous appelons $T_W \mathbf{R}^m$ la restriction à W du fibré tangent $T\mathbf{R}^m$ (on a $T_W \mathbf{R}^m \cong W \times \mathbf{R}^m$). Sur W , nous avons la métrique riemannienne g définie par ω et J , pour mémoire

$$g_a(v, w) = \omega_a(v, Jw), \quad \text{pour } a \in W, \quad v, w \in T_a W.$$

⁽¹⁾ Et nous voulons travailler avec des fonctions continues pour pouvoir utiliser les résultats de régularité et de compacité 6.5.3 et 6.5.4.

En utilisant une partition de l'unité, on peut prolonger cette métrique à $T_W \mathbf{R}^m$ en

$$\tilde{g} : W \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R},$$

telle que $\tilde{g}(a, \cdot, \cdot)$ soit, pour tout a dans W , une forme bilinéaire symétrique définie positive. Le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^m$ est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ou même parfois simplement $\cdot$).

8.2.c. Les espaces de trajectoires. Nous désignerons comme ci-dessus, par $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ (resp. $\|\cdot\|_{L^p}$) les normes de Sobolev sur $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ et $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ (resp. $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$). Remarquons que la norme sur les espaces $\mathbf{R}^N$ ($\mathbf{R}^m$ ou $\mathbf{R}^{2n}$) qui intervient dans les définitions de $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ et $\|\cdot\|_{L^p}$ est la norme euclidienne, pas celle définie par $\tilde{g}$.

Finalement, pour des opérateurs linéaires entre espaces de Banach, nous noterons (lorsque des nécessités de clarté nous y obligeront) $\|\cdot\|^{\text{op}}$ leur norme opératorielle,

$$\|A\|^{\text{op}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Si x et y sont des lacets contractiles dans W , points critiques de $\mathcal{A}_H$, appelons $\mathcal{C}_{\infty}^{\infty}(x, y)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^{\infty}$

$$u : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow W$$

telles que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = x(t), \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = y(t),$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \right| \leq K e^{-\delta|s|} \text{ et } \left| \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) - X_H(u) \right| \leq K e^{-\delta|s|}$$

pour des constantes K et δ positives (qui dépendent de u).

Définition 8.2.2. Pour $p > 2$, $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ (ou $\mathcal{P}(x, y)$ en sous-entendant les exposants) désigne l'espace des applications $\mathcal{C}^{\infty}$ de la forme

$$(s, t) \longmapsto \exp_{w(s,t)} Y(s, t)$$

où $Y \in W^{1,p}(w^*TW)$, $w \in \mathcal{C}_{\infty}^{\infty}(x, y)$.

Avant de préciser la définition des espaces $W^{1,p}(w^*TW)$ utilisés, remarquons :

Proposition 8.2.3. Si x et y sont des lacets contractiles et des points critiques non dégénérés de la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H$, on a

$$\mathcal{M}(x, y) \subset \mathcal{C}_{\infty}^{\infty}(x, y) \subset \mathcal{P}^{1,p}(x, y).$$

Démonstration. C'est une application du résultat de décroissance exponentielle (c'est-à-dire du théorème 8.9.1 et de la remarque 8.9.3). $\square$

Définition de $W^{1,p}(w^*TW)$. Si $w : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow W$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, voici la définition de $W^{1,p}(w^*TW)$ (que nous notons parfois aussi $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; w^*TW)$). La variété symplectique W est plongée dans un espace $\mathbf{R}^m$. Nous dirons que $Y \in W^{1,p}(w^*TW)$ si Y est une application continue⁽²⁾

$$Y : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow TW$$

telle que $Y(s, t) \in T_{w(s, t)}W$ pour tous (s, t) et vérifie que la composition

$$\mathbf{R} \times S^1 \xrightarrow{Y} TW \subset T\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbf{R}^m$$

est dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$.

Il est aussi possible de le définir en utilisant une trivialisat⁽³⁾ de w^*TW plutôt qu'un plongement de W dans $\mathbf{R}^m$. Considérons $\bar{w} : \bar{\mathbf{R}} \times S^1 \rightarrow W$ définie par

$$\bar{w}(s, t) = \begin{cases} x(t) & s = -\infty \\ w(s, t) & s \in \mathbf{R} \\ y(t) & s = +\infty \end{cases}$$

ainsi qu'un repère orthonormé $(Z_i(s, t))_{i=1, \dots, 2n}$ le long de $\bar{w}$. Dans ce repère, Y s'écrit

$$Y(s, t) = \sum_{i=1}^{2n} y_i(s, t) Z_i(s, t)$$

où les coordonnées $y_i : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ sont définies par $y_i = \langle Y, Z_i \rangle$. Le champ de vecteurs Y le long de $\bar{w}$ est dans $W^{1,p}(w^*TW)$ si et seulement si le vecteur $(y_1, \dots, y_{2n})$ est dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$.

Que les deux définitions soient équivalentes est une conséquence d'un lemme facile.

Lemme 8.2.4. Soient $f \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$, telles que g et ses dérivées $\partial g / \partial s$, $\partial g / \partial t$ soient bornées sur $\mathbf{R} \times S^1$. Alors le produit fg est dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$ et satisfait à l'inégalité

$$\|fg\|_{W^{1,p}} \leq \|f\|_{W^{1,p}} \left(\sup_{\mathbf{R} \times S^1} (|g|, |\partial g / \partial s|, |\partial g / \partial t|) \right).$$

De même, si $f \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$ et si $g \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$ est une fonction bornée (et en particulier si $g \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$), le produit fg est dans $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$ et satisfait à l'inégalité

$$\|fg\|_{L^p} \leq \|f\|_p \sup |g|.$$

⁽²⁾Nous supposons donc $p > 2$.

⁽³⁾Il en existe, nous l'avons vu, parce que les lacets x et y sont contractiles et que notre variété satisfait à l'hypothèse 6.2.2.

En notations simplifiées, les deux inégalités pourraient s'écrire (et nous les écrivons)

$$\|fg\|_{W^{1,p}} \leq \|f\|_{W^{1,p}} \|g\|_{\mathcal{C}^1} \quad \text{et} \quad \|fg\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{\mathcal{C}^0}.$$

Démonstration. Elle est fondée sur les inégalités

$$\left(\int_{\mathbf{R} \times S^1} |fg|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbf{R} \times S^1} |f|^p (\sup |g|)^p \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p} \sup |g|,$$

et

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbf{R} \times S^1} |\partial(fg)/\partial s|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\int_{\mathbf{R} \times S^1} (|\partial f/\partial s| |g| + |\partial g/\partial s| |f|)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sup(|g|, |\partial g/\partial s|) \| |\partial f/\partial s| + |f| \|_{L^p} \\ &\leq \sup(|g|, |\partial g/\partial s|) (\|\partial f/\partial s\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}) \\ &\leq \sup(|g|, |\partial g/\partial s|, |\partial g/\partial t|) \|f\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

et de même pour $\partial(fg)/\partial t$. $\square$

8.2.d. Structure de variété de Banach sur $\mathcal{P}(x, y)$. L'espace $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ (définition 8.2.2) est une variété de Banach modélée sur $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. C'est une propriété analogue à celle de $\mathcal{L}^{1,p}(W)$ (voir le § 6.8). Définissons donc (de façon analogue), un atlas. Soient, comme ci-dessus, $w \in \mathcal{C}_\infty^\infty(x, y)$ et (Z_i) un repère orthonormé le long de w , de sorte que $W^{1,p}(w^*TW)$ est identifié à $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Comme nous avons supposé que $p > 2$, nous savons que

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

et que cette injection est continue (voir le théorème 16.4.9). Donc,

$$\forall Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}), \quad \|Y\|_{L^\infty} \leq K \|Y\|_{W^{1,p}}.$$

Notons ρ_{inj} le rayon d'injectivité (voir au besoin le § 14.5) de la métrique définie sur W . Fixons un $r_0 < \rho_{\text{inj}}$. Définissons

$$\begin{aligned} \Phi_w : \left\{ Y \in W^{1,p}(w^*TW) \mid \|Y\|_{W^{1,p}} \leq \frac{r_0}{K} \right\} &\longrightarrow \mathcal{P}(x, y) \\ (w, Y) &\longmapsto \exp_w(Y). \end{aligned}$$

C'est une bijection et, comme au § 6.8, c'est-à-dire comme dans [63] les Φ_w (pour $w \in \mathcal{C}_\infty^\infty(x, y)$) forment un atlas pour $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$.

Faisons figurer dans la notation la structure presque complexe J et le hamiltonien H qui définissent l'équation de Floer en question, écrivant

– $\mathcal{M}(J, H)$ pour l'espace des solutions contractiles d'énergie finie,

— $\mathcal{M}(x, y, J, H)$ pour celles joignant x à y — attention, x et y sont des trajectoires périodiques de $X_t = X_{H_t}$ et, dans ces notations, dépendent du hamiltonien H .

L'application de Floer. Nous souhaitons définir maintenant l'« application de Floer » $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}^{1,p}(x, y) \longrightarrow \mathcal{L}^p(x, y)$$

par

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H_t(u).$$

Ici, $\mathcal{L}^p(x, y)$ est un fibré sur $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ dont la fibre en u est l'espace $L^p(u^*TW)$ qui se définit de manière analogue à $W^{1,p}(u^*TW)$. Par définition de $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ ses éléments u s'écrivent $u = \exp_w(X)$ pour un $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; W)$ à décroissance exponentielle et $X \in W^{1,p}(w^*TW)$. Il est donc nécessaire de vérifier que $\mathcal{F}$ prend bien ses valeurs dans L^p , c'est-à-dire que

$$\mathcal{F}(\exp_w X) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m),$$

ce que nous ferons au § 13.3 (lemme 13.3.1 et remarque 13.3.2).

8.3. L'espace des perturbations de H

Nous voulons montrer que, arbitrairement près (au sens de la topologie $\mathcal{C}^\infty$) d'un hamiltonien H fixé, il existe un hamiltonien qui a exactement les mêmes orbites périodiques et pour lequel les $\mathcal{M}(x, y)$ sont en effet des variétés de la dimension attendue.

Nous construisons maintenant l'espace $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H)$ de perturbations de H annoncé au début de ce chapitre.

Fixons une suite (à préciser) $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ de nombres réels strictement positifs, et définissons :

$$\|h\|_\varepsilon = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \sup_{(x,t) \in W \times S^1} |d^k h(x, t)|.$$

Quelques précisions s'imposent ici. Tout d'abord, nous avons désigné par $|d^k h(x, t)|$ le maximum des $|d^\alpha h(x, t)|$ pour tous les multi-indices α de longueur k . Ensuite, pour calculer les dérivées d'ordre supérieur, on a besoin de cartes. On fixe donc une fois pour toutes un nombre fini de difféomorphismes

$$\Psi_i : B_i \longrightarrow \bar{B}(0, 1),$$

de telle sorte que $\bigcup_i \overset{\circ}{B}_i = W \times S^1$. Le sup apparaissant dans la formule est alors

$$\sup_{(x,t) \in W \times S^1} |d^k h(x, t)| = \sup_{i, z \in B(0,1)} |d^k (h \circ \Psi_i^{-1})(z)|.$$

L'espace $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $W \times S^1$ dont la norme $\|\cdot\|_\varepsilon$ est finie est bien clairement un espace vectoriel normé et complet.

Il reste à vérifier que cet espace est dense dans celui des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, lorsque la suite ε est bien choisie. C'est ce qu'affirme la proposition suivante.

Proposition 8.3.1. *On peut choisir la suite ε de façon que l'espace des fonctions $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ soit dense dans $\mathcal{C}^\infty(W \times S^1)$ pour la topologie $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. Nous utiliserons :

Lemme 8.3.2. *L'espace $\mathcal{C}^\infty(W \times S^1)$, muni de la topologie $\mathcal{C}^1$, est séparable.*

Démonstration du lemme. En considérant un plongement de $W \times S^1$ dans un cube $[-M, M]^m \subset \mathbf{R}^m$, on voit qu'il suffit de démontrer le résultat pour $\mathcal{C}^\infty([-M, M]^m)$. Le théorème de Stone-Weierstrass garantit que cet espace est séparable pour la topologie $\mathcal{C}^0$, puisqu'il affirme que sa partie dénombrable $\mathbf{Q}[X_1, \dots, X_m]$ est dense.

Pour démontrer l'assertion analogue pour la topologie $\mathcal{C}^1$, on fixe une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty([-M, M]^m)$, d'intégrale égale à 1 et dont le support est contenu dans $B(0, 1)$. On considère la suite (χ_k) définie par $\chi_k(x) = k^m \chi(kx)$. On démontre facilement que, pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$, la suite de convolées

$$f \star \chi_k(x) = \int_{\mathbf{R}^m} f(x-y) \cdot \chi_k(y) dy$$

tend vers f (au sens $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$) (voir par exemple [10, §3.4]). Ensuite, pour chaque k fixé, si g_ℓ tend vers f pour $\ell \rightarrow +\infty$ et pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$, on a

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} g_\ell \star \chi_k = f \star \chi_k$$

dans la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^1$. Remarquons en effet que, pour tout compact K

$$\begin{aligned} \sup_K \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (g_\ell - f) \star \chi_k \right| &= \sup_K \left| (g_\ell - f) \star \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i} \right| \\ &\leq \sup_K |g_\ell - f| \cdot \int_{\mathbf{R}^m} \left| \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i} \right| dx, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que l'ensemble

$$\{P \star \chi_k \mid P \in \mathbf{Q}[X_1, \dots, X_m], k \in \mathbf{N}\}$$

est un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{C}^\infty([-M, M]^m)$ qui est dense pour la topologie $\mathcal{C}^1$. $\square$

La preuve de la proposition 8.3.1 peut maintenant se terminer. Soit (f_n) une suite dense dans $\mathcal{C}^\infty(W \times S^1)$ pour la topologie $\mathcal{C}^1$ (dont le lemme assure

l'existence). Posons

$$\varepsilon_n = 1/(2^n \max_{k \leq n} \|f_k\|_{\mathcal{C}^n(W \times S^1)}),$$

avec la même convention que plus haut utilisant les difféomorphismes Ψ_i pour le calcul de la norme $\mathcal{C}^n$ de f_k .

Pour k fixé et $n \geq k$, on a donc

$$\varepsilon_n \sup_{(x,t) \in W \times S^1} |d^n f_k(x,t)| \leq \frac{1}{2^n},$$

de sorte que, avec ce choix de la suite ε , $f_k \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ pour tout k , ce qui donne le résultat souhaité. $\square$

Remarque 8.3.3. La même démonstration donnerait la densité de $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$, mais nous utiliserons seulement la densité $\mathcal{C}^1$ dans la suite.

Nous aurons aussi besoin d'une version à support compact de la proposition 8.3.1, dont voici un énoncé précis :

Proposition 8.3.4. *Il existe une suite ε pour laquelle la propriété suivante est vraie. Soit $(x_0, t_0) \in W \times S^1$ et soit U un voisinage de (x_0, t_0) . Il existe un voisinage $V \subset U$ de (x_0, t_0) tel que tout $h \in \mathcal{C}^\infty(W \times S^1)$ à support dans V puisse être approché, pour la topologie $\mathcal{C}^1$, par des fonctions de $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ à support dans U .*

Démonstration. Fixons pour commencer une fonction β , de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^n$, à support dans $B(0, 1)$ et qui vaut 1 sur $B(0, 1/2)$. Pour $z_0 \in B(0, 1)$ et pour $\sigma \in]0, 1[$, posons

$$\beta_{z_0, \sigma}(z) = \beta\left(\frac{z - z_0}{\sigma}\right).$$

Soit $(x_0, t_0) \in W \times S^1$ et soit B_i un des domaines de cartes que nous avons fixés, qui contient (x_0, t_0) dans son intérieur. Posons $z_0 = \Psi_i(x_0, t_0)$. Choisissons $\sigma > 0$ tel que

$$\Psi_i^{-1}(B(0, \sigma)) \subset \overset{\circ}{B}_i \cap U$$

et posons $V = \Psi_i^{-1}(B(z_0, \sigma/2))$.

Considérons $h \in \mathcal{C}^\infty(W \times S^1)$, à support dans V et montrons qu'elle satisfait à la conclusion de l'énoncé. Par la proposition 8.3.1, nous savons que, pour une certaine suite ε et pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $h_n \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(W \times S^1)$, tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = h \quad \text{pour la topologie } \mathcal{C}^1.$$

Posons $g_n = (\beta_{z_0, \sigma} \circ \Psi_i) \cdot h_n$ sur $\Psi_i^{-1}(B(z_0, \sigma))$ et prolongeons la par 0 ailleurs. Il est clair que g_n a son support dans U et que la suite g_n tend vers $(\beta_{z_0, \sigma} \circ \Psi_i) \cdot h = h$ dans la topologie $\mathcal{C}^1$.

Il suffit donc de modifier la suite ε pour que g_n soit dans $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ (pour cette nouvelle suite). À cet effet, évaluons le sup de $d^k g_n$. Commençons par la carte Ψ_i (en écrivant h_n pour $h_n \circ \Psi_i^{-1}$). On a

$$\begin{aligned} \sup_{(x,t) \in B_i} |d^k g_n| &= \sup_{z \in B(0,1)} |d^k(\beta_{z_0, \sigma} \cdot h_n)(z)| \\ &\leq 2^k \sum_{\ell=0}^k \sup_{B(0,1)} |d^{k-\ell} \beta_{z_0, \sigma}| \sup_{B(0,1)} |d^\ell h_n| \\ &\leq 2^k \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\sigma^{k-\ell}} \sup_{B(0,1)} |d^{k-\ell} \beta| \sup_{B(0,1)} |d^\ell h_n| \\ &\leq \frac{2^k}{\sigma^k} \|\beta\|_{\mathcal{C}^k(B(0,1))} \sum_{\ell=0}^k \sup_{B(0,1)} |d^\ell h_n|. \end{aligned}$$

Modifions donc la suite ε en (ε') :

$$\varepsilon'_k = \frac{1}{k^k} \cdot \frac{\min_{\ell=0, \dots, k} \varepsilon_\ell}{\|\beta\|_{\mathcal{C}^k(B(0,1))}}$$

(avec la convention $0^0 = 1$). On trouve alors

$$\begin{aligned} \varepsilon'_k \sup_{(x,t) \in B_i} |d^k g_n| &\leq \left(\frac{2}{\sigma k}\right)^k \sum_{\ell=0}^k \varepsilon_\ell \sup_{B(0,1)} |d^\ell h_n| \\ &\leq \left(\frac{2}{\sigma k}\right)^k \|h_n\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

La série dont le terme général est le membre de droite est convergente (évidemment). Pour démontrer que $\|g_n\|_{\varepsilon'} < +\infty$, il faut établir une estimation de ce type dans toutes les cartes dont les domaines B_i rencontrent U . Cela se fait de manière analogue, en remplaçant, dans la définition de ε' ,

$$\|\beta\|_{\mathcal{C}^k(B(0,1))} \quad \text{par} \quad \min_j \|\beta \circ \Psi_i \circ \Psi_j^{-1}\|_{\mathcal{C}^k(\Psi_j(B_i \cap B_j))}. \quad \square$$

Fixons un hamiltonien H_0 (dépendant du temps) dont nous supposons que toutes les orbites périodiques sont non dégénérées. L'espace de « perturbations » de H_0 que nous allons utiliser est l'espace $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ des applications $h : W \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $\|h\|_\varepsilon < +\infty$ et

$$h(x, t) = 0 \quad \text{sur un voisinage des orbites 1-périodiques de } H_0.$$

Comme le support de h est « loin » des solutions périodiques de H_0 , les solutions périodiques de $H_0 + h$ sont, au moins pour $\|h\|_\varepsilon$ assez petite, exactement les solutions périodiques de H_0 lui-même — et elles sont non dégénérées.

8.4. Linéarisation de l'équation de Floer : calcul de la différentielle de $\mathcal{F}$

Pour éviter aux débutants de douloureuses dérivations de champs de vecteurs et le recours à la connexion de Levi-Civita, nous allons utiliser ici un plongement de la variété W dans $\mathbf{R}^m$ (m est très grand, plus grand en tout cas que la dimension $2n$ de la variété). Avec

$$TW \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbf{R}^m,$$

les vecteurs Z_i , de même que tous les vecteurs tangents à W le long de u et même d'un voisinage B de u peuvent être considérés comme des vecteurs de $\mathbf{R}^m$. De la même façon, $\mathcal{F}$ est considérée comme à valeurs dans un espace vectoriel d'applications à valeurs dans $\mathbf{R}^m$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ ou $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$. Pour calculer la différentielle de $\mathcal{F}$, fixons donc une solution

$$u \in \mathcal{M}(x, y) \subset \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; W)$$

de l'équation de Floer. Le cylindre

$$u : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow W$$

se complète en une sphère : les lacets x et y sont contractiles, prolongeons-les en des disques, déterminant une application

$$\tilde{u} : S^2 \longrightarrow W$$

comme sur la figure 1.

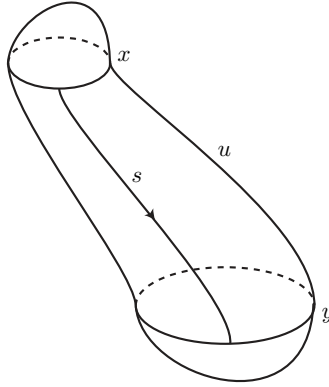


FIGURE 1

Comme au chapitre 7, le fibré $\tilde{u}^*TW$ est trivialisable comme fibré symplectique (grâce à l'hypothèse 6.2.2). Nous en choisissons donc une trivialisation, c'est-à-dire une base $(Z_1, \dots, Z_{2n}) \in T_{u(s,t)}W$, dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ de s et t (ici nous considérons bien le cylindre $\mathbf{R} \times S^1$ des (s, t) comme une

partie de la sphère, comme sur la figure 1). Nous demanderons que cette trivialisation soit symplectique et orthonormée, c'est-à-dire que la base des Z_i soit une base symplectique et orthonormée, et que les vecteurs Z_i aient une limite quand s tend vers $\pm\infty$. Nous aurons aussi besoin que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial Z_i}{\partial s} = 0.$$

Il existe de telles trivialisations, comme on s'en convainc en utilisant des cylindres près des calottes sphériques de la figure 1.

Ce repère définit une carte (centrée en u) de la variété de Banach $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$:

$$\begin{aligned} i : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) &\longrightarrow \mathcal{P}^{1,p}(x, y) \\ (y_1, \dots, y_{2n}) &\longmapsto \exp_u\left(\sum y_i Z_i\right). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$(di)_0(y_1, \dots, y_{2n}) = \sum y_i Z_i$$

(parce que $(d\exp)_0 = \text{Id}$, voir si nécessaire le § 14.5).

Considérons maintenant l'application, que nous continuons à appeler $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{P}^{1,p}(x, y) &\xrightarrow{\mathcal{F}} L^p(\mathbf{R} \times S^1; TW) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \\ u &\longmapsto \frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H_t(u) \end{aligned}$$

et calculons sa différentielle en u . Soit

$$Y(s, t) = (y_1(s, t), \dots, y_{2n}(s, t)) \in \mathbf{R}^{2n} \subset \mathbf{R}^m$$

un vecteur. Nous considérons $Y = \sum y_i Z_i$ comme un vecteur de $\mathbf{R}^m$ tangent à W . Écrivons

$$\mathcal{F}(u + Y) = \frac{\partial(u + Y)}{\partial s} + J(u + Y) \frac{\partial(u + Y)}{\partial t} + \text{grad}_{u+Y} H_t.$$

La partie linéaire en Y de cette expression est

$$(d\mathcal{F})_u(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + (dJ)_u(Y) \frac{\partial u}{\partial t} + J(u) \frac{\partial Y}{\partial t} + d(\text{grad}_u H_t)(Y).$$

Lemme 8.4.1. *Pour toute application J à valeurs dans les endomorphismes de $\mathbf{R}^m$ et toutes applications Y et v à valeurs dans $\mathbf{R}^m$, on a*

$$(dJ)(Y) \cdot v = d(Jv)(Y) - Jdv(Y).$$

Démonstration. Il suffit de différentier l'application $x \mapsto J(x) \cdot v(x)$, ce qui donne :

$$J(x + Y) \cdot v(x + Y) = (J(x) + (dJ)_x(Y)) \cdot (v(x) + (dv)_x(Y))$$

à l'ordre 1, de sorte que

$$d(J \cdot v)_x(Y) = (dJ)_x(Y) \cdot v(x) + J(x) \cdot (dv)_x(Y). \quad \square$$

Remarque 8.4.2. Pour toute application $u : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow W$ de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$(d\mathcal{F})_u(Y) = \left(\frac{\partial Y}{\partial s} + J(u) \frac{\partial Y}{\partial t} \right) + \left((dJ)_u(Y) \frac{\partial u}{\partial t} + d(\text{grad}_u H_t)(Y) \right),$$

est somme d'un opérateur différentiel d'ordre 1 et d'un d'ordre 0.

Proposition 8.4.3. Si u est une solution de l'équation de Floer, la différentielle de $\mathcal{F}$ en u est

$$(d\mathcal{F})_u(Y) = \left[Y, J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u H_t \right] - J(u) \left[Y, \frac{\partial u}{\partial t} \right].$$

Démonstration. Appliquons le lemme au calcul en cours,

$$\begin{aligned} (d\mathcal{F})_u(Y) &= \frac{\partial Y}{\partial s} + d\left(J(u) \frac{\partial u}{\partial t}\right)(Y) - J(u) d\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(Y) \\ &\quad + J(u) \frac{\partial Y}{\partial t} + d(\text{grad}_u H_t)(Y) \\ &= dY\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + d\left(J(u) \frac{\partial u}{\partial t}\right)(Y) + J(u) dY\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\ &\quad - J(u) d\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(Y) + d(\text{grad}_u H_t)(Y). \end{aligned}$$

Comme u est une solution, remplaçons $\partial u / \partial s$ par $-J(u) \partial u / \partial t - \text{grad}_u H_t$ pour obtenir

$$\begin{aligned} (d\mathcal{F})_u(Y) &= dY\left(-J(u) \frac{\partial u}{\partial t}\right) - dY\left(\text{grad}_u H_t\right) \\ &\quad + d\left(J(u) \frac{\partial u}{\partial t}\right)(Y) + d(\text{grad}_u H_t)(Y) \\ &\quad + J(u) \left(dY\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - d\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(Y) \right) \\ &= \left[Y, J(u) \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \left[Y, \text{grad}_u H_t \right] - J(u) \left[Y, \frac{\partial u}{\partial t} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Utilisons maintenant la carte définie par la base $(Z_1, \dots, Z_{2n})$, en écrivant

$$Y = \sum y_i Z_i.$$

Nous obtenons dans cette carte

$$\begin{aligned} (d\mathcal{F})_u(Y) &= \sum \left[y_i Z_i, J(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \text{grad}_u H_t \right] - J(u) \sum \left[y_i Z_i, \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &= \sum y_i \left[Z_i, J(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \text{grad}_u H_t \right] - J(u) \sum y_i \left[Z_i, \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &\quad - \sum \left(\left(J(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \text{grad}_u H_t \right) \cdot y_i \right) Z_i \\ &\quad + J(u) \sum \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot y_i \right) Z_i. \end{aligned}$$

Les termes de la première ligne sont « d'ordre 0 », c'est-à-dire qu'ils ne dérivent pas les y_i . Commençons par étudier les termes « d'ordre 1 », les autres. Puisque u est une solution de l'équation de Floer,

$$-\left(J(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \text{grad}_u H_t\right) \cdot y_i = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot y_i.$$

Finalement les termes d'ordre 1 se réduisent à

$$\sum \left(\frac{\partial y_i}{\partial s} + J_0 \frac{\partial y_i}{\partial t}\right) Z_i$$

(où J_0 est la structure complexe standard sur $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$). Nous avons donc démontré :

Proposition 8.4.4. *Si u est une solution de l'équation de Floer, la différentielle de $\mathcal{F}$ en u s'écrit, dans la trivialisatıon définie par $(Z_1, \dots, Z_{2n})$*

$$\begin{aligned} (d\mathcal{F})_u \left(\sum y_i Z_i \right) &= \sum_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial s} + J_0 \frac{\partial y_i}{\partial t} \right) Z_i \\ &+ \sum y_i \left[Z_i, J(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_t \right) \right] - J(u) \sum y_i \left[Z_i, \frac{\partial u}{\partial t} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Ici les crochets sont à prendre dans le même sens qu'au §14.4.c et sont calculés dans $\mathbf{R}^m$.

Ce qui se dit aussi : la linéarisée de l'équation de Floer est somme de l'opérateur de Cauchy-Riemann et d'un opérateur d'ordre 0. En effet,

- comme nous avons supposé la base $Z_1, \dots, Z_{2n}$ symplectique et orthonormée, le terme d'ordre 1 est $\bar{\partial}(y_1, \dots, y_{2n})$, où $\bar{\partial}$ désigne l'opérateur de Cauchy-Riemann pour la structure complexe J_0 standard⁽⁴⁾,
- les deux autres termes ne dérivent pas les y_i (c'est bien un opérateur d'ordre 0).

Remarque (sur les notations). Comme toujours, pour écrire la différentielle d'une application définie sur une variété, on a besoin d'une carte de cette variété. Ici nous avons utilisé

$$F_u : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow \mathcal{P}^{1,p}(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$$

où la première application est la carte (notée i page 224) centrée en u . Bien entendu, par $(d\mathcal{F})_u$, nous désignons ce qui, en coordonnées, est $(dF_u)_0$. Il ne nous a pas semblé qu'utiliser cette notation $((dF_u)_0)$ aurait rendu la lecture de ce texte plus limpide, aussi nous ne l'avons pas fait.

⁽⁴⁾À un facteur 2 près : le $\bar{\partial}$ usuel est

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial s} + J_0 \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Remarque 8.4.5. Revenons au cas d'un u qui ne soit pas nécessairement solution de l'équation de Floer. L'égalité contenue dans la remarque 8.4.2 montre que, dans cette carte, $(d\mathcal{F})_u$ se décompose de même en

$$(d\mathcal{F})_u(Y) = \bar{\partial}Y + S(s, t)Y$$

où $S(s, t)$ est un opérateur d'ordre 0.

Dans le cas où u est solution de l'équation de Floer, l'opérateur d'ordre 0 possède une propriété spécifique.

Proposition 8.4.6. *Si u est solution de l'équation de Floer, la différentielle de $\mathcal{F}$ en u est somme*

$$(d\mathcal{F})_u = \bar{\partial} + S(s, t)$$

où S est un opérateur linéaire qui tend vers un opérateur symétrique quand s tend vers $\pm\infty$ et vérifie

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial S}{\partial s}(s, t) = 0$$

(uniformément en t).

Démonstration. Partons de l'expression donnée dans la proposition 8.4.4, l'opérateur S est la partie d'ordre 0, la j -ème composante en est :

$$\begin{aligned} & S(s, t) \cdot (y_1, \dots, y_{2n})_j \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \left\langle y_i \left[Z_i, J(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_t \right) \right] - J(u) y_i \left[Z_i, \frac{\partial u}{\partial t} \right], Z_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Quand $s \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_t \right) = 0$$

puisque $\partial u / \partial s$ tend vers 0 (quand $s \rightarrow \pm\infty$) uniformément ainsi que ses dérivées (voir le théorème 6.5.6 et la proposition 6.5.15). L'opérateur figurant dans le premier terme de la somme tend donc vers 0. Vérifions que la limite du deuxième terme de cette somme est un opérateur symétrique. La i -ème colonne de la matrice tend vers (pour $s \rightarrow -\infty$, le cas $s \rightarrow +\infty$ est identique)

$$-\langle J(x)[Z_i, X_t(x)], Z_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq 2n$$

(nous avons supposé que Z_i avait une limite pour $s = \pm\infty$, c'est elle qui apparaît là). Alors, disons pour $s \rightarrow -\infty$,

$$\langle J(x)[Z_i, X_t(x)], Z_j \rangle = \omega(Z_j, [Z_i, X_t(x)]).$$

La symétrie résulte du fait que la forme ω est fermée :

$$0 = d\omega(Z_i, Z_j, X_t) = Z_i \cdot \omega(Z_j, X_t) + Z_j \cdot \omega(X_t, Z_i) + X_t \cdot \omega(Z_i, Z_j) \\ + \omega([Z_i, Z_j], X_t) + \omega([Z_j, X_t], Z_i) + \omega([X_t, Z_i], Z_j).$$

Ensuite, X_t est le champ hamiltonien associé à H_t , donc

$$Z_i \cdot \omega(Z_j, X_t) + Z_j \cdot \omega(X_t, Z_i) + \omega([Z_i, Z_j], X_t) \\ = Z_i \cdot dH_t(Z_j) - Z_j \cdot dH_t(Z_i) + dH_t([Z_i, Z_j]) \\ = d(dH_t)(Z_i, Z_j) \\ = 0.$$

De plus, la base $(Z_1, \dots, Z_{2n})$ est symplectique, de sorte que les $\omega(Z_i, Z_j)$ sont constants, donc

$$X_t \cdot \omega(Z_i, Z_j) = 0.$$

Il ne reste plus que deux termes,

$$\omega([Z_j, X_t], Z_i) + \omega([X_t, Z_i], Z_j) = 0,$$

ou encore

$$\omega(Z_j, [Z_i, X_t(x)]) - \omega(Z_i, [Z_j, X_t(x)]) = 0,$$

ce qui est bien la symétrie de notre opérateur limite.

L'assertion sur la limite de sa dérivée par rapport à s s'obtient en dérivant la relation donnant les composantes de la matrice S . Elle est conséquence du fait que $\partial Z_i / \partial s$ tend vers 0 (une hypothèse que nous avons faite sur la trivialisation) d'une part, et du fait que $\partial^2 u / \partial s \partial t$ tend vers 0 ainsi que toutes ses dérivées, comme nous l'avons remarqué dans la proposition 6.5.15 et la remarque 6.5.16. $\square$

Remarque 8.4.7. Considérons l'équation $(d\mathcal{F})_u Y = 0$ lorsque s tend vers l'infini (disons $+\infty$, pour fixer les idées) et Y ne dépend pas de s . Elle se réduit dans ce cas à

$$-J\left[Y, \frac{\partial u}{\partial t}\right] = J \frac{\partial Y}{\partial t} + S_+(t)Y = 0$$

ou encore à

$$\frac{dY}{dt} = JS_+(t)Y.$$

Cette équation différentielle linéaire est bien l'équation linéarisée de l'équation de Hamilton (voir le § 14.4.c)

$$\dot{x} = X_t(x).$$

En effet, nous avons

$$[Y, X_t] = \left[\sum y_i Z_i, X_t \right] = \sum y_i [Z_i, X_t] - \sum (X_t \cdot y_i) Z_i$$

ou

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum y_j \langle Z_i, [Z_j, X_t] \rangle,$$

ce qui est bien équivalent à l'équation trouvée ci-dessus.

Remarque 8.4.8. Si u est une solution de l'équation de Floer, alors, nous l'avons dit (dans la remarque 6.5.12), $u \cdot s$ définie par

$$(u \cdot s)(\sigma, t) = u(\sigma + s, t)$$

en est encore une. Donc $\mathcal{F}(u \cdot s) = 0$ pour tout s et donc

$$0 = \frac{d}{ds} \mathcal{F}(u \cdot s) = (d\mathcal{F})_u \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right),$$

$\partial u / \partial s$ est une solution de l'équation linéarisée. En particulier, le long d'une solution (non constante) joignant x à y , le noyau de L est de dimension supérieure ou égale à 1.

8.5. La transversalité

Nous démontrons ici la proposition de transversalité 8.1.4, en utilisant la propriété de Fredholm pour $(d\mathcal{F})_u$, c'est-à-dire modulo la première partie du théorème 8.1.5. La structure presque complexe J est fixée, le hamiltonien non dégénéré H_0 est fixé lui aussi. Nous fixons un $h_0 \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ et une solution u de l'équation de Floer pour J et $H = H_0 + h_0$:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u(H) = 0.$$

La différentielle de $\mathcal{F}$ est calculée, comme nous venons de l'expliquer, dans une trivialisation unitaire fixée le long de u et nous l'écrivons

$$(d\mathcal{F})_u(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S \cdot Y.$$

8.5.a. Définition de Γ . On fixe deux points critiques distincts, x et $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H_0}$. Pour montrer que $\mathcal{Z}(x, y, J)$ est une variété, on la décrit comme ensemble des zéros d'une section d'un fibré. Définissons, sur l'espace $\mathcal{P}(x, y) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(W, H_0)$, le fibré vectoriel

$$\mathcal{E} = \{(u, h, Y) \mid Y \in L^p(u^*TW)\}.$$

On considère $\mathcal{E}$ comme un fibré

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}(x, y) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$$

(par $(u, h, Y) \mapsto (u, h)$). L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, y) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) &\xrightarrow{\sigma} \mathcal{E} \\ (u, h) &\longmapsto \frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u(H_0 + h) \end{aligned}$$

en est une section. Le fait que la section σ prenne ses valeurs dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire le fait que

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u(H)$$

soit dans $L^p(\mathbf{R} \times S^1; u^*TW)$, comme nous l'avons déjà signalé au § 8.2.d, est démontré dans le chapitre 13 (et plus précisément dans le lemme 13.3.1 et la remarque 13.3.2).

Les zéros de σ sont exactement les points de $\mathcal{Z}(x, y, J)$ (plus exactement de sa version $W^{1,p}$, notons qu'ici les données (H_0, J) sont $\mathcal{C}^\infty$ mais les solutions (u, Y) sont faibles). Pour conclure, il suffit de montrer que σ est transverse à la section nulle, c'est-à-dire que l'application linéarisée $(d\sigma)_{(u,h)}$, composée avec la projection sur la fibre, est surjective lorsque $\sigma(u, h) = 0$.

Remarquons que σ est linéaire en h et que sa différentielle est

$$(d\sigma)_{(u,h)}(Y, \eta) = (d\mathcal{F})_u(Y) + \text{grad}_u(\eta).$$

L'application

$$\Gamma : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

dont la proposition 8.1.4 affirme la surjectivité est la composée de $(d\sigma)_{(u,h)}$ avec la projection de $T_{\sigma(u,h)}\mathcal{E}$ sur l'espace tangent à la fibre en (u, h) de $\mathcal{E}$. Donc, la proposition 8.1.3 est une conséquence immédiate de la proposition 8.1.4. La trivialisatation Z_i de TW le long de u permet d'identifier l'espace tangent à la fibre à l'espace $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$.

8.5.b. Démonstration de la proposition 8.1.4. Supposons que Γ ne soit pas surjective. Démontrons alors :

Lemme 8.5.1. *Soit $q > 0$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Il existe un champ non nul de classe $\mathcal{C}^\infty$, $Z \in L^q(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tel que, pour tout $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ et pour tout $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on a*

$$\langle Z, (d\mathcal{F})_u(Y) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle Z, \text{grad}_u(h) \rangle = 0.$$

Dans cet énoncé, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit (« accouplement » de L^q et L^p) :

$$\langle Z, Y \rangle = \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle Z(s, t), Y(s, t) \rangle ds dt$$

et, comme plus haut, nous avons identifié $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; u^*TW)$ à $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ par le choix d'une trivialisatıon unitaire (et de même pour L^q !).

Démonstration. Montrons d'abord que l'image de Γ est un sous-espace fermé de $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. L'opérateur Γ n'est pas un opérateur de Fredholm (voir l'exercice 44 page 497), mais $(d\mathcal{F})_u$ l'est, comme nous le montrerons au § 8.7.c, donc son image est fermée et de codimension finie. Bien sûr, cette image est contenue dans celle de Γ . Il existe un sous-espace G de dimension finie, supplémentaire de $\text{Im}(d\mathcal{F})_u$,

$$\text{Im}(d\mathcal{F})_u \oplus G = L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

et des projecteurs continus⁽⁵⁾

$$\pi_1 : L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow \text{Im}(d\mathcal{F})_u \quad \text{et} \quad \pi_2 : L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow G.$$

Le sous-espace

$$G_1 = G \cap \text{Im}(\Gamma) \subset G$$

est de dimension finie dans G , qui l'est aussi, donc il possède un supplémentaire G_2 . On a alors

$$\text{Im}(\Gamma) = \text{Im}(d\mathcal{F})_u \oplus G_1, \quad \text{donc} \quad \text{Im}(\Gamma) \oplus G_2 = L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Par suite, il existe un projecteur continu

$$\pi'_2 : L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow G_2.$$

On en déduit bien que $\text{Im}(\Gamma)$ est fermé : si une suite (y_n) de points de $\text{Im}(\Gamma)$ converge vers une limite $y_\star$ dans $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on a $\pi'_2(y_\star) = 0$, donc $y_\star \in \text{Im}(\Gamma)$.

Par conséquent, l'image de Γ est fermée et, avec le théorème de Hahn-Banach⁽⁶⁾, il existe une forme linéaire continue φ non nulle sur $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ qui s'annule sur $\text{Im}(\Gamma)$. Le théorème de représentation de Riesz⁽⁷⁾ affirme que φ est de la forme

$$\varphi(Y) = \langle Z, Y \rangle$$

pour un champ $Z \in L^q(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$.

On a ainsi, pour tout $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ et pour tout $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$,

$$\langle Z, (d\mathcal{F})_u(Y) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle Z, \text{grad}_u(h) \rangle = 0.$$

Il nous reste à prouver que le champ Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Notons

$$L : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

⁽⁵⁾Voir au besoin [14, Chap. II].

⁽⁶⁾Toujours en cas de besoin, toujours [14, Chap. I].

⁽⁷⁾Cette fois, [14, Chap. IV].

l'opérateur $(d\mathcal{F})_u$. Rappelons (c'est la proposition 8.4.6) que

$$LY = \frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} + S \cdot Y$$

(ici, $Y \in u^*TW$; il faudrait utiliser le repère orthonormé (Z_i) pour définir L sur $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, nous ne le faisons pas pour ne pas alourdir l'écriture). Définissons une application L^* par :

$$\begin{aligned} L^* : W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) &\longrightarrow L^q(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \\ X &\longmapsto -\frac{\partial X}{\partial s} + J \frac{\partial X}{\partial t} + {}^tS \cdot X. \end{aligned}$$

On voit sans peine que L^* est un opérateur borné. C'est l'adjoint de L : avec une démonstration analogue à celle qui suit, on prouve que, pour $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ et $X \in W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on a

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle LY, X \rangle = \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle Y, L^*X \rangle.$$

Le champ Z devrait donc vérifier $L^*Z = 0$... mais, *a priori*, il vit dans $L^q(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, qui est plus grand que l'espace sur lequel L^* est défini. Montrons donc :

Lemme 8.5.2. *On a, au sens des distributions, $L^*Z = 0$.*

Démonstration. Il suffit d'établir l'égalité ci-dessus pour $Y \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ et pour $X = Z$. On écrit d'abord

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \langle LY, Z \rangle dt ds &= \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{\partial Y}{\partial s}, Z \right\rangle ds \right) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle J \frac{\partial Y}{\partial t}, Z \right\rangle dt ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \langle SY, Z \rangle dt ds. \end{aligned}$$

Considérons donc les trois intégrales une par une. D'abord, par une simple intégration par parties (en fait ici les propriétés des dérivées faibles),

$$\int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{\partial Y}{\partial s}, Z \right\rangle ds \right) dt = - \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle Y, \frac{\partial Z}{\partial s} \right\rangle ds \right) dt$$

(notons que ceci est vrai, ou, naïvement, que le terme dit « tout intégré » est nul parce que l'on a supposé que $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} Y(s, t) = 0$). Pour la deuxième intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle J \frac{\partial Y}{\partial t}, Z \right\rangle dt ds &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial Y}{\partial t}, JZ \right\rangle dt ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle Y, \frac{\partial JZ}{\partial t} \right\rangle dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle Y, J \frac{\partial Z}{\partial t} \right\rangle dt ds \end{aligned}$$

(cette fois le terme tout intégré est nul par périodicité en t). Enfin on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \langle SY, Z \rangle dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \langle Y, {}^tSZ \rangle dt ds.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \langle LY, Z \rangle dt ds &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle Y, -\frac{\partial Z}{\partial s} + J \frac{\partial Z}{\partial t} + {}^tSZ \right\rangle ds dt \\ &= \langle Y, L^*Z \rangle \text{ au sens des distributions.} \end{aligned}$$

Donc $\langle Z, LY \rangle = 0$ implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \langle Y, L^*Z \rangle dt ds = 0,$$

autrement dit le fait que $L^*Z = 0$ au sens des distributions, ce que nous voulions démontrer. $\square$

En appliquant la régularité elliptique (le lemme 12.1.3), on en déduit que Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Pour obtenir une contradiction, montrons qu'un champ satisfaisant aux deux conditions du lemme est forcément nul. La deuxième condition s'écrit, de façon équivalente,

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} dh_t(Z) ds dt = 0.$$

Cette relation est satisfaite lorsque $Z(s, t) = \lambda(t) \partial u / \partial s$:

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} dh_t \left(\lambda(t) \frac{\partial u}{\partial s} \right) ds dt = \int_{S^1} \lambda(t) \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial s} h_t(u(s, t)) ds dt = 0$$

puisque, par définition de $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$, h s'annule près des orbites 1-périodiques de X_H . Montrons réciproquement :

Lemme 8.5.3. *Si $Z \in L^q(\mathbf{R} \times S^1; u^*TW)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie*

$$\forall h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0), \quad \langle Z, \text{grad}_u h \rangle = 0,$$

alors il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $\lambda : S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$Z(s, t) = \lambda(t) \frac{\partial u}{\partial s}(s, t).$$

Démonstration. La démonstration s'appuie sur un théorème de Floer, Hofer et Salamon qui garantit que toute solution de l'équation de Floer est « injective quelque part », une notion qui est précisée dans les définitions qui viennent et l'énoncé 8.5.4, une propriété qui est démontrée au § 8.6.

Soit $u \in \mathcal{M}(x, y, J, H)$. Un point $(s_0, t_0) \in \mathbf{R} \times S^1$ est dit *point critique* de u si $\partial u / \partial s(s_0, t_0) = 0$. Un point (s_0, t_0) est *régulier* s'il n'est pas critique et si $u(s_0, t_0) \neq u(s, t_0)$ pour tout $s \neq s_0$ (même si $s = \pm\infty$, c'est-à-dire

$u(s_0, t_0) \neq x(t_0)$ ou $u(s_0, t_0) \neq y(t_0)$). L'ensemble des points critiques est noté $C(u) \subset \mathbf{R} \times S^1$. On appelle $R(u)$ l'ensemble des points réguliers de u .

Théorème 8.5.4 ([27]). *L'ensemble $C(u)$ des points critiques est discret et l'ensemble $R(u)$ des points réguliers est un ouvert dense de $\mathbf{R} \times S^1$.*

Nous démontrons ce théorème au § 8.6.

Soit $(s_0, t_0) \in R(u)$. Supposons que $\partial u / \partial s(s_0, t_0)$ et $Z(s_0, t_0)$ soient linéairement indépendants. Nous allons construire un $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ tel que $\langle Z, \text{grad}_u h \rangle \neq 0$, obtenant ainsi une contradiction. Définissons une application

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \mathbf{R} \times S^1 &\longrightarrow W \times S^1 \\ (s, t) &\longmapsto (u(s, t), t). \end{aligned}$$

Nous considérons Z comme un champ de vecteurs sur $W \times S^1$ le long de $\tilde{u}$ (dont la composante sur la direction $\partial / \partial t \in TS^1$ est nulle). Considérons encore h comme une application définie sur $W \times S^1$, écrivons

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} dh_t(Z) ds dt = \int_{\mathbf{R} \times S^1} dh(Z) ds dt,$$

et construisons un $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ de façon que cette intégrale ne soit pas nulle. Remarquons qu'il suffit de définir h sur les courbes intégrales du champ de vecteurs Z au voisinage de l'image de $\tilde{u}$.

Choisissons un réel $\delta > 0$ assez petit pour que le carré

$$C_\delta = \{(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1 \mid |s - s_0| \leq \delta \text{ et } |t - t_0| \leq \delta\}$$

soit contenu dans l'ouvert dense $R(u)$ des valeurs régulières de u . Alors

$$\tilde{u} : C_\delta \longrightarrow W \times S^1$$

est un plongement (si δ est choisi assez petit, ce que nous faisons). On peut aussi supposer (toujours en diminuant δ) que $Z(s, t)$ et $\partial u / \partial s(s, t)$ sont linéairement indépendants, comme vecteurs de $T_{u(s, t)}W$ quand $(s, t) \in C_\delta$. Vue dans $W \times S^1$, cette condition se traduit par le fait que $Z(s, t)$ est transverse au plan tangent à l'image $\tilde{u}(C_\delta)$.

Comme $\tilde{u} : C_\delta \rightarrow W \times S^1$ est un plongement, on peut considérer, quitte à diminuer encore δ , un paramétrage local

$$\psi : C_\delta \times D_\varepsilon \longrightarrow W \times S^1$$

(ici $D_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R}^{2n-1} \mid \|y\| \leq \varepsilon\}$) tel que $\psi|_{C_\delta \times \{0\}} = \tilde{u}$. On appelle B (pour « boîte ») l'image de ψ . Cette boîte est représentée à gauche de la figure 2.

Nous allons construire h à support dans B en prescrivant ses valeurs sur les courbes intégrales de Z le long de $\tilde{u}(C_\delta)$. Ce sera difficile de le faire si le

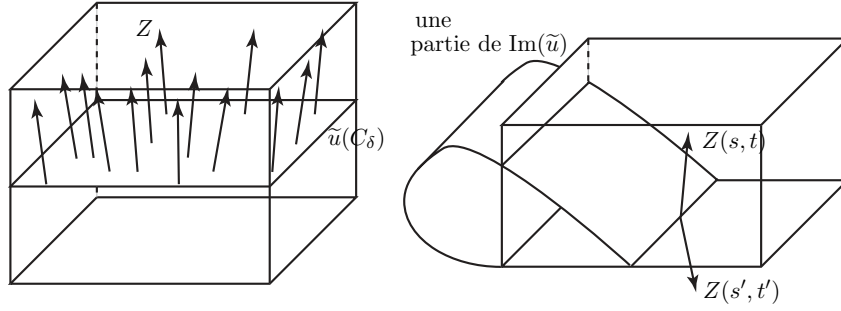


FIGURE 2

cylindre $\text{Im}(\tilde{u})$ intersecte B ailleurs qu'en $\tilde{u}(C_\delta)$ (comme sur la partie droite de la figure 2). Nous excluons cette possibilité par un lemme auxiliaire.

Lemme 8.5.5. *Pour ε assez petit, $\tilde{u}(s, t) \in \text{Im}(\psi)$ si et seulement si $(s, t) \in C_\delta$.*

Démonstration. Si la propriété annoncée par le lemme auxiliaire n'est pas vraie, il existe une suite ε_n tendant vers 0 et une suite (s_n, t_n) dans $\mathbf{R} \times S^1 - C_\delta$ telles que

$$\tilde{u}(s_n, t_n) = \psi(s'_n, t'_n, y_n) \quad \text{pour } (s'_n, t'_n, y_n) \in C_\delta \times D_{\varepsilon_n},$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (s'_n, t'_n, y_n) = (s_\star, t_\star, 0) \in C_\delta \times \mathbf{R}^{2n-1}.$$

À extraction près d'une sous-suite, la suite (s_n, t_n) tend vers $(-\infty, t_\#)$, $(+\infty, t_\#)$ ou $(s_\#, t_\#) \in \mathbf{R} \times S^1$. On a forcément $t_\# = t_\star$ et, soit $x(t_\star) = u(s_\star, t_\star)$, soit $y(t_\star) = u(s_\star, t_\star)$, soit encore $u(s_\#, t_\star) = u(s_\star, t_\star)$. Or chacune de ces trois égalités contredit le fait que $(s_\star, t_\star)$ soit un point régulier de u , ce qu'il doit être puisque $(s_\star, t_\star) \in C_\delta \subset R(u)$. $\square$

Il nous est maintenant possible de définir h . Voici cette définition. D'abord, à l'extérieur de B , nous choisissons $h \equiv 0$. Remarquons qu'alors h s'annule près des orbites 1-périodiques de X_H . Pour définir h à l'intérieur de B , on choisit une fonction β positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur C_δ , qui vaut 1 sur un carré $C_{\delta'}$ pour un $\delta' < \delta$ et qui est nulle au voisinage du bord de C_δ . Soit $\gamma_{s,t} : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow B$ une courbe telle que

$$\gamma_{s,t}(0) = \tilde{u}(s, t) \quad \text{et} \quad \gamma'_{s,t}(0) = Z(s, t).$$

La formule $h(\gamma_{s,t}(\sigma)) = \sigma\beta(s, t)$ définit bien une fonction sur une partie de la boîte difféomorphe à $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times C_\delta$ parce que Z est transverse à l'image $\tilde{u}(C_\delta)$. De plus, sur cette partie de B , on a

$$(dh)_{\tilde{u}(s,t)}(Z(s, t)) = \beta(s, t).$$

On prolonge h arbitrairement en une fonction à support dans B . En utilisant le lemme auxiliaire 8.5.5, on obtient finalement

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} (dh)_u(Z) ds dt = \int_{C_\delta} (dh)_u(Z) ds dt = \int_{C_\delta} \beta(s, t) ds dt > 0.$$

Comme les fonctions de $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ à support dans B sont denses dans les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support dans B (la remarque 8.3.4), nous pouvons approcher h par une fonction de $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ de sorte que l'intégrale reste strictement positive.

La supposition que $\partial u / \partial s(s_0, t_0)$ et $Z(s_0, t_0)$ sont linéairement indépendants nous a menés à une contradiction. Il existe donc une fonction $\lambda : R(u) \rightarrow \mathbf{R}$ telle que, pour tous $(s, t) \in R(u)$,

$$Z(s, t) = \lambda(s, t) \frac{\partial u}{\partial s}(s, t).$$

Pour finir de démontrer notre lemme, il faut maintenant démontrer que $\lambda(s, t)$ ne dépend pas de s .

La fonction λ peut alors s'exprimer par la formule

$$\lambda(s, t) = \frac{\langle Z(s, t), \partial u / \partial s(s, t) \rangle}{\|\partial u / \partial s(s, t)\|^2}$$

qui montre que c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $R(u)$. Cette formule permet aussi de prolonger λ au complémentaire de $C(u)$ dans $\mathbf{R} \times S^1$. Comme $R(u)$ est dense dans $\mathbf{R} \times S^1$, la relation $Z = \lambda \partial u / \partial s$ est encore vraie sur $\mathbf{R} \times S^1 - C(u)$. Pour tout $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R} \times S^1} (dh)_u(Z) ds dt &= \int_{\mathbf{R} \times S^1} \lambda(s, t) (dh)_u\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R} \times S^1} \lambda(s, t) \frac{\partial}{\partial s}(h(u(s, t), t)) ds dt. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un point (s_0, t_0) de $\mathbf{R} \times S^1 - C(u)$ en lequel $\partial \lambda / \partial s$ n'est pas nul. Cette propriété est encore valable sur un carré C_δ centré en (s_0, t_0) et contenu dans $\mathbf{R} \times S^1 - C(u)$. Comme précédemment, construisons une boîte B dans $W \times S^1$ de sorte que, si h est à support dans B ,

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} (dh)_u(Z) ds dt = \int_{C_\delta} (dh)_u(Z) ds dt.$$

Utilisons encore la fonction plateau $\beta : C_\delta \rightarrow \mathbf{R}$ choisie ci-dessus pour définir

$$h(\tilde{u}(s, t)) = -\beta(s, t) \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s, t) \text{ sur } \tilde{u}(C_\delta)$$

(en la prolongeant arbitrairement en une fonction à support dans B). Nous avons donc, grâce à une intégration par parties dans B ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R} \times S^1} (dh)_{\tilde{u}}(Z) ds dt &= \int_{C_\delta} (dh)_{\tilde{u}}(Z) ds dt \\
 &= \int_{C_\delta} \lambda(s, t) \frac{\partial}{\partial s} (h(u(s, t), t)) ds dt \\
 &= - \int_{C_\delta} \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s, t) h(u(s, t), t) ds dt \\
 &= \int_{C_\delta} \beta(s, t) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}(s, t) \right)^2 ds dt \\
 &\geq \int_{C_{\delta'}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}(s, t) \right)^2 ds dt > 0.
 \end{aligned}$$

Toujours par densité, on peut supposer que $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ comme ci-dessus. Nous avons ainsi contredit le lemme 8.5.1, donc la supposition (de l'existence de (s_0, t_0) en lequel $\partial \lambda / \partial s$ n'est pas nul) était fausse. C'est donc que

$$\forall (s, t) \in \mathbf{R} \times S^1 - C(u), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s, t) = 0.$$

Puisque $C(u)$ est discret, $\mathbf{R} \times S^1 - C(u)$ est connexe (une assertion laissée en exercice aux lecteurs). Donc $\lambda(s, t) = \lambda(t)$ ne dépend pas de s sur $\mathbf{R} \times S^1 - C(u)$. On peut alors prolonger cette fonction en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$, simplement, en posant

$$\lambda(s_0, t_0) = \lambda(s_0 + \varepsilon, t_0) \text{ si } (s_0, t_0) \in C(u).$$

La relation

$$Z(s, t) = \lambda(t) \frac{\partial u}{\partial s}(s, t)$$

est donc vraie sur $\mathbf{R} \times S^1$, et le lemme 8.5.3 est démontré. $\square$

Démonstration de la proposition 8.1.4. Montrons que $\lambda(t) \neq 0$ pour tout t . Si ce n'était pas le cas, on aurait encore un t_0 tel que $Z(s, t_0) = 0$ pour tout $s \in \mathbf{R}$. En particulier, toutes les dérivées $\partial^k Z / \partial s^k(s, t_0)$ sont nulles. Comme Z est solution de $L^* Z = 0$, on montre par récurrence que toutes les dérivées de Z s'annuleraient pour tout s et $t = t_0$. De

$$L^* Z = - \frac{\partial Z}{\partial s} + J \frac{\partial Z}{\partial t} + {}^t S(s, t) Z,$$

nous déduisons que Z est solution d'une équation du type « Cauchy-Riemann perturbée » et satisfait donc à un principe de prolongement analogue à celui auquel obéissent les applications holomorphes : s'il est nul avec toutes ses dérivées sur $\mathbf{R} \times \{t_0\}$, il est nul partout. Nous explicitons

la notion « Cauchy-Riemann perturbée » et démontrons le principe de prolongement (c'est la proposition 8.6.6) au § 8.6.b.

Ce principe de prolongement 8.6.6 impliquerait que Z est identiquement nulle, contrairement à ce que nous avons supposé.

Donc $\lambda(t) \neq 0$ pour tout t , et nous supposons que

$$\lambda(t) > 0 \quad \text{pour tout } t.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \left\langle \frac{\partial u}{\partial s}(s, t), Z(s, t) \right\rangle dt = \int_0^1 \lambda(t) \left| \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \right|^2 dt > 0 \quad \text{pour tout } s \in \mathbf{R},$$

et par suite cette fonction de s est strictement positive et tend vers 0 (comme $\partial u / \partial s$) quand $s \rightarrow \pm\infty$. Contradictoire serait le fait que cette fonction soit constante. Pour conclure, montrons donc qu'elle est, en effet, constante.

Rappelons que, comme nous l'avons déjà remarqué (remarque 8.4.8), $\partial u / \partial s$ est solution de $LY = 0$. Posons, pour alléger la notation,

$$Y(s, t) = \frac{\partial u}{\partial s}(s, t).$$

On a $LY = 0$ et $L^*Z = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = -J \frac{\partial Y}{\partial t} - SY \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z}{\partial s} = J \frac{\partial Z}{\partial t} + {}^tSZ.$$

La dérivée de notre fonction de s est ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^1 \langle Y, Z \rangle dt &= \int_0^1 \left(\left\langle \frac{\partial Y}{\partial s}, Z \right\rangle + \left\langle Y, \frac{\partial Z}{\partial s} \right\rangle \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\left\langle -J \frac{\partial Y}{\partial t}, Z \right\rangle - \langle SY, Z \rangle + \left\langle Y, J \frac{\partial Z}{\partial t} \right\rangle + \langle Y, {}^tSZ \rangle \right) dt \\ &= - \int_0^1 \left(\left\langle J \frac{\partial Y}{\partial t}, Z \right\rangle + \left\langle Y, J \frac{\partial Z}{\partial t} \right\rangle \right) dt \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \langle JY, Z \rangle dt = 0. \end{aligned}$$

Cette contradiction implique que Z est nul, ce qui termine (enfin) la démonstration de la proposition 8.1.4. Et celle de la proposition 8.1.3. $\square$

8.5.c. Vers la preuve de 8.1.1 et 8.1.2, l'espace tangent à $\mathcal{Z}(x, y, J)$.

La contradiction obtenue à la fin de la démonstration précédente achève aussi de démontrer la proposition 8.1.3. Nous avons ainsi acquis le fait que $\mathcal{Z}(x, y, J)$ est une variété de Banach. Son espace tangent en un point (u, h) est le noyau de $(d\sigma)_{(u, h)}$, c'est-à-dire l'espace

$$\{(Y, \eta) \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) \mid (d\mathcal{F})_u Y + \text{grad}_u \eta = 0\}.$$

Considérons la projection

$$\begin{aligned}\pi : \mathcal{Z}(x, y, J) &\longrightarrow \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) \\ (u, H_0 + h) &\longmapsto h\end{aligned}$$

et son application tangente

$$\begin{aligned}(d\pi)_{(u, H)} : T_{(u, H)}\mathcal{Z}(x, y, J) &\longrightarrow T_h\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) = \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) \\ (Y, \eta) &\longmapsto \eta\end{aligned}$$

(où $H = H_0 + h$). Notons que π est lisse et vérifions que π est une application de Fredholm. Le noyau de $(d\pi)_{(u, H_0 + h)}$ est exactement celui de $L = (d\mathcal{F})_u$, donc il est de dimension finie. Son image est l'image réciproque par l'application linéaire

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) &\longrightarrow L^p(u^*TW) \\ \eta &\longmapsto \text{grad}_u \eta\end{aligned}$$

de celle de L , donc elle est de codimension finie (et fermée).

On peut donc appliquer le théorème de Sard-Smale, dont nous rappelons ici l'énoncé.

Théorème 8.5.6 (de Sard-Smale [67]). *Soient E et F deux espaces de Banach séparables, soit U un ouvert de E et soit*

$$\mathcal{F} : U \longrightarrow F$$

une application de Fredholm (lisse). Alors l'ensemble

$$\{y \in F \mid \text{si } y = f(x) \text{ pour un } x \in U, T_x\mathcal{F} \text{ est surjective}\}$$

des valeurs régulières de $\mathcal{F}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Remarque 8.5.7. Dans ce théorème, la séparabilité garantit que, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement dénombrable. Elle est indispensable pour obtenir une intersection *dénombrable* d'ouverts denses, une partie dense, donc.

Démontrons maintenant :

Lemme 8.5.8. *Les valeurs régulières de π sont exactement les $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ tels que, pour tout $u \in \mathcal{M}(H_0 + h, J)$, l'application $(d\mathcal{F})_u$ est surjective.*

Démonstration. Supposons que h soit une valeur régulière de π . Choisissons un $u \in \mathcal{M}(H_0 + h, J)$ et montrons que $(d\mathcal{F})_u$ est surjective. Si ce n'était pas le cas, alors, comme dans le lemme 8.5.1, il existerait un $Z \in L^q(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tel que

$$\forall Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}), \quad \langle (d\mathcal{F})_u(Y), Z \rangle = 0.$$

Comme $(d\pi)_{(u,H)}$ est surjective, pour tout $\eta \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$, il existe un champ $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tel que

$$(d\mathcal{F})_u(Y) + \text{grad}_u \eta = 0.$$

À partir de ces deux égalités, la démonstration de la proposition 8.1.4 (voir le § 8.5.b) donne $Z = 0$ et une contradiction. Par suite, $(d\mathcal{F})_u$ est surjective.

Réciproquement, étant donné $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$, si $(d\mathcal{F})_u$ est surjective pour tout $u \in \mathcal{M}(H_0 + h, J)$, étant donné un $\eta \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$, choisissons $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tel que

$$(d\mathcal{F})_u(Y) = -\text{grad}_u \eta.$$

Alors, $(Y, \eta) \in T_{(u,H)}\mathcal{Z}(x, y, J)$ et $(d\pi)_{(u,H)}(Y, \eta) = \eta$, donc $(d\pi)_{(u,H)}$ est surjective, et h est une valeur régulière de π . $\square$

Le lemme 8.5.8 donne immédiatement (en vertu du théorème de Sard-Smale, ici le théorème 8.5.6) le théorème 8.1.1. Pour que cette démonstration soit vraiment complète, il reste à démontrer le théorème 8.5.4 et le principe de prolongement (que nous démontrerons sous le nom de proposition 8.6.6).

Ceci étant admis, démontrons enfin que (quitte à perturber le hamiltonien initial), l'espace des trajectoires de x à y est une variété de la dimension voulue, c'est-à-dire le théorème 8.1.2.

Démonstration du théorème 8.1.2. Supposons que $h \in \mathcal{H}_{\text{reg}}$. Alors, d'après le lemme 8.5.8, h est une valeur régulière de

$$\pi : \mathcal{Z}(x, y, J) \longrightarrow \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0).$$

Donc $\pi^{-1}(h)$ est une variété et sa dimension est égale à l'indice de Fredholm de π , lequel vaut

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(d\pi)_{(u,H)} &= \dim \text{Ker}(d\mathcal{F})_u \\ &= \text{Ind}(d\mathcal{F})_u \\ &= \mu(x) - \mu(y). \end{aligned}$$

Les éléments de $\pi^{-1}(h)$ sont les solutions dans $\mathcal{P}^{1,p}$ de l'équation de Floer correspondant à $(H_0 + h_0, J)$. Grâce à la régularité elliptique (voir la proposition 12.1.4 dans le chapitre 12), on a

$$\pi^{-1}(h) \subset \mathcal{M}(x, y, H_0 + h).$$

La proposition 8.2.3 donne l'inclusion en sens inverse, par suite

$$\pi^{-1}(h) = \mathcal{M}(x, y, H_0 + h),$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

Remarque 8.5.9. Nous avons obtenu que, pour $h \in \mathcal{H}_{\text{rég}}$ et pour tous points critiques x et y de $\mathcal{A}_{H_0}$, l'espace $\mathcal{M}(x, y, H_0 + h, J)$ est une sous-variété de $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$. Sur $\mathcal{M}(x, y, H_0 + h, J)$, nous utilisons la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$. En effet, puisque $p > 2$, $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ s'injecte dans l'espace des fonctions continues, continûment pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$ et, comme nous l'avons remarqué (dans la proposition 6.5.3), sur $\mathcal{M}(H_0 + h, J)$ (dont $\mathcal{M}(x, y, H_0 + h, J)$ est un sous-espace), les topologies $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$ et $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ coïncident.

L'ensemble ouvert dense $\mathcal{H}_{\text{rég}}$, dont le théorème 8.1.1 annonce l'existence, est obtenu en prenant l'intersection des différents ouverts denses obtenus en considérant les différents couples (x, y) d'orbites périodiques de période 1.

Pour finir de démontrer les théorèmes 8.1.5 et 8.1.1, il reste à démontrer que $(d\mathcal{F})_u$ a effectivement la propriété de Fredholm et à calculer son indice, ce que nous faisons dans les §§ 8.7 et 8.8.

8.6. Les solutions de Floer sont « injectives quelque part »

8.6.a. L'injectivité « en s ». Nous démontrons ici le théorème 8.5.4 et un principe de prolongement que nous avons utilisé dans la démonstration de la proposition 8.1.4 page 237 (l'énoncé 8.6.6 ci-dessous). Posons $z = s + it$ et considérons une solution u de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(t, u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X(t, u) \right) = 0.$$

Ici, X est un champ de vecteurs (dépendant périodiquement du temps) sur $\mathbf{R}^{2n}$ et X et J sont supposés de classe $\mathcal{C}^\infty$. Toute solution u de classe $W^{1,p}$ (avec $p > 2$) est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous commençons par transformer cette équation en une équation de Cauchy-Riemann sur $\mathbf{R}^2$.

Proposition 8.6.1. *Soit u une solution de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(t, u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X(t, u) \right) = 0.$$

Il existe une structure presque complexe J et un difféomorphisme φ sur W , ainsi qu'une application $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow W$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial s} + J \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ v(s, t+1) = \varphi(v(s, t)), \end{cases}$$

et, pour $(s, t) \in \mathbf{R} \times [0, 1[$, $C(u) = C(v)$ (u et v ont les mêmes points critiques) et $R(u) = R(v)$.

Démonstration. Comme $W \times S^1$ est compacte, le « flot » ψ_t de X_t est défini sur tout W , ainsi nous avons une application

$$\psi_t : W \longrightarrow W \quad \text{telle que} \quad \frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t \quad \text{et} \quad \psi_0 = \text{Id}.$$

Posons $v(s, t) = \psi_t^{-1}(u(s, t))$. Ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (d\psi_t)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = (d\psi_t)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + X_t(u),$$

et par suite

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial s} + J\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_t(u)\right) \\ &= (d\psi_t)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) + J(u)(d\psi_t)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ &= (d\psi_t)\left(\frac{\partial v}{\partial s} + (d\psi_t)^{-1}J(u)(d\psi_t)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right). \end{aligned}$$

En notant $(d\psi_t)^{-1}J(u)(d\psi_t) = \psi_t^*J(v)$, nous avons constaté que v est une solution de

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \psi_t^*J(v)\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Il reste à poser $\varphi = \psi_1$ (et à renommer J la structure complexe obtenue). La vérification des propriétés de φ et de v est banale. $\square$

Appliquons la proposition 8.6.1 : démontrer le théorème 8.5.4 (sur les points critiques) revient à démontrer les deux résultats exprimés dans les deux énoncés qui suivent. Le premier affirme que l'ensemble des points critiques de v (et donc aussi celui de u), est discret.

Lemme 8.6.2. *Il existe une constante $\delta > 0$ telle que $(dv)_z \neq 0$ pour $0 < |z| < \delta$.*

La démonstration de ce lemme utilise le « principe de similitude » 8.6.8 et est différée jusqu'à la page 249.

Avant d'énoncer le deuxième résultat, considérons une solution $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow W$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec toutes les propriétés données par la proposition 8.6.1. Rappelons que

$$R(v) = \left\{ (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) \neq 0, \right. \\ \left. v(s, t) \neq x^\pm(t) \text{ et } v(s, t) \notin v(\mathbf{R} - \{s\}, t) \right\}.$$

Définition. Faisons la convention que $v(\pm\infty, t) = x^\pm(t)$. Soit $(s, t) \in \mathbf{R}^2$. Appelons *point multiple* de (s, t) un point (s', t) (avec le même t !) tel que $s' \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $s' \neq s$, tel que $v(s', t) = v(s, t)$.

Ainsi, par définition, $R(v)$ est l'ensemble des points dans le complémentaire de $C(v)$ qui n'admettent pas de multiple.

Le résultat d'« injectivité » que nous avons en vue est la proposition :

Proposition 8.6.3. *Soit v une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation de Cauchy-Riemann, satisfaisant à l'hypothèse de périodicité $v(s, t+1) = \varphi(v(s, t))$, et telle que $\partial v / \partial s \neq 0$. Alors $R(v)$ est un ouvert dense de $\mathbf{R}^2$.*

Démonstration. Nous divisons la démonstration en deux étapes : nous montrons

- que $R(v)$ est ouvert, ce qui est assez facile, puisque deux des conditions intervenant dans sa définition sont évidemment des conditions ouvertes,
- puis (et c'est la partie délicate) que $R(v)$ est dense.

D'abord, $R(v)$ est un ouvert, autrement dit, son complémentaire est fermé. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite $(s_n, t_n) \notin R(v)$ convergent vers une limite $(s, t) \in R(v)$. Les deux premières conditions définissant $R(v)$ sont ouvertes, par conséquent, pour n assez grand, on a

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s_n, t_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad v(s_n, t_n) \neq x^\pm(t).$$

C'est la condition d'injectivité qui est en cause, on a donc pour tout n un $s'_n \in \mathbf{R}$ tel que $s'_n \neq s_n$ et $v(s_n, t_n) = v(s'_n, t_n)$.

Montrons qu'une telle suite (s'_n) est bornée. Si ce n'était pas le cas, elle aurait une sous-suite tendant vers $\pm\infty$ et (pour cette sous-suite)

$$v(s, t) = \lim v(s'_n, t_n) = x^\pm(t),$$

ce qui est interdit par le fait que $(s, t) \in R(v)$.

Puisque la suite (s'_n) est bornée, extrayons-en une suite convergente de limite s' . Comme $v(s, t) = v(s', t)$, par définition de $R(v)$, $s' = s$. Nous avons deux suites (s_n) et (s'_n) , avec $s_n \neq s'_n$ et $\lim s_n = \lim s'_n = s$. Par conséquent,

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(s_n, t) - v(s'_n, t)}{s_n - s'_n} = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que $(s, t) \in R(v)$.

Il nous reste à démontrer que $R(v)$ est dense. Comme $C(v)$ est discret, il suffit de montrer que $R(v)$ est dense dans le complémentaire de $C(v)$. Il est clair que tout $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ avec $(s, t) \notin C(v)$ est limite d'une suite $(s_n, t) \notin C(v)$ avec $v(s_n, t) \neq x^\pm(t)$. En effet,

$$\text{si } v(s + 1/n, t) = x^+(t) \text{ (par exemple), alors } \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) = 0.$$

Montrons donc que tout point $(s_0, t_0) \in \mathbf{R} \times [0, 1]$ avec

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s_0, t_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad v(s_0, t_0) \neq x^\pm(t_0)$$

est limite d'une suite de points de $R(v)$. Si ce n'était pas le cas, il existerait une petite boule ouverte centrée en (s_0, t_0) telle que

$$B_\varepsilon(s_0, t_0) \cap R(v) = \emptyset.$$

Si le rayon ε a été choisi assez petit, les deux propriétés suivantes sont satisfaites pour un $M \geq 0$ assez grand :

(1) Si $|t - t_0| \leq \varepsilon$ et $|s| \geq M$, $v(s, t) \notin v(B_\varepsilon(s_0, t_0))$ et $x^\pm(t) \notin v(B_\varepsilon(s_0, t_0))$; sinon, il existerait deux suites, t_n et t'_n tendant vers t_0 et deux suites s_n et s'_n avec $\lim s_n = \pm\infty$ et $\lim s'_n = s_0$ telles que $v(s_n, t_n) = v(s'_n, t'_n)$, ce qui impliquerait $v(s_0, t_0) = x^\pm(t_0)$ (ce qui est faux).

(2) Si $|t - t_0| \leq \varepsilon$, l'application

$$\begin{aligned} [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] &\longrightarrow W \\ s &\longmapsto v(s, t) \end{aligned}$$

est une immersion injective; sinon, il existerait deux suites s_n et s'_n (avec $s_n \neq s'_n$) tendant vers s_0 et une suite t_n tendant vers t_0 telles que $v(s_n, t_n) = v(s'_n, t_n)$, de sorte que nous aurions $\partial v / \partial s(s_0, t_0) = 0$. Ceci est illustré sur la figure 3 (l'axe des s est représenté horizontalement) : les multiples des points de la boule $B_\varepsilon(s_0, t_0)$ ne sont pas dans les zones grisées.

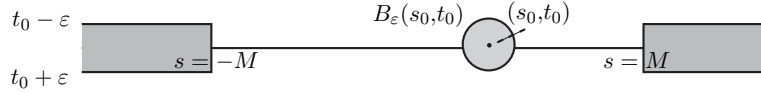


FIGURE 3

Grâce à ces deux propriétés, nous avons en particulier

$$\forall (s, t) \in B_\varepsilon(s_0, t_0), \quad \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) \neq 0 \quad \text{et} \quad v(s, t) \neq x^\pm(t).$$

Autrement, v est localement constante et $(s_0, t_0) \in C(v)$.

(3) Comme $[-M, M] \times [0, 1]$ est compact et $C(v)$ discret, leur intersection est finie. Après avoir au besoin modifié un peu le point (s_0, t_0) , nous supposons que $v(s_0, t_0) \neq v(s, t)$ pour tous les (s, t) de cet ensemble fini (ce que l'on peut faire parce que v n'est pas constante sur un voisinage de (s_0, t_0) , puisque (s_0, t_0) n'est pas dans $C(v)$) et, après avoir rapetissé ε , que

$$v(B_\varepsilon(s_0, t_0)) \cap v([-M, M] \times [0, 1] \cap C(v)) = \emptyset.$$

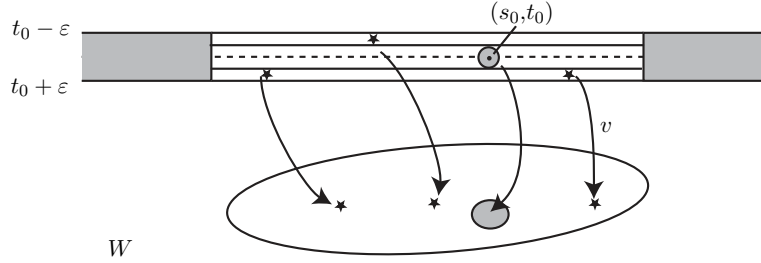


FIGURE 4

Ceci est schématisé sur la figure 4, où les étoiles sont les points de $C(v)$ et leurs images). Nous ne considérons donc plus le cas d'un point multiple qui est aussi un point critique. C'est désormais l'injectivité seule qui est en cause et, pour tout $(s, t) \in B_\varepsilon(s_0, t_0)$, il existe un $s' \in \mathbf{R}$ tel que $s' \neq s$ et

$$u(s, t) = u(s', t) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u}{\partial s}(s', t) \neq 0 \quad \text{et} \quad |s'| \leq M, \quad |s'| > \varepsilon.$$

Pour chaque (s, t) , l'ensemble des points (s', t) qui ont la même image est fini : sinon cet ensemble aurait un point d'accumulation, ce qui impliquerait que $\partial v / \partial s = 0$. Appelons donc $s_1, \dots, s_N \in [-M, M]$ les points tels que

$$v(s_0, t_0) = v(s_1, t_0) = \dots = v(s_N, t_0).$$

Lemme 8.6.4. *Pour tout $r > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, si $|t - t_0| < \delta$ et $|s - s_0| < \delta$, il existe $s' \in B_r(s_j)$ avec $v(s, t) = v(s', t)$.*

Démonstration du lemme. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite (σ_n, t_n) tendant vers (s_0, t_0) telle que les points multiples (σ, t_n) de (σ_n, t_n) ont la propriété que $\sigma \notin B_r(s_j)$ pour $j = 1, \dots, n$. Soit alors (σ'_n, t_n) un point multiple de (σ_n, t_n) . Nous savons par la propriété (1) ci-dessus que $|\sigma'_n| \leq M$ et par la propriété (2) que $|\sigma'_n - s_0| \geq \varepsilon$.

La suite σ'_n a un point d'accumulation σ' , qui est différent de $s_0, \dots, s_N$. Par ailleurs, $v(\sigma'_n, t_n) = v(\sigma_n, t_n)$, donc $v(\sigma', t_0) = v(s_0, t_0)$, ce qui est une contradiction.

Ceci est illustré sur la figure 5, où les points multiples de B_δ se trouvent dans les régions ombrées clair. □

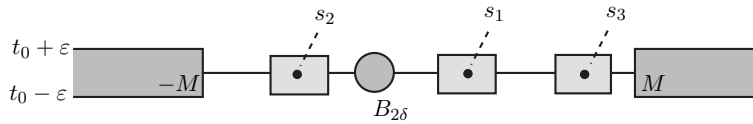


FIGURE 5

Le lemme étant acquis, fixons un $r < \varepsilon/2$, et un δ correspondant. Posons, pour $j = 1, \dots, N$,

$$\Sigma_j = \{(s, t) \in \overline{B}_\delta(s_0, t_0) \mid v(s, t) \in u(\overline{B}_r(s_j) \times \{t\})\}.$$

Les Σ_j sont des fermés et, d'après le lemme précédent,

$$\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_N = \overline{B}_\delta(s_0, t_0),$$

donc au moins l'un d'eux est d'intérieur non vide. Nous supposons que c'est Σ_1 . Pour un point (s_*, t_*) dans l'intérieur de Σ_1 et pour un nombre réel $\rho > 0$ assez petit, on a

$$B_\rho(s_*, t_*) \subset \Sigma_1 \subset B_\delta(s_0, t_0) \subset B_\varepsilon(s_0, t_0).$$

On pouvait ainsi choisir $r > 0$ assez petit pour que

$$B_r(s_i) \cap B_\varepsilon(s_0) = \emptyset \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N,$$

on a en particulier

$$B_\rho(s_*, t_*) \cap (B_{r_1}(s_1) \times B_\delta(t_0)) = \emptyset.$$

Ceci est illustré sur la figure 6, sur laquelle chaque point de $B_\rho(s_*, t_*)$ a un multiple dans la zone ombrée clair.

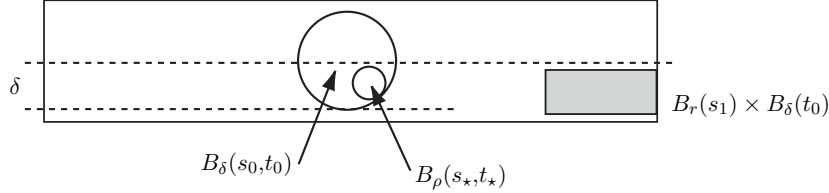


FIGURE 6

Par définition de Σ_1 , pour tout $(s, t) \in B_\rho(s_*, t_*)$, il existe $s' \in \overline{B}_r(s_1)$ tel que $v(s, t) = v(s', t)$. En particulier, il existe un $s'_* \neq s_*$ avec

$$v(s_*, t_*) = v(s'_*, t_*).$$

Définissons sur $B_\varepsilon(0, 0)$ les deux fonctions v_1 et v_2 par

$$v_1(s, t) = v(s + s_*, t + t_*)$$

$$v_2(s, t) = v(s + s'_*, t + t_*).$$

Ces deux fonctions satisfont à la même équation de Cauchy-Riemann et elles coïncident à l'origine. De plus leurs différentielles en l'origine sont non nulles. En effet $(s_*, t_*) \in B_\varepsilon(s_0, t_0)$ n'est pas dans $C(v)$ et (s'_*, t_*) est un multiple de (s_*, t_*) , donc il n'est pas dans $C(v)$ non plus, grâce à la propriété (3). Enfin, par construction, pour tout $(s, t) \in B_\rho(0, 0)$, il existe $s' \in \overline{B}_{2r}(0)$ tel que $v_1(s, t) = v_2(s, t)$. On applique à ces fonctions le lemme qui suit, qui

est une conséquence du principe de prolongement (et que nous démontrons ci-dessous).

Lemme 8.6.5. *Supposons que v_1 et v_2 soient deux solutions de l'équation de Cauchy-Riemann avec $X_t \equiv 0$ définies sur $B_\varepsilon(0)$, qui prennent la même valeur en 0 et telles que $(dv_1)_0$ et $(dv_2)_0$ ne soient pas nulles. Supposons de plus que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que*

$$\forall (s, t) \in B_\delta(0), \exists s' \in \mathbf{R} \text{ tel que } (s', t) \in B_\varepsilon(0) \text{ et } v_1(s, t) = v_2(s', t).$$

Alors $v_1(s, t) = v_2(s, t)$ pour tout $z \in B_\varepsilon(0)$.

Ainsi $v_1(s, t) = v_2(s, t)$, soit $v(s + s_\star, t + t_\star) = v(s + s'_\star, t + t_\star)$ sur un voisinage de 0. Les applications v_1 et v_2 vérifient toutes les deux l'équation de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial w}{\partial s} + J \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Appelons $\mathcal{F}$ l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \\ w &\longmapsto \frac{\partial w}{\partial s} + J(w) \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nous avons donc $\mathcal{F}(v_1) = \mathcal{F}(v_2)$. Écrivons

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}(v_1) - \mathcal{F}(v_2) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(v_1 + \tau(v_2 - v_1)) d\tau \\ &= \int_0^1 (d\mathcal{F})_{v_1 + \tau(v_2 - v_1)}(v_2 - v_1) d\tau. \end{aligned}$$

Un calcul similaire à celui que nous avons fait au §8.4 pour linéariser l'opérateur de Floer donne (pour $H = 0$ et J dépendant de t ici) :

$$(d\mathcal{F})_{v_1 + \tau(v_2 - v_1)}(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + \tilde{S}(\tau, s, t)Y,$$

où $\tilde{S}$ est une application

$$\tilde{S} : [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \text{End}(\mathbf{R}^{2n}).$$

Notons $Y = v_2 - v_1$ et $S(s, t) = \int_0^1 \tilde{S}(\tau, s, t) d\tau$. On obtient que $v_2 - v_1$ est une solution de

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S \cdot Y = 0,$$

qui, par ce qui précède, s'annule sur un voisinage de l'origine. En appliquant le principe de prolongement 8.6.6, on a $v_1 = v_2$, autrement dit

$$v(s + s_\star, t + t_\star) = v(s + s'_\star, t + t_\star) \quad \text{pour tous } (s, t) \in \mathbf{R}^2.$$

Par récurrence, nous avons $v(s, t) = v(k(s'_\star - s_\star), t)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et, en passant à la limite, $v(s, t) = x^\pm(t)$ contrairement à l'hypothèse faite. $\square$

8.6.b. Le principe de prolongement. Il nous faut maintenant démontrer le principe de prolongement. Nous considérons ici le cas d'une équation « de Cauchy-Riemann perturbée »

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S \cdot Y = 0$$

dans laquelle J_0 est la structure complexe standard sur $\mathbf{R}^{2n}$ et $S : \mathbf{R}^2 \rightarrow \text{End}(\mathbf{R}^{2n})$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Voici la proposition que nous avons en vue :

Proposition 8.6.6 (principe de prolongement). *Soit Y une solution de l'équation de Cauchy-Riemann perturbée, sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Alors l'ensemble*

$$C = \{(s, t) \in U \mid Y \text{ s'annule à l'ordre infini en } (s, t)\}$$

est ouvert et fermé dans U . En particulier, si U est connexe et si Y s'annule sur un ouvert non vide contenu dans U , alors Y est identiquement nulle sur U .

Remarques 8.6.7.

(1) Rappelons que l'annulation à l'ordre infini en un point z_0 d'une fonction f est le fait que, pour tout $k \geq 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{|z - z_0| \leq r} |f(z)|}{r^k} = 0.$$

Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$, ce fait est équivalent à l'annulation en z_0 de toutes les dérivées de tous ordres de f .

(2) L'ensemble des points où une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'annule à l'ordre infini est un fermé. Dans le cas d'une fonction holomorphe (c'est-à-dire satisfaisant aux équations de Cauchy-Riemann), ce fermé est aussi un ouvert : c'est ce que l'on appelle le « principe du prolongement analytique ».

Nous allons démontrer cette proposition en la présentant comme conséquence d'une version du principe de similitude de Carleman, et plus précisément du lemme suivant. Écrivons $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$.

Lemme 8.6.8 (principe de similitude). *Soit $Y : B_\varepsilon \rightarrow \mathbf{C}^n$ une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation de Cauchy-Riemann perturbée*

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S \cdot Y = 0$$

et soit $p > 2$. Alors il existe un nombre $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, une application $A \in W^{1,p}(B_\delta, \text{GL}(\mathbf{R}^{2n}))$ et une application holomorphe $\sigma : B_\delta \rightarrow \mathbf{C}^n$ tels que

$$\forall (s, t) \in B_\delta, \quad Y(s, t) = A(s, t)\sigma(s + it) \text{ et } J_0 A(s, t) = A(s, t)J_0.$$

Remarque 8.6.9. On peut, plus généralement, supposer, dans cet énoncé, que $Y \in W^{1,p}(B_\varepsilon; \mathbf{C}^n)$ et $S \in L^p(B_\varepsilon; \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^{2n}))$ pour $p > 2$.

Pour démontrer ce principe de similitude, on utilise le fait que le $\bar{\partial}$ standard est un opérateur de Fredholm (ce sera le théorème 8.6.11).

Écrivons maintenant les démonstrations des énoncés (le lemme 8.6.2 et la proposition 8.6.6) qui utilisent ce principe.

Démonstration de la proposition 8.6.6. Il est clair que l'ensemble C est fermé. Montrons qu'il est aussi ouvert. Soit $z_0 = s_0 + it_0 \in C$. Le principe de similitude 8.6.8 assure l'existence d'un voisinage $B_\delta(z_0)$ sur lequel $Y(z) = A(z)\sigma(z)$, avec $\sigma : B_\delta(z_0) \rightarrow \mathbf{C}^n$ holomorphe et A à valeurs dans les endomorphismes réels de $\mathbf{C}^n$.

Sur $B_\delta(z_0)$, Y s'annule à l'ordre infini si et seulement si σ en fait autant. Mais σ s'annule effectivement à l'ordre infini en z_0 . On a en effet, pour $r < \delta$,

$$\begin{aligned} \sup_{|z-z_0| \leq r} |\sigma(z)| &= \sup_{|z-z_0| \leq r} |A^{-1}(z) \cdot Y(z)| \\ &\leq K \sup_{|z-z_0| \leq r} |Y(z)| \end{aligned}$$

car A^{-1} est continue (puisque $A \in W^{1,p}(B_\delta; \text{GL}(\mathbf{R}^{2n}))$ est continue). Donc

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{|z-z_0| \leq r} |\sigma(z)|}{r^k} = 0 \quad \text{pour tout } k.$$

Mais σ est analytique, elle est nulle sur $B_\delta(z_0)$, donc $B_\delta(z_0) \subset C$. $\square$

Démonstration du lemme 8.6.2. Évidemment, si $(dv)_0 \neq 0$, l'assertion à démontrer est claire. Supposons donc que $(dv)_0 = 0$. L'application v est solution de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial s} + J \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Alors, comme nous l'avons déjà remarqué (dans la remarque 8.4.8), $\partial v / \partial s$ est solution de l'équation de Cauchy-Riemann linéarisée. On peut donc appliquer le principe de similitude (le lemme 8.6.8) à $Y = \partial v / \partial s$, nous obtenons le fait que

$$Y(s, t) = A(s, t)\sigma(s, t)$$

avec σ holomorphe sur un voisinage de 0. Ce dont le lemme se déduit : les zéros de σ sont isolés, donc aussi ceux de $Y = \partial v / \partial s$, et donc *a fortiori* ceux de dv . $\square$

Du principe de prolongement, nous déduirons une démonstration du lemme 8.6.5 utilisé ci-dessus.

Démonstration du lemme 8.6.5. Choisissons, comme nous y autorise le fait que $(dv_2)_0 \neq 0$, un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $v_2 : B_\varepsilon \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ plonge B_ε comme une sous-variété $\Sigma = v(B_\varepsilon) \subset \mathbf{R}^{2n}$. En utilisant une projection d'un voisinage U_ε de la sous-variété Σ sur cette sous-variété, nous déduisons une application φ de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\varphi : U_\varepsilon \longrightarrow B_\varepsilon \quad \text{avec } \varphi|_\Sigma = v_2^{-1}.$$

Pour δ assez petit, $v_1(B_\delta) \subset \Sigma$ (par hypothèse), ce dont nous déduisons une application

$$\varphi \circ v_1 : B_\delta \longrightarrow U_\varepsilon \longrightarrow B_\varepsilon$$

dont notre hypothèse dit qu'elle est de la forme

$$\varphi \circ v_1(s, t) = (f(s, t), t)$$

avec f de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie sur $B_\delta(0)$ et à valeurs dans $B_\varepsilon(0)$. Ainsi, pour $(s, t) \in B_\delta$, $v_1(s, t) = v_2(f(s, t), t)$. Le fait que v_1 soit solution donne

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial v_1}{\partial s}(s, t) + J(t, v_1) \frac{\partial v_1}{\partial t}(s, t) &= \frac{\partial v_2}{\partial s}(f(s, t), t) \frac{\partial f}{\partial s} \\ &+ J(t, v_2(f(s, t), t)) \left[\frac{\partial v_2}{\partial s}(f(s, t), t) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t}(f(s, t), t) \right]. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le fait que v_2 aussi est solution, donc que

$$J \frac{\partial v_2}{\partial t} = - \frac{\partial v_2}{\partial s} \quad \text{et} \quad J \frac{\partial v_2}{\partial s} = \frac{\partial v_2}{\partial t}$$

pour obtenir

$$\frac{\partial v}{\partial s}(f, t) \left(\frac{\partial f}{\partial s} - 1 \right) + \frac{\partial v}{\partial t}(f, t) \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

une relation linéaire entre les deux vecteurs indépendants $\partial v / \partial s(f, t)$ et $\partial v / \partial t(f, t)$. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

ce qui veut dire que f est de la forme $f(s, t) = s + s_0$ pour un certain $s_0 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, qui est d'ailleurs nul puisque $v(s_0, 0) = u(0) = v(0)$ et v est injective sur $B_\varepsilon(0)$, donc $f(s, t) = s$, ce qui veut dire que u et v coïncident sur le voisinage de 0 où f est définie. Par le principe de prolongement, u et v doivent coïncider sur tout B_ε . $\square$

Démonstration du lemme 8.6.8. La dernière des conditions à satisfaire est que $A(s, t)$ est, pour tous (s, t) , une application $\mathbf{C}$ -linéaire (c'est-à-dire qu'elle commute avec la multiplication par i , que nous avons notée J_0).

Essayons de remplacer S (dans l'équation de Cauchy-Riemann perturbée) par une application $\mathbf{C}$ -linéaire. Écrivons pour commencer

$$S^+ = \frac{1}{2}(S - J_0 S J_0) \quad \text{et} \quad S^- = \frac{1}{2}(S + J_0 S J_0),$$

de sorte que $S = S^+ + S^-$ et que

$$J_0 S^+ = \frac{1}{2}(J_0 S + S J_0) = S^+ J_0,$$

donc S^+ est $\mathbf{C}$ -linéaire et, de même, S^- est anti- $\mathbf{C}$ -linéaire. Pour $(s, t) \in B_\varepsilon$, définissons $D(s, t) \in \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n)$ par

$$D(s, t) \cdot Z = \begin{cases} \frac{1}{\|Y(s, t)\|^2} \cdot (Y(s, t) \cdot {}^t Y(s, t)) \cdot \bar{Z} & \text{si } Y(s, t) \neq 0, \\ 0 & \text{si } Y(s, t) = 0. \end{cases}$$

Remarquons que, quand $Y(s, t) \neq 0$, on a

$$D(s, t) \cdot Z = \frac{\langle Y, Z \rangle}{\|Y\|^2}(s, t) \cdot Y(s, t),$$

où $\langle, \rangle$ désigne le produit hermitien usuel sur $\mathbf{C}^n$ (voir le § 5.5). En particulier, $DY = Y$, ceci valant pour tous (s, t) . Ensuite, avec son $\bar{Z}$, cette application est clairement anti- $\mathbf{C}$ -linéaire. Pour en finir avec les propriétés de D , on voit que

$$\|D(s, t)\| \leq 1 \quad \text{pour tous } (s, t),$$

ce qui implique en particulier que

$$S^- \cdot D \in L^p(B_\varepsilon, \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^{2n})).$$

Posons ensuite

$$\tilde{S}(s, t) = S^+(s, t) + S^-(s, t) \cdot D(s, t),$$

définissant ainsi une application $\mathbf{C}$ -linéaire, $\tilde{S}$,

$$\tilde{S} \in L^p(B_\varepsilon, \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^{2n}))$$

qui satisfait à

$$\tilde{S} \cdot Y = S^+ Y + S^- DY = S^+ Y + S^- Y = SY,$$

de sorte que Y est aussi solution de l'équation dans laquelle on remplace S par $\tilde{S}$. On peut ainsi supposer que le S qui apparaît dans notre équation est $\mathbf{C}$ -linéaire. Le résultat recherché est une conséquence du lemme :

Lemme 8.6.10. *Il existe $\delta \in]0, \varepsilon]$ et $A \in W^{1,p}(B_\delta; \text{End}(\mathbf{R}^{2n}))$ tels que*

$$\frac{\partial A}{\partial s} + J_0 \frac{\partial A}{\partial t} + S \cdot A = 0$$

et $A(0, 0) = \text{Id}$.

Dans cet énoncé, le produit $S \cdot A$ est un élément de $L^p(B_\delta; \text{End}(\mathbf{R}^{2n}))$ (grâce au lemme 8.2.4). Admettons (provisoirement !) ce lemme et finissons la démonstration de 8.6.8. Choisissons un A comme dans le lemme et, s'il n'est pas $\mathbf{C}$ -linéaire, remplaçons-le par

$$A^+ = \frac{1}{2}(A - J_0 A J_0),$$

qui est solution de la même équation (parce que nous avons supposé que S est $\mathbf{C}$ -linéaire) et qui vérifie aussi $A^+(0, 0) = \text{Id}$. On peut donc supposer que A commute avec J_0 . Montrons qu'il satisfait aussi aux autres conditions annoncées dans 8.6.8. Puisque $A(0, 0) = \text{Id}$, si l'on choisit δ assez petit, $A(s, t)$ est inversible pour $(s, t) \in B_\delta$. Posons ensuite

$$\sigma = A^{-1} \cdot Y, \quad \text{de sorte que } Y = A \cdot \sigma.$$

Comme Y est solution de l'équation, on a

$$\frac{\partial(A\sigma)}{\partial s} + J_0 \frac{\partial(A\sigma)}{\partial t} + S \cdot (A\sigma),$$

soit

$$\frac{\partial A}{\partial s} \sigma + A \frac{\partial \sigma}{\partial s} + J_0 \frac{\partial A}{\partial t} \sigma + J_0 A \frac{\partial \sigma}{\partial t} + S \cdot A \sigma = 0,$$

ce qui implique que

$$A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} + J_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) = 0,$$

donc que σ est holomorphe (elle est continue parce que égale à $\sigma = A^{-1} \cdot Y$, et $\mathcal{C}^\infty$ en vertu de la régularité elliptique).

Démonstration du lemme 8.6.10. La matrice A recherchée est une sorte de matrice fondamentale de solutions de notre équation. Il suffit de considérer l'équation pour le « vecteur » $Y \in W^{1,p}(B_\delta; \mathbf{R}^{2n})$,

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S \cdot Y = 0,$$

et de montrer qu'elle a une solution telle que $Y(0, 0) = v_0$, et ceci pour tout $v_0 \in \mathbf{R}^{2n}$ fixé. En utilisant les vecteurs de la base canonique, on obtiendra les colonnes de la matrice A cherchée.

Pour ce faire, considérons

$$B_\delta \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\} = S^2.$$

Si Y est une application de S^2 dans $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$, $\bar{\partial}Y$ est une section du fibré vectoriel $(\Lambda^{0,1}T^*S^2)^n = \Lambda^{0,1}T^*S^2 \otimes \mathbf{C}^n$, et dire que $\bar{\partial}Y = 0$ signifie que Y est une sphère holomorphe dans $\mathbf{C}^n$.

Nous pouvons maintenant utiliser la propriété essentielle de $\bar{\partial}$ rappelée dans le théorème suivant (qui est une conséquence de l'inégalité de Calderón-Zygmund, voir le § 16.4).

Théorème 8.6.11. *Pour tout $p > 1$, l'opérateur*

$$\bar{\partial} : W^{1,p}(S^2, V) \longrightarrow L^p(\Lambda^{0,1}T^*S^2 \otimes V)$$

est un opérateur de Fredholm surjectif.

Le calcul qui constitue la démonstration du lemme 6.6.4 montre que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \left\| \frac{\partial Y}{\partial t} \right\|^2 ds dt = \int_{S^2} Y^* \omega = 0$$

(en appliquant la formule de Stokes). Ainsi le noyau de $\bar{\partial}$ ne contient que les constantes, sa dimension est donc $2n$, et, comme $\bar{\partial}$ est surjectif, son indice est aussi égal à $2n$. Considérons maintenant l'opérateur

$$\begin{aligned} D : W^{1,p}(S^2; \mathbf{C}^n) &\longrightarrow L^p((\Lambda^{0,1}T^*S^2)^n) \oplus \mathbf{C}^n \\ y &\longmapsto (\bar{\partial}Y, Y(0)). \end{aligned}$$

Il est somme de

$$(\bar{\partial}, 0) : W^{1,p}(S^2; \mathbf{C}^n) \longrightarrow L^p((\Lambda^{0,1}T^*S^2)^n) \oplus \mathbf{C}^n$$

qui est de Fredholm et d'indice 0, et de l'opérateur $Y \mapsto (Y, 0)$, qui est compact puisque $W^{1,p}$ s'injecte continûment dans L^∞ . Grâce au théorème 16.2.10, nous savons qu'il est de Fredholm d'indice 0 lui aussi. Mais son noyau est formé des constantes nulles, il est donc nul. Par suite, D est bijectif.

Soit maintenant D_δ la petite perturbation de D définie par

$$D_\delta(Y) = (\bar{\partial}Y + S_\delta \cdot Y d\bar{Z}, Y(0))$$

où $S_\delta : \mathbf{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n)$ est définie, elle, par

$$S_\delta(s, t) = \begin{cases} S(s, t) & \text{si } (s, t) \in B_\delta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Clairement,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|S_\delta\|_{L^p} = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|D_\delta - D\|^{\text{op}} = 0,$$

donc D_δ est elle aussi bijective lorsque δ est assez petit. Un tel δ étant fixé, choisissons un Y tel que $D_\delta Y = (0, v_0)$. Sa restriction à B_δ satisfait

à l'équation de Cauchy-Riemann perturbée et à la « condition initiale » $Y(0) = v_0$, ce qui démontre le lemme... $\square$

... et le principe de similitude. $\square$

On aurait pu utiliser la même méthode que celle du calcul de l'indice (que nous déroulerons au § 8.8) : c'est l'objet de l'exercice 45.

8.7. La propriété de Fredholm

Nous attaquons maintenant la démonstration du théorème 8.1.5. Appelons

$$S_{\pm}(t) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} S(s, t)$$

et $R_t^{\pm}$ la solution de

$$\dot{R} = J_0 S_{\pm} R \quad \text{telle que } R_0^{\pm} = \text{Id}.$$

Le but de ce paragraphe est de démontrer :

Proposition 8.7.1. *Si $\det(\text{Id} - R_1^{\pm}) \neq 0$, alors*

$$L = \bar{\partial} + S(s, t) : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

est un opérateur de Fredholm (à indice) (pour tout $p > 1$).

Nous nous inspirons ici de la démonstration de [61] (voir aussi [13]). L'ingrédient principal est le théorème de régularité elliptique :

Théorème (théorème 12.1.3). *Soit $p > 1$. Si $Y \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ est une solution faible de l'équation de Floer linéarisée $LY = 0$, alors $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ (et il est aussi de classe C^{∞}).*

...et une conséquence de l'inégalité de Calderón-Zygmund (le théorème 16.5.8) énoncée dans le lemme (dont on trouvera une démonstration au § 12.2) :

Lemme 8.7.2. *Soit $p > 1$. Si $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, il existe une constante positive C telle que*

$$\|Y\|_{W^{1,p}} \leq C(\|LY\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}).$$

Voici le plan de la démonstration : tout d'abord, nous considérons le cas où $S(s, t)$ ne dépend pas de s , cas dans lequel nous démontrons un résultat plus fort :

Proposition 8.7.3. *Si l'opérateur symétrique $S(s, t) = S(t)$ est indépendant de s et si $\det(\text{Id} - R_1^\pm) \neq 0$, alors*

$$D = \bar{\partial} + S(t) : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

est bijectif (pour tout $p > 1$).

Nous démontrons cette proposition d'abord dans le cas $p = 2$ au § 8.7.a, puis dans le cas général au § 8.7.b. L'inversibilité de l'opérateur « asymptotique » D nous permettra d'améliorer l'inégalité du lemme 8.7.2 en

$$\|Y\|_{W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})} \leq C(\|Y\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)} + \|Y\|_{L^p([-M, M] \times S^1)})$$

(pour un $M > 0$ assez grand).

La restriction $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1) \rightarrow L^p([-M, M] \times S^1)$ étant un opérateur compact (par le théorème de Rellich, ici le théorème 16.4.10), nous pourrions alors utiliser un résultat général dit « semi-Fredholm » (pour lequel on trouvera une démonstration au § 16.2.c).

Proposition 8.7.4. *Soient E , F et G trois espaces de Banach. Soient $L : E \rightarrow F$ un opérateur et $K : E \rightarrow G$ un opérateur compact. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq C(\|L(x)\|_F + \|K(x)\|_G).$$

Alors le noyau de L est de dimension finie et son image est fermée.

Il restera à montrer que le conoyau de L est de dimension finie. On le fera en l'identifiant au noyau de l'opérateur adjoint

$$L^* : W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^q(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

où q est défini par $1/p + 1/q = 1$. Cet opérateur, que nous avons déjà rencontré dans la démonstration du lemme 8.5.1, satisfait aussi aux hypothèses de la proposition 8.7.4, et son noyau est donc de dimension finie.

8.7.a. Démonstration de la proposition 8.7.3, première étape, le cas $p = 2$. On considère l'opérateur

$$A = J_0 \frac{\partial}{\partial t} + S : W^{1,2}(S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^2(S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

opérant sur les fonctions de t .

Lemme 8.7.5. *Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'opérateur A est inversible.*

Remarque 8.7.6. Remarquons d'abord que A est l'opérateur linéaire considéré dans la remarque 8.4.7, celui que l'on obtient en linéarisant l'équation différentielle $\dot{x} = X_t(x)$ (voir les §§ 14.4.c et en particulier 14.4.d).

Démonstration du lemme 8.7.5. C'est une application de la méthode de la variation des constantes. Inverser l'opérateur revient à résoudre, pour $Z \in L^2(S^1; \mathbf{R}^{2n})$, l'équation différentielle linéaire (avec second membre)

$$\dot{Y} = J_0SY - J_0Z, \quad \text{avec } Y \in W^{1,2}(S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Dans le cas où $Z = 0$, les solutions sont

$$Y(t) = R(t)Y_0, \quad t \in \mathbf{R}$$

où R est la solution fondamentale, matrice vérifiant

$$\dot{R} = J_0SR \quad \text{et} \quad R(0) = \text{Id}$$

(c'est la matrice dont nous avons supposé qu'elle n'avait pas la valeur propre 1 pour $t = 1$). Pour résoudre l'équation en général, on cherche une solution sous la forme

$$Y(t) = R(t)Y_0(t), \quad t \in [0, 1].$$

Un tel Y vérifie l'équation différentielle si et seulement si

$$\dot{Y}_0(t) = -R^{-1}(t)J_0Z(t).$$

On doit donc avoir

$$Y_0(t) = Y_0(0) - \int_0^t R^{-1}(\tau)J_0Z(\tau)d\tau$$

et enfin

$$Y(t) = R(t)\left(Y_0(0) - \int_0^t R^{-1}(\tau)J_0Z(\tau)d\tau\right).$$

On veut que Y soit prolongeable en une fonction périodique, c'est-à-dire que $Y(0) = Y(1)$, ou encore que

$$R(1)\left(-\int_0^1 R^{-1}(\tau)J_0Z(\tau)d\tau + Y_0(0)\right) = Y_0(0),$$

c'est-à-dire

$$(R(1) - \text{Id})Y_0(0) = R(1)\int_0^1 R^{-1}(\tau)J_0Z(\tau)d\tau.$$

Une équation qui se résout sans mal puisque l'opérateur $\text{Id} - R(1)$ a été supposé inversible, donnant une unique valeur de $Y_0(0)$. On a bien montré que A est bijectif. $\square$

Remarque 8.7.7. Dans cette démonstration, on a pu raisonner avec les valeurs en 0 et 1 des éléments de $W^{1,2}$ parce que

$$W^{1,2}([0, 1]; \mathbf{R}^{2n}) \subset \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbf{R}^{2n}).$$

Comme nous l'avons déjà signalé, l'inclusion analogue n'est pas vraie lorsque l'espace de départ est de dimension ≥ 2 . Voir les rappels d'analyse et en particulier la remarque 16.4.7.

Suite de la démonstration de la proposition 8.7.3 dans le cas $p = 2$. Nous cherchons, pour $Z \in L^2(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, un $Y \in W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tel que

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S(t)Y = Z.$$

Autrement dit, nous voulons résoudre l'« équation différentielle linéaire avec second membre »

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = -A \cdot Y(s) + Z(s)$$

dans $W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Malheureusement, en dimension infinie, on ne peut appliquer la méthode de variation des constantes comme celle que nous venons d'utiliser pour montrer que A est inversible. Ainsi, de l'équation homogène

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial s} = -AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

nous savons qu'elle admet des solutions définies seulement sur $[0, +\infty]$, et ceci uniquement quand l'opérateur A est *monotone*, c'est-à-dire vérifie

$$\forall x, \quad \langle Ax, x \rangle \geq 0$$

(pour le produit L^2 , voir [14, Chap. VII] et le théorème 8.7.9 ci-dessous). Comme notre A n'est pas monotone, avant de pouvoir appliquer ce résultat, nous devons donc décomposer $L^2(S^1; \mathbf{R}^{2n})$ en une somme directe d'espaces sur lesquels cette propriété de monotonie est réalisée.

Pour simplifier, notons $\mathcal{H}$ cet espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

L'application A n'est pas définie sur $\mathcal{H}$, mais sur son sous-espace $W^{1,2}(S^1)$, elle est ce que l'on appelle un opérateur non borné, tout simplement parce qu'elle est continue pour la norme de $W^{1,2}$ mais peut-être pas pour la norme L^2 sur ce sous-espace. Notons aussi que le domaine de définition de A est dense dans $\mathcal{H} = L^2(S^1)$ (puisque $\mathcal{C}^\infty(S^1) \subset W^{1,2}(S^1)$ l'est) et que A est un opérateur fermé (c'est-à-dire que son graphe

$$\{(Y, AY) \mid Y \in W^{1,2}(S^1)\}$$

est fermé dans $L^2(S^1) \times L^2(S^1)$, un exercice facile pour nos lecteurs).

Le calcul fait pour L dans la démonstration du lemme 8.5.2 donne le fait que A est auto-adjoint, précisément que, pour le produit L^2 , on a

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle \quad \text{pour } X, Y \in W^{1,2}(S^1).$$

Considérons maintenant l'opérateur $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ défini par la composition

$$L^2(S^1) \xrightarrow{A^{-1}} W^{1,2}(S^1) \xhookrightarrow{i} L^2(S^1).$$

C'est un opérateur continu (car A^{-1} l'est, grâce au théorème de Banach [14, Th. 2.5]) et même compact, puisque l'inclusion est compacte. De plus, il est auto-adjoint, ce qui se déduit facilement de la propriété similaire de A . On peut donc lui appliquer le résultat (qui est [14, Th. VI.11]) :

Théorème 8.7.8. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et soit $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors $\mathcal{H}$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T .*

Rappelons que l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur A ,

$$\{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda \text{Id n'est pas injectif}\},$$

est contenu dans le spectre de A qui est, lui, formé des λ pour lesquels $A - \lambda \text{Id}$ n'est pas bijectif. Pour un opérateur compact, l'ensemble des valeurs propres est soit fini soit formé d'une suite qui tend vers 0 (voir [14, Th. VI.8]). Remarquons que, dans le cas qui nous occupe, 0 ne fait pas partie des valeurs propres puisque A^{-1} est injectif. Remarquons aussi que les vecteurs propres de T sont dans $W^{1,2}(S^1; \mathbf{R}^{2n})$ puisque $Tv = \lambda v$ implique que

$$\lambda v = A^{-1}v \in W^{1,2}(S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

On peut décomposer

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$$

(en somme de sous-espaces propres de T , positif et négatif respectivement) et considérer les deux projections orthogonales $p^\pm : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^\pm$. On appelle $A^\pm$ la restriction de A à $\mathcal{H}^\pm$. Chacun d'eux est encore un opérateur non borné. Si $Y \in W^{1,2}(S^1)$ est dans l'espace propre correspondant à la valeur propre λ de T , on a

$$AY = \frac{1}{\lambda}Y.$$

Ainsi, les opérateurs A^+ et $-A^-$ sont bien des opérateurs monotones (chacun d'eux vérifie $\langle Bx, x \rangle \geq 0$)

$$A^\pm : \mathcal{H}^\pm \longrightarrow \mathcal{H}^\pm.$$

Ces opérateurs vérifient l'étonnant résultat d'existence de solutions (théorie de Hille-Yoshida) :

Théorème 8.7.9. *Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur fermé monotone autoadjoint défini sur un ouvert dense $D(A)$. Alors, pour tout Y_0 dans H ,*

il existe une application $Y : [0, +\infty[\rightarrow H$, continue, dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $Y(]0, +\infty[) \subset D(A)$ et qui vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial s} = -AY \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$$

De plus, Y , avec ces propriétés, est unique et l'on a :

$$\|Y(s)\| \leq \|Y_0\| \quad \text{et} \quad \forall s > 0, \quad \left\| \frac{\partial Y}{\partial s}(s) \right\| = \|AY(s)\| \leq \frac{1}{s} \|Y_0\|.$$

Remarques 8.7.10. Si nous avons qualifié ce résultat d'étonnant, c'est pour les raisons suivantes :

(1) Ce n'est pas un résultat d'existence locale de solution d'équation différentielle : rien n'est affirmé *au voisinage* de 0.

(2) La condition initiale n'est pas supposée dans l'espace de définition de A (il est vrai que celui-ci est dense dans H en vertu de la remarque précédente).

(3) C'est quand même un résultat global, comme dans le cas d'une équation différentielle ordinaire linéaire, au sens où il donne des solutions sur tout $[0, +\infty[$.

(4) Dans le même ordre d'idées, dès que $s > 0$ est fixé, l'application $Y_0 \mapsto Y(s)$ est linéaire (par unicité de la solution), définissant une application linéaire continue de H dans $D(A)$. Appelons-la $\Gamma(s)$. On a, par l'unicité encore,

$$\Gamma(s_1 + s_2) = \Gamma(s_1) \cdot \Gamma(s_2)$$

et, puisque $Y(0) = Y_0$, $\Gamma(0) = \text{Id}$. On dit que Γ est un semi-flot (ou un semi-groupe)... et on utilise la notation $\Gamma(s) = e^{-As}$.

Nos opérateurs A^+ et $-A^-$ engendrent donc des « semi-groupes » d'opérateurs sur $\mathcal{H}^+$ et $\mathcal{H}^-$, solutions des équations différentielles

$$\frac{dY}{ds} = -A^+Y, \quad \frac{dY}{ds} = A^-Y,$$

bien définies pour $s \geq 0$ et que nous notons

$$s \mapsto e^{-A^+s}, \quad s \mapsto e^{A^-s}.$$

On définit ensuite un « noyau »

$$K(s) = \begin{cases} e^{-A^+s}p^+ & \text{pour } s \geq 0 \\ -e^{A^-(-s)}p^- & \text{pour } s < 0 \end{cases}$$

où $p^\pm : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^\pm$ désignent les projections orthogonales.

C'est une application $\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs continus sur $\mathcal{H}$). Notons qu'elle est continue pour $s \neq 0$, mais pas en 0. On a aussi, pour $s \geq 0$,

$$\|K(s) \cdot Y\|_{\mathcal{H}} = \|e^{-A^+ s} p^+ Y\|_{\mathcal{H}} \leq e^{-\mu s} \|Y\|_{\mathcal{H}},$$

où $\mu = \lambda^{-1} > 0$ pour $\lambda > 0$ la plus grande valeur propre positive de T . L'inégalité analogue pour $s < 0$ donne le fait que

$$\|K(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq e^{-\delta|s|}$$

pour une constante $\delta > 0$.

On peut ainsi définir

$$Q : L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H}) \longrightarrow W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

par

$$(Q \cdot Z)(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(-\sigma) Z(s + \sigma, t) d\sigma.$$

L'intégrale est convergente en $L^2(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. En effet, la convergence absolue vient de

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} \|K(-\sigma) Z(s + \sigma, t)\|_{L^2(\mathbf{R} \times S^1)} d\sigma \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \|K(-\sigma) Z(s + \sigma)\|_{L^2(S^1)}^2 ds \right)^{1/2} d\sigma \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-2\delta|\sigma|} \|Z(s + \sigma)\|_{L^2(S^1)}^2 ds \right)^{1/2} d\sigma \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2\delta|\sigma|} \|Z\|_{L^2(\mathbf{R} \times S^1)} d\sigma < +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, $Q \cdot Z$ est dans $L^2(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Pour montrer qu'il est dans $W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, il suffit d'établir, pour $Y = Q \cdot Z$, l'égalité

$$Z = \frac{dY}{ds} + A \cdot Y.$$

Pour ceci, remarquons, en omettant la variable t dans l'écriture, que

$$\begin{aligned} (Q \cdot Z)(s) &= \int_{\mathbf{R}} K(s - \sigma) Z(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^s e^{-A^+(s-\sigma)} Z^+(\sigma) d\sigma - \int_s^{+\infty} e^{A^-(\sigma-s)} d\sigma \end{aligned}$$

(où $Z^\pm$ désignent les projections sur $\mathcal{H}^\pm$). Écrivons

$$Y = Q \cdot Z = Y^+ + Y^-,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 \frac{dY^+}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^s e^{-A^+(s-\sigma)} Z^+(\sigma) d\sigma \\
 &= e^{-A^+ \cdot 0} + \int_{-\infty}^s \frac{d}{ds} e^{-A^+(s-\sigma)} Z^+(\sigma) d\sigma \\
 &= Z^+(s) + \int_{-\infty}^s -A^+ e^{-A^+(s-\sigma)} Z^+(\sigma) d\sigma \\
 &= Z^+(s) - A^+ Y^+(s).
 \end{aligned}$$

Le calcul analogue pour Y^- donne

$$\frac{dY^\pm}{ds} + A^\pm Y^\pm = Z^\pm,$$

de sorte que

$$Z = \frac{dY}{ds} + AY.$$

Cette relation montre que $D \circ Q = \text{Id}$. Montrons aussi que $Q \circ D = \text{Id}$. Soit $Y \in W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, que l'on décompose en $Y = Y^+ + Y^-$, et ainsi

$$AY = A^+ Y^+ + A^- Y^-.$$

Remarquons que, pour $B = A^\pm$, les deux expressions

$$B \cdot e^{Bs} Y_0 \quad \text{et} \quad e^{Bs} \cdot B Y_0$$

sont solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial s} = BY \\ Y(0) = B \cdot Y_0. \end{cases}$$

Elles sont donc égales (grâce à la propriété d'unicité contenue dans le théorème 8.7.9). Nous utilisons cette propriété de commutation dans le calcul ci-dessous.

Évaluons $Q \cdot (AY)$. On a

$$Q \cdot (AY) = \int_{-\infty}^s e^{-A^+(s-\sigma)} A^+ Y^+(\sigma) d\sigma - \int_s^{+\infty} e^{A^-(\sigma-s)} A^- Y^-(\sigma) d\sigma.$$

Le premier terme de la somme vaut

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^s A^+ e^{-A^+(s-\sigma)} Y^+(\sigma) d\sigma &= \int_{-\infty}^s -\frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-A^+(s-\sigma)} Y^+(\sigma) \right) d\sigma \\
 &= -\frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^s e^{-A^+(s-\sigma)} Y^+(\sigma) d\sigma + Y^+(s) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^0 e^{-A^+(-\sigma)} Y^+(s+\sigma) d\sigma + Y^+(s) \\
 &= -\int_{-\infty}^0 e^{-A^+(-\sigma)} \frac{\partial Y^+}{\partial s}(s+\sigma) d\sigma + Y^+(s).
 \end{aligned}$$

De manière analogue, le deuxième terme vaut

$$-\int_s^{+\infty} A^- e^{A^-(\sigma-s)} Y^-(\sigma) d\sigma = \int_0^{+\infty} e^{A^-(-\sigma)} \frac{\partial Y^-}{\partial s}(s+\sigma) d\sigma + Y^-(s).$$

En ajoutant les deux, on obtient

$$Q(AY) = -Q\left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right) + Y,$$

autrement dit, $Q \circ D(Y) = Y$, de sorte que Q est bien un inverse pour D . Ceci termine la démonstration de la proposition 8.7.3 pour $p = 2$.

8.7.b. Démonstration de la proposition 8.7.3 dans le cas général où $p > 1$. Nous utilisons une version renforcée de l'inégalité de Calderón-Zygmund (notre énoncé 8.7.2) pour l'opérateur $D = \bar{\partial} + S(t)$:

Lemme 8.7.II. *Soit $p > 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{R}$ et pour tout $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on ait*

$$\|Y\|_{W^{1,p}([k,k+1] \times S^1)} \leq C \left(\|DY\|_{L^p([k-\frac{1}{2}, k+\frac{3}{2}] \times S^1)} + \|Y\|_{L^p([k-\frac{1}{2}, k+\frac{3}{2}] \times S^1)} \right).$$

Remarquons que, en ajoutant les inégalités données par ce lemme pour $k \in \mathbf{Z}$, on obtient précisément 8.7.2 : cet énoncé est, en effet, plus fort.

Démonstration. Fixons $k = 0$. L'inégalité est une conséquence immédiate du théorème 12.1.2. Appliquons ensuite le résultat à

$$Z(s, t) = Y(s - k, t).$$

L'opérateur D est invariant sous les translations en s , donc

$$DZ(s, t) = (DY)(s - k, t).$$

On obtient donc bien le résultat, pour tout k (et avec la même constante $C > 0$). $\square$

Supposons maintenant et dans ce qui suit que $p > 2$. Nous démontrons un nouveau lemme, qui est conséquence du précédent.

Lemme 8.7.12. Soit $p > 2$. Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{R}$ et pour tout $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on ait

$$\|Y\|_{W^{1,p}([k,k+1] \times S^1)} \leq C_1 \left(\|DY\|_{L^p([k-1,k+2] \times S^1)} + \|Y\|_{L^2([k-1,k+2] \times S^1)} \right).$$

Démonstration. Grâce à l'invariance de D , il suffit comme ci-dessus de démontrer le résultat pour $k = 0$. Comme maintenant $p > 2$, nous avons, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$L^p([-1, 2] \times S^1) \subset L^2([-1, 2] \times S^1),$$

avec, pour q défini par $2/p + 1/q = 1$,

$$\|Y\|_{L^2} \leq 3^{1/2q} \|Y\|_{L^p}.$$

De même

$$W^{1,p}([-1, 2] \times S^1) \subset W^{1,2}([-1, 2] \times S^1), \quad \text{avec } \|Y\|_{W^{1,2}} \leq 3^{1/2q} \|Y\|_{W^{1,p}}.$$

La même chose vaut aussi pour l'intervalle $[-1/2, 3/2]$, en remplaçant $3^{1/2q}$ par $2^{1/2q}$. Enfin, le théorème de Rellich 16.4.10 donne

$$W^{1,2}([-1/2, 3/2] \times S^1) \subset L^p([-1/2, 3/2] \times S^1), \quad \text{avec } \|Y\|_{L^p} \leq C \|Y\|_{W^{1,2}}.$$

Le lemme précédent donne alors (nous omettons le facteur S^1 pour alléger les notations) :

$$\begin{aligned} \|Y\|_{W^{1,p}([0,1])} &\leq C_1 \left(\|DY\|_{L^p([-1/2, 3/2])} + \|Y\|_{L^p([-1/2, 3/2])} \right) \\ &\leq C_2 \left(\|DY\|_{L^p([-1/2, 3/2])} + \|Y\|_{W^{1,2}([-1/2, 3/2])} \right) \\ &\leq C_3 \left(\|DY\|_{L^p([-1/2, 3/2])} + \|DY\|_{L^2([-1, 2])} + \|Y\|_{L^2([-1, 2])} \right) \\ &\text{d'après le lemme précédent avec } p = 2, k = -1/2, \text{ puis } k = 1/2 \\ &\leq C_4 \left(\|DY\|_{L^p([-1, 2])} + \|Y\|_{L^2([-1, 2])} \right). \end{aligned}$$

Ce qui finit la démonstration (de ce lemme)... □

... et nous amène à un autre lemme :

Lemme 8.7.13. Soit $p > 2$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, si $Y \in W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1)$ et $DY \in L^p(\mathbf{R} \times S^1)$, alors

$$Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1) \quad \text{et} \quad \|Y\|_{W^{1,p}} \leq C \|DY\|_{L^p}.$$

Démonstration. Commençons par montrer que $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)$. Grâce au lemme 8.7.12, il suffit de démontrer que $Y \in W^{1,p}(K)$ pour tout compact K , ce qui est une conséquence du théorème 12.1.2.

Dans la démonstration qui suit, nous aurons besoin de considérer Y comme une application

$$Y : \mathbf{R} \longrightarrow L^2(S^1; \mathbf{R}^{2n}) = \mathcal{H}$$

et d'utiliser la norme $L^p(\mathbf{R}; \mathcal{H})$ correspondante

$$\|Y\|_{L^p(\mathbf{R}; \mathcal{H})} = \left(\int_{\mathbf{R}} \|Y(s, \cdot)\|_{L^2}^p ds \right)^{1/p}.$$

En utilisant le lemme précédent et l'inégalité $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ (un exercice pour nos lecteurs), on trouve

$$\begin{aligned} \|Y\|_{W^{1,p}([k, k+1])} &\leq C_1 \left(\|DY\|_{L^p([k-1, k+2])} + \|Y\|_{L^2([k-1, k+2])} \right)^p \\ &\leq 2^p C_1 \left(\|DY\|_{L^p([k-1, k+2])}^p + \|Y\|_{L^2([k-1, k+2])}^p \right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder (et le nombre q tel que $2/p + 1/q = 1$), on obtient

$$\begin{aligned} \|Y\|_{L^2([k-1, k+2])} &= \left(\int_{k-1}^{k+2} \int_{S^1} \|Y(s, t)\|^2 dt ds \right)^{p/2} \\ &= \left(\int_{k-1}^{k+2} \|Y(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds \right)^{p/2} \\ &\leq \left(3^{1/q} \left(\int_{k-1}^{k+2} \|Y(s, \cdot)\|_{L^2}^p ds \right)^{2/p} \right)^{p/2} \\ &= 3^{p/2q} \int_{k-1}^{k+2} \|Y(s, \cdot)\|_{L^2}^p ds. \end{aligned}$$

Ainsi donc

$$\|Y\|_{W^{1,p}([k, k+1])} \leq C_2 \left(\|DY\|_{L^p([k-1, k+2])}^p + \int_{k-1}^{k+2} \|Y(s, \cdot)\|_{L^2}^p ds \right)$$

et, en sommant sur les $k \in \mathbf{Z}$,

$$\|Y\|_{W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)} \leq C_3 \left(\|DY\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)}^p + \|Y\|_{L^p(\mathbf{R}, \mathcal{H})}^p \right).$$

Nous voulons maintenant majorer le dernier terme de cette somme. Nous utilisons l'inverse

$$Q : L^2(\mathbf{R} \times S^1) \longrightarrow W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1)$$

de D que nous avons défini au § 8.7.a. Comme nous avons supposé que $Y \in W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1)$, nous avons

$$\|Y\|_{L^p(\mathbf{R}; \mathcal{H})} = \|QDY\|_{L^p(\mathbf{R}; \mathcal{H})}.$$

Toujours dans un souci d'allégement, notons $Z = DY$ et simplement $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathcal{H}$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}\|QZ\|_{L^p(\mathbf{R};\mathcal{H})} &= \left(\int_{\mathbf{R}} \|(QZ)(s)\|^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}} \left\| \int_{\mathbf{R}} K(s-\sigma) \cdot Z(\sigma) d\sigma \right\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \|K(s-\sigma) \cdot Z(\sigma)\| d\sigma \right)^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-\delta|s-\sigma|} \|Z(\sigma)\| d\sigma \right)^p ds \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Nous avons ici une convolution de $f(s) = e^{-\delta|s|}$ et $g(s) = \|Z(s)\|$. Appliquons lui l'inégalité de Young⁽⁸⁾, pour trouver

$$\|QZ\|_{L^p(\mathbf{R};\mathcal{H})} \leq C \|Z\|_{L^p(\mathbf{R};\mathcal{H})}.$$

Mais, grâce à l'inégalité de Hölder pour $L^p(S^1)$ et $L^2(S^1)$, on a

$$\begin{aligned}\|Z\|_{L^p(\mathbf{R};\mathcal{H})} &= \left(\int_{\mathbf{R}} \|Y(s, \cdot)\|_{L^2}^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}} \|Y(s, \cdot)\|_{L^p}^p ds \right)^{1/p} \\ &= \|Z\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)}.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned}\|Y\|_{L^p(\mathbf{R};\mathcal{H})} &= \|QZ\|_{L^p(\mathbf{R};\mathcal{H})} \leq C \|Z\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)} \\ &\leq C \|DY\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)}\end{aligned}$$

et enfin que

$$\|Y\|_{W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)} \leq C_4 \|DY\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)}$$

et le lemme est démontré. $\square$

De quoi nous déduisons :

Proposition 8.7.14. *Pour $p > 2$, l'opérateur D est bijectif.*

Démonstration. L'inégalité

$$\|Y\|_{W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)} \leq C \|DY\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)}$$

⁽⁸⁾Voir au besoin [14, Th. IV.30] pour cette inégalité :

$$\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}.$$

du lemme précédent vaut pour tout $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1) \cap W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1)$ et, en particulier, pour tout $Y \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R} \times S^1)$. Comme les fonctions $\mathcal{C}_0^\infty$ à support compact sont denses⁽⁹⁾ dans $W^{1,p}$, l'inégalité reste vraie pour $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)$ (tout entier). Donc D est injectif. De plus, puisque $W^{1,p}$ est complet, son image est fermée.

Pour démontrer que D est aussi surjectif, il suffit ainsi d'établir que son image est dense dans $L^p(\mathbf{R} \times S^1)$. Soit donc $Z \in L^p(\mathbf{R} \times S^1) \cap L^2(\mathbf{R} \times S^1)$. Notons que cet espace, parce qu'il contient les fonctions caractéristiques, est dense dans $L^p(\mathbf{R} \times S^1)$. La surjectivité de D dans le cas où $p = 2$, établie précédemment, fournit un $Y \in W^{1,2}(\mathbf{R} \times S^1)$ tel que $DY = Z$. Grâce à ce qui précède, cet Y est dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)$, ce qui démontre notre proposition. $\square$

Pour terminer de démontrer la proposition 8.7.3, il reste à démontrer :

Proposition 8.7.15. *L'opérateur*

$$D : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1)$$

est bijectif pour $1 < p < 2$.

Démonstration. Montrons, comme dans la proposition précédente, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Y\|_{W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)} \leq C \|DY\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)}.$$

Pour la même raison de densité que ci-dessus, établir cette égalité pour $Y \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R} \times S^1)$ suffit. Nous utilisons l'opérateur adjoint :

$$\begin{aligned} D^* : W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1) &\longrightarrow L^q(\mathbf{R} \times S^1) \\ x &\longmapsto -\frac{\partial X}{\partial s} + J_0 \frac{\partial X}{\partial t} + S \cdot X \end{aligned}$$

où, comme il se doit (mais pas comme ci-dessus), q est défini par $1/p + 1/q = 1$, de sorte que $q > 2$ (et où, rappelons-le, S est symétrique). Comme nous l'avons vu (dans la démonstration du lemme 8.5.2), nous avons, pour tous $X \in W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1)$ et $Y \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R} \times S^1)$,

$$\langle D^*X, Y \rangle = \langle X, DY \rangle.$$

Les résultats que nous avons démontrés pour D et $p > 2$ s'appliquent à D^* , qui a la même forme que D , et à q qui est > 2 . En particulier, D^* est bijectif. Écrivons maintenant :

$$\|Y\|_{W^{1,p}} = \|Y\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial Y}{\partial t} \right\|_{L^p}$$

⁽⁹⁾Voir au besoin [14, Cor. IX.8].

et majorons chacun des trois termes de droite. Par le théorème de Riesz⁽¹⁰⁾, nous avons

$$\|Y\|_{L^p} = \sup_{\substack{Z \in L^q \\ \|Z\|_{L^q}=1}} |\langle Z, Y \rangle|.$$

Comme D^* est bijectif, cela donne

$$\begin{aligned} \|Y\|_{L^p} &= \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^*X\|_{L^q}=1}} |\langle D^*X, Y \rangle| = \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^*X\|_{L^q}=1}} |\langle X, DY \rangle| \\ &\leq \|DY\|_{L^p} \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^*X\|_{L^q}=1}} \|X\|_{L^q}. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration de la proposition précédente, on a

$$\|X\|_{L^q} \leq \|X\|_{W^{1,q}} \leq C \|D^*X\|_{L^q},$$

d'où l'on déduit

$$\|Y\|_{L^p} \leq C \|DY\|_{L^p}.$$

On procède à l'identique pour la dérivée par rapport à s , en utilisant le fait que

$$D^* \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} D^*$$

(ici l'application de cet opérateur à un élément de $W^{1,q}$ est à prendre au sens des distributions). On a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|_{L^p} &= \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^*X\|_{L^q}=1}} \left| \left\langle D^*X, \frac{\partial}{\partial s} Y \right\rangle \right| = \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^*X\|_{L^q}=1}} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial s} D^*X, Y \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^*X\|_{L^q}=1}} \left| \left\langle D^* \frac{\partial}{\partial s} X, Y \right\rangle \right| = \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^*X\|_{L^q}=1}} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial s} X, DY \right\rangle \right| \\ &\leq \|DY\|_{L^p} \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^*X\|_{L^q}=1}} \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\|_{L^q} \leq C \|DY\|_{L^p} \end{aligned}$$

puisque

$$\|X\|_{W^{1,q}} \leq C \|D^*X\|_{L^q}$$

comme plus haut. Pour la dérivée par rapport à t , remarquons que, pour $X \in W^{1,q}$, on a (les dérivées sont toujours prises au sens des distributions)

$$\frac{\partial}{\partial t} D^*X = D^* \frac{\partial}{\partial t} X + \frac{\partial}{\partial t} S \cdot X.$$

⁽¹⁰⁾ Au besoin, [14, Th. IV.11].

On en déduit

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial Y}{\partial t} \right\|_{L^p} &= \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^* X\|_{L^q} = 1}} \left| \left\langle D^* X, \frac{\partial}{\partial t} Y \right\rangle \right| = \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^* X\|_{L^q} = 1}} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial t} D^* X, Y \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^* X\|_{L^q} = 1}} \left| \left\langle D^* \frac{\partial}{\partial t} X + \frac{\partial S}{\partial t} X, Y \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^* X\|_{L^q} = 1}} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial t} X, DY \right\rangle + \left\langle \frac{\partial S}{\partial t} X, Y \right\rangle \right| \\
&\leq \|DY\|_{L^p} \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^* X\|_{L^q} = 1}} \|X\|_{W^{1,q}} + C \|Y\|_{L^p} \sup_{\substack{X \in W^{1,q} \\ \|D^* X\|_{L^q} = 1}} \|X\|_{L^q}
\end{aligned}$$

avec $C = \sup_{t \in S^1} \|\partial S / \partial t\|$. Comme précédemment, le premier terme de la somme est majoré par $C \|DY\|_{L^p}$. Et puis, comme nous avons montré que $\|Y\|_{L^p} \leq \|DY\|_{L^p}$, le deuxième terme admet une majoration de la même forme. Finalement, nous avons établi une inégalité

$$\text{pour tout } Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1), \quad \|Y\|_{W^{1,p}} \leq C \|DY\|_{L^p}.$$

Il s'ensuit que l'opérateur D est donc, dans ce cas aussi, injectif et à image fermée. Sinon, le théorème de Riesz donnerait en effet un $Z \in L^q(\mathbf{R} \times S^1)$, non nul, et tel que

$$\text{pour tout } Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1), \quad \langle Z, DY \rangle = 0.$$

Comme dans la démonstration du lemme 8.5.2, on en déduit que $D^* Z = 0$ (toujours au sens des distributions), puis, avec la régularité elliptique (c'est-à-dire le théorème 12.1.3), que $Z \in W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1)$. Donc $Z \in \text{Ker } D^*$, doit être nul, contrairement à notre supposition. Ceci termine la démonstration de la proposition. $\square$

8.7.c. Démonstration de la proposition 8.7.1. Comme D est bijectif, son inverse est (d'après le théorème de l'application ouverte de Banach) une application continue. Donc il existe une constante $B > 0$ telle que

$$\|Y\|_{W^{1,p}} \leq B \|DY\|_{L^p}.$$

Par conséquent, comme $S(s, t) \rightarrow S_{\pm}(t)$ pour $s \rightarrow \infty$, il existe des constantes réelles positives M et C telles que, pour tout $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1, W)$,

$$\text{si } Y(s, t) = 0 \text{ pour } |s| \leq M - 1, \text{ alors } \|Y\|_{W^{1,p}} \leq C \|LY\|_{L^p}.$$

En effet,

$$\|LY - DY\|_{L^p} \leq \sup_{\substack{|s| \geq M \\ t \in S^1}} |S(s, t) - S^{\pm}(t)| \|Y\|_{L^p} \leq \varepsilon \|Y\|_{L^p} \leq \varepsilon \|Y\|_{W^{1,p}}.$$

On étudie indépendamment Y pour $|s|$ grand, puis petit. Pour ceci, on choisit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive, $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ nulle pour $|s| \geq M$ et égale à 1 pour $|s| \leq M - 1$ et on écrit

$$Y(s, t) = \beta(s)Y(s, t) + (1 - \beta(s))Y(s, t)$$

et bien sûr

$$\|Y\|_{W^{1,p}} \leq \|\beta Y\|_{W^{1,p}} + \|(1 - \beta)Y\|_{W^{1,p}}.$$

L'inégalité du lemme 8.7.2 donne

$$\|Y\|_{W^{1,p}} \leq C_1 (\|L(\beta Y)\|_{L^p} + \|\beta Y\|_{L^p} + \|L((1 - \beta)Y)\|_{L^p} + \|(1 - \beta)Y\|_{L^p}).$$

Si M est choisi assez grand,

$$C_1 \|(1 - \beta)Y\|_{L^p} \leq \frac{1}{2} \|Y\|_{L^p} \leq \frac{1}{2} \|Y\|_{W^{1,p}},$$

donc

$$\|Y\|_{W^{1,p}} \leq 2C_1 (\|L(\beta Y)\|_{L^p} + \|\beta Y\|_{L^p} + \|L((1 - \beta)Y)\|_{L^p}).$$

Comme β ne dépend que de s , on a

$$L(\beta Y) = \left(\frac{\partial}{\partial s} + J \frac{\partial}{\partial t} + S \right) (\beta Y) = \beta L(Y) + \beta'(s)Y.$$

La dérivée $\beta'(s)$ est bornée,

$$|\beta'(s)| \leq K \text{ pour } s \in [-M, M] \text{ et } \beta'(s) = 0 \text{ pour } |s| \geq M.$$

On a donc

$$\|L(\beta Y)\|_{L^p} \leq \|L(Y)\|_{L^p} + K \|Y\|_{L^p[-M, M]}$$

(et de même pour $L((1 - \beta)Y)$), de sorte que l'inégalité ci-dessus donne

$$\|Y\|_{W^{1,p}} \leq C_2 (\|Y\|_{L^p[-M, M]} + \|L(Y)\|_{L^p}).$$

La restriction au compact $[-M, M]$ définit, grâce au théorème de Rellich (ici le théorème 16.4.10), un opérateur *compact*

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p([-M, M] \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

On utilise alors la proposition 8.7.4 pour déduire que L a un noyau de dimension finie et une image fermée.

On utilise toujours le réel q tel que $1/p + 1/q = 1$. Considérons le sous-espace F de $L^q(\mathbf{R} \times S^1)$ formé des Z qui vérifient $\langle \text{Im } L, Z \rangle = 0$ et l'adjoint

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial s} + J_0 \frac{\partial}{\partial t} + {}^t S : W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1) \longrightarrow L^q(\mathbf{R} \times S^1).$$

À nouveau, comme dans la démonstration du lemme 8.5.2, $L^*Z = 0$ au sens des distributions, donc $Z \in W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1)$ par la régularité elliptique (théorème 12.1.3). Par suite, $F \subset \text{Ker } L^*$. Par ailleurs, L^* ayant la même forme que L , il satisfait lui aussi aux hypothèses de la proposition 8.7.4, ce

qui lui vaut de satisfaire aussi à sa conclusion, à savoir que son noyau est de dimension finie.

Montrons que $\text{Coker } L$ est de dimension finie. Le théorème de Hahn-Banach permet de trouver des formes linéaires $\varphi : L^p \rightarrow \mathbf{R}$ qui s'annulent sur $\text{Im } L$, et nous voulons démontrer que l'espace de ces formes est de dimension finie. Le théorème de représentation de Riesz permet d'écrire une forme linéaire

$$\varphi = \varphi_U \quad \text{pour un } U \in L^q, \text{ avec } \varphi_U(V) = \langle U, V \rangle.$$

Comme ces formes sont nulles sur $\text{Im } L$, les U qui les représentent sont dans F . Mais celui-ci est de dimension finie. Donc $\text{Coker } L$ est de dimension finie. Et la proposition est démontrée. $\square$

8.8. Le calcul de l'indice de L

Pour calculer l'indice de L ,

$$L(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} + S(s, t)Y,$$

avec $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} S(s, t) = S_{\pm}(t)$ uniformément en t , nous allons :

(1) Remplacer L par L_0 donné par la même formule... sauf que $S(s, t)$ y est remplacé par une matrice $\tilde{S}(s, t)$ qui vaut *exactement* $S_{-}(t)$ pour $s \leq -\sigma_0$ et $S_{+}(t)$ pour $s \geq \sigma_0$. L'invariance de l'indice par petites perturbations (pour σ_0 assez grand) donnera le fait que l'indice de L_0 est le même que celui de L . C'est le lemme 8.8.4 ci-dessous.

(2) Remplacer L_0 par L_1 , toujours donné par la même formule, mais dans laquelle $\tilde{S}(s, t)$ sera remplacé par une matrice *diagonale* $S(s)$ (ne dépendant pas de t) et qui sera constante pour $s \leq -\sigma_0$ et $s \geq \sigma_0$. Cette fois, L_1 aura le même indice que L_0 grâce à la propriété d'invariance de l'indice par homotopie (et à la construction des matrices diagonales limites). Ce sont la proposition 8.8.2 et le lemme 8.8.3.

Le tout est schématisé sur la figure 7, qui représente les diverses applications $S(s, t)$ apparaissant dans les opérateurs L , L_0 et L_1 , dans l'espace des matrices : le « cylindre » le plus extérieur est $S(s, t)$ (l'original), le cylindre en gras est $\tilde{S}(s, t)$ (on a approché S à l'infini par les authentiques cylindres), le trait pointillé, constitué de matrices diagonales, représente la matrice $S(s)$ (celle de L_1).

8.8.a. L'indice de Fredholm. Considérons donc l'opérateur

$$L : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

$$Y \longmapsto \frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} + S(s, t)Y.$$

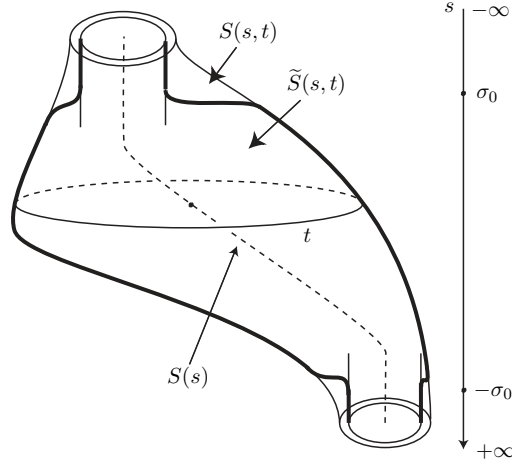


FIGURE 7

Rappelons que $S : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow M(2n; \mathbf{R})$ vérifie

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} S(s, t) = S_{\pm}(t) \text{ uniformément en } t$$

pour des matrices $S_{\pm}(t)$ symétriques (pour tout $t \in S^1$). Considérons les chemins symplectiques (d'après le lemme 7.2.c)

$$R_{\pm} : [0, 1] \longrightarrow \text{Sp}(2n; \mathbf{R})$$

associés à ces deux matrices $S_{\pm}$. La remarque 8.4.7 montre que ces chemins sont exactement ceux qui définissent les indices (de Conley-Zehnder) $\mu(x)$ et $\mu(y)$. Nous avons démontré (c'est le théorème 8.7.1) que, si $R_{\pm}$ est dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des chemins $R(t)$ tels que $R(0) = \text{Id}$ et $\det(R(1) - \text{Id}) \neq 0$, alors L est un opérateur de Fredholm. Nous calculons maintenant son indice :

Théorème 8.8.1. *L'indice de l'opérateur de Fredholm L est*

$$\mu(R_{-}(t)) - \mu(R_{+}(t)) = \mu(x) - \mu(y).$$

Appelons $k^{\pm}$ l'indice de $R_{\pm}(t)$. Utilisons les notations du § 7.2.d et en particulier les matrices $S_{k^{\pm}}$ données par le lemme 7.2.4.

Le théorème sera conséquence des deux propositions suivantes.

Proposition 8.8.2. *Soit s_0 un réel positif et soit*

$$S : \mathbf{R} \longrightarrow M(2n; \mathbf{R})$$

un chemin de matrices diagonales tel que

$$S(s) = S_{k^{-}} \text{ si } s \leq -s_0, \quad S(s) = S_{k^{+}} \text{ si } s \geq s_0.$$

Soit

$$L_1 : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

$$Y \longmapsto \frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} + S(s)Y.$$

Alors l'indice de l'opérateur de Fredholm L_1 est le même que celui de L .

Proposition 8.8.3. *L'indice de L_1 est $k^- - k^+$.*

Pour démontrer la proposition 8.8.2, on modifie L parmi les opérateurs de Fredholm sans en changer l'indice.

Lemme 8.8.4. *L'indice de L est le même que celui de l'opérateur L_0 dans lequel on a remplacé $S(s, t)$ par $S_-(t)$ pour $s \leq -s_0$ et par $S_+(t)$ pour $s \geq s_0$.*

Démonstration. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Comme la matrice $S(s, t)$ tend vers $S_{\pm}(t)$ pour $s \rightarrow \pm\infty$, il existe un réel σ_0 tel que

$$\begin{cases} \text{Pour } s \leq -\sigma_0, & \|S(s, t) - S_-(t)\| < \varepsilon, \\ \text{pour } s \geq \sigma_0, & \|S(s, t) - S_+(t)\| < \varepsilon. \end{cases}$$

On considère une fonction plateau $\chi : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ qui vaut 1 pour $|s| \leq \sigma_0$ et 0 pour $|s| \geq 2\sigma_0$. On définit

$$\Sigma(s, t) = \begin{cases} \chi(s)S(s, t) + (1 - \chi(s))S_-(t) & \text{si } s \leq -\sigma_0 \\ S(s, t) & \text{si } |s| \leq \sigma_0 \\ \chi(s)S(s, t) + (1 - \chi(s))S_+(t) & \text{si } s \geq \sigma_0 \end{cases}$$

et L_0 par

$$L_0(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} + \Sigma Y.$$

Ainsi, $LY = L_0Y + C(s, t)Y$, où

$$C(s, t) = \begin{cases} (1 - \chi(s))(S(s, t) - S_-(t)) & \text{si } s \leq -\sigma_0 \\ 0 & \text{si } |s| \leq \sigma_0 \\ (1 - \chi(s))(S(s, t) - S_+(t)) & \text{si } s \geq \sigma_0. \end{cases}$$

En particulier, $\|C(s, t)\| < \varepsilon$. Si ε a été choisi assez petit, nous savons (c'est le théorème d'invariance de l'indice par petites perturbations, ici le théorème 16.2.9) que L_0 est un opérateur à indice et qu'il a le même indice que L .

Puis $\Sigma(s, t)$ coïncide avec $S_{\pm}(t)$ pour $|s| \geq 2\sigma_0$, alors que nous voulons cette propriété avec s_0 à la place de σ_0 (σ_0 nous a été imposé par le choix de ε). Il suffit de relier $\Sigma(s, t)$ à $\Sigma_0(s, t)$ définie de façon analogue

$$\Sigma_0(s, t) = \begin{cases} S_{-}(t) & \text{si } s \leq -s_0 \\ S_{+}(t) & \text{si } s \geq s_0 \end{cases}$$

par un chemin constant pour s assez grand. L'indice des opérateurs de Fredholm définis par ce chemin est constant, en application de la même propriété (voir la remarque 16.2.11). $\square$

Nous allons utiliser le lien, établi au § 7.2.c, entre chemins dans $\mathrm{Sp}(2n)$ et matrices fondamentales $R(t)$ de solutions des équations

$$\frac{dY}{dt} = JS(t)Y$$

déjà considérées dans la démonstration du lemme 8.7.5, ainsi que les chemins d'indice de Maslov prescrit construits au § 7.2.d.

Démonstration de la proposition 8.8.2. Les matrices diagonales S_k de la démonstration du lemme 7.2.4 définissent des chemins symplectiques $R_{k^{\pm}}(t) = e^{tJS_{k^{\pm}}}$ qui ont le même indice de Maslov ($k^{\pm}$) que $R_{\pm}(t)$. Il existe donc (par la proposition 7.1.4) une homotopie $\psi^{\pm}(\lambda, t)$, que l'on peut supposer de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\psi^{\pm} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n)$$

(avec $\psi^{\pm}(\lambda, \cdot) \in \mathcal{S}$ pour tout λ) entre $R_{k^{\pm}}(t)$ et $R^{\pm}(t)$.

Comme nous l'avons remarqué dans le lemme 7.2.3, ce chemin de matrices symplectiques engendre un chemin de matrices symétriques

$$S_{\lambda}^{\pm}(t) = -J\dot{\psi}_{\lambda}^{\pm}(t)(\psi_{\lambda}^{\pm}(t))^{-1}.$$

Le seul problème est que notre variable t est dans S^1 , nous voulons donc des chemins périodiques en t . Pour cela, on modifie les homotopies $\psi^{\pm}$ comme suit. On utilise une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ croissante

$$\chi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

nulle près de 0, égale à 1 près de 1 et une homotopie χ_{λ} reliant χ à Id. Le chemin de matrices symétriques associé à $R_{k^{\pm}}(\chi_{\lambda}(t))$ est $\dot{\chi}_{\lambda}(t)S_{k^{\pm}}$ et il est périodique si l'on a choisi l'homotopie de façon que $\dot{\chi}_{\lambda}(0) = \dot{\chi}_{\lambda}(1)$.

On relie de même les chemins $R^{\pm}(t)$ et $R^{\pm}(\chi(t))$ par l'homotopie $R(\chi_{\lambda}(t))$ dont les chemins de matrices symétriques associés sont périodiques pour tout λ . On considère ensuite l'homotopie $\psi^{\pm}(\lambda, \chi(t))$. Les chemins de matrices symétriques associés sont nuls près de $t = 0$ et $t = 1$, et en particulier périodiques.

On a ainsi obtenu des applications

$$S_{\pm} : [0, 1] \times S^1 \longrightarrow M(2n; \mathbf{R})$$

à valeurs dans l'espace des matrices symétriques et tels que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $t \mapsto \pm(\lambda, t)$ engendre un chemin dans $\mathcal{S}$ et

- $S_{\pm}(0, t)$ engendre $R^{\pm}(t)$;
- $S_{\pm}(1, t) = S_{k^{\pm}}$ est indépendant de t et engendre $R_{k^{\pm}}(t)$.

On peut alors définir une application continue

$$S : [0, 1] \times \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow M(2n; \mathbf{R})$$

telle que

$$S_{\lambda}(s, t) = \begin{cases} S(s, t) & \text{si } \lambda = 0 \\ S_{\lambda}^{+}(t) & \text{si } s \geq \sigma_0 \\ S_{\lambda}^{-}(t) & \text{si } s \leq -\sigma_0 \\ S(s) & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

Ce qui définit une famille d'opérateurs

$$L_{\lambda} : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

$$Y \longmapsto \frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} + S_{\lambda}(s, t)Y,$$

tous de Fredholm (grâce toujours au théorème 8.7.1) et tous avec le même indice (en vertu du théorème d'invariance 16.2.9). L'opérateur L_1 est celui annoncé dans l'énoncé de la proposition. $\square$

Démonstration de la proposition 8.8.3. Dans la démonstration du théorème 8.7.1, on a utilisé le fait que $\text{Coker } L_1$ est isomorphe à $\text{Ker } L_1^*$ où l'adjoint L_1^* de L_1 est

$$L_1^* : W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^q(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

$$Z \longmapsto -\frac{\partial Z}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + {}^t S(s)Z,$$

avec $1/p + 1/q = 1$. Il est donc suffisant de calculer la dimension du noyau des opérateurs de ce type. Puisque

$$J_0 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ est dans } M(2; \mathbf{R}) \times \cdots \times M(2; \mathbf{R}),$$

on se ramène au cas où $n = 1$. On suppose donc que la matrice diagonale $S(s)$ est une matrice 2×2 , de la forme

$$S(s) = \begin{pmatrix} a_1(s) & 0 \\ 0 & a_2(s) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a_i(s) = \begin{cases} a_i^- & \text{si } s \leq -s_0, \\ a_i^+ & \text{si } s \geq s_0. \end{cases}$$

On démontre :

Lemme 8.8.5. Soit $p > 1$ et soit

$$F : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^2) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^2)$$

défini par

$$F(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S(s)Y.$$

On suppose que $a_i^\pm \notin 2\pi\mathbf{Z}$. Alors

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} F &= 2\# \{ \ell \in \mathbf{Z}^* \mid \max(a_1^-, a_2^-) < 2\pi\ell < \min(a_1^+, a_2^+) \} \\ &\quad + \# \{ i \in \{1, 2\} \mid a_i^- < 0 \text{ et } a_i^+ > 0 \}, \\ \dim \operatorname{Ker} F^* &= 2\# \{ \ell \in \mathbf{Z}^* \mid \max(a_1^+, a_2^+) < 2\pi\ell < \min(a_1^-, a_2^-) \} \\ &\quad + \# \{ i \in \{1, 2\} \mid a_i^+ < 0 \text{ et } a_i^- > 0 \}. \end{aligned}$$

Remarque 8.8.6. C'est assez proche de la formule calculant l'indice dans le cas de Morse en termes du nombre de valeurs propres qui changent de signe (voir les indications de démonstration de la proposition 10.2.8).

Exemple 8.8.7. Si les valeurs propres $a_i(s)$ sont comme indiqué sur la figure 8, la dimension du noyau est 9, soit 8 (le double du nombre de multiples entiers de 2π entre la plus grande des valeurs propres a_i^- et la plus petite des valeurs propres a_i^+) + 1 (le nombre des valeurs propres négatives qui sont devenues positives entre $-\infty$ et $+\infty$).

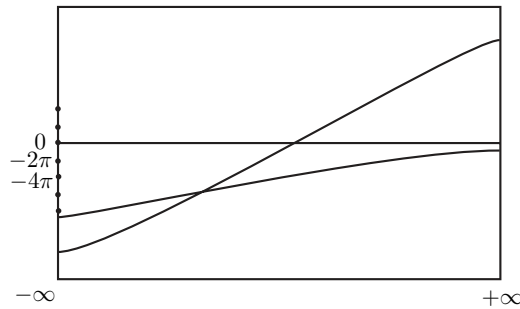


FIGURE 8

La démonstration du lemme 8.8.5 est un calcul explicite du noyau, que nous ferons plus bas. Voici comment, en l'admettant provisoirement, on termine la démonstration de la proposition en l'utilisant pour calculer l'indice de L_1 . Il y a quatre cas à envisager, selon les parités possibles de $k^+ - n$ et de $k^- - n$.

(1) Le cas où les matrices S_{k^-} et S_{k^+} sont les diagonales

$$\begin{cases} S_{k^-} = (-\pi, -\pi, \dots, -\pi, -\pi, (n-1-k^-)\pi, (n-1-k^-)\pi) \\ S_{k^+} = (-\pi, -\pi, \dots, -\pi, -\pi, (n-1-k^+)\pi, (n-1-k^+)\pi) \end{cases}$$

avec $k^- \equiv k^+ \equiv n \pmod{2}$. Dans le lemme ci-dessus, on a $a_1^\pm = a_2^\pm$ et le lemme donne

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} L_1 &= 2\# \{ \ell \in \mathbf{Z}^* \mid n-1-k^- < 2\ell < n-1-k^+ \} \\ &\quad (+2 \text{ si } n-1-k^- < 0 < n-1-k^+) \\ &= 2\# \{ \ell \in \mathbf{Z} \mid n-1-k^- < 2\ell < n-1-k^+ \} \\ &= \begin{cases} k^- - k^+ & \text{si } k^- > k^+, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et $\dim \operatorname{Ker} L_1^* = 2\# \{ \ell \in \mathbf{Z} \mid k^- - n + 1 < 2\ell < k^+ - n + 1 \}$

$$= \begin{cases} k^+ - k^- & \text{si } k^+ > k^-, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De sorte que

$$\operatorname{Ind}(L_1) = k^- - k^+.$$

(2) Le cas où les matrices S_{k^-} et S_{k^+} sont les diagonales

$$\begin{cases} S_{k^-} = (-\pi, -\pi, \dots, -\pi, -\pi, (n-1-k^-)\pi, (n-1-k^-)\pi) \\ S_{k^+} = (-\pi, -\pi, \dots, 1, -1, (n-2-k^+)\pi, (n-2-k^+)\pi) \end{cases}$$

avec $k^- \equiv n \pmod{2}$ et $k^+ \equiv n-1 \pmod{2}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} L_1 &= 2\# \{ \ell \in \mathbf{Z} \mid n-1-k^- < 2\ell < n-2-k^+ \} \\ &\quad + \# \{ \ell \in \mathbf{Z}^* \mid \max(-\pi, 1) < 2\pi\ell < \min(-\pi, -1) \} + 1 \\ &= \begin{cases} (k^- - k^+ - 1) + 1 & \text{si } k^- > k^+, \\ 1 & \text{si } k^- \leq k^+, \end{cases} \end{aligned}$$

et $\dim \operatorname{Ker} L_1^* = 2\# \{ \ell \in \mathbf{Z} \mid k^- - n + 1 < 2\ell < k^+ - n + 2 \}$

$$= \begin{cases} k^+ - k^- + 1 & \text{si } k^+ > k^-, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, dans ce cas aussi

$$\text{Ind}(L_1) = k^- - k^+.$$

(3) Le cas où les matrices S_{k^-} et S_{k^+} sont les diagonales

$$\begin{cases} S_{k^-} = (-\pi, -\pi, \dots, 1, -1, (n-2-k^-)\pi, (n-2-k^-)\pi) \\ S_{k^+} = (-\pi, -\pi, \dots, -\pi, -\pi, (n-1-k^+)\pi, (n-1-k^+)\pi) \end{cases}$$

avec cette fois $k^- \equiv n-1 \pmod{2}$ et $k^+ \equiv n \pmod{2}$. Dans ce cas, on a de même (en inversant les rôles de S_{k^-} et S_{k^+}),

$$\dim \text{Ker } L_1 = \begin{cases} k^- - k^+ + 1 & \text{si } k^- > k^+, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \dim \text{Ker } L_1^* = \begin{cases} k^+ - k^- & \text{si } k^+ > k^-, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui fait que, dans ce cas encore, on a bien

$$\text{Ind}(L_1) = k^- - k^+.$$

(4) Reste le cas où les matrices S_{k^-} et S_{k^+} sont les diagonales

$$\begin{cases} S_{k^-} = (-\pi, -\pi, \dots, 1, -1, (n-2-k^-)\pi, (n-2-k^-)\pi) \\ S_{k^+} = (-\pi, -\pi, \dots, 1, -1, (n-2-k^+)\pi, (n-2-k^+)\pi) \end{cases}$$

et $k^+ \equiv k^- \equiv n-1 \pmod{2}$. On a

$$\dim \text{Ker } L_1 = \begin{cases} k^- - k^+ & \text{si } k^+ > k^-, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \dim \text{Ker } L_1^* = \begin{cases} k^+ - k^- & \text{si } k^- > k^+, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et l'on a donc bien, dans ce cas comme dans les autres,

$$\text{Ind}(L_1) = k^- - k^+,$$

ce qui finit la démonstration de la proposition. $\square$

Démonstration du lemme 8.8.5. Posons

$$\begin{aligned} Y(s, t) &= (Y_1(s, t), Y_2(s, t)) \in \mathbf{R}^2 \\ &= Y_1(s + it) + iY_2(s + it) \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

L'équation aux dérivées partielles $F(Y) = 0$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(s) & 0 \\ 0 & a_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

ou

$$\bar{\partial}Y + S(s)Y = 0.$$

Le changement de fonction inconnue $Y = B\tilde{Y}$ avec B une matrice inversible vérifiant

$$\bar{\partial}B + SB = 0$$

transforme cette équation en

$$\bar{\partial}\tilde{Y} = 0$$

(nous sommes en train de transformer l'équation en l'équation de Cauchy-Riemann, exactement comme nous l'avons déjà fait au § 8.6).

Le plus simple est de choisir pour B la matrice réelle

$$B = \begin{pmatrix} b_1(s) & 0 \\ 0 & b_2(s) \end{pmatrix} \quad \text{avec } b'_i = -a_i b_i,$$

soit

$$b_i(s) = \exp \int_0^s -a_i(\sigma) d\sigma = \exp(-A_1(s))$$

et c'est ce que nous faisons ici. N'omettons pas de remarquer que, pour $s \leq -\sigma_0$, $A_i(s) = B_i + a_i^- s$ et, de même, pour $s \geq \sigma_0$, $A_i(s) = C_i + a_i^+ s$, pour certaines constantes B_i et C_i .

La nouvelle fonction inconnue $\tilde{Y}$ satisfait l'équation de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}\tilde{Y} = 0$. Elle est continue grâce à la régularité elliptique, c'est donc une fonction holomorphe de $s + it$, et, en vertu des théorèmes de Cauchy, elle est, en particulier, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les parties réelle et imaginaire $\tilde{Y}_1$ et $\tilde{Y}_2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et harmoniques.

On identifie maintenant les $s + it \in \mathbf{R} \times S^1$ aux $u = e^{2\pi z}$, de sorte que le théorème de Laurent (pour $\tilde{Y}(u)$ sur $\mathbf{C} - \{0\}$), donne le développement de $\tilde{Y}$ en z . Les solutions de notre système sont donc les

$$\tilde{Y}(s + it) = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} c_\ell e^{(s+it)2\pi\ell}$$

(où $c_\ell \in \mathbf{C}$ et la série converge pour tous s et t) ; en notations réelles :

$$\tilde{Y}(s, t) = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} e^{2\pi s\ell} \left(\alpha_\ell \begin{pmatrix} \cos 2\pi\ell t \\ \sin 2\pi\ell t \end{pmatrix} + \beta_\ell \begin{pmatrix} -\sin 2\pi\ell t \\ \cos 2\pi\ell t \end{pmatrix} \right).$$

En revenant à notre vecteur inconnu $Y = B\tilde{Y}$, on a donc

$$Y(s, t) = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} e^{2\pi s\ell} \left(\alpha_\ell \begin{pmatrix} e^{-A_1(s)} \cos 2\pi\ell t \\ e^{-A_2(s)} \sin 2\pi\ell t \end{pmatrix} + \beta_\ell \begin{pmatrix} -e^{-A_1(s)} \sin 2\pi\ell t \\ e^{-A_2(s)} \cos 2\pi\ell t \end{pmatrix} \right).$$

Pour $s \leq -s_0$, on a

$$Y(s, t) = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \begin{pmatrix} e^{(2\pi\ell - a_1^-)s + K} (\alpha_\ell \cos 2\pi\ell t - \beta_\ell \sin 2\pi\ell t) \\ e^{(2\pi\ell - a_2^-)s + K'} (\alpha_\ell \sin 2\pi\ell t + \beta_\ell \cos 2\pi\ell t) \end{pmatrix}$$

pour certaines constantes K et K' . Pour que cette solution soit bien dans L^p , il faut (et il suffit) que les termes exponentiels tendent vers 0 à l'infini, c'est-à-dire que

- (termes $\ell \neq 0$) $\alpha_\ell = \beta_\ell = 0$ ou $2\pi\ell > a_1^-$ et $2\pi\ell > a_2^-$;
- (terme $\ell = 0$) ($\alpha_0 = 0$ ou $a_1^- < 0$) et ($\beta_0 = 0$ ou $a_2^- < 0$).

De même, pour $s \geq s_0$, on a

$$Y(s, t) = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \begin{pmatrix} e^{(2\pi\ell - a_1^+)s + C} (\alpha_\ell \cos 2\pi\ell t - \beta_\ell \sin 2\pi\ell t) \\ e^{(2\pi\ell - a_2^+)s + C'} (\alpha_\ell \sin 2\pi\ell t + \beta_\ell \cos 2\pi\ell t) \end{pmatrix},$$

ce qui impose

- termes $\ell \neq 0$: $\alpha_\ell = \beta_\ell = 0$ ou $2\pi\ell < a_1^+$ et $2\pi\ell < a_2^+$;
- terme $\ell = 0$: ($\alpha_0 = 0$ ou $a_1^+ > 0$) et ($\beta_0 = 0$ ou $a_2^+ > 0$).

Il reste à mettre toutes ces conditions ensemble, ce qui donne

- termes $\ell \neq 0$: $\alpha_\ell = \beta_\ell = 0$ ou $\max(a_1^-, a_2^-) < 2\pi\ell < \min(a_1^+, a_2^+)$;
- terme $\ell = 0$: ($\alpha_0 = 0$ ou $a_1^- < 0 < a_1^+$) et ($\beta_0 = 0$ ou $a_2^- < 0 < a_2^+$).

Il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de ℓ qui répondent à toutes ces exigences, et ces conditions sont suffisantes pour que le $Y(s, t)$ trouvé soit bien dans $W^{1,p}$. La dimension de l'espace de solutions obtenu est bien

$$\dim \text{Ker } F = 2\# \{ \ell \in \mathbf{Z}^* \mid \max(a_1^-, a_2^-) < 2\pi\ell < \min(a_1^+, a_2^+) \} \\ + \# \{ i \in \{1, 2\} \mid a_i^- < 0 < a_i^+ \}.$$

Déduisons-en la dimension du noyau de F^* . Si $Y \in \text{Ker } F^*$, alors $Z(s, t) = Y(-s, t)$ satisfait à $\tilde{F} = 0$, où $\tilde{F}$ est l'opérateur

$$\tilde{F} : W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1) \longrightarrow L^q(\mathbf{R} \times S^1) \\ Z \longmapsto \frac{\partial Z}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + S(-s)Z.$$

La réciproque est clairement vraie elle aussi, donc

$$\text{Ker } F^* = \text{Ker } \tilde{F}.$$

La formule qui donne la dimension de $\text{Ker } F^*$ est donc celle qui donne celle de $\text{Ker } \tilde{F}$, dans laquelle on a échangé les a_i^- et les a_i^+ .

Conclusion : en vertu de la proposition 8.7.1 et du théorème 8.8.1, nous avons ainsi fini de démontrer le théorème 8.1.5. $\square$

Remarque 8.8.8. Nous avons remplacé l'opérateur de Fredholm L par un opérateur dont nous savons qu'il a le même indice... et dont nous savons calculer l'indice, parce que nous sommes capables de décrire son noyau et son conoyau. Il va sans dire que les dimensions de ces deux sous-espaces n'ont aucune raison d'être celles du noyau ou du conoyau de L : c'est l'indice qui est invariant.

8.9. La décroissance exponentielle

Dans ce paragraphe, nous montrons la propriété de décroissance déjà utilisée plusieurs fois, c'est-à-dire le théorème :

Théorème 8.9.1. *Si Y est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation de Floer linéarisée le long d'une solution d'énergie finie, alors,*

- soit $\int \|Y(s, t)\|^2 dt$ tend vers l'infini quand s tend vers $\pm\infty$,
- soit Y vérifie

$$\|Y(s, t)\| \leq Ce^{-\delta|s|}$$

pour certaines constantes δ et C (et pour tout t).

Remarque 8.9.2. Les dérivées partielles de Y sont à décroissance exponentielle : pour $\partial Y/\partial s$ par intégration de l'exponentielle, pour $\partial Y/\partial t$ en appliquant l'équation.

Remarque 8.9.3. Si u est la solution de l'équation de Floer le long de laquelle on linéarise, la solution $Y = \partial u/\partial s$ est dans l'espace $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ pour tout $p > 1$. En effet, comme l'énergie de u est finie,

$$\int \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|^2 dt \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ quand } s \longrightarrow \pm\infty,$$

ce qui exclut le premier cas dans l'énoncé du théorème pour ce type de solutions.

Nous démontrerons le théorème comme conséquence de la proposition suivante, qui affirme une propriété de « décroissance exponentielle » :

Proposition 8.9.4. *Si Y est une solution de l'équation de Floer linéarisée le long d'une solution u de l'équation de Floer d'énergie finie et si Y ne tend pas vers l'infini, il existe des constantes $\delta > 0$ (ne dépendant que de u) et $C > 0$ telles que*

$$\int_0^1 \|Y(s, t)\|^2 dt \leq Ce^{-\delta|s|}.$$

Démonstration. La formule

$$f(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|Y(s, t)\|^2 dt = \frac{1}{2} \|Y\|_{L^2(S^1)}^2$$

définit une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Nous allons montrer que cette fonction satisfait à une inéquation différentielle

$$f'' \geq \delta^2 f$$

pour une certaine constante δ . Calculons donc ses dérivées :

$$\begin{aligned} f'(s) &= \int_0^1 \left\langle Y(s, t), \frac{\partial Y}{\partial s}(s, t) \right\rangle dt \\ f''(s) &= \int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s}(s, t) \right\|^2 dt + \int_0^1 \left\langle Y(s, t), \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2}(s, t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Évaluons le deuxième terme en utilisant le fait que Y est une solution de l'équation linéarisée, c'est-à-dire satisfait à

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = -J \frac{\partial Y}{\partial t} - SY.$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} = -J \frac{\partial^2 Y}{\partial s \partial t} - \frac{\partial S}{\partial s} Y - S \frac{\partial Y}{\partial s}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\langle Y, \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right\rangle dt &= - \int_0^1 \left\langle Y, J \frac{\partial^2 Y}{\partial s \partial t} \right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle Y, \frac{\partial S}{\partial s} Y \right\rangle dt \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle Y, S \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

La première de ces intégrales se calcule par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\langle Y, J \frac{\partial^2 Y}{\partial s \partial t} \right\rangle dt &= - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial Y}{\partial t}, J \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle dt \\ &= - \int_0^1 \left\langle J \frac{\partial Y}{\partial s}, J \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle JSY, J \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle dt \\ &= - \int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 dt - \int_0^1 \left\langle SY, \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

De sorte que nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\langle Y, \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right\rangle dt &= \int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 dt + \int_0^1 \left\langle SY, \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle dt \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle Y, \frac{\partial S}{\partial s} Y \right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle Y, S \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

La dérivée seconde de la fonction f vaut donc

$$f''(s) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 dt - \int_0^1 \left\langle Y, \frac{\partial S}{\partial s} \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle Y, (S - S) \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle dt.$$

En utilisant le fait (démontré dans la proposition 8.4.6) que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \sup_t \frac{\partial S}{\partial s}(s, t) = 0$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle Y, \frac{\partial S}{\partial s} Y \rangle dt &\leq \left(\int_0^1 \|Y\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial S}{\partial s} Y \right\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 \|Y\|^2 dt \right)^{1/2} \varepsilon \left(\int_0^1 \|Y\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \|Y\|^2 dt \quad \text{pour } |s| \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

Et en utilisant le fait que ${}^tS - S$ tend vers 0, on a

$$\left| \int_0^1 \langle Y, ({}^tS - S) \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle dt \right| \leq \eta \left(\int_0^1 \|Y\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 dt \right)^{1/2}$$

pour $|s|$ assez grand. Nous avons donc obtenu l'inégalité

$$\begin{aligned} f''(s) &\geq \int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 dt - \varepsilon \int_0^1 \|Y\|^2 dt \\ &\quad - \eta \left(\int_0^1 \|Y\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le fait que

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = -J \frac{\partial Y}{\partial t} - SY = AY, \quad \text{avec } AY = A_0 Y + (S - S_\pm) Y$$

où A_0 est un opérateur sur L^2 dont nous avons montré (c'est le lemme 8.7.5) qu'il était inversible et où $S - S_\pm$ tend vers 0 quand $s \rightarrow \pm\infty$. Par suite, A est inversible (de $W^{1,2}(S^1)$ dans $L^2(S^1)$) pour $|s|$ assez grand et nous avons :

$$\|AY\|_{L^2(S^1)} \geq D \|Y\|_{W^{1,2}(S^1)} \geq \|Y\|_{L^2(S^1)}$$

pour une certaine constante positive D . Nous avons donc

$$\begin{aligned} f''(s) &= \|AY\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|Y\|_{L^2}^2 - \eta \|Y\|_{L^2} \|AY\|_{L^2} \\ &= \|AY\|_{L^2} (\|AY\|_{L^2} - \eta \|Y\|_{L^2}) - \varepsilon \|Y\|_{L^2}^2 \\ &\geq (D(D - \eta) - \varepsilon) \|Y\|_{L^2}^2 \\ &\geq \delta^2 f(s) \end{aligned}$$

pour $|s|$ assez grand et pour une constante $\delta > 0$. La fonction f satisfait bien à une inéquation différentielle du type annoncé. La fin de la démonstration de la proposition vient du lemme ci-dessous (que nous énonçons en $+\infty$ mais dont l'analogie en $-\infty$ est évidemment vrai aussi).

Lemme 8.9.5. Si $f''(s) \geq \delta^2 f(s)$ pour $s \geq s_0$, alors

- soit $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = +\infty$,
- soit $f(s) \leq f(s_0) e^{-\delta(s-s_0)}$ pour $s \geq s_0$.

Démonstration. Posons

$$g(s) = e^{-\delta s}(f'(s) + \delta f(s)),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} g'(s) &= e^{-\delta s}(-\delta(f'(s) + \delta f(s)) + f''(s) + \delta f'(s)) \\ &= e^{-\delta s}(f''(s) - \delta^2 f(s)) \\ &\geq 0, \quad \text{d'après l'hypothèse faite sur } f. \end{aligned}$$

En particulier, la fonction g est croissante sur $[s_0, +\infty[$.

Supposons d'abord qu'il existe un $s_1 \geq s_0$ avec $g(s_1) > 0$. Alors $g(s) \geq g(s_1)$ pour $s \geq s_1$ et

$$f'(s) + \delta f(s) \geq e^{\delta s} g(s_1)$$

pour $s \geq s_1$. Soit $h(s) = e^{\delta s} f(s)$, on a :

$$h'(s) = e^{\delta s}(\delta f + f') \geq e^{2\delta s} g(s_1),$$

donc $h(s) \geq Ae^{2\delta s}$ pour $s \geq s_1$ et $f(s) \geq Ae^{\delta s}$ tend vers $+\infty$.

Sinon, on a $g(s) \leq 0$ pour $s \geq s_0$, donc aussi $f'(s) + \delta f(s) \leq 0$ et $h(s) = e^{\delta s} f(s)$ est décroissante sur $[s_0, +\infty[$ et finalement

$$e^{\delta s} f(s) = h(s) \leq h(s_0) = e^{\delta s_0} f(s_0),$$

c'est-à-dire

$$f(s) \leq e^{\delta s_0} f(s_0) e^{-\delta s},$$

ce qui finit la démonstration du lemme. $\square$

Et ce qui finit aussi la démonstration de la proposition. $\square$

Nous avons donc montré que

$$\forall s \in \mathbf{R}, \quad \|Y\|_{L^2(S^1)}^2 \leq e^{-\delta|s|},$$

ce qui n'est pas exactement l'énoncé du théorème que nous avons en vue.

Il reste à vérifier que l'on a (point par point)

$$\forall (s, t) \in \mathbf{R} \times S^1, \quad |Y(s, t)| \leq Ce^{-\delta|s|}.$$

Nous montrons pour ce faire :

Lemme 8.9.6. *Soit Y une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation de Floer linéarisée. Il existe une constante $a > 1$ telle que*

$$\Delta \|Y\|^2 \geq -a \|Y\|^2.$$

Proposition 8.9.7. *Soit $w : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\Delta w \geq -aw$ pour une constante $a > 1$. Alors on a*

$$\forall (s_0, t_0) \in \mathbf{R}^2, \quad w(s_0, t_0) \leq \frac{8a}{\pi} \int_{B_1(s_0, t_0)} w \, ds \, dt.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le proposition à $w(s, t) = \|Y(s, t)\|^2$.

Démonstration du lemme. C'est un petit calcul :

$$\begin{aligned}\Delta\langle Y, Y \rangle &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle Y, Y \rangle + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \langle Y, Y \rangle \\ &= 2 \left[\left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial Y}{\partial t} \right\|^2 + \langle \Delta Y, Y \rangle \right],\end{aligned}$$

puis

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial s} - J_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial s} + J_0 \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

de sorte que, si Y est solution de l'équation de Floer linéarisée,

$$\begin{aligned}\Delta Y &= \left(\frac{\partial}{\partial s} - J_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial s} + J_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) Y \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial s} - J_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (-SY).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\langle \Delta Y, Y \rangle = \left\langle -\frac{\partial S}{\partial s} Y, Y \right\rangle - \left\langle S \frac{\partial Y}{\partial s}, Y \right\rangle + \left\langle J_0 \frac{\partial S}{\partial t} Y, Y \right\rangle + \left\langle J_0 S \frac{\partial Y}{\partial t}, Y \right\rangle$$

et

$$\begin{aligned}\Delta\langle Y, Y \rangle &= 2 \left(\left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 - \left\langle S \frac{\partial Y}{\partial s}, Y \right\rangle \right) + 2 \left(\left\| \frac{\partial Y}{\partial t} \right\|^2 + \left\langle J_0 S \frac{\partial Y}{\partial t}, Y \right\rangle \right) \\ &\quad - 2 \left\langle \frac{\partial S}{\partial s} Y, Y \right\rangle + 2 \left\langle J_0 \frac{\partial S}{\partial t} Y, Y \right\rangle.\end{aligned}$$

Chacun des termes du membre de droite est minoré par un $-c \|Y\|^2$. C'est clair pour les deux derniers (grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Étudions donc les deux premiers :

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 - \left\langle Y \frac{\partial S}{\partial s}, Y \right\rangle &= \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial Y}{\partial s}, tSY \right\rangle \\ &= \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} - \frac{1}{2} tSY \right\|^2 - \frac{1}{4} \|tSY\|^2 \\ &\geq -\frac{1}{4} \|tSY\|^2 \\ &\geq -c \|Y\|^2\end{aligned}$$

et il en est de même pour le deuxième terme, ce qui donne la minoration attendue. $\square$

Démonstration de la proposition. Elle commence par un lemme :

Lemme 8.9.8. Soit $w : B_r(s_0, t_0) \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\Delta w \geq -b$ pour une constante $b > 0$. Alors on a

$$w(s_0, t_0) \leq \frac{br^2}{8} + \frac{1}{r^2} \int_{B_r(s_0, t_0)} w.$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$v(s, t) = w(s_0 + s, t_0 + t) + \frac{b}{4}(s^2 + t^2)$$

qui vérifie

$$\Delta v(s, t) = \Delta w(s_0 + s, t_0 + t) + b \geq 0.$$

Il ne reste qu'à appliquer l'inégalité de la moyenne⁽¹¹⁾ à v :

$$\begin{aligned} w(s_0, t_0) = v(0) &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(0)} v \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(s_0, t_0)} w + \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(0)} \frac{b(s^2 + t^2)}{4} ds dt \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(s_0, t_0)} w + \frac{br^2}{8}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. $\square$

L'étape suivante est appelée « la ruse de Heinz » (*the Heinz trick*) dans [45] (dont cette démonstration est inspirée). La ruse consiste à considérer la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \rho &\longmapsto (1 - \rho)^2 \sup_{B_\rho(s_0, t_0)} w. \end{aligned}$$

qui vérifie $f(0) = w(s_0, t_0)$ et $f(1) = 0$. Il y a donc un $\rho_\star$ dans $[0, 1]$ où f atteint son maximum,

$$\max_{\rho \in [0, 1]} f = f(\rho_\star).$$

Soient encore

$$c = \sup_{B_{\rho_\star}(s_0, t_0)} w = w(z_\star) \quad \text{pour } z_\star \in B_{\rho_\star}(s_0, t_0) \quad \text{et } \eta = \frac{1 - \rho_\star}{2}.$$

Notons que $\eta \in]0, \frac{1}{2}]$ et que $\rho_\star + \eta \leq 1$, de sorte que

$$B_\eta(z_\star) \subset B_{\rho_\star + \eta}(s_0, t_0) \subset B_1(s_0, t_0).$$

Nous avons maintenant

$$\begin{aligned} \sup_{B_\eta(z_\star)} w &\leq \sup_{B_{\rho_\star + \eta}(s_0, t_0)} w = \frac{f(\rho_\star + \eta)}{(1 - \rho_\star - \eta)^2} = \frac{4f(\rho_\star + \eta)}{(1 - \rho)^2} \\ &\leq \frac{4f(\rho_\star)}{(1 - \rho_\star)^2} = 4c. \end{aligned}$$

Donc, sur la boule $B_\eta(z_\star)$, nous avons

$$\Delta w \geq -aw \geq -4ac.$$

⁽¹¹⁾Cette variante de l'égalité de la moyenne est rappelée ici dans la proposition 16.5.6.

En utilisant le lemme, pour $r \leq \eta$,

$$\begin{aligned} c = w(z_*) &\leq \frac{4ac}{8} r^2 + \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_\eta(z_*)} w \\ &\leq \frac{ac}{2} r^2 + \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_1(s_0, t_0)} w. \end{aligned}$$

Pour finir (c'est notre troisième et dernière étape), posons

$$r = \frac{\eta}{\sqrt{a}} < \eta$$

et utilisons la dernière inégalité obtenue :

$$\begin{aligned} c &\leq \frac{ac}{2} \frac{\eta^2}{a} + \frac{a}{\pi \eta^2} \int_{B_1(s_0, t_0)} w \\ &\leq \frac{c}{2} + \frac{a}{\pi \eta^2} \int_{B_1(s_0, t_0)} w \quad \text{car } \eta < 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{c}{2} \leq \frac{a}{\pi \eta^2} \int_{B_1(s_0, t_0)} w \quad \text{ou} \quad c \eta^2 \leq \frac{2a}{\pi} \int_{B_1(s_0, t_0)} w.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} w(s_0, t_0) = f(0) &\leq f(\rho_*) = (1 - \rho_*)^2 c \\ &= 4\eta^2 c \leq \frac{8a}{\pi} \int_{B_1(s_0, t_0)} w, \end{aligned}$$

ce qui est bien la conclusion attendue. □

CHAPITRE 9

HOMOLOGIE DE FLOER : ÉTUDE DES ESPACES DE TRAJECTOIRES

Considérons maintenant un hamiltonien générique H (au sens du théorème 8.1.1) sur une variété symplectique W satisfaisant aux hypothèses 6.2.1 et 6.2.2 (par exemple parce que $\pi_2(W) = 0$ ou parce que W est le fibré cotangent d'une variété V).

On peut donc considérer les orbites périodiques d'indice de Maslov fixé. On note $C_k(H)$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/2$ de base les orbites périodiques d'indice de Maslov k . Nous savons que ces orbites sont en nombre fini, puisque l'hypothèse de non-dégénérescence assure qu'elles sont isolées. On définit ensuite la différentielle du complexe à l'aide du flot du gradient de la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H$,

$$\begin{aligned} \partial : C_k(H) &\longrightarrow C_{k-1}(H) \\ \text{par} \quad \partial(x) &= \sum_{\text{Ind}(y)=k-1} n(x, y)y \end{aligned}$$

où $n(x, y)$ désigne le nombre (modulo 2) de trajectoires du gradient de $\mathcal{A}_H$ (c'est-à-dire de solutions de l'équation de Floer) reliant x à y . Le fait que $n(x, y)$ soit bien défini (et un nombre fini) sera une conséquence du fait que, sous les hypothèses faites, l'espace $\mathcal{L}(x, y)$ des trajectoires reliant x à y est une variété compacte de dimension 0 (voir le § 8.5).

Il restera alors à démontrer que l'on a bien défini un complexe, c'est-à-dire que $\partial \circ \partial = 0$. Pour ceci, comme au § 3.2.c, il faut étudier plus précisément l'espace $\mathcal{M}(x, y)$, quand la différence des indices est 2.

9.1. Les espaces de trajectoires

9.1.a. L'espace $\mathcal{L}(x, y)$ et sa topologie. Si x et y sont des points critiques de $\mathcal{A}_H$, rappelons que $\mathcal{M}(x, y)$ désigne l'espace des solutions (contractiles, d'énergie finie) joignant x à y . On a montré (théorème 6.5.6)

que l'espace $\mathcal{M}$ des solutions contractiles d'énergie finie de l'équation de Floer est réunion des espaces $\mathcal{M}(x, y)$.

Revenons maintenant à l'opération de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{M}$ utilisée dans les démonstrations précédentes. Notons

$$\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{M}(x, y) / \mathbf{R}$$

l'espace des trajectoires joignant x à y (supposés distincts). Il est muni de la topologie quotient. Dans celle-ci, une suite $\tilde{u}_n$ converge vers un élément $\tilde{u}$ si et seulement si il existe une suite s_n de réels telle que $u_n(s_n + s, \cdot) \rightarrow u(s, \cdot)$ dans $\mathcal{M}(x, y)$.

Remarque 9.1.1. On fait ici une distinction entre *solution* (paramétrée), élément de $\mathcal{M}$, et *trajectoire* (non paramétrée), élément de $\mathcal{L}$.

Proposition 9.1.2. Soient x et y deux points critiques distincts de $\mathcal{A}_H$ et soient $u_n \in \mathcal{M}(x, y)$, $s_n \in \mathbf{R}$, $\sigma_n \in \mathbf{R}$. Supposons que

$$\lim u_n(s_n + s, \cdot) = u \in \mathcal{M}(x, z) \quad \text{et} \quad \lim u_n(\sigma_n + s, \cdot) = v \in \mathcal{M}(x, w)$$

pour deux points critiques z et w distincts de x . Alors $z = w$ et u et v coïncident à l'opération de $\mathbf{R}$ près, en d'autres termes, il existe un s_* tel que $u(s_* + s, t) = v(s, t)$.

Corollaire 9.1.3. La topologie quotient sur $\mathcal{L}(x, y)$ est séparée.

En effet la proposition donne l'unicité de la limite d'une suite convergente dans $\mathcal{L}(x, y)$. $\square$

Démonstration de la proposition. Comme $x \neq y$ et $u_n \in \mathcal{M}(x, y)$, $\mathcal{A}_H(x) > \mathcal{A}_H(y)$ et de même avec z et w . Choisissons donc un réel α tel que

$$\mathcal{A}_H(x) > \alpha > \sup(\mathcal{A}_H(y), \mathcal{A}_H(z), \mathcal{A}_H(w))$$

et un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{A}_H(x) - \varepsilon > \alpha.$$

Supposons d'abord que la suite $\sigma_n - s_n$ n'est pas bornée. On peut supposer que $s_n = 0$ et que la suite σ_n n'est pas majorée. Elle a une sous-suite tendant vers $+\infty$. En $s = -\infty$, v part du point critique x , il existe donc un s_* tel que

$$s \leq s_* \implies \mathcal{A}_H(v(s, t)) > \mathcal{A}_H(x) - \varepsilon.$$

Mais $u_n(s_* + \sigma_n, \cdot)$ tend vers $v(s_*, \cdot)$, donc, pour n assez grand, on a aussi

$$\mathcal{A}_H(u_n(s_* + \sigma_n, \cdot)) > \mathcal{A}_H(x) - \varepsilon.$$

On utilise le fait que la solution u tend vers z pour $s \rightarrow +\infty$, donc il existe un s_1 tel que

$$s \geq s_1 \implies \mathcal{A}_H(u(s, \cdot)) < \alpha.$$

Puisque $u_n(s_1, \cdot) \rightarrow u(s_1, \cdot)$, alors, pour n assez grand,

$$\mathcal{A}_H(u_n(s_1, \cdot)) \leq \alpha.$$

D'où l'on déduit que

$$s_\star + \sigma_n < s_1$$

pour tout n , en contradiction avec le fait que σ_n n'est pas majorée.

Donc $\sigma_n - s_n$ est bornée et donc elle possède une sous-suite convergente, disons $\lim(\sigma_n - s_n) = s_\star$. Pour s fixé, la suite $s + \sigma_n - s_n$ reste dans un compact fixé. Donc $u_n(s + \sigma_n, \cdot) \rightarrow v(s, \cdot)$ d'une part et vers $u(s + s_\star)$ de l'autre. $\square$

Remarque 9.1.4. Cette démonstration reste valable pour $u \in \mathcal{M}(x_0, z)$ et $v \in \mathcal{M}(x_0, w)$ pour un point critique x_0 de $\mathcal{A}_H$ tel que $\mathcal{A}_H(x) \geq \mathcal{A}_H(x_0)$.

Remarque 9.1.5. En théorie de Morse, pour montrer que les espaces de trajectoires d'un pseudo-gradient sont séparés, on a regardé l'intersection avec un niveau de la fonction. Ici on a aussi

$$\mathcal{L}(x, y) \cong \mathcal{M}^\alpha(x, y) = \{u \in \mathcal{M}(x, y) \mid \mathcal{A}_H(u(0)) = \alpha\}$$

toujours en utilisant le fait que $\mathcal{A}_H$ est strictement décroissante sur les trajectoires. Notons que, pour obtenir cette décroissance stricte, il faut utiliser le théorème 8.5.4. On a aussi le fait que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\alpha(x, y) \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{M}(x, y) \\ (x, \sigma) &\longmapsto u(s + \sigma, t) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Remarque 9.1.6. Si $x = y$, alors $\mathcal{M}(x, y)$ est constitué de la solution constante (en s) égale à x . Si $x \neq y$, $\mathcal{L}(x, y)$ est une variété de dimension $\mu(x) - \mu(y) - 1$ (l'opération de $\mathbf{R}$ est libre d'après la remarque précédente). Si $\mu(x) = \mu(y)$ mais $x \neq y$, alors $\mathcal{M}(x, y)$ est vide et $\mathcal{L}(x, y)$ aussi.

9.1.b. Ce qu'il faut faire, pour définir les $n(x, y)$ et montrer que $\partial \circ \partial = 0$. Considérons le cas de deux points critiques dont la différence des indices est

- égale à 1 ; alors $\mathcal{L}(x, y)$ est une variété de dimension 0 compacte (ce qui reste à démontrer) et $n(x, y) = \#\mathcal{L}(x, y)$;
- égale à 2, $\mu(x) = \mu(y) + 2$; alors $\mathcal{L}(x, z)$ est une variété de dimension 1 ; on regarde

$$\overline{\mathcal{L}}(x, z) = \mathcal{L}(x, z) \cup \bigcup_{\mu(y)=\mu(x)+1} \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$$

et on démontre que c'est une variété de dimension 1, à bord la réunion des $\mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$, et qu'elle est compacte.

Une fois ceci démontré, comme le bord d'une variété de dimension 1 est constitué d'un nombre pair de points, on a

$$\sum_{\mu(y)=\mu(x)+1} n(x, y)n(y, z) \equiv 0 \pmod{2},$$

c'est-à-dire $\partial \circ \partial = 0$.

Il nous faut donc démontrer

- la compacité des espace $\overline{\mathcal{L}}(x, y)$ (au §9.1.c) ;
- la propriété d'être une variété à bord quand la différence des indices est 2 (au §9.2).

9.1.c. Trajectoires brisées. Comme nous l'avons vu au §3.2 dans le cas de dimension finie, dans l'adhérence des trajectoires joignant le point critique x au point critique y , il y a des trajectoires « brisées », réunions de trajectoires joignant d'autres points critiques. Le théorème qui vient décrit plus précisément ce comportement.

Théorème 9.1.7. *Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{M}(x, y)$. Il existe*

- une sous-suite de (u_n) ,
- des points critiques $x_0 = x, x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1} = y$,
- des suites (s_n^k) (pour $0 \leq k \leq \ell$)
- et des éléments $u^k \in \mathcal{M}(x_k, x_{k+1})$

tels que, pour tout $k = 0, \dots, \ell$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot s_n^k = u^k.$$

Remarque 9.1.8. La proposition 9.1.2 donne aussi l'unicité de la limite dans ce cadre : l'un des points critiques, x , était fixé, les deux autres, z et w , non.

Ce théorème définit la convergence des suites dans $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$. La proposition 9.1.2 montre que la limite est unique. Ainsi, on définit une topologie séparée sur l'espace $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ et, bien sûr, elle est telle que cet espace est compact :

Corollaire 9.1.9. *L'espace $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ est compact.*

Démonstration du théorème 9.1.7. Nous utilisons ici les notations de la démonstration du théorème 6.5.6, en particulier, ε est assez petit pour que les boules de rayon ε centrées aux points critiques de $\mathcal{A}_H$ soient disjointes. Pour $u \in \mathcal{M}$, on note $u(s) \in \mathcal{L}W$ le lacet $u(s, t)$.

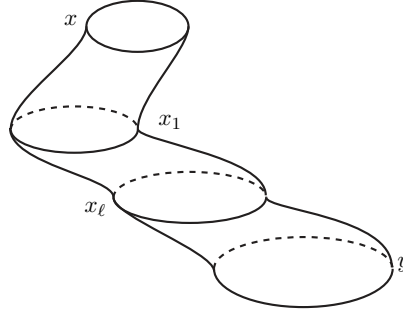


FIGURE 1

Vue comme une trajectoire dans $\mathcal{L}W$, u_n doit sortir de $B(x, \varepsilon)$, puisqu'elle finit par aboutir en y . Appelons $u_n(s_n^1)$ son premier point de sortie,

$$s_n^1 = \inf \{s \in \mathbf{R} \mid d_\infty(u_n(s), x) > \varepsilon\}.$$

Par compacité de $\mathcal{M}$ (et à extraction près d'une sous-suite), la suite $(u_n \cdot s_n^1)$ converge vers un élément u^1 de $\mathcal{M}$. Par définition de s_n^1 , on a

$$\begin{cases} d_\infty(u_n(s), x) < \varepsilon & \text{pour } s < s_n^1 \\ d_\infty(u_n(s_n^1), x) = \varepsilon \end{cases}$$

par suite, à la limite,

$$u^1(s) \in \overline{B}(x, \varepsilon) \text{ pour } s < 0 \quad \text{et} \quad u^1(0) \in \partial B(x, \varepsilon).$$

La limite u^1 est ainsi une trajectoire partant de x et sortant de la boule $B(x, \varepsilon)$, elle est donc dans un $\mathcal{M}(x, x_1)$ pour un $x_1 \in \text{Crit } \mathcal{A}_H$ (distinct de x). Si $x_1 = y$, on a fini (avec $\ell = 0$). Sinon, on procède par récurrence : on suppose qu'on a trouvé des suites $(s_n^0), \dots, (s_n^k)$ et $u^j \in \mathcal{M}(x_{j-1}, x_j)$ (pour certains points critiques de $\mathcal{A}_H$), avec $x_j \neq y$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot s_n^j = u^j.$$

La trajectoire u^k tend vers le point critique x_k pour s tendant vers $+\infty$, et il existe un $s^* \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall s \geq s^*, \quad u^k(s) \in B(x_k, \varepsilon).$$

Puisque $u_n \cdot s_n^k(s^*)$ tend vers $u^k(s^*)$, on a aussi, pour n assez grand,

$$u_n(s_n^k + s^*) \in B(x_k, \varepsilon).$$

Comme la trajectoire (u_n) tend vers y , que nous avons supposé différent de x_k , elle doit sortir de $B(x_k, \varepsilon)$ pour $s > s_n^k + s^*$. On considère son premier point de sortie, $u_n(s_n^{k+1})$, où

$$s_n^{k+1} = \sup \{s \geq s_n^k + s^* \mid u_n(\sigma) \in B(x_k, \varepsilon) \text{ pour } s_n^k + s^* \leq \sigma \leq s\}.$$

Par compacité de $\mathcal{M}$ encore une fois (et à extraction près d'une sous-suite), la suite $u_n \cdot s_n^{k+1}$ converge vers une limite $u^{k+1} \in \mathcal{M}$. On veut montrer mainte-

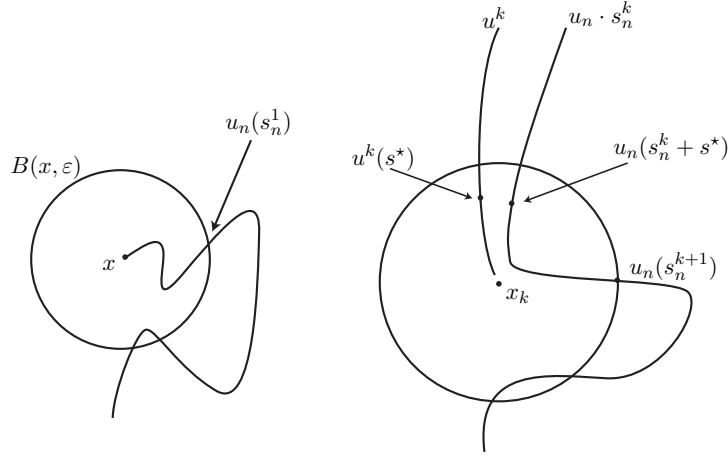


FIGURE 2

nant que la trajectoire u^{k+1} en question est dans un espace $\mathcal{M}(x_k, x_{k+1})$ pour un point critique x_{k+1} distinct de x_k . On vérifie d'abord que $s_n^{k+1} - s_n^k$ tend vers l'infini. En effet, si l'on suppose au contraire qu'elle est bornée, l'intervalle $[s^*, s_n^{k+1} - s_n^k]$ est contenu dans un intervalle compact fixe... sur lequel $u_n \cdot s_n^k$ converge uniformément vers u^k . Par suite, pour $s \in [s^*, s_n^{k+1} - s_n^k]$, on a $u_n(s_n^k + s) \in B(x_k, \varepsilon)$ et, en particulier, $u_n(s_n^{k+1})$ est dans cette boule ouverte, une contradiction. Ainsi, $s_n^{k+1} - s_n^k$ tend bien vers $+\infty$.

Soit s un réel strictement négatif. Pour n assez grand, on a

$$s_n^k + s^* < s_n^{k+1} + s < s_n^{k+1}$$

de sorte que, d'après la définition de s_n^{k+1} , $u_n(s_n^{k+1} + s) \in B(x_k, \varepsilon)$. Par suite, pour tout $s < 0$, on a

$$u_n \cdot s_n^{k+1} \in B(x_k, \varepsilon)$$

et par conséquent

$$u^{k+1}(] - \infty, 0]) \subset \overline{B}(x_k, \varepsilon).$$

Pour $s = 0$, on a $u_n(s_n^{k+1}) \in \partial B(x_k, \varepsilon)$, donc à la limite,

$$u^{k+1}(0) \in \partial B(x_k, \varepsilon),$$

de sorte que u^{k+1} doit sortir de la boule $B(x_k, \varepsilon)$, ce que nous voulions démontrer. $\square$

9.2. Trajectoires brisées, recollement : énoncés

Nous avons montré, au §9.1.c, qu'une suite de solutions de l'équation de Floer joignant deux points critiques a et b pouvait converger vers une « trajectoire brisée ». L'espace des trajectoires brisées apparaît ainsi comme une « compactification » de l'espace de trajectoires $\mathcal{L}(a, b)$. Étudions plus précisément sa structure lorsque la différence des indices de a et b est 2.

Théorème 9.2.1. *Soit (H, J) un couple régulier (avec H non dégénéré). Soient x et z deux trajectoires périodiques de H dont les indices satisfont à*

$$\mu(x) = \mu(z) + 2.$$

Alors $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ est une variété compacte à bord de dimension 1 et

$$\partial \overline{\mathcal{L}}(x, z) = \bigcup_{\mu(x) < \mu(y) < \mu(z)} \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z).$$

Corollaire 9.2.2. *Sous les hypothèses faites,*

$$\partial \circ \partial = 0. \quad \square$$

La suite de ce chapitre est consacrée à la démonstration de ce théorème. Nous avons déjà montré, au §9.1.c, que l'espace de trajectoires $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ est compact et que $\mathcal{L}(x, z)$ est une variété de dimension 1. Il suffit ainsi d'étudier ce qui se passe au voisinage des points du bord. C'est ce que décrit le théorème dit « de recollement » :

Théorème 9.2.3. *Soient x, y et z trois points critiques de la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H$, d'indices consécutifs*

$$\mu(x) = \mu(y) + 1 = \mu(z) + 2$$

et soient $(u, v) \in \mathcal{M}(x, y) \times \mathcal{M}(y, z)$ représentant des trajectoires $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$. Alors

– il existe une application différentiable $\psi : [\rho_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}(x, z)$ (pour un certain $\rho_0 > 0$) telle que $\pi \circ \psi$ soit un plongement

$$\hat{\psi} = \pi \circ \psi : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(x, z)$$

vérifiant

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \hat{\psi}(\rho) = (\hat{u}, \hat{v}) \in \overline{\mathcal{L}}(x, z) \supset \mathcal{L}(x, z),$$

– de plus, si $\ell_n \in \mathcal{L}(x, z)$ est une suite tendant vers $(\hat{u}, \hat{v})$, alors $\ell_n \in \text{Im}(\hat{\psi})$ pour n assez grand.

Remarque 9.2.4. La dernière assertion est tout aussi indispensable que son analogue dans le cas de Morse (voir la remarque 3.2.9).

La démonstration est bien plus difficile ici que celle du résultat correspondant de théorie de Morse, la proposition 3.2.8. Nous allons procéder en trois étapes :

(1) un « pré-recollement », où nous construirons une interpolation w_ρ entre les solutions u et v de l'équation de Floer, dépendant du paramètre ρ , qui ne sera pas exactement une solution elle-même mais une solution « approchée » dans un sens que nous préciserons ;

(2) la construction de ψ , que nous exhiberons sous la forme

$$\psi(\rho) = \exp_{w_\rho}(\gamma(\rho))$$

pour un

$$\gamma(\rho) \in W^{1,p}(w_\rho^*TW) = T_{w_\rho}\mathcal{P}(x, z)$$

tel que $\psi(\rho)$ est une vraie solution de l'équation de Floer ; nous l'obtiendrons à partir de w_ρ par une variante de la méthode de Newton, due à Picard et que nous appellerons « méthode de Newton-Picard » ;

(3) la vérification des trois propriétés désirées de $\hat{\psi} = \pi \circ \psi$, à savoir

- $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \hat{\psi}(\rho) = (\hat{u}, \hat{v})$;
- $\hat{\psi}$ est un plongement ;
- la propriété d'unicité.

Pour les démonstrations, nous aurons besoin d'estimations des dérivées de l'application exponentielle et de l'opérateur de Floer. Leurs démonstrations ne sont pas difficiles, mais elles sont très longues (et certains lecteurs pourront les trouver « moralement évidentes »). C'est pourquoi, et dans le but de faciliter la lecture, que nous avons préféré les regrouper dans le chapitre 13. Nous signalerons ces lemmes techniques au fur et à mesure de leur apparition dans le texte.

9.3. Pré-recollement

Choisissons une fois pour toutes deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, β^- et $\beta^+ : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ (figure 3), de façon que

$$\beta^-(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour } s \leq -1 \\ 0 & \text{pour } s \geq -\varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta^+(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour } s \geq 1 \\ 0 & \text{pour } s \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Définissons la solution approchée w_ρ par

$$w_\rho(s, t) = \begin{cases} u(s + \rho, t) & \text{si } s \leq -1 \\ \exp_{y(t)} \left(\beta^-(s) \exp_{y(t)}^{-1}(u(s + \rho, t)) \right. \\ \quad \left. + \beta^+(s) \exp_{y(t)}^{-1}(v(s - \rho, t)) \right) & \text{si } s \in [-1, 1] \\ v(s - \rho, t) & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

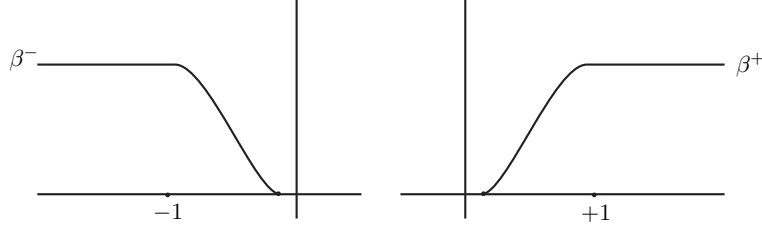


FIGURE 3

La formule définit bien quelque chose si, pour $|s| \leq 1$, $u(s + \rho, t)$ et $v(s - \rho, t)$ sont bien dans l'image de l'exponentielle, précisément dans

$$\left\{ \exp_{y(t)} Y(t) \mid \sup_{t \in S^1} \|Y(t)\| \leq r_0 \right\}.$$

Comme $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = y(t) = \lim_{s \rightarrow -\infty} v(s, t)$, ceci est vrai pour ρ assez grand, disons donc pour $\rho \geq \rho_0$.

La valeur de ρ_0 , qui pourra augmenter au fur et à mesure que le texte avance, n'a pas à être précisée : convenons⁽¹⁾ que « pour $\rho \geq \rho_0$ » signifie « pour ρ assez grand ».

Cette « interpolation » de u et v jouit des propriétés :

- (1) $w_\rho \in \mathcal{C}^\infty(x, z)$;
- (2) pour $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, on a $w_\rho(s, t) = y(t)$;
- (3) pour $s \leq \rho - 1$, on a $w_\rho(s - \rho, t) = u(s, t)$, en particulier

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} w_\rho(s - \rho, t) = u(s, t) \text{ dans } \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty,$$

et de même, $w_\rho(s + \rho, t) = v(s, t)$ pour $s \geq 1 - \rho$, donc $w_\rho(s + \rho, t)$ tend vers $v(s, t)$ dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$;

- (4) w_ρ est une fonction dérivable de ρ ;
- (5) $w_\rho(s, t)$ tend vers $y(t)$ dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ quand ρ tend vers $+\infty$.

La figure 4 montre assez schématiquement ce qui se passe (dans l'espace de lacets $\mathcal{L}W$).

Voici maintenant la version « linéaire » de cette construction que nous allons utiliser pour appliquer la méthode de Newton-Picard et construire une vraie solution à partir de w_ρ . Soient $Y \in T_u\mathcal{P}(x, y)$ et $Z \in T_v\mathcal{P}(y, z)$. On définit, de façon analogue à w_ρ ,

$$Y \#_\rho Z \in T_{w_\rho}\mathcal{P}(x, z) = W^{1,p}(w_\rho^*TW)$$

⁽¹⁾Une convention que nous aurions aussi pu faire à d'autres endroits.

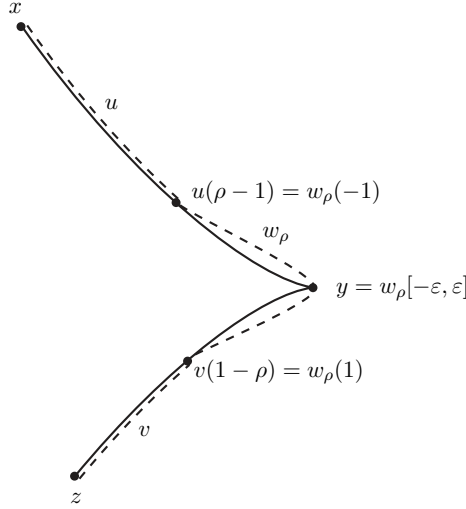


FIGURE 4

par

$$Y \#_{\rho} Z(s, t) = \begin{cases} Y(s + \rho, t) \\ T \exp_{y(t)} \left(\beta^{-}(s) T_{u(s+\rho, t)} \exp_{y(t)}^{-1}(Y(s + \rho, t)) \right. \\ \quad \left. + \beta^{+}(s) T_{v(s-\rho, t)} \exp_{y(t)}^{-1}(Z(s - \rho, t)) \right) \\ Z(s - \rho, t) \end{cases}$$

suivant que s est, respectivement, ≤ -1 , dans $[-1, 1]$ ou ≥ 1 . Pour ne pas allonger démesurément la formule, nous n'y avons pas fait figurer le point où est prise l'application tangente à l'exponentielle, c'est-à-dire ici $\beta^{-}(s) \exp_{y(t)}^{-1}(u(s + \rho, t)) + \beta^{+}(s) \exp_{y(t)}^{-1}(v(s - \rho, t))$.

Remarque 9.3.1. On peut considérer la construction de w_{ρ} à partir de u et v comme une application

$$\#_{\rho} : \mathcal{C}^{\infty}(x, y) \times \mathcal{C}^{\infty}(y, z) \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}(x, z).$$

On peut alors aussi considérer $Y \#_{\rho} Z$ comme l'image de (Y, Z) par l'application tangente

$$T_{(u, v)} \#_{\rho} : T_u \mathcal{P}(x, y) \times T_v \mathcal{P}(y, z) \longrightarrow T_{w_{\rho}} \mathcal{P}(x, z).$$

Le champ de vecteurs $Y \#_{\rho} Z$ jouit de propriétés analogues à celles de w_{ρ} , à savoir :

(1) On l'a dit, $Y \#_{\rho} Z \in T_{w_{\rho}} \mathcal{P}(x, z)$, et c'est une application continue comme élément de $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$;

- (2) pour $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $Y \#_\rho Z = 0$;
- (3) on a $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} Y \#_\rho Z = 0$ dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$ (et dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ si Y et Z sont de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Ces constructions étant faites, passons à la construction de notre paramétrage $\widehat{\psi}$.

9.4. Construction de ψ

Pour tout $\rho \geq \rho_0$, on a construit un w_ρ dans $\mathcal{C}^\infty(x, z)$. Il est même dans $\mathcal{C}_\infty^\infty(x, z)$, grâce à la décroissance exponentielle (du § 8.9). On va maintenant définir, pour tout $\rho \geq \rho_0$, $\psi_\rho \in \mathcal{M}(x, z)$ (une vraie solution, donc), qui sera de la forme

$$\psi_\rho = \exp_{w_\rho} \gamma(\rho) \quad \text{pour un } \gamma(\rho) \in T_{w_\rho} \mathcal{P}(x, z) = W^{1,p}(w_\rho^* TW).$$

Remarque 9.4.1. Toujours en désignant par $\mathcal{F}$ l'opérateur « de Floer »

$$\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial s} + J \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H,$$

pour vérifier que ψ_ρ est bien une solution, il suffira de vérifier que $\mathcal{F}(\psi_\rho) = 0$ au sens faible. En effet, comme ψ_ρ sera automatiquement continue (puisque $\gamma(\rho) \in W^{1,p}(w_\rho^* TW)$ avec $p > 2$, $\gamma(\rho)$ est continue), donc solution forte et de classe $\mathcal{C}^\infty$, toujours en application de la régularité elliptique (l'énoncé 12.1.1).

Trivialisations. Nous allons écrire les équations en coordonnées. Pour ceci, il nous faut des trivialisations du fibré TW sur les applications considérées. Comme au chapitre 7, commençons par choisir des disques D_x , D_y et D_z bordés par nos lacets contractiles x , y et z . Puis fixons des trivialisations unitaires

- $(Z_i^u(s, t))_{i=1, \dots, 2n}$ le long de $u \cup D_x \cup D_y$ et
- $(Z_i^v(s, t))_{i=1, \dots, 2n}$ le long de $v \cup D_y \cup D_z$

qui coïncident le long de D_y . Il reste à définir une trivialisation compatible le long de w_ρ . Pour ce faire, on définit, d'abord, bien sûr, pour $\rho \geq \rho_0$,

$$Z_i^\rho(s, t) = \begin{cases} Z_i^u(s + \rho, t) & \text{si } s \leq -1 \\ Z_i^v(s - \rho, t) & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

On prolonge ensuite, pour $s \in [-1, 1]$, cette trivialisation en une trivialisation unitaire le long de w_ρ pour $\rho \in [\rho_0, +\infty[$ et de $y(t)$ pour $\rho = +\infty$ de façon que, le long de $y(t) = w_\rho(0, t)$, elle coïncide avec les restrictions à y de Z_i^u et de Z_i^v .

Bref, on a ainsi construit une (famille de) trivialisation(s) $Z_i^\rho(s, t)$ le long de w_ρ . Chacune coïncide avec Z_i^u ou Z_i^v pour $|s|$ assez grand et elles convergent (dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$) vers une trivialisation le long de y (voir la figure 5, sur laquelle l'axe des t a été omis). La famille $Z_i^\rho(s, t)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de ρ .

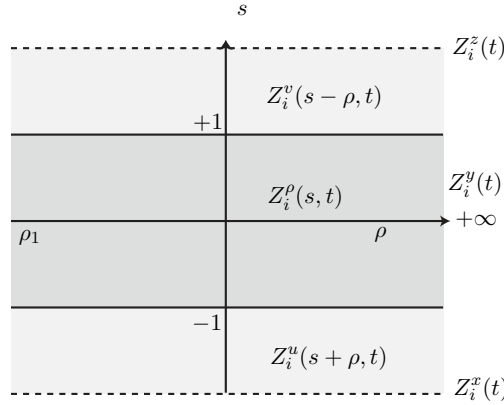


FIGURE 5

Ce n'est pas tout à fait terminé : nous avons besoin de trivialisations au voisinage de w_ρ . Pour tous ρ , s et t , et pour tout vecteur tangent $\xi \in T_{w_\rho(s,t)}W$ de norme inférieure au rayon d'injectivité, on construit en utilisant le transport parallèle (voir au besoin le §14.5) une base orthonormale (mais pas nécessairement unitaire) de $T_{\exp_{w_\rho(s,t)}(\xi)}W$, notée $(Z_i^{\rho,\xi}(s, t))_{i=1,\dots,2n}$.

Définition de $\mathcal{F}_\rho$. Pour tout $\rho \geq \rho_0$, on définit un opérateur

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \xrightarrow{\mathcal{F}_\rho} L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

$$(y_1, \dots, y_{2n}) \mapsto \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} + J \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H_t \right) (\exp_{w_\rho} \sum y_i Z_i^\rho) \right]_{Z_i}$$

formule dans laquelle le résultat est développé dans la base $Z_i^\rho, \sum y_i Z_i^\rho$ et dont on aura remarqué qu'elle ne définit pas un opérateur *linéaire*. L'application $\mathcal{F}_\rho$ n'est autre que

$$\mathcal{F}_\rho = \mathcal{F} \circ \exp_{w_\rho}$$

écrite dans les bases Z_i .

Remarque 9.4.2. L'application $\mathcal{F}_\rho$ est bien définie sur les vecteurs $(y_1, \dots, y_{2n})$ de la boule

$$B(0, r_0/K) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

où r_0 a été choisi inférieur au rayon d'injectivité de la métrique utilisée sur W et K est la norme de l'injection de $W^{1,p}$ dans L^∞ (en utilisant les notations du §8.2, celles avec lesquelles nous avons défini la structure de variété de Banach de $\mathcal{P}(x, y)$).

On a, bien sûr, $\mathcal{F}_\rho(0) = [\mathcal{F}(w_\rho)]_{Z_t^\rho}$. De plus, comme u et v sont des solutions de l'équation de Floer, on a

$$\mathcal{F}(w_\rho) = \frac{\partial w_\rho}{\partial s} + J \frac{\partial w_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{w_\rho} H_t = 0 \quad \text{pour } |s| \geq 1.$$

Sur $[-1, 1]$, $w_\rho(s, t)$ tend uniformément (dans la topologie $\mathcal{C}^\infty$) vers $y(t)$. Donc, puisque $\mathcal{F}(y) = 0$, $\mathcal{F}(w_\rho)$ tend vers 0 quand ρ tend vers $+\infty$, en $\mathcal{C}^\infty$ comme en L^p .

La méthode de Newton-Picard, idée générale. Nous cherchons $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ qui soit solution de l'équation $\mathcal{F}_\rho(\gamma) = 0$. Nous venons de remarquer que, si l'on n'a pas $\mathcal{F}_\rho(0) = 0$, l'origine 0 est « presque » une solution de l'équation. Nous allons utiliser cette solution approximative comme point de départ pour construire une vraie solution en utilisant la méthode de Newton-Picard.

Dans le cas des fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, on sait que celle-ci permet de trouver un zéro α de f à partir d'une solution approchée x_0 comme limite de la suite récurrente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Une variante est de trouver α comme limite de la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

qui présente l'avantage de n'utiliser qu'une valeur de la dérivée et que nous allons utiliser ici dans le cas de $\mathcal{F}_\rho$. Les deux méthodes sont représentées sur la figure 6.

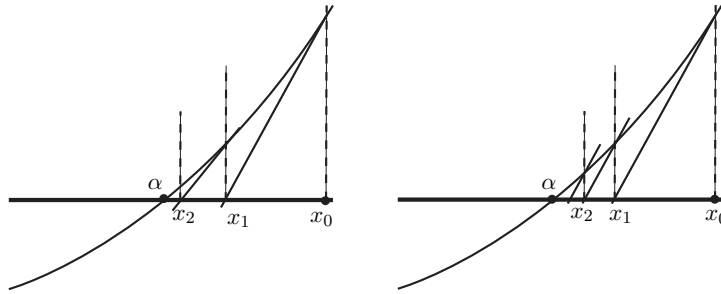


FIGURE 6

Linéarisation de $\mathcal{F}_\rho$. Nous déterminons donc maintenant ce qui va jouer le rôle de la dérivée $f'(x_0)$ dans la méthode de Newton-Picard. Notons L_ρ l'opérateur linéarisé $(d\mathcal{F}_\rho)_0$ en 0 de $\mathcal{F}_\rho$,

$$L_\rho : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Proposition 9.4.3. *L'opérateur L_ρ est un opérateur de Fredholm d'indice 2.*

Démonstration. Nous l'avons remarqué au chapitre précédent (c'est la remarque 8.4.5), la différentielle de $\mathcal{F}$ est de la forme

$$(d\mathcal{F})_u = \bar{\partial} + S(s, t)$$

pour tout u (et pas seulement pour les solutions de l'équation de Floer). Dans nos trivialisations, nous avons donc

$$L_\rho(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S_\rho(s, t)Y$$

pour une application

$$S_\rho : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow M_{2n}(\mathbf{R}).$$

Comme nous avons choisi la trivialisations le long de w_ρ de façon compatible avec celles le long de u et de v , nous avons que

$$S_\rho(s, t) = \begin{cases} S^u(s + \rho, t) & \text{pour } s \leq -1 \\ S^v(s + \rho, t) & \text{pour } s \geq 1 \end{cases}$$

où S^u et S^v sont les matrices correspondant aux linéarisations de $\mathcal{F}$ le long de u et v dans les trivialisations Z_i^u et Z_i^v . De sorte qu'en particulier, pour ρ tendant vers l'infini, S_ρ tend vers les chemins de matrices symétriques définis par les points critiques x et z :

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} S_\rho(s, t) = S^x(t) \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} S_\rho(s, t) = S^z(t).$$

Il ne reste qu'à appliquer les résultats du chapitre précédent (précisément les théorèmes 8.7.1 et 8.8.1) : L_ρ est un opérateur de Fredholm d'indice $\mu(x) - \mu(z) = 2$. $\square$

Idée de la construction de ψ . Dans la formule définissant la suite récurrente utilisée dans la méthode de Newton-Picard, le terme $1/f'(x_0)$ correspond dans notre situation à un inverse de l'application linéarisée L_ρ . Le fait que celle-ci soit d'indice 2 l'empêche d'être inversible. Nous allons donc trouver un supplémentaire $W_\rho^\perp$ de $\text{Ker } L_\rho$ dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tel que $L_\rho|_{W_\rho^\perp}$ soit inversible (autrement dit, nous déterminerons un inverse à droite pour L_ρ). Nous appliquerons la méthode de Newton-Picard en partant de la solution approchée 0 pour trouver une solution de $\mathcal{F}_\rho(\gamma) = 0$.

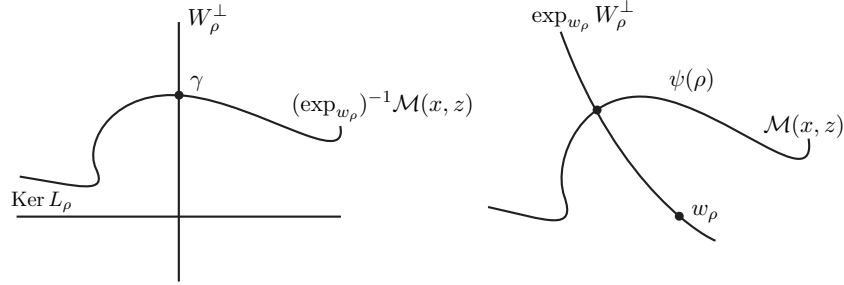


FIGURE 7

Rien d'étonnant à ce que nous devions utiliser un tel sous-espace $W_\rho^\perp$: nous savons que $\mathcal{M}(x, z)$ est une variété de dimension 2, nous cherchons donc pour tout ρ un élément $\gamma \in (\exp_{w_\rho})^{-1}\mathcal{M}(x, z)$, sous-variété de dimension 2 de $T_{w_\rho}\mathcal{P}(x, z)$. Il est naturel de déterminer un tel γ en intersectant cette sous-variété avec un sous-espace de codimension 2, notre $W_\rho^\perp$ (on montrera en effet que $\dim \text{Ker } L_\rho = 2$). Ce qui est schématisé sur la figure 7.

Nous obtiendrons donc le chemin $\psi(\rho)$ comme intersection dans $\mathcal{P}(x, z)$ de $\mathcal{M}(x, z)$ et de l'espace

$$\{\exp_{w_\rho} W_\rho^\perp \mid \rho \geq \rho_0\}.$$

Ce sous-espace est de codimension 1, c'est l'image du fibré $W^\perp$ des $W_\rho^\perp$ sur w_ρ , un sous-fibré de codimension 2 de $w^*T\mathcal{P}(x, z)$. Ce qui, à nouveau, est schématisé sur la figure 8.

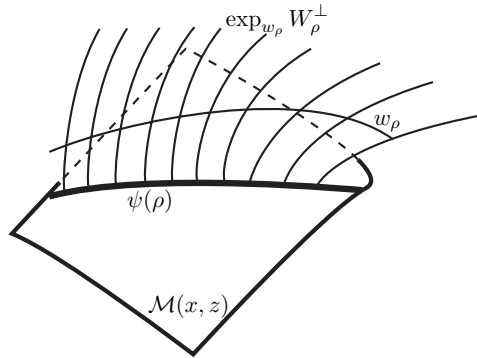


FIGURE 8

La méthode de Newton-Picard (abstraite). Voici l'énoncé précis que nous utiliserons.

Lemme 9.4.4. Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $F : X \rightarrow Y$ une application continue. On écrit

$$F(x) = F(0) + L(x) + N(x)$$

où $L(x) = (dF)_0(x)$ et on suppose qu'il existe $G : Y \rightarrow X$, continue telle que

- (1) $L \circ G = \text{Id}$;
- (2) $\|GN(x) - GN(y)\| \leq C(\|x\| + \|y\|) \|x - y\|$ pour tous $x, y \in B(0, r)$;
- (3) $\|GF(0)\| \leq \varepsilon/2$ où $\varepsilon = \min(r, 1/5C)$.

Alors il existe un unique $\alpha \in \text{Im}(G) \cap B(0, \varepsilon)$ tel que $F(\alpha) = 0$. De plus, on a $\|\alpha\| \leq 2\|GF(0)\|$.

Démonstration. En gardant la méthode de Newton-Picard classique en tête, définissons $\varphi : B(0, \varepsilon) \rightarrow \text{Im}(G)$ par

$$\varphi(x) = G(L(x) - F(x)) = -G(F(0) + N(x)).$$

Remarquons que

$$L\varphi(x) = L(x) - F(x).$$

Donc, si $\varphi(x) = x$, $F(x) = 0$. Réciproquement, si $F(x) = 0$ et $x = G(y)$, alors

$$\varphi(x) = GL(x) = GLG(y) = G(y) = x.$$

Nous allons donc montrer que φ a un unique point fixe dans $B(0, \varepsilon)$.

D'abord, φ envoie la boule de rayon ε dans elle-même : si $\|x\| \leq \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| &= \|G(F(0) + N(x))\| \leq \|GF(0)\| + \|GN(x)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + C\|x\|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + C\varepsilon^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{5} < \varepsilon, \end{aligned}$$

suite d'inégalités pour lesquelles on a utilisé les propriétés (2) et (3) ainsi que le fait que $N(0) = 0$.

Ensuite, si x et y sont deux points de la boule $B(0, \varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| &= \|GN(x) - GN(y)\| \leq C(\|x\| + \|y\|) \|x - y\| \\ &\leq 2C\varepsilon \|x - y\| \\ &\leq \frac{2}{5} \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Ainsi la suite définie par

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers une limite α qui est un point fixe de φ et qui est l'unique point fixe à cause de l'inégalité que nous venons de démontrer.

Pour finir, démontrons l'inégalité affirmée dans l'énoncé du lemme. On a

$$\frac{1}{2} \|\alpha\| = \frac{1}{2} \|\alpha - 0\| \geq \|\varphi(\alpha) - \varphi(0)\| = \|\alpha - \varphi(0)\| \geq \|\alpha\| - \|\varphi(0)\|.$$

Il s'ensuit que

$$\|\alpha\| \leq 2 \|\varphi(0)\| = 2 \|GF(0)\|. \quad \square$$

Application du lemme. Nous allons appliquer le lemme 9.4.4 à l'application

$$\mathcal{F}_\rho : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Il nous faut donc déterminer un inverse à droite G_ρ de la différentielle L_ρ en 0, et vérifier que ce G_ρ satisfait aux hypothèses du lemme. Comme nous l'avons dit, nous allons obtenir G_ρ à l'aide d'un sous-espace $W_\rho^\perp$. Nous commençons donc par définir celui-ci.

Les différentielles $(d\mathcal{F})_u$ et $(d\mathcal{F})_v$, dans les trivialisations Z_i^u et Z_i^v , sont notées L^u , L^v ; on considère, *via* ces trivialisations,

$$\text{Ker } L^u \subset T_u\mathcal{P}(x, y) \quad \text{et} \quad \text{Ker } L^v \subset T_v\mathcal{P}(y, z).$$

On définit W_ρ comme la « somme $\#_\rho$ » de ces sous-espaces,

$$W_\rho = \{\alpha \#_\rho \beta \mid \alpha \in \text{Ker } L^u, \beta \in \text{Ker } L^v\}.$$

On définit ensuite $W_\rho^\perp$ comme son orthogonal, c'est-à-dire comme

$$W_\rho^\perp = \left\{ Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \mid \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle Y, \alpha \#_\rho \beta \rangle ds dt = 0 \text{ pour tous } \alpha \in \text{Ker } L^u, \beta \in \text{Ker } L^v \right\},$$

(toujours en utilisant le repère $(Z_i^\rho)_{i=1,\dots,2n}$ pour considérer $\alpha \#_\rho \beta$ comme un élément de $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$).

Remarques 9.4.5.

(1) Les deux solutions u et v de l'équation de Floer relient des points critiques d'indices consécutifs. Comme la paire (H, J) est régulière, nous savons donc que L^u et L^v sont surjectifs. Comme leurs indices de Fredholm valent 1, les noyaux de L^u et de L^v sont de dimension 1. Grâce à la remarque 8.4.8, nous pouvons donc affirmer que

$$\text{Ker } L^u = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{et} \quad \text{Ker } L^v = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial v}{\partial s}$$

(où l'utilisation des repères (Z_i^u) , (Z_i^v) est sous-entendue).

(2) Comme on a, grâce à la décroissance exponentielle (§ 8.9),

$$\sup \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right| \right) \leq K e^{-\delta|s|},$$

les vecteurs $\partial u/\partial s$ et $\partial v/\partial s$ sont dans L^q pour tout $q \geq 1$, donc

$$\forall Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}), \forall \alpha \in \text{Ker } L^u, \forall \beta \in \text{Ker } L^v, \quad \langle Y, \alpha \#_\rho \beta \rangle \in L^1.$$

(3) L'espace $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ est somme directe de W_ρ et de $W_\rho^\perp$. C'est un fait simple et assez général que l'on peut énoncer sous forme d'un lemme :

Lemme 9.4.6. *On suppose que $1/p + 1/q = 1$. Soit E un sous-espace de dimension finie de $W^{1,p} \cap L^q$. Soit*

$$E^\perp = \left\{ Y \in W^{1,p} \mid \int \langle Y, X \rangle ds dt = 0 \text{ pour tout } X \in E \right\}.$$

Alors $W^{1,p} = E \oplus E^\perp$.

En effet, il est clair que ces deux sous-espaces ne se rencontrent qu'en 0. Puis, par l'inégalité de Hölder, comme $E \subset L^p \cap L^q$, on a $E \subset L^2$. Il suffit maintenant de choisir une base orthonormale $\{e_1, \dots, e_r\}$ de E , grâce à laquelle tout élément Z de $W^{1,p}$ satisfait à

$$Z - \langle e_1, Z \rangle e_1 - \dots - \langle e_r, Z \rangle e_r \in E^\perp$$

d'où le résultat annoncé. $\square$

Comme W_ρ est l'image de l'espace de dimension 2, $\text{Ker } L^u \times \text{Ker } L^v$, par l'application linéaire $\#_\rho$, nous savons que $\dim W_\rho \leq 2$, de sorte que le lemme s'applique.

La proposition ci-dessous est importante. Elle permet de définir G_ρ et de vérifier les hypothèses du lemme.

Proposition 9.4.7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $\rho \geq \rho_0$,*

$$\forall Y \in W_\rho^\perp, \quad \|L_\rho(Y)\|_{L^p} \geq C \|Y\|_{W^{1,p}}.$$

Voici tout d'abord une liste de conséquences de cette proposition. On suppose $\rho \geq \rho_0$.

(1) D'abord, on a clairement $\text{Ker } L_\rho \cap W_\rho^\perp = 0$.

(2) L'application L_ρ est surjective et $\dim \text{Ker } L_\rho = \dim W_\rho = 2$. En effet, on a toujours

$$\dim \text{Ker } L_\rho \geq \text{Ind}(L_\rho) = 2$$

et

$$\text{codim } W_\rho^\perp = \dim W_\rho \leq \dim(\text{Ker } L^u \times \text{Ker } L^v) = 2$$

et la première propriété transforme ces deux inégalités en égalités. On a ainsi

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) = \text{Ker } L_\rho \oplus W_\rho^\perp.$$

On peut dire, intuitivement, que le noyau de $(d\mathcal{F})_{u\#_\rho v}$ est proche de $\text{Ker}(d\mathcal{F})_u \#_\rho \text{Ker}(d\mathcal{F})_v$ quand ρ est assez grand.

(3) Par conséquent,

$$L_\rho : W_\rho^\perp \cong W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) / \text{Ker } L_\rho \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) = \text{Im } L_\rho$$

est bijective. On pose

$$G_\rho = L_\rho^{-1} : L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow W_\rho^\perp.$$

(4) Cette application G_ρ est continue, puisqu'en effet la proposition affirme que

$$\|G_\rho(Y)\|_{W^{1,p}} \leq \frac{1}{C} \|L_\rho G_\rho(Y)\|_{L^p} = \frac{1}{C} \|Y\|_{L^p}.$$

Les hypothèses (2) et (3) du lemme 9.4.4 sont aussi des conséquences de la proposition :

(1) Vérifions maintenant l'hypothèse (2) du lemme (en omettant ρ dans l'écriture). On a

$$\|GNx - GNy\| \leq C^{-1} \|N(x) - N(y)\| \leq C^{-1} \sup_{z \in [x,y]} \|(dN)_z\| \|x - y\|$$

par l'inégalité des accroissements finis. Le fait que $\|(dN)_z\|$ soit, sur le segment $[x, y]$, bornée par $K \|z\|$ où K est indépendant de ρ , de x et de y , est conséquence du lemme 9.4.8, un des lemmes techniques démontrés au chapitre 13 (au § 13.2),

$$\|(dN)_z\| \leq K \|z\|$$

(voir le chapitre 13) puisque

$$(dN)_z = (d\mathcal{F})_z - (d\mathcal{F})_0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|GNx - GNy\| &\leq C^{-1} \|N(x) - N(y)\| \\ &\leq C^{-1} K \sup_{z \in [x,y]} \|z\| \|x - y\| \\ &\leq C^{-1} K (\|x\| + \|y\|) \|x - y\| \end{aligned}$$

et l'hypothèse (2) est bien satisfaite.

Lemme 9.4.8. Soit $r_0 > 0$. Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $\rho \geq \rho_0$ et pour tout $Z \in \overline{B}(0, r_0) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on ait

$$\|(d\mathcal{F}_\rho)_Z - (d\mathcal{F}_\rho)_0\|^{\text{op}} \leq K \|Z\|_{W^{1,p}}.$$

(2) Vérifions enfin la condition (3) du lemme. On a

$$\|G_\rho \mathcal{F}_\rho(0)\| \leq C^{-1} \|\mathcal{F}_\rho(0)\| = C^{-1} \|\mathcal{F}(w_\rho)\|$$

qui tend vers 0 quand ρ tend vers l'infini, de sorte que l'on a bien $\|G_\rho \mathcal{F}_\rho(0)\| \leq \varepsilon/2$ pour ρ assez grand. On peut appliquer le lemme de Newton-Picard.

Démonstration de la proposition 9.4.7. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite (ρ_n) tendant vers l'infini et $Y_n \in W_{\rho_n}^\perp$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|L_{\rho_n} Y_n\|_{L^p}}{\|Y_n\|_{W^{1,p}}} = 0.$$

En normalisant, nous supposons que $\|Y_n\| = 1$.

Lemme 9.4.9. Soit $K = [-a, a] \times S^1 \subset \mathbf{R} \times S^1$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}(K)} = 0.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur

$$D : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

défini par

$$D(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s}(s, t) + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t}(s, t) + S^y(t) \cdot Y(s, t)$$

où $t \mapsto S^y(t)$ est le chemin de matrices symétriques correspondant à la trivialisation choisie le long du lacet y . Comme nous le savons déjà,

$$(d\mathcal{F})_{w_\rho}(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} - (dJ)_{w_\rho}(Y) \frac{\partial w_\rho}{\partial t} + d(\text{grad}_{w_\rho} H_t)(Y).$$

Comme w_ρ tend vers y (au sens $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$) quand ρ tend vers l'infini, la partie d'ordre 0 de cet opérateur tend vers la partie d'ordre 0 de $(d\mathcal{F})_y$. Comme nous avons choisi les trivialisations de façon que $Z_i^\rho(s, t)$ tende vers $Z_i^y(t)$ (toujours au sens $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$), on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} S_\rho(s, t) = S^y(t) \text{ au sens } \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty.$$

Posons $r_n = \rho_n/2$, choisissons une fonction plateau γ qui vaut 1 pour $|s| \leq 1/2$ et 0 pour $|s| \geq 1$ et définissons enfin $\gamma_n(s) = \gamma(s/r_n)$.

Montrons que $D(\gamma_n Y_n)$ tend vers 0 en norme L^p . On a en effet

$$\begin{aligned} \|D(\gamma_n Y_n)\|_{L^p} &= \left\| \gamma_n D(Y_n) + \frac{1}{r_n} \dot{\gamma} Y_n \right\|_{L^p} \\ &\leq \frac{1}{r_n} \|\dot{\gamma} Y_n\|_{L^p} + \|\gamma_n D(Y_n)\|_{L^p} \\ &\leq \frac{M}{r_n} \|Y_n\|_{L^p} + \|D(Y_n)\|_{L^p([-r_n, r_n] \times S^1)} \end{aligned}$$

où M est la borne supérieure de $|\dot{\gamma}(s)|$ sur $\mathbf{R}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|D(\gamma_n Y_n)\|_{L^p} &\leq \frac{M}{r_n} \|Y_n\|_{L^p} + \|(D - L_{\rho_n})Y_n\|_{L^p([-r_n, r_n] \times S^1)} \\ &\quad + \|L_{\rho_n}(Y_n)\|_{L^p([-r_n, r_n] \times S^1)} \\ &\leq \frac{M}{r_n} \|Y_n\|_{L^p} + \|(S^y - S_{\rho_n})Y_n\|_{L^p([-r_n, r_n] \times S^1)} \\ &\quad + \|L_{\rho_n}(Y_n)\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Comme $\|Y_n\|_{L^p} \leq \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 1$ et comme $\|L_{\rho_n}(Y_n)\|_{L^p}$ tend vers 0, cela donne

$$\|D(\gamma_n Y_n)\|_{L^p} \leq \|(S^y - S_{\rho_n})Y_n\|_{L^p} + \tau_n$$

pour un $\tau_n \geq 0$ tendant vers 0 quand n tend vers l'infini. On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} \|(S^y - S_{\rho_n})Y_n\|_{L^p([-r_n, r_n] \times S^1)} &\leq \sup_{(s,t) \in [-r_n, r_n] \times S^1} \|S_{\rho_n}(s, t) - S^y(t)\| \|Y_n\|_{L^p} \\ &\leq \sup_{(s,t) \in [-r_n, r_n] \times S^1} \|S_{\rho_n}(s, t) - S^y(t)\|. \end{aligned}$$

Pour $s \leq -1$, $S_{\rho_n}(s, t) = S^u(s + \rho_n, t)$, donc le supremum, pour $(s, t) \in [-r_n, -1] \times S^1$, de $\|S_{\rho_n}(s, t) - S^y(t)\|$ est égal à

$$\sup_{(s,t) \in [-r_n, -1] \times S^1} \|S^u(s + \rho_n, t) - S^y(t)\|,$$

c'est-à-dire à

$$\sup_{(s,t) \in [r_n, \rho_n - 1] \times S^1} \|S^u(s, t) - S^y(t)\|$$

et ce supremum tend donc vers 0. De même, pour $s \geq 1$, en utilisant le fait que $S_{\rho_n}(s, t) = S^v(s - \rho_n, t)$, on vérifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{(s,t) \in [1, r_n] \times S^1} \|S_{\rho_n}(s, t) - S^y(t)\| = 0.$$

Enfin on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{(s,t) \in [-1, 1] \times S^1} \|S_{\rho_n}(s, t) - S^y(t)\| = 0$$

puisque $S_{\rho_n}(s, t)$ tend vers $S^y(t)$ au sens $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$. Nous avons bien montré que $D(\gamma_n Y_n)$ tend vers 0 en norme L^p , ce qui va nous permettre d'achever la démonstration du lemme.

Nous savons (voir la proposition 8.7.3 dans la démonstration du fait que $\mathcal{F}$ est un opérateur de Fredholm) que $D : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \rightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ est inversible. Du fait que $\|D(\gamma_n Y_n)\|_{L^p}$ tend vers 0, on déduit que $\|\gamma_n Y_n\|_{W^{1,p}}$ tend vers 0 et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}(K)} = 0,$$

ce qui achève en effet la démonstration du lemme. $\square$

Lequel lemme affirme, puisque la norme $W^{1,p}$ de Y_n vaut 1, que son support tend à se concentrer vers $|s| \rightarrow +\infty$.

Nous allons utiliser les relations entre L_{ρ_n} , L^u et L^v pour $|s|$ assez grand.

Lemme 9.4.10. *Soient $\beta^\pm$ les deux fonctions utilisées pour fabriquer la solution approchée w_ρ . Il existe des champs de vecteurs $Y \in \text{Ker } L^u$ et $Z \in \text{Ker } L^v$ tels que, à extraction de sous-suites près,*

$$\beta^-(s - \rho_n + 1)Y_n(s - \rho_n, t) \text{ tend vers } Y \text{ dans } W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

et

$$\beta^+(s + \rho_n - 1)Y_n(s + \rho_n, t) \text{ tend vers } Z \text{ dans } W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Démonstration. Rappelons que $\beta^-(s + 1) = 0$ pour $s \geq -1$, ce qui fait que $\beta^-(s + 1)Y_n(s, t)$ est à support dans $]-\infty, -1] \times S^1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \|L^{u(s+\rho_n, t)}(\beta^-(s+1)Y_n(s, t))\|_{L^p} &= \|L_{\rho_n}(\beta^-(s+1)Y_n(s, t))\|_{L^p} \\ &= \|\dot{\beta}^-(s+1)Y_n(s, t) + \beta^-(s+1)L_{\rho_n}(Y_n(s, t))\|_{L^p} \\ &\leq \sup \dot{\beta}^- \|Y_n\|_{L^p([-1, 1] \times S^1)} + \|L_{\rho_n}Y_n\|_{L^p} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 d'après le lemme 9.4.9. Remplacer s par $s - \rho_n$ donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L^u(\beta^-(s - \rho_n + 1)Y_n(s - \rho_n, t))\|_{L^p} = 0.$$

De manière analogue, on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L^v(\beta^+(s + \rho_n - 1)Y_n(s + \rho_n, t))\|_{L^p} = 0.$$

La démonstration du lemme 9.4.10 est alors conséquence directe du lemme général suivant.

Lemme 9.4.11. *Soit $D : E \rightarrow F$ un opérateur (linéaire) de Fredholm. Soit (x_n) une suite bornée d'éléments de E telle que la suite $(D(x_n))$ tende vers 0 dans F . Alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers un élément x de $\text{Ker } D \subset E$.*

Démonstration. Puisque D est de Fredholm, nous savons qu'il existe un opérateur D' tel que

$$D' \circ D = \text{Id} + K,$$

où K est un opérateur de rang fini (c'est la proposition 16.2.5), ce dont il suit que la suite $(x_n + K(x_n))$ tend vers 0. À extraction d'une sous-suite près, la suite $(K(x_n))$ est convergente, ce qui fournit une sous-suite de (x_n) qui converge. $\square$

Ce qui achève la démonstration du lemme 9.4.10. $\square$

Et nous amène à l'énoncé d'un autre lemme.

Lemme 9.4.12. *Les suites $\beta^-(s+1)Y_n(s,t)$ et $\beta^+(s-1)Y_n(s,t)$ convergent vers 0 dans $W^{1,p}$.*

Démonstration. Soit $Y \in \text{Ker } L^u$ un champ de vecteurs donné par le lemme 9.4.10. On forme $Y \#_{\rho} 0$, qui est un élément de W_{ρ} . Le lemme 9.4.10 affirme que $\beta^-(s - \rho_n + 1)Y_n(s - \rho_n, t)$ tend vers Y (dans $W^{1,p}$), de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\beta^-(s+1)Y_n(s,t) - Y(s+\rho_n,t)\|_{W^{1,p}} = 0,$$

et qu'en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\beta^-(s+1)Y_n(s,t) - Y \#_{\rho_n} 0\|_{W^{1,p}([-\infty, -1] \times S^1)} = 0.$$

Ensuite $\beta^-(s+1)Y_n(s,t) - Y \#_{\rho_n} 0$ est à support dans $]-\infty, 0] \times S^1$ et $Y \#_{\rho_n} 0$ tend vers 0 au sens $\mathcal{C}_{\text{loc}}^{\infty}$ donc aussi au sens $W^{1,p}([-1, 0] \times S^1)$. Remarquons en effet que Y est dans le noyau de L^u , donc $\mathcal{C}^{\infty}$ (par régularité elliptique) et que Y est un multiple scalaire de $\partial u / \partial s$. On obtient donc, en utilisant aussi le lemme 9.4.9 que $\|\beta^-(s+1)Y_n(s,t) - Y \#_{\rho_n} 0\|_{W^{1,p}}$ tend vers 0.

Comme Y est à décroissance exponentielle, il est dans L^q pour tout $q \geq 1$ ainsi que $Y \#_{\rho_n} 0$. Avec $1/p + 1/q = 1$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle \beta^-(s+1)Y_n(s,t) - Y \#_{\rho_n} 0(s,t), Y \#_{\rho_n} 0(s,t) \rangle ds dt \right| \\ & \leq \|\beta^-(s+1)Y_n(s,t) - Y \#_{\rho_n} 0(s,t)\|_{L^p} \|Y \#_{\rho_n} 0\|_{L^q}. \end{aligned}$$

La norme $\|Y \#_{\rho_n} 0\|_{L^q}$ est bornée par $\|Y\|_{L^q}$ dans $L^q([-\infty, -1] \times S^1)$ et tend vers 0 dans $L^q([-1, +\infty[\times S^1)$, de sorte qu'elle est uniformément bornée. On obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle \beta^-(s+1)Y_n(s,t) - Y \#_{\rho_n} 0(s,t), Y \#_{\rho_n} 0(s,t) \rangle ds dt = 0.$$

Comme $Y \#_{\rho_n} 0 \in W_{\rho_n}$ et $Y_n \in W_{\rho_n}^{\perp}$, on a

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle Y_n, Y \#_{\rho_n} 0 \rangle ds dt = 0.$$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle (1 - \beta^-(s+1))Y_n(s,t) - Y \#_{\rho_n} 0(s,t) \rangle ds dt = 0$$

puisque le terme à intégrer est à support dans $[-1, 0] \times S^1$ et, comme ci-dessus en utilisant l'inégalité de Hölder, que le module de l'intégrale est majoré par

$$\|Y_n\|_{L^p([-1, 0] \times S^1)} \cdot \|Y \#_{\rho_n} 0\|_{L^q([-1, 0] \times S^1)}.$$

Cela tend vers 0 en application du lemme 9.4.9. Les deux relations ci-dessus impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle \beta^-(s+1)Y_n(s, t), Y \#_{\rho_n} 0 \rangle ds dt = 0$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle Y \#_{\rho_n} 0, Y \#_{\rho_n} 0 \rangle ds dt = 0.$$

Pour $s \leq -1$, $Y \#_{\rho_n} 0(s, t) = Y(s + \rho_n, t)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{S^1} \int_{-\infty}^{-1} \langle Y(s + \rho_n, t), Y(s + \rho_n, t) \rangle ds dt = 0,$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{S^1} \int_{-\infty}^{-1+\rho_n} \|Y(s, t)\|^2 ds dt = 0$$

et enfin $Y = 0$ et $\|\beta^-(s+1)Y_n(s, t)\|_{W^{1,p}}$ tend vers 0. On montre de manière analogue qu'il en est de même de $\|\beta^+(s-1)Y_n(s, t)\|_{W^{1,p}}$. Ce qui achève la démonstration du lemme 9.4.12. $\square$

Et qui va nous permettre de finir celle de la proposition 9.4.7. On a

$$\begin{aligned} 1 &= \|Y_n(s, t)\|_{W^{1,p}} \\ &\leq \|\beta^-(s+1)Y_n(s, t)\|_{W^{1,p}} + \|\beta^+(s-1)Y_n(s, t)\|_{W^{1,p}} \\ &\quad + \|(1 - \beta^-(s+1) - \beta^+(s-1))Y_n(s, t)\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes tendent vers 0 en application du lemme 9.4.12 et le dernier aussi, en application, pour lui, du lemme 9.4.9. Ce qui est l'incontestable contradiction recherchée. $\square$

Nous pouvons donc appliquer la méthode de Newton-Picard et obtenir, pour tout $\rho \geq \rho_0$ un élément $\gamma(\rho)$ de $W_\rho^\perp$ qui vérifie $\mathcal{F}_\rho(\gamma(\rho)) = 0$. De plus, cet élément $\gamma(\rho)$ est unique dans $W_\rho^\perp \cap B(0, \varepsilon)$ où, rappelons-le, ε est indépendant de ρ (c'est le lemme 9.4.4). Remarquons aussi que l'on a :

Lemme 9.4.13.

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}} = 0.$$

Démonstration. En vertu du lemme « de Newton-Picard » 9.4.4, nous avons

$$\|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}} \leq 2 \|G_\rho \mathcal{F}_\rho(0)\|_{W^{1,p}} \leq 2C^{-1} \|\mathcal{F}_\rho(0)\|_{L^p} = 2C^{-1} \|\mathcal{F}(w_\rho)\|_{L^p}$$

qui tend vers 0 quand ρ tend vers l'infini. $\square$

Continuité et dérivabilité de γ . Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites. Notons

$$W(\varepsilon)^\perp = \{(\rho, Y) \mid \rho \geq \rho_0, Y \in W_\rho^\perp \text{ et } \|Y\| < \varepsilon\}$$

et définissons $F : W(\varepsilon)^\perp \rightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ par $F(\rho, Y) = \mathcal{F}_\rho(Y)$, de sorte que nous avons

$$F(\rho, \gamma(\rho)) = 0 \quad \text{pour tout } \rho \geq \rho_0.$$

Lemme 9.4.14. *Pour tout ρ assez grand (et plus grand que ρ_0), la dérivée*

$$(d_2 F)_{\rho, \gamma(\rho)} = (d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)}$$

est inversible.

Démonstration. Fixons ρ . La différentielle de $\mathcal{F}_\rho$ est une application linéaire

$$(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} : W_\rho^\perp \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Considérons l'inverse G_ρ de $(d\mathcal{F}_\rho)_0$ construit ci-dessus,

$$G_\rho : L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow W_\rho^\perp.$$

Pour la norme opératorielle, nous avons

$$\begin{aligned} \|G_\rho(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} - \text{Id}\| &= \|G_\rho(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} - G_\rho(d\mathcal{F}_\rho)_0\| \\ &\leq \|G_\rho\| \|(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} - (d\mathcal{F}_\rho)_0\| \\ &\leq C^{-1}K \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

grâce au lemme 9.4.8 que nous avons déjà utilisé. Comme nous avons vu (dans le lemme 9.4.13) que la norme $W^{1,p}$ de γ tend vers 0, nous pouvons en déduire que $G_\rho \circ (d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)}$ est inversible pour ρ assez grand et donc que $(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)}$ l'est aussi. $\square$

Ceci nous permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites et de conclure que γ est continue et dérivable pour ρ assez grand. Démontrons maintenant :

Proposition 9.4.15.

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} = 0.$$

Démonstration. Comme $F(\rho, \gamma(\rho)) = 0$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \gamma(\rho)) + (d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} &\leq \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} - G_\rho(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} + \left\| G_\rho(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} \\ &\leq \|G_\rho(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} - \text{Id}\| \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} + \left\| G_\rho \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \gamma(\rho)) \right\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Puis, comme dans la démonstration du lemme 9.4.14, on a

$$\|G_\rho(d\mathcal{F}_\rho)_{\gamma(\rho)} - \text{Id}\| \leq C^{-1}K \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}}.$$

On utilise maintenant le lemme (un des lemmes techniques démontrés au chapitre 13) :

Lemme 9.4.16. *Soit $r_0 > 0$. Il existe une constante $M > 0$ (indépendante de ρ) telle que pour tout $\rho \geq \rho_0$ et tout $Z \in \overline{B}(0, r_0) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on ait*

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, Z) - \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, 0) \right\|_{L^p} \leq M \|Z\|_{W^{1,p}}.$$

Il permet les estimations

$$\begin{aligned} \left\| G_\rho \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \gamma(\rho)) \right) \right\| &\leq C^{-1} \left\| \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \gamma(\rho)) \right\| \\ &\leq C^{-1} \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \gamma(\rho)) - \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, 0) \right\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, 0) \right\|_{L^p} \right) \\ &\leq C^{-1} \left(M \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}} + \left\| \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, 0) \right\|_{L^p} \right) \\ &= C^{-1} \left(M \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}} + \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{F}(w_\rho) \right\|_{L^p} \right). \end{aligned}$$

Mais $\mathcal{F}(w_\rho) = 0$ pour $|s| \geq 1$. Pour $s \in [-1, 1]$, on a

$$w_\rho(s, t) = \exp_{y(t)} \left(\beta^-(s) \exp_{y(t)}^{-1}(u(s + \rho, t)) + \beta^+(s) \exp_{y(t)}^{-1}(v(s - \rho, t)) \right)$$

et par suite

$$\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}(s, t) = T \exp_{y(t)} \left(\beta^-(s) T \exp_{y(t)}^{-1} \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho) - \beta^+(s) T \exp_{y(t)}^{-1} \frac{\partial v}{\partial s}(s - \rho) \right).$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}(s, t) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}^\infty([-1, 1] \times S^1),$$

$$\text{donc} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{F}(w_\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (d\mathcal{F})_{w_\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} w_\rho \right) = 0.$$

Et finalement, on a l'estimation

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} (1 - C^{-1}K \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}}) \leq C^{-1} \left(M \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}} + \left\| \frac{\partial \mathcal{F}(w_\rho)}{\partial \rho} \right\|_{L^p} \right)$$

qui implique que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} = 0. \quad \square$$

Conclusion. Pour $\rho \geq \rho_0$, nous avons construit

$$\gamma(\rho) \in W_\rho^\perp \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}),$$

une fonction continue et dérivable de ρ telle que $\mathcal{F}_\rho(\gamma(\rho)) = 0$ et qui vérifie de plus

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} = 0.$$

Grâce à la trivialisations Z_i^ρ , on déduit de $\gamma(\rho)$ un champ de vecteurs le long de w_ρ , un élément, donc, de $T_{w_\rho} \mathcal{P}(x, z)$, encore noté $\gamma(\rho)$. Que nous transformons en un élément de $\mathcal{M}(x, z)$ par l'exponentielle,

$$\psi(\rho) = \exp_{w_\rho} \gamma(\rho) \in \mathcal{M}(x, z)$$

de façon que l'application $\rho \mapsto \psi(\rho)$ est une application différentiable et que $\psi(\rho)$ comme sa dérivée tendent vers 0 dans $W^{1,p}$ quand ρ tend vers l'infini.

En projetant ψ sur l'espace de trajectoires $\mathcal{L}(x, z)$, on obtient le désiré

$$\widehat{\psi} = \pi \circ \psi : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(x, z)$$

dont il reste à vérifier qu'il possède les propriétés attendues.

Lemme 9.4.17.

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\rho) = (\widehat{u}, \widehat{v}) \in \overline{\mathcal{L}}(x, z).$$

Démonstration. Considérons en effet une suite (ρ_n) tendant vers l'infini et

$$\psi_{\rho_n} = \psi(\rho_n) = \exp_{w_{\rho_n}}(\gamma(\rho_n)).$$

Pour $s \leq -1$, on a

$$\psi_{\rho_n}(s, t) = \exp_{u(s+\rho_n, t)} \gamma_{\rho_n}(s, t).$$

Soit K un compact dans $\mathbf{R} \times S^1$. Pour n assez grand et $(s, t) \in K$, on a $\psi_{\rho_n}(s - \rho_n, t) = \exp_{u(s, t)} \gamma_{\rho_n}(s - \rho_n, t)$ et

$$\|\gamma_{\rho_n}(s - \rho_n, t)\|_{W^{1,p}(K)} \leq \|\gamma_{\rho_n}(s - \rho_n, t)\|_{W^{1,p}} = \|\gamma_{\rho_n}(s, t)\|_{W^{1,p}}$$

dont nous avons vu (dans le lemme 9.4.13) qu'elle tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Puisque $W^{1,p}(K) \subset \mathcal{C}^0(K)$, on voit que γ_{ρ_n} tend vers 0 dans $\mathcal{C}^0(K)$ et donc $\psi_{\rho_n}(s - \rho_n, t)$ tend vers u dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0(\mathbf{R} \times S^1; W)$. Comme nos éléments sont dans $\mathcal{M}$, la convergence dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$ implique la convergence dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$, par la proposition 6.5.3. On démontre de façon analogue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_{\rho_n}(s + \rho_n, t) = v(s, t)$$

dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$. D'où il suit que $\widehat{\psi}_n$ tend bien vers $(\widehat{u}, \widehat{v})$. $\square$

Il reste à montrer que $\widehat{\psi}$ est une immersion injective (au moins pour ρ_n assez grand), ce que nous faisons dans le paragraphe suivant. Notons que le lemme 9.4.17 impliquera que cette immersion injective est propre et donc un plongement.

9.5. Propriétés de $\widehat{\psi} : \widehat{\psi}$ est une immersion

Nous voulons montrer que $\widehat{\psi}$ est une immersion. Il s'agit de vérifier que $\partial\psi/\partial\rho$ n'est pas dans le noyau de la projection $d\pi$. Ici π désigne le passage au quotient $\mathcal{M}(x, z) \rightarrow \mathcal{L}(x, z)$, de sorte que le noyau de $(d\pi)_\psi$ est engendré par $\partial\psi/\partial s$. Supposer que ψ n'est pas une immersion revient donc à supposer l'existence de suites (ρ_n) et (α_n) telles que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(\rho_n) = \alpha_n \frac{\partial\psi}{\partial s}(\rho_n).$$

Comme $\psi(\rho)$ est proche de w_ρ , on en déduira au § 13.6 le lemme :

Lemme 9.5.1. *La suite (α_n) est bornée et l'on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial\rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right)_{\rho_n} \right\|_{L^p} = 0.$$

Alors, pour $s \leq -1$, $w_\rho(s, t) = u(s + \rho, t)$, donc

$$\frac{\partial w_\rho}{\partial\rho} = \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho)$$

donc le lemme implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) - \alpha_n \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) \right\|_{L^p([-\infty, -1] \times S^1)} = 0,$$

d'où l'on déduit que α_n tend vers 1. En considérant de même les valeurs de $s \geq 1$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| -\frac{\partial v}{\partial s}(s - \rho_n, t) - \alpha_n \frac{\partial v}{\partial s}(s - \rho_n, t) \right\|_{L^p([1, +\infty[\times S^1)} = 0,$$

d'où l'on déduit cette fois que α_n tend vers -1 , la contradiction recherchée.

Ainsi, $\widehat{\psi}$ est une immersion (pour ρ assez grand). Mais elle est aussi injective : son image est contenue dans une composante connexe de la variété (de dimension 1) $\mathcal{L}(x, z)$, qui n'est pas compacte (puisque $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\rho) \notin \mathcal{L}(x, z)$). Cette composante est donc difféomorphe à un intervalle. Dans ce cas, une immersion $\widehat{\psi}$ est injective (par le théorème de Rolle).

9.6. Propriétés de $\widehat{\psi}$: unicité du recollement

Nous venons de montrer que la trajectoire brisée $(\widehat{u}, \widehat{v}) \in \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$ est l'extrémité d'un intervalle plongé dans $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ dont l'intérieur est dans une composante de $\mathcal{L}(x, z)$. Cela ne suffit pas pour conclure que $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ est une variété à bord de dimension 1, comme le montre la figure 9.

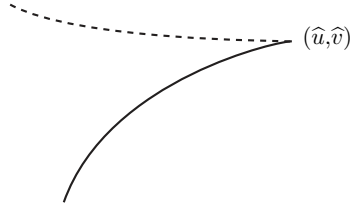


FIGURE 9

On doit encore montrer que la seule façon d'approcher $(\widehat{u}, \widehat{v})$ dans $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ (en dehors de la suite constante) est en passant par l'intervalle que nous venons de construire. C'est la dernière assertion de l'énoncé du théorème 9.2.3 (qui paraphrase l'énoncé correspondant dans le cas du complexe de Morse, c'est-à-dire la proposition 3.2.8) : si une suite dans $\mathcal{L}(x, z)$ converge vers $(\widehat{u}, \widehat{v})$, alors elle est dans l'image de $\widehat{\psi}$.

La difficulté vient ici du fait que la construction que nous avons faite du recollement et de l'application $\widehat{\psi}$ repose sur plusieurs choix arbitraires. Considérons par exemple une fonction ν de classe $\mathcal{C}^\infty$, de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ et telle que $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \nu(\rho) = +\infty$. On peut définir un pré-recollement $w_{\nu, \rho}$ en remplaçant $v(s - \rho)$ par $v(s - \nu(\rho))$ dans les formules que nous avons utilisées :

$$w_{\nu, \rho}(s, t) = \begin{cases} u(s + \rho, t) & \text{si } s \leq -1 \\ \exp_{y(t)} \left(\beta^-(s) \exp_{y(t)}^{-1} u(s + \rho, t) \right. \\ \quad \left. + \beta^+(s) \exp_{y(t)}^{-1} v(s - \nu(\rho), t) \right) & \text{si } s \in [-1, 1] \\ v(s - \nu(\rho)) & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

Les lecteurs sont invités à vérifier que, en reprenant la construction du recollement à partir de $w_{\nu, \rho}$, ils obtiennent bien une application continue

$$\psi_\nu : [\rho_\nu, +\infty[\longrightarrow \mathcal{M}(x, z)$$

telle que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \pi \circ \psi_\nu(\rho) = (\widehat{u}, \widehat{v}).$$

Ils vérifieront aussi que, si ν est croissante, l'application $\widehat{\psi}_\nu = \pi \circ \psi_\nu$ est une immersion injective. Le cas de $\widehat{\psi}$ est celui où $\nu = \text{Id}$.

Pour éviter la situation schématisée sur la figure 9, il est nécessaire de s'assurer que l'image de cette nouvelle application $\widehat{\psi}_\nu$ est contenue (pour ρ assez grand) dans celle du recollement $\widehat{\psi} = \widehat{\psi}_{\text{Id}}$ construit précédemment. Ce sera la première étape de notre démonstration qui en comportera quatre :

(1) La première étape, celle que nous venons de décrire, consiste à montrer :

Proposition 9.6.1. *Soit $\nu : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \nu(\rho) = +\infty$. Il existe un nombre $\rho_\nu > 0$ tel que, pour $\rho \geq \rho_\nu$, on a $\widehat{\psi}_\nu(\rho) \in \text{Im}(\widehat{\psi})$.*

(2) Pour la deuxième étape, considérons une suite $(\ell_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui tend vers $(\widehat{u}, \widehat{v})$ dans $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$, comme dans l'énoncé du théorème 9.2.3, nous voulons démontrer que $\ell_n \in \text{Im}(\widehat{\psi})$ pour n assez grand.

Remarque 9.6.2. Il suffit de démontrer qu'il existe une sous-suite $(\ell_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ telle que $\ell_{n_k} \in \text{Im}(\widehat{\psi})$ pour k assez grand.

Supposons en effet que la conclusion du théorème 9.2.3 soit fausse. On aurait une sous-suite ℓ_{n_k} qui ne serait pas dans l'image de $\widehat{\psi}$ mais qui tendrait vers $(\widehat{u}, \widehat{v})$ dans $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$. On pourrait alors en extraire une sous-suite contenue dans $\text{Im}(\widehat{\psi})$ à partir d'un certain rang, ce qui est contradictoire.

Dans les énoncés suivants les conclusions relatives à la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbf{N}}$ s'entendent donc à extraction d'une sous-suite près. Nous démontrons dans cette deuxième étape la proposition :

Proposition 9.6.3. *Il existe un relèvement $\widetilde{\ell}_n \in \mathcal{M}(x, z)$ de ℓ_n et une fonction croissante $\nu : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle que $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \nu(\rho) = +\infty$, de sorte que, pour tout $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$,*

$$\widetilde{\ell}_n(s, t) = \exp_{w_{\nu, \rho_n}(s, t)} Y_n(s, t)$$

où la suite (ρ_n) tend vers $+\infty$ et $Y_n \in w_{\nu, \rho_n}^ TW$ vérifie*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_\infty = 0.$$

La norme $\|Y_n\|_\infty$ est calculée en considérant Y_n comme une application

$$Y_n : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

à l'aide du plongement de W dans $\mathbf{R}^m$ que nous avons fixé et en utilisant la norme euclidienne de $\mathbf{R}^m$.

(3) La troisième étape est la plus technique. Avec les notations précédentes, nous démontrons :

Proposition 9.6.4. *Le champ de vecteurs Y_n vérifie $Y_n \in W^{1,p}(w_{\nu, \rho_n}^* TW)$ pour tout $p > 2$. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 0$.*

Rappelons qu'ici la première assertion dit simplement que

$$Y_n \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$$

(voir les explications au §8.2).

(4) Après les étapes 2 et 3, nous disposons d'une suite $\tilde{\ell}_n$ qui a la même forme qu'une solution produite par la méthode de Newton-Picard à l'aide du pré-recollement w_{ν,ρ_n} . Rappelons que, pour appliquer la méthode de Newton-Picard (ici le lemme 9.4.4) à partir de w_{ν,ρ_n} , il faut d'abord décomposer $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ en une somme directe $\text{Ker}(L_{\rho_n}) \oplus W_{\rho_n}^\perp$, qui, ici, dépend de n (l'indice du ρ_n considéré) et dans laquelle la dimension de $\text{Ker}(L_{\rho_n})$ est 2 (voir les conséquences de la proposition 9.4.7). À l'aide d'une application contractante

$$\varphi : W_{\rho_n}^\perp \cap B(0, \varepsilon_0) \longrightarrow W_{\rho_n}^\perp \cap B(0, \varepsilon_0)$$

(pour un $\varepsilon_0 > 0$ ne dépendant pas de n), on trouve un unique $\gamma_n \in W_{\rho_n}^\perp \cap B(0, \varepsilon_0)$ tel que $\exp_{w_{\nu,\rho_n}} \gamma_n \in \mathcal{M}(x, z)$: ce γ_n est l'unique point fixe de l'application φ . Les lecteurs attentifs auront remarqué que nous avons identifié ici $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ à $w_{\nu,\rho_n}^* TW = T_{w,\rho_n} \mathcal{P}(x, z)$ en utilisant l'application $i : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \rightarrow w_{\nu,\rho_n}^* TW$ définie par une trivialisation unitaire fixée le long de w_{ν,ρ_n} .

Comme $\|Y_n\|_{W^{1,p}}$ tend vers 0, Y_n est dans la boule $B(0, \varepsilon_0)$ pour n assez grand. En particulier, $Y_n \in h_n + W^\perp$ pour un $h_n \in B(0, \varepsilon_0) \cap \text{Ker } L$ qui a la propriété que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n\|_{W^{1,p}} = 0$.

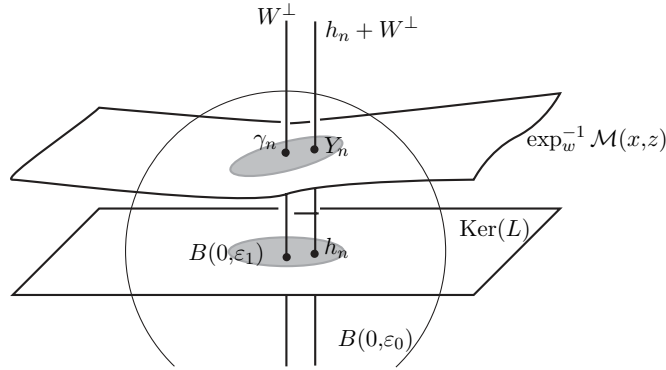


FIGURE 10

Remarquons encore que si $h_n = 0$, alors $Y_n = \gamma_n$ (par la partie unicité du lemme 9.4.4). En général, pour avoir $\|h_n\|_{W^{1,p}} \leq \varepsilon_1$ (pour un ε_1 positif indépendant de n), nous allons devoir généraliser le lemme de Newton-Picard

9.4.4 et trouver une application contractante

$$\varphi_n : h_n + W_{\rho_n}^\perp \longrightarrow h_n + W_{\rho_n}^\perp$$

qui produit une solution $\exp_{w_{\nu, \rho_n}} \gamma_n(h) \in \mathcal{M}(x, z)$ unique dans $h_n + W_{\rho_n}^\perp$. La figure 10 reprend et précise la figure 7 avec ces nouvelles données.

Pour n assez grand, Y_n sera donc l'unique solution produite par la méthode de Newton-Picard dans la tranche $h_n + W^\perp$. Par un argument de connexité, nous en déduisons :

Proposition 9.6.5. *Pour n assez grand, $\ell_n \in \text{Im}(\widehat{\psi}_\nu)$.*

La première étape donnera ensuite

Corollaire 9.6.6. *Pour n assez grand, $\ell_n \in \text{Im}(\widehat{\psi})$.*

Nous aurons donc ainsi conclu, en même temps que la quatrième étape, la démonstration du théorème 9.2.3.

Démontrons donc maintenant tous ces énoncés.

9.6.a. Étape 1 : démonstration de la proposition 9.6.1. Posons, pour $\lambda \in [0, 1]$,

$$\nu_\lambda(\rho) = (1 - \lambda)\rho + \lambda\nu(\rho),$$

définissons le pré-recollement correspondant $w_{\nu_\lambda, \rho}$ et faisons la construction du recollement pour ce $w_{\nu_\lambda, \rho}$, obtenant :

Proposition 9.6.7. *Il existe une application continue*

$$\psi : [\rho_0, +\infty[\times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}(x, z)$$

telle que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, l'application

$$\widehat{\psi}(\cdot, \lambda) = \pi \circ \psi(\cdot, \lambda) : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(x, z)$$

est une immersion injective qui satisfait

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\cdot, \lambda) = (\widehat{u}, \widehat{v}) \text{ dans } \overline{\mathcal{L}}(x, z).$$

Démonstration. On décompose

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) = \text{Ker } L_{\rho, \lambda} \oplus W_{\rho, \lambda}^\perp$$

en utilisant un analogue de la proposition 9.4.7 (qui se démontre de la même façon en utilisant la compacité de $[0, 1]$), puis on applique la méthode de Newton-Picard (c'est-à-dire le lemme 9.4.4) dans $W_{\rho, \lambda}^\perp$. On obtient ainsi, pour $\rho \geq \rho_0$ et $\lambda \in [0, 1]$, des éléments

$$\gamma(\rho, \lambda) \in W_{\rho, \lambda}^\perp \quad \text{tels que } \exp_{w_{\nu_\lambda, \rho}} \gamma(\rho, \lambda) \in \mathcal{M}(x, z).$$

De plus, l'application $(\rho, \lambda) \mapsto \gamma(\rho, \lambda)$ est continue et dérivable en application du théorème des fonctions implicites (comme dans le lemme 9.4.14). On démontre de manière analogue que $\widehat{\psi}(\cdot, \lambda)$ a les propriétés voulues. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition 9.6.1. La composante de $\mathcal{L}(x, z)$ qui contient $\text{Im}(\widehat{\psi})$ est une variété de dimension 1, sans bord, et non compacte puisque

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\rho) \notin \mathcal{L}(x, z).$$

À un difféomorphisme près, on peut considérer que cette variété est l'intervalle $]0, 1[$. Regardons l'image $\widehat{\psi}([\rho_0, +\infty[) \subset]0, 1[$. Comme $\widehat{\psi}$ est une immersion injective, on a

$$\text{Im } \widehat{\psi} = [\widehat{\psi}(\rho_0), \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\rho)[\subset]0, 1[.$$

Mais $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\rho) \notin \mathcal{L}(x, z)$, de sorte que

$$\text{Im } \widehat{\psi} =]0, a_0] \quad \text{ou} \quad [a_0, 1[.$$

Sans restreindre la généralité, supposons que cette image est $[a_0, 1[$. Appliquons le même raisonnement à

$$\psi(\cdot, \lambda) : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{M}(x, z).$$

Comme $\widehat{\psi} : [\rho_0, +\infty[\times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(x, z)$ est continue, l'image de $\widehat{\psi}$ est contenue dans cette même composante, que nous avons identifiée à $]0, 1[$. Comme

$$\widehat{\psi}(\cdot, \lambda) : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(x, z)$$

est une immersion injective, et comme

$$\lim \lambda_n = \lambda_\star \text{ et } \lim \rho_n = +\infty \implies \lim \widehat{\psi}(\rho_n, \lambda_n) = (\widehat{u}, \widehat{v})$$

(une assertion que nous laissons en exercice aux lecteurs) on obtient $\text{Im}(\widehat{\psi}(\cdot, \lambda)) = [a_\lambda, 1[$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$, en utilisant la connexité de $[0, 1]$. En particulier,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}_\nu(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\rho, 1) = 1.$$

Cela signifie que,

$$\text{pour } \rho \geq \rho_\nu, \quad \widehat{\psi}_\nu(\rho) \in [a_0, 1] = \text{Im}(\widehat{\psi})$$

et la proposition 9.6.1 est démontrée. $\square$

9.6.b. Étape 2. Pour commencer, établissons quelques résultats préliminaires. Revenons à la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H : \mathcal{L}(W) \rightarrow \mathbf{R}$, celle dont les points critiques sont les orbites 1-périodiques du champ hamiltonien X_t . Nous supposons ici, comme le lemme 6.3.5 nous y autorise, que $\mathcal{A}_H$ prend des valeurs distinctes en des points critiques distincts. Considérons une suite $\ell_n \in \mathcal{L}(x, z)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = (\hat{u}, \hat{v})$, comme dans l'énoncé du théorème 9.2.3. On démontre :

Proposition 9.6.8. *Soit $\tilde{\ell}_n$ un relèvement de ℓ_n dans $\mathcal{M}(x, z)$. Si la suite $\tilde{\ell}_n$ converge vers une limite λ dans $\mathcal{M}$, on a*

$$\lambda \in \{x, \tilde{u}, y, \tilde{v}, z\}$$

où $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont des relèvements de $\hat{u}$ et $\hat{v}$ (respectivement) dans $\mathcal{M}(x, z)$.

Pour démontrer cette proposition, nous utiliserons le lemme :

Lemme 9.6.9. *Soit s_n une suite réelle qui a une limite et soit λ_n une suite dans $\mathcal{M}$. On suppose que, au sens $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(s, t) = a(s, t) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(s + s_n, t) = b(s, t)$$

pour deux trajectoires $a \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$, $b \in \mathcal{M}(\gamma, \delta)$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des points critiques de $\mathcal{A}_H$). Si $\hat{a} \neq \hat{b}$, alors la suite s_n est divergente et on a

$$\mathcal{A}_H(\alpha) \geq \mathcal{A}_H(\beta) \geq \mathcal{A}_H(\gamma) \geq \mathcal{A}_H(\delta) \quad \text{si} \quad \lim s_n = +\infty,$$

$$\mathcal{A}_H(\gamma) \geq \mathcal{A}_H(\delta) \geq \mathcal{A}_H(\alpha) \geq \mathcal{A}_H(\beta) \quad \text{si} \quad \lim s_n = -\infty.$$

Voir la figure 11 où la configuration de gauche correspond à une suite s_n tendant vers $+\infty$, la configuration centrale à une suite s_n tendant vers $-\infty$ et la configuration de droite est impossible.

Démonstration. Si s_n a une limite finie σ , on a évidemment $a(s + \sigma, t) = b(s, t)$ donc $\hat{a} = \hat{b}$. Supposons que $\lim s_n = +\infty$ et fixons $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$. Pour n assez grand, on a $s_n + \sigma \geq \tau$. Comme $\mathcal{A}_H$ est décroissante sur les trajectoires de $\mathcal{M}$, on a donc

$$\mathcal{A}_H(\lambda_n(s_n + \sigma, \cdot)) \leq \mathcal{A}_H(\tau, \cdot).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\mathcal{A}_H(b(\sigma, \cdot)) \leq \mathcal{A}_H(a(\tau, \cdot))$$

et ceci pour tous σ et τ dans $\mathbf{R}$. En faisant tendre σ vers $-\infty$ et τ vers $+\infty$, on trouve que

$$\mathcal{A}_H(\beta) \geq \mathcal{A}_H(\gamma)$$

ce qui démontre le lemme (le cas d'une suite s_n tendant vers $-\infty$ est analogue). $\square$

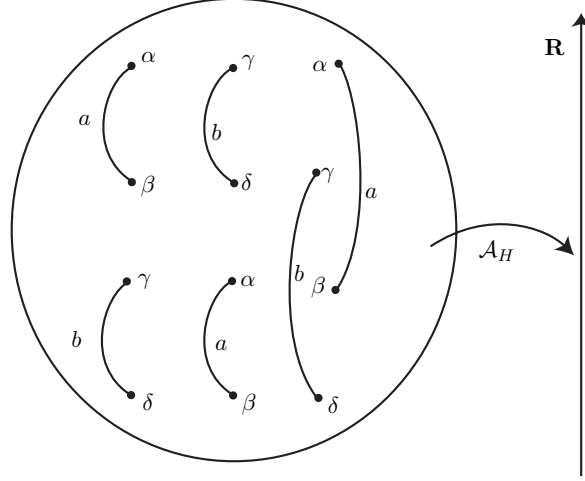


FIGURE 11

Démonstration de la proposition 9.6.8. Appliquons maintenant ce lemme à la suite $\tilde{\ell}_n$. Comme $\tilde{\ell}_n \in \mathcal{M}(x, z)$, il est clair que $\lambda = \lim \ell_n$ vérifie

$$\mathcal{A}_H(x) \geq \mathcal{A}_H(\lambda(s, \cdot)) \geq \mathcal{A}_H(z) \quad \text{pour tout } s \in \mathbf{R}.$$

Si $\lambda \notin \{\widehat{u}, \widehat{v}\}$, le lemme précédent implique, puisque ℓ_n tend vers $(\widehat{u}, \widehat{v})$, que

$$\mathcal{A}_H(\lambda) \in \{\mathcal{A}_H(x), \mathcal{A}_H(y), \mathcal{A}_H(z)\}.$$

En particulier, $\mathcal{A}_H(\lambda(s, \cdot))$ ne dépend pas de s , donc λ est une orbite périodique de X_t . Comme nous avons supposé les valeurs critiques de $\mathcal{A}_H$ distinctes (lemme 6.3.5), on a bien montré que

$$\lambda \in \{x, y, z\}.$$

□

Remarque 9.6.10. Avec la même démonstration, on peut voir plus généralement que, si la suite $\ell_n \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$ a la propriété que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = (u_1, \dots, u_k) \in \overline{\mathcal{L}}(\alpha, \beta) \quad \text{avec } u_i \in \mathcal{L}(\gamma_{i-1}, \gamma_i), \quad \gamma_0 = \alpha, \quad \gamma_k = \beta,$$

alors, quel que soit le relèvement $\tilde{\ell}_n$ de ℓ_n , si la suite $\tilde{\ell}_n$ est convergente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\ell}_n \in \{\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_k, \gamma_0, \dots, \gamma_k\}.$$

Ces préliminaires acquis, venons-en au fait.

Démonstration de la proposition 9.6.3. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Le lemme suivant, dont la démonstration est évidente, est une conséquence immédiate de la compacité de la variété W .

Lemme 9.6.11. *Il existe δ et δ' tels que $0 < \delta < \delta' < \rho_{\text{inj}}$ et tels que, pour tout $a \in W$, tous $p, q \in B(a, \delta')$, on peut écrire*

$$q = \exp_p Y, \quad \text{avec } \|Y\| < \varepsilon,$$

et, pour tout $a \in W$, tous $p, q \in B(a, \delta)$, pour tous $\beta^-, \beta^+ \in [0, 1]$,

$$\exp_a(\beta^- \exp_a^{-1}(p) + \beta^+ \exp_a^{-1}(q)) \in B(a, \delta'). \quad \square$$

Choisissons le relèvement $\tilde{\ell}_n$ de ℓ_n qui vérifie $\mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(0, \cdot)) = \mathcal{A}_H(y)$. La suite $\tilde{\ell}_n$ est convergente dans $\mathcal{M}$ (à extraction d'une sous-suite près) et, en vertu de la proposition 9.6.8, sa limite est y .

Montrons que $\tilde{\ell}_n$ satisfait aux conclusions de la proposition 9.6.3. Voici l'idée de cette preuve. Notons w_n un pré-recollement de u et v , $w_n = w_{\nu, \rho_n}$ pour une certaine fonction $\nu : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ à déterminer. Fixons $\varepsilon > 0$ et notons $B(x, \delta)$, $B(y, \delta)$, $B(z, \delta)$ les boules ouvertes pour la distance $\mathcal{C}^0$ sur l'espace de lacets⁽²⁾ $\mathcal{L}W$ (la constante δ est celle donnée par le lemme 9.6.11 et on peut supposer, ce que nous ferons, que ces boules sont disjointes). Quand s est très petit, $\tilde{\ell}_n(s, \cdot)$ et $w_n(s, \cdot)$ sont dans $B(x, \delta)$, quand s est proche de 0, ils sont dans $B(y, \delta)$ et quand s est très grand, dans $B(z, \delta)$ et dans ces trois cas, on peut appliquer le lemme 9.6.11 pour conclure. Pour les valeurs autres de s , utilisons le fait que ℓ_n tend vers $(\hat{u}, \hat{v})$ dans $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$, ce qui se traduit par l'existence de suites σ_n et τ_n et de réels σ_* , τ_* tels que

$$\lim \tilde{\ell}_n(s - \sigma_n, t) = u(s + \sigma_*, t) \quad \text{et} \quad \lim \tilde{\ell}_n = v(s + \tau_*, t).$$

La convergence est uniforme sur les compacts de $\mathbf{R} \times S^1$. La première limite nous dit que $\tilde{\ell}_n(s, t)$ est proche de $u(s + \sigma_n + \sigma_*, t)$ sur $(K - \sigma_n) \times S^1$, où K est un compact de $\mathbf{R}$. Avec des domaines de ce type, on doit « recouvrir » les parties non hachurées de la figure 12.

Le choix des suites σ_n et τ_n est donc très important. C'est lui aussi qui va déterminer le choix de w_n . Pour simplifier les notations, nous supprimons la variable $t \in S^1$ dans ce qui suit. On a vu que $y = \lim \tilde{\ell}_n$ dans $\mathcal{M}$ et en particulier que $\lim \tilde{\ell}_n(0) = y$. Pour $n \geq N_\varepsilon$, on a donc $\tilde{\ell}_n(0) \in B(y, \delta)$ (toujours pour la distance $\mathcal{C}^0$ sur $\mathcal{L}W$). Posons

$$\sigma_n = \sup\{s > 0 \mid \tilde{\ell}_n([-s, 0]) \subset B(y, \delta)\}$$

$$\text{et} \quad \tau_n = \sup\{s > 0 \mid \tilde{\ell}_n([0, s]) \subset B(y, \delta)\}.$$

Ainsi $\tilde{\ell}_n(-\sigma_n)$ et $\tilde{\ell}_n(\tau_n) \in \partial \overline{B}(y, \delta)$. Remarquons que

(1) Les suites σ_n et τ_n tendent vers $+\infty$. En effet, si la suite σ_n était bornée, $\tilde{\ell}_n([- \sigma_n, 0])$ tendrait vers y , on aurait donc $\lim \tilde{\ell}_n(-\sigma_n) = y$, ce qui est absurde. Même raisonnement pour τ_n .

⁽²⁾Rappelons que $B(y, \delta) = \{\chi : S^1 \rightarrow W \mid d(\chi(t), y(t)) < \delta \forall t \in S^1\}$.

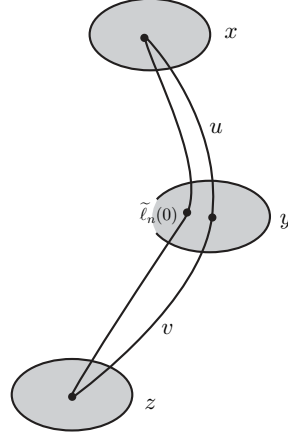


FIGURE 12

(2) Posons $\tilde{\ell}_n^1(s) = \tilde{\ell}_n(s - \sigma_n)$ et $\tilde{\ell}_n^2(s) = \tilde{\ell}_n(s + \tau_n)$. Alors, quitte à extraire une sous-suite,

$$\lim \tilde{\ell}_n^1(s) = u(s + \sigma_\star) \text{ et } \lim \tilde{\ell}_n^2(s) = v(s + \tau_\star) \text{ dans } \mathcal{M} \text{ pour } \sigma_\star, \tau_\star \in \mathbf{R}.$$

En effet, nous avons $\tilde{\ell}_n^1(0) = \tilde{\ell}_n(-\sigma_n) \in \partial \overline{B}(y, \delta)$. Donc la suite $\tilde{\ell}_n^1$ ne tend pas vers y . Elle ne peut pas tendre non plus vers x puisque $\tilde{\ell}_n^1(0) \in \partial \overline{B}(y, \delta)$, de sorte que $\tilde{\ell}_n^1(0)$ n'est dans $B(x, \delta)$ pour aucun n . Par ailleurs,

$$\mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n^1(0)) = \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma_n)) > \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(0)) = \mathcal{A}_H(y).$$

Compte tenu de la proposition 9.6.8, cela implique que

$$\lim \tilde{\ell}_n^1(s) = u(s + \sigma_\star) \text{ dans } \mathcal{M} \text{ pour une constante } \sigma_\star \in \mathbf{R}.$$

On démontre de même

$$\lim \tilde{\ell}_n^2(s) = v(s + \tau_\star) \text{ dans } \mathcal{M} \text{ pour une constante } \tau_\star \in \mathbf{R}.$$

Posons maintenant

$$\sigma'_n = \inf\{s > 0 \mid \tilde{\ell}_n([-\infty, -s]) \subset B(x, \delta)\}$$

et
$$\tau'_n = \inf\{s > 0 \mid \tilde{\ell}_n([s, +\infty]) \subset B(z, \delta)\},$$

de sorte qu'évidemment $\tilde{\ell}_n(-\sigma'_n) \in \partial \overline{B}(x, \delta)$ et $\tilde{\ell}_n(\tau'_n) \in \partial \overline{B}(z, \delta)$. Remarquons encore que :

(1) On a $\sigma'_n \geq \sigma_n$ et $\tau'_n \geq \tau_n$. En particulier les suites σ'_n et τ'_n tendent vers $+\infty$. En effet, supposons que $\sigma_n > \sigma'_n$ et prenons un σ dans $[\sigma_n, \sigma'_n]$. La définition de σ'_n et de σ_n implique alors que $\tilde{\ell}_n(-\sigma) \in B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$ ce qui est absurde puisque ces deux boules ont été supposées disjointes. Le même argument vaut pour τ_n et τ'_n .

(2) À extraction d'une sous-suite près, on a (convergence dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire uniforme sur les compacts de $\mathbf{R} \times S^1$)

$$\lim \tilde{\ell}_n(s - \sigma'_n) = u(s + \sigma'_*) \quad \text{et} \quad \lim \tilde{\ell}_n(s + \tau'_n) = v(s + \tau'_*)$$

pour des constantes $\sigma'_*, \tau'_* \in \mathbf{R}$. Pour $\tilde{\ell}_n^3(s) = \tilde{\ell}_n(s - \sigma'_n)$, nous avons en effet

$$\tilde{\ell}_n^3(0) \in \partial \overline{B}(x, \delta) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n^3(0)) \in]\mathcal{A}_H(y), \mathcal{A}_H(x)[.$$

La proposition 9.6.8 implique alors comme ci-dessus que $\tilde{\ell}_n^3(s)$ converge vers $u(s + \sigma'_*)$. Un argument analogue s'applique à $\tilde{\ell}_n^4 = \tilde{\ell}_n(s + \tau'_n)$.

Nous aurons besoin d'un résultat plus fort que cette dernière remarque, à savoir :

Lemme 9.6.12. *Les suites $\sigma'_n - \sigma_n$ et $\tau'_n - \tau_n$ sont bornées.*

Démonstration. Supposons au contraire que $\sigma'_n - \sigma_n$ tende vers $+\infty$ et montrons que cela aboutit à une contradiction. Comme σ'_n et σ_n sont positifs, nous avons

$$\mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma_n)) \text{ et } \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma'_n)) \in [\mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(0)), \mathcal{A}_H(x)] \subset [\mathcal{A}_H(z), \mathcal{A}_H(x)].$$

Montrons par ailleurs que $\mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(\sigma'_n)) - \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma_n))$ tend vers $+\infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma'_n)) - \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma_n)) &= \int_{-\sigma_n}^{-\sigma'_n} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(s)) ds \\ &= \int_{-\sigma_n}^{-\sigma'_n} \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s}(s, t) \right\|^2 dt ds \end{aligned}$$

(la norme utilisée est celle définie par la métrique sur W). Il existe alors $c_n \in [-\sigma'_n, -\sigma_n]$ tel que

$$\int_{S^1} \left\| \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s}(c_n, t) \right\|^2 dt \quad \text{tend vers } 0,$$

car sinon, modulo extraction de sous-suite

$$\int_{S^1} \left\| \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s}(s, t) \right\|^2 dt \geq \gamma_0 \quad \text{pour } s \in [-\sigma'_n, \sigma_n],$$

d'où l'on déduit que

$$\int_{-\sigma'_n}^{-\sigma_n} \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s}(s, t) \right\|^2 dt ds \geq \gamma_0^2 (\sigma'_n - \sigma_n) \quad \text{tend vers } +\infty$$

ce qui contredit l'inclusion ci-dessus. Comme $\tilde{\ell}_n$ est une solution de l'équation de Floer, on peut écrire de manière équivalente

$$\int_{S^1} \left\| \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial t}(c_n, t) - X_t(\tilde{\ell}_n(c_n, t)) \right\|^2 dt \quad \text{tend vers } 0.$$

Posons maintenant $\tilde{\ell}_n^5(s) = \tilde{\ell}_n(s + c_n)$. Comme $c_n \in [-\sigma'_n, -\sigma_n]$, nous avons

$$\mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n^5(0)) = \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(c_n)) \in [\mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma_n)), \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma'_n))].$$

Puis, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma_n)) = \lim \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n^1(0)) = \mathcal{A}_H(u(\sigma_\star))$$

et

$$\lim \mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n(-\sigma'_n)) = \mathcal{A}_H(u(\sigma'_\star)),$$

il suit que

$$\mathcal{A}_H(\tilde{\ell}_n^5(0)) \in]\mathcal{A}_H(y) + \gamma_0, \mathcal{A}_H(x) - \gamma_0[\quad \text{pour un } \gamma_0 > 0 \text{ et pour tout } n.$$

En appliquant la proposition 9.6.8, on trouve alors que $\tilde{\ell}_n^5(s)$ tend vers $u(s + c_\star)$ dans $\mathcal{M}$ et en particulier $\tilde{\ell}_n(c_n) = \tilde{\ell}_n^5(0)$ tend vers $u(c_\star)$ avec la convergence $\mathcal{C}^\infty$ uniforme sur S^1 . En utilisant ceci et la relation ci-dessus, on obtient

$$\int_{S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(c_\star, t) - X_t(u(c_\star, t)) \right\|^2 dt = 0$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(c_\star, t) - X_t(u(c_\star, t)) = 0,$$

ce qui signifie que $u(c_\star)$ est un point critique de $\mathcal{A}_H$. Appelons ce point critique α . Nous avons, pour tout $t \in S^1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s}(c_\star, t) &= -J(u(c_\star, t)) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(c_\star, t) - X_t(u(c_\star, t)) \right) \\ &= -J(\alpha) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\alpha) - X_t(\alpha) \right) = 0. \end{aligned}$$

Par suite, l'ensemble $C(u)$ des points critiques contient $c_\star \times S^1$, en contradiction avec le fait que, d'après le théorème 8.5.4, cet ensemble est discret.

On conclut que la suite $\sigma'_n - \sigma_n$ est bornée. On montre de même que $\tau'_n - \tau_n$ est elle aussi bornée, et ceci achève la démonstration du lemme 9.6.12. $\square$

Venons-en enfin à la fin de la démonstration de la proposition 9.6.3. Choisissons des constantes A, B et $C \in \mathbf{R}$ telles que

- pour $s \leq A$, $u(s) \in B(x, \delta)$ et $v(s) \in B(y, \delta)$,
- pour $s \geq B$, $u(s) \in B(y, \delta)$ et $v(s) \in B(z, \delta)$,
- $\sigma'_n - \sigma_n \leq C$ et $\tau'_n - \tau_n \leq C$ ($C > 0$),

le δ qui apparaît ici est celui donné par le lemme 9.6.11, un $\varepsilon > 0$ étant toujours fixé. Utilisons aussi les constantes $\sigma_\star$ et $\tau_\star$ définies dans la deuxième remarque qui suit les définitions de σ_n et τ_n et considérons un intervalle compact $[E, F]$ tel que

- $E < 0$, $E + \sigma_\star \leq A$, $E + \tau_\star \leq A$,
- $F > 0$, $F + \sigma_\star \geq B$, $F + \tau_\star \geq B$,
- $\sigma'_n - \sigma_n \leq -E$ et $\tau'_n - \tau_n \leq F$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

On sait que $\tilde{\ell}_n(s - \sigma_n)$ converge vers $u(s + \sigma_*)$ uniformément sur les compacts de $\mathbf{R} \times S^1$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe alors un N_ε tel que pour $n \geq N_\varepsilon$, $t \in S^1$ et $s \in [E, F]$, on ait

$$\tilde{\ell}_n(s - \sigma_n, t) = \exp_{u(s + \sigma_*, t)} Y_n^1(s, t) \quad \text{avec} \quad \|Y_n^1(s, t)\| \leq \varepsilon$$

(pour la norme euclidienne). En changeant s en $s + \sigma_n$, on trouve que, pour $n \geq N_\varepsilon$,

$$\tilde{\ell}_n(s, t) = \exp_{u(s + \sigma_n + \sigma_*, t)} Y_n(s, t)$$

avec

$$\|Y_n(s, t)\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } (s, t) \in [E - \sigma_n, F - \sigma_n] \times S^1.$$

De la même façon, on a, pour $n \geq N_\varepsilon$,

$$\tilde{\ell}_n(s, t) = \exp_{v(s + \tau_* - \tau_n, t)} Y_n(s, t)$$

avec

$$\|Y_n(s, t)\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } (s, t) \in [E + \tau_n, F + \tau_n] \times S^1.$$

Rappelons que les intervalles $[E - \sigma_n, F - \sigma_n]$ et $[E + \tau_n, F + \tau_n]$ sont disjoints pour n assez grand... il n'y a donc pas de confusion entre les deux Y_n définis par ces deux relations.

Définissons un pré-recollement $w_n(s, t)$ par

$$w_n(s, t) = \begin{cases} u(s + \sigma_* + \sigma_n, t) & \text{si } s \leq -1, \\ \exp_{y(t)} \left(\beta^-(s) \exp_{y(t)}^{-1} u(s + \sigma_* + \sigma_n, t) \right. \\ \quad \left. + \beta^+(s) \exp_{y(t)}^{-1} v(s + \tau_* - \tau_n, t) \right) & \text{si } s \in [-1, 1], \\ v(s + \tau_* - \tau_n, t) & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

Montrons que, pour tous $n \geq N_\varepsilon$, $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$, on a

$$\tilde{\ell}_n(s, t) = \exp_{w_n(s, t)} Y_n(s, t), \quad \text{avec} \quad \|Y_n(s, t)\| \leq \varepsilon.$$

Pour cela, découpons $\mathbf{R}$ en plusieurs intervalles.

(1) Pour $s < E - \sigma_n \leq -\sigma'_n$ on a $\tilde{\ell}_n(s, t) \in B(x(t), \delta)$ (par définition de σ'_n) et

$$w_n(s, t) = u(s + \sigma_* + \sigma_n, t) \in B(x(t), \delta)$$

puisque

$$s + \sigma_* + \sigma_n \leq E + \sigma_* \leq A.$$

On obtient la relation voulue en appliquant la première assertion du lemme 9.6.11.

(2) Pour $s \in [E - \sigma_n, F - \sigma_n]$, on a le résultat en utilisant la définition de Y_n .

(3) Pour $s \in [F - \sigma_n, E + \tau_n]$, $\tilde{\ell}_n(s) \in B(y, \delta)$ par définition de σ_n et τ_n (en utilisant les faits que $F > 0$ et $E < 0$). Puis $u(s + \sigma_\star + \sigma_n) \in B(y, \delta)$ puisque $s + \sigma_\star + \sigma_n \geq B$ et de même $v(s + \tau_\star - \tau_n) \in B(y, \delta)$ puisque $s + \tau_\star - \tau_n \leq E + \tau_\star \leq A$. La deuxième assertion du lemme 9.6.11 donne que $w_n(s, t) \in B(y(t), \delta')$; on peut donc de nouveau appliquer sa première assertion pour obtenir la relation voulue.

(4) Le cas où $s \in [E + \tau_n, F + \tau_n]$ est analogue à celui où $s \in [E - \sigma_n, F - \sigma_n]$.

(5) Pour $s \geq F + \tau_n \geq \tau'_n$, on a $\tilde{\ell}_n(s) \in B(z, \delta)$ par définition de τ'_n et $w_n(s, t) \in B(z(t), \delta)$ puisque $w_n(s, t) = v(s + \tau_\star - \tau_n, t)$ et $s + \tau_\star - \tau_n \geq F + \tau_\star \geq B$.

Nous avons donc obtenu la relation désirée pour tout $s \in \mathbf{R}$. Notons qu'on peut supposer $\|Y_n(s, t)\|_W < \rho_{\text{inj}}$ (norme de Y_n pour la métrique sur W) pour tous $n \geq N_\varepsilon$, $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$, quitte à avoir choisi ε assez petit, et donc

$$Y_n(s, t) = \exp_{w_n(s, t)}^{-1} \tilde{\ell}_n(s, t) \quad \text{est de classe } \mathcal{C}^\infty.$$

La démonstration de la proposition 9.6.3 est presque terminée. Posons $\rho_n = \sigma_n + \sigma_\star$ et définissons une fonction ν de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui satisfait à $\nu(\rho_n) = \tau_n - \tau_\star$. On peut choisir ν croissante (quitte encore une fois à extraire des sous-suites de ρ_n et τ_n) et tendant vers $+\infty$ quand ρ tend vers $+\infty$. On en déduit que, pour $n \geq N_\varepsilon$ et $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$, on a

$$\tilde{\ell}_n(s, t) = \exp_{w_{\nu, \rho_n}(s, t)} Y_n(s, t) \quad \text{avec } \|Y_n(s, t)\| \leq \varepsilon,$$

et cette fois la preuve de la proposition est vraiment terminée. $\square$

9.6.c. Étape 3 : preuve de la proposition 9.6.4. Nous montrons ici que le champ Y_n produit par la proposition 9.6.3 est dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ pour $p > 2$. Pour ceci nous utiliserons la propriété de décroissance exponentielle des solutions de l'équation de Floer 8.9, c'est-à-dire le fait que, si $\ell \in \mathcal{M}$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$, on ait

$$\left\| \frac{\partial \ell}{\partial s}(s, t) \right\| \leq C e^{-\delta|s|}$$

(avec, au choix, la norme de la métrique de W ou la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^m$, choix que nous ferons ici). L'étape précédente nous a donné la relation

$$\tilde{\ell}_n(s, t) = \exp_{w_n(s, t)} Y_n(s, t) \quad \text{ou} \quad Y_n(s, t) = \exp_{w_n(s, t)}^{-1} \tilde{\ell}_n(s, t).$$

Les applications w_n et $\tilde{\ell}_n$ ont toutes les deux la propriété de décroissance exponentielle (w_n est une solution de l'équation de Floer pour $|s| \geq 1$), ce qui va nous servir à démontrer :

Lemme 9.6.13. *Il existe une constante $K > 0$ (dépendant de n en général) telle que, pour tous $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$, on ait*

$$\max\left(\left\|\frac{\partial Y_n}{\partial s}(s, t)\right\|, \|Y_n(s, t)\|, \left\|\frac{\partial Y_n}{\partial t}(s, t)\right\|\right) \leq K e^{-\delta|s|}.$$

Il est clair que ce lemme implique immédiatement la première assertion de la proposition 9.6.4. Démontrons-le donc.

Démonstration du lemme 9.6.13. Considérons l'ouvert Ω de $W \times W$ défini par

$$\Omega = \{(a, b) \in W \times W \mid d(a, b) < \rho_{\text{inj}}\}.$$

Définissons $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ par

$$\Phi(a, b) = \exp_a^{-1}(b) \in T_a W \subset \mathbf{R}^m.$$

Soit $\Omega_0 \subset \Omega$ défini par

$$\Omega_0 = \{(a, b) \in W \times W \mid d(a, b) \leq \rho_{\text{inj}}/2\};$$

c'est un compact de $W \times W$. Choisissons une constante $A < 0$ telle que, pour tout $s \leq A$ et tout $t \in S^1$, on ait

$$(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t)) \in \Omega_0$$

(on s'assure que, pour $s \leq A$, $d(w_n(s, \cdot), x) \leq \rho_{\text{inj}}/6$ et $d(\tilde{\ell}_n(s, \cdot), x) \leq \rho_{\text{inj}}/6$). Ainsi, nous avons

$$Y_n(s, t) = \Phi(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t)) \quad \text{pour } (s, t) \in]-\infty, A] \times S^1.$$

Par compacité de Ω_0 , il existe $M > 0$ tel que

$$\|D_{(a,b)}\Phi\| \leq M \quad \forall (a, b) \in \Omega_0.$$

Nous avons donc, pour tout $s \leq A$ et tout $t \in S^1$,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial Y_n}{\partial s}(s, t)\right\| &= \left\|\frac{\partial}{\partial s}\Phi(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t))\right\| \\ &\leq \left\|D_1\Phi_{(w_n(s,t), \tilde{\ell}_n(s,t))} \frac{\partial w_n}{\partial s}(s, t)\right\| + \left\|D_2\Phi_{(w_n(s,t), \tilde{\ell}_n(s,t))} \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s}(s, t)\right\| \\ &\leq M \left\|\frac{\partial w_n}{\partial s}(s, t)\right\| + M \left\|\frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s}(s, t)\right\| \\ &\leq 2M C e^{\delta s} \end{aligned}$$

(grâce à la décroissance exponentielle). On démontre de même que, pour $s \geq B$,

$$\left\|\frac{\partial Y_n}{\partial s}(s, t)\right\| \leq 2M C e^{-\delta s},$$

ce qui donne la partie « pour $\partial Y_n / \partial s$ » du lemme. Prouvons-le maintenant pour Y_n lui-même. Soit toujours $A < 0$ comme ci-dessus. Pour $s_1 \leq s_2 \leq A < 0$ et $t \in S^1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|Y_n(s_2, t) - Y_n(s_1, t)\| &= \left\| \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial Y_n}{\partial s}(s, t) ds \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{\partial Y_n}{\partial s}(s, t) \right\| ds \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} K e^{\delta s} ds = K(e^{\delta s_2} - e^{\delta s_1}). \end{aligned}$$

Faisons tendre s_1 vers $-\infty$ dans cette inégalité et utilisons l'écriture de Y_n en fonction de $\tilde{\ell}_n$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} Y_n(s, t) &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t)) \\ &= \Phi(x(t), x(t)) = \exp_{x(t)}^{-1} x(t) = 0. \end{aligned}$$

Nous avons par conséquent

$$\|Y_n(s_2, t)\| \leq K e^{\delta s_2}.$$

Procéder de manière analogue pour les $s \geq B$ donne le résultat voulu pour Y_n . Il reste, pour finir la démonstration du lemme 9.6.13, à prouver une égalité du même type pour $\partial Y_n / \partial t$.

En partant de l'écriture de Y_n en fonction de $\tilde{\ell}_n$, on trouve

$$\frac{\partial Y_n}{\partial t}(s, t) = D_1 \Phi_{(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t))} \frac{\partial w_n}{\partial t}(s, t) + D_2 \Phi_{(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t))} \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial t}(s, t).$$

La constante négative A , choisie comme ci-dessus, est supposée inférieure à -1 . Pour $s \leq A \leq -1$, w_n est une solution de l'équation de Floer. On peut donc écrire (en omettant le point (s, t) pour alléger cette écriture), en tout point (s, t)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_n}{\partial t} &= D_1 \Phi_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} \left(X_t(w_n) - J(w_n) \cdot \frac{\partial w_n}{\partial s} \right) \\ &\quad + D_2 \Phi_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} \left(X_t(\tilde{\ell}_n) - J(\tilde{\ell}_n) \cdot \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

et, pour tout point $(s, t) \in]-\infty, A] \times S^1$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial Y_n}{\partial t} \right\| &\leq \left\| D_1 \Phi_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} J(w_n) \frac{\partial w_n}{\partial s} \right\| + \left\| D_2 \Phi_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} J(\tilde{\ell}_n) \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s} \right\| \\ &\quad + \left\| D_1 \Phi_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} X_t(w_n) + D_2 \Phi_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} X_t(\tilde{\ell}_n) \right\|, \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial Y_n}{\partial t} \right\| \leq K e^{\delta s} + \left\| D_1 \Phi_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} X_t(w_n) + D_2 \Phi_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} X_t(\tilde{\ell}_n) \right\|.$$

Pour la dernière majoration, nous avons utilisé le fait que les normes $\|D\Phi\|$ et $\|J\|$ sont uniformément bornées sur Ω_0 pour la première, sur W pour la

deuxième, et la décroissance exponentielle de w_n et $\tilde{\ell}_n$. Afin de majorer le dernier terme, considérons l'application $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ définie par

$$\Gamma(a, b) = D_1\Phi(a, b)X_t(a) + D_2\Phi_{(a,b)}X_t(b),$$

de sorte que le terme à majorer est $\|\Gamma(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t))\|$. Comme ci-dessus, par compacité, il existe un $M > 0$ tel que l'on ait $\|D\Gamma_{(a,b)}\| \leq M$ pour tous $(a, b) \in \Omega_0$. On a donc, pour $s_1 \leq s_2 \leq A$ et $t \in S^1$,

$$\begin{aligned} & \|\Gamma(w_n(s_2, t), \tilde{\ell}_n(s_2, t)) - \Gamma(w_n(s_1, t), \tilde{\ell}_n(s_1, t))\| \\ & \leq \left\| \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t)) ds \right\| \\ & \leq \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t)) \right\| ds \\ & = \int_{s_1}^{s_2} \left\| D_1\Gamma_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} \frac{\partial w_n}{\partial s} + D_2\Gamma_{(w_n, \tilde{\ell}_n)} \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s} \right\| ds \\ & \leq \int_{s_1}^{s_2} M \left(\left\| \frac{\partial w_n}{\partial s} \right\| + \left\| \frac{\partial \tilde{\ell}_n}{\partial s} \right\| \right) ds \\ & \leq MC \int_{s_1}^{s_2} e^{\delta s} ds = MC(e^{\delta s_2} - e^{\delta s_1}) \end{aligned}$$

toujours grâce à la décroissance exponentielle. Faisons tendre s_1 vers $-\infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \Gamma(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t)) &= \Gamma(x(t), x(t)) \\ &= D_1\Phi_{(x(t), x(t))}X_t(x(t)) + D_2\Phi_{(x(t), x(t))}X_t(x(t)) \\ &= D_1\Phi_{(x(t), x(t))}x'(t) + D_2\Phi_{(x(t), x(t))}x'(t) \end{aligned}$$

puisque $x(t)$ est une orbite du champ X_t . On obtient

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Gamma(w_n(s, t), \tilde{\ell}_n(s, t)) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x(t), x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} 0 = 0.$$

On en déduit donc, pour $s_2 \leq A$ et $t \in S^1$,

$$\|\Gamma(w_n(s_2, t), \tilde{\ell}_n(s_2, t))\| \leq Ke^{\delta s_2}.$$

On termine la preuve du lemme 9.6.13 en procédant de manière analogue pour $s \geq B$. $\square$

Comme nous l'avons déjà remarqué, le fait que notre Y_n est dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ pour tout $p > 2$ s'en déduit immédiatement. Il reste à montrer, pour finir la démonstration de la proposition 9.6.4, que Y_n tend bien vers 0 en norme $W^{1,p}$. Considérons donc une trivialisation unitaire $(Z_i^n)_i$ le long du pré-recollement w_n , choisie comme au § 9.4 (voir la figure 5).

En utilisant le repère Z_i , on écrit $Y_n = i(\zeta_n)$ où $\zeta_n \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Ici $\mathcal{F}$ désigne l'opérateur de Floer

$$\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial s} + J \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad}(H_t),$$

l'opérateur $F : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \rightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ est défini par

$$F(\zeta) = p(i(\zeta), \widetilde{\mathcal{F}}(i(\zeta)))$$

où

$$\widetilde{\mathcal{F}} : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$$

est donné par

$$\widetilde{\mathcal{F}}(X) = \mathcal{F}(\exp_{w_n}(X)).$$

Notons L la différentielle DF_0 . Les applications F , p , i , $\widetilde{\mathcal{F}}$, L ci-dessus dépendent de w_n et de la trivialisations Z_i , donc en particulier de n . Nous omettrons cette dépendance dans ce qui suit pour ne pas alourdir l'écriture. Comme au § 9.4, on considère le sous-espace

$$W_n = \{\alpha \#_{w_n} \beta \mid \alpha \in \text{Ker } L^u, \beta \in \text{Ker } L^v\}$$

et son orthogonal

$$W_n^\perp = \left\{ Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \mid \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle Y, v \rangle ds dt = 0 \text{ pour tout } v \in W_n \right\}.$$

Nous avons remarqué (en 9.4.5 et 9.4.7) que W_n et $W_n^\perp$ sont en somme directe dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ et que W_n est de dimension 2. En fait, W_n est engendré par $(\partial u / \partial s) \#_{w_n} 0$ et $0 \#_{w_n} (\partial v / \partial s)$. Décomposons ζ_n dans cette somme directe

$$\zeta_n = \chi_n + \omega_n \quad \text{avec } \chi_n \in W_n \text{ et } \omega_n \in W_n^\perp.$$

Lemme 9.6.14.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_n\|_{W^{1,p}} = 0.$$

La démonstration de ce lemme (de simples estimations), sera donnée au § 13.7. Nous l'utilisons pour trouver une majoration de $\|Y_n\|_{W^{1,p}}$ qui nous permettra de conclure que sa limite est nulle, c'est ce que fait le lemme suivant, dont nous donnerons la démonstration au § 13.7.

Lemme 9.6.15. *Il existe des constantes positives K_1 et K_2 telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$\|Y_n\|_{W^{1,p}} \leq K_1 \frac{\|\chi_n\|_{W^{1,p}} + \|Y_n\|_{L^\infty} + \|\widetilde{\mathcal{F}}(0)\|_{L^p}}{1 - K_2 \|Y_n\|_{L^\infty}}.$$

Montrons que le membre de droite tend vers 0. Nous savons que $\lim \|Y_n\|_{L^\infty} = 0$ (par la proposition 9.6.3) et que $\lim \|\chi_n\|_{W^{1,p}} = 0$ (par le lemme 9.6.14). De plus, comme $\tilde{\mathcal{F}}(0) = \mathcal{F}(w_n)$ s'annule pour $s \notin [-1, 1]$, on a

$$\|\tilde{\mathcal{F}}(0)\|_{L^p} = \|\mathcal{F}(w_n)\|_{L^p([-1,1] \times S^1; \mathbf{R}^m)}.$$

Puisque $\lim w_n = y$ uniformément sur les compacts de $\mathbf{R} \times S^1$ et $\mathcal{F}(y) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\mathcal{F}}(0)\|_{L^p} = 0$, ce qui montre que le membre de droite de notre inégalité tend bien vers 0 et ce qui termine la démonstration de la proposition 9.6.4.

9.6.d. Étape 4 (et dernière). Nous commençons par une version plus générale de la méthode de Newton-Picard, une généralisation du lemme 9.4.4, dont nous conservons les notations.

Lemme 9.6.16. *Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $F : X \rightarrow Y$ une application continue. On écrit*

$$F(x) = F(0) + L(x) + N(x)$$

où $L(x) = (dF)_0(x)$ et on suppose qu'il existe $G : Y \rightarrow X$, continue telle que

- (1) $L \circ G = \text{Id}$;
- (2) $\|GN(x) - GN(y)\| \leq C(\|x\| + \|y\|) \|x - y\|$ pour tous $x, y \in B(0, r)$;
- (3) $\|GF(0)\| \leq \varepsilon_0/2$ où $\varepsilon_0 = \min(r, 1/5C)$.

Soit $h \in \text{Ker } L$ tel que $\|h\| < \varepsilon_0/5$. Alors il existe un unique $\gamma_h \in (h + \text{Im } G) \cap B(0, \varepsilon_0)$ tel que $F(\gamma_h) = 0$. De plus

$$\|\gamma_h\| \leq \|GF(0)\| + \|h\|.$$

Démonstration du lemme 9.6.16. Elle est similaire à celle du lemme originel 9.4.4. On considère l'application $\varphi : B(0, \varepsilon_0) \rightarrow \text{Im } G$ définie par

$$\varphi(x) = G(L(x) - F(x)) = -G(F(0) + N(x))$$

qui vérifie donc $L(\varphi(x)) = L(x) - F(x)$. On définit ensuite la suite

$$x_0 = h, \quad x_{n+1} = \varphi(x_n) + h.$$

Comme dans la démonstration du lemme 9.4.4, on a, pour $x \in B(0, \varepsilon_0)$,

$$\|\varphi(x) + h\| \leq \|\varphi(x)\| + \|h\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{5} + \frac{\varepsilon_0}{5} < \varepsilon_0$$

ce qui montre que $x_n \in B(0, \varepsilon_0)$ pour tout n . Toujours en suivant la démonstration du lemme 9.4.4, on a ensuite

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})\| \leq \frac{1}{2} \|x_n - x_{n-1}\|$$

(donc φ est contractante), d'où il suit que

$$\lim x_n = \gamma_h \in B(0, \varepsilon_0) \cap \{h + \text{Im } G\}$$

et $\varphi(\gamma_h) + h = \gamma_h$. On a donc

$$L(\gamma_h) = L(\varphi(\gamma_h) + h) = L\varphi(\gamma_h) = L(\gamma_h) - F(\gamma_h)$$

ce qui entraîne que $F(\gamma_h) = 0$.

Montrons l'unicité : si $\gamma \in h + \text{Im } G \cap B(0, \varepsilon_0)$ satisfait à $F(\gamma) = 0$, on pose $\gamma = h + G(y)$ et on obtient

$$\varphi(\gamma) = GL(\gamma) = GL(h + G(y)) = GLG(y) = G(y) = \gamma - h$$

donc $\gamma = \varphi(\gamma) + h$. Mais cette équation admet une unique solution car φ est contractante comme nous l'avons vu. $\square$

Appliquons le lemme 9.6.16 à l'opérateur $F : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \rightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ (que nous avons défini grâce à la trivialisatıon unitaire Z_i le long de w_n). Si n est assez grand, pour que les hypothèses du lemme 9.6.16 soient satisfaites et pour $h \in \text{Ker } L = \text{Ker}(DF)_0$ avec $\|h\| \leq \varepsilon_0/5$, nous obtenons des éléments $\gamma_n(h) \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tels que

$$\exp_{w_n}(i(\gamma_n(h))) \in \mathcal{M}(x, z).$$

Nous avons besoin de la continuité de ces solutions par rapport à h :

Lemme 9.6.17. *Il existe un réel $\varepsilon_1 > 0$ indépendant de n , avec $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/5$ et tel que, pour $\|h\| \leq \varepsilon_1$, l'application $h \mapsto \gamma_n(h)$ soit continue.*

Démonstration. C'est une application du théorème des fonctions implicites. Rappelons la décomposition en somme directe

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) = \text{Ker } L \oplus W^\perp$$

(dépendant du pré-recollement w_n considéré) et le fait que $\gamma_n(h) \in h + W^\perp$. Définissons, pour n fixé,

$$\overline{F} : \text{Ker } L \oplus W^\perp \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

par $\overline{F}(h, \omega) = F(h + \omega)$, de sorte que $\overline{F}(h, \gamma_n(h) - h) = 0$. Montrons que

$$(D_2 \overline{F})_{(h, \gamma_n(h) - h)} = (dF)_{(\gamma_n(h))} : W^\perp \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

est inversible. On procède comme dans la preuve du lemme 9.4.14 :

$$\begin{aligned} \|G(dF)_{\gamma_n(h)} - \text{Id}\| &= \|G(dF)_{\gamma_n(h)} - G(dF)_0\| \\ &\leq C \|(dF)_{\gamma_n(h)} - (dF)_0\| \\ &\leq CK \|\gamma_n(h)\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

en vertu de la proposition 9.4.7 et du lemme 9.4.4. Avec le lemme 9.6.16,

$$\begin{aligned} \|G(dF)_{\gamma_n(h)} - \text{Id}\| &\leq CK (\|h\|_{W^{1,p}} + \|GF(0)\|_{W^{1,p}}) \\ &= CK (\|h\|_{W^{1,p}} + \|G\mathcal{F}(w_n)\|_{W^{1,p}}) \\ &\leq CK (\|h\|_{W^{1,p}} + C \|\mathcal{F}(w_n)\|_{L^p}). \end{aligned}$$

Nous avons déjà remarqué que $\lim \| \mathcal{F}(w_n) \|_{L^p} = 0$. Les constantes C et K ne dépendent pas de n . Pour un ε_1 indépendant de n tel que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0/5$ et pour n assez grand, l'inégalité ci-dessus montre que $d(dF)_{\gamma_n(h)}$ est inversible pour $\|h\|_{W^{1,p}} \leq \varepsilon_1$ (G est inversible par la proposition 9.4.7). Donc $D_2\bar{F}$ est inversible. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites pour conclure que $h \mapsto \gamma_n(h) - h$ est continue et donc que $h \mapsto \gamma_n(h)$ l'est. $\square$

Démontrons maintenant la proposition 9.6.5.

Démonstration de la proposition 9.6.5. Par les propositions 9.6.3 et 9.6.4, nous savons que

$$\tilde{\ell}_n = \exp_{w_n} Y_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 0.$$

Comme dans l'étape 3, on écrit $Y_n = i(\zeta_n)$ pour

$$i : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m).$$

Nous avons donc que $\lim \|\zeta_n\|_{W^{1,p}} = 0$. Décomposons

$$\zeta_n = h_n + \omega'_n \in \text{Ker } L \oplus W^\perp$$

(on a $\omega'_n = GL(\zeta_n)$ et $h_n = \zeta_n - GL(\zeta_n)$). Rappelons que $W^\perp$, G et L dépendent aussi de n . Nous savons que les normes opératoriels de G et L sont majorées par des constantes indépendantes de n : pour G grâce à la proposition 9.4.7 et pour L grâce au lemme 13.5.1 (encore un lemme technique démontré au chapitre 13). Donc, la norme $W^{1,p}$ de h_n , qui est majorée par $\|\zeta_n\|_{W^{1,p}} + \|G\|^{\text{op}} \|L\|^{\text{op}} \|\zeta_n\|_{W^{1,p}}$, tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En particulier, pour n assez grand, $\|h_n\|_{W^{1,p}} < \varepsilon_1$, où ε_1 est celui donné par le lemme 9.6.17. En vertu de la partie unicité du lemme 9.6.16, on a alors $\zeta_n = \gamma_n(h_n)$ et donc $\tilde{\ell}_n = \exp_{w_n} i(\gamma_n(h_n))$ est une solution obtenue par la méthode de Newton-Picard. Montrons que sa projection sur $\mathcal{L}(x, z)$ se trouve bien dans l'image de $\psi_\nu : [\rho_\nu, +\infty[\rightarrow \mathcal{L}(x, z)$.

Remarquons que, comme $w_n = w_{\nu, \rho_n}$ et comme, par construction de ψ_ν , $\psi_\nu(\rho_n) = \exp_{w_n}(\gamma_n(0))$, la conclusion est valide si $h_n = 0$. Dans le cas général, on utilise un argument de connexité qui s'appuie sur la continuité de $h \mapsto \gamma_n(h)$ que nous venons d'établir (lemme 9.6.17). Comme dans la preuve de la proposition 9.6.1, on identifie la composante de $\mathcal{L}(x, z)$ qui contient $\text{Im } \hat{\psi}_\nu$ avec $]0, 1[$ et l'image de $\hat{\psi}_\nu$ avec $[a, 1[$. Soit $\bar{\rho}_\nu > \rho_\nu$ et tel que

$$\hat{\psi}_\nu([\bar{\rho}_\nu, +\infty[) = [c, 1[\quad \text{avec } c > a.$$

Pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$, considérons l'ensemble $U_\varepsilon \subset \mathcal{M}(x, z)$ défini par

$$U_\varepsilon = \psi_\nu[\bar{\rho}_\nu, +\infty[\cup \bigcup_{\rho_n > \bar{\rho}_\nu} \{ \exp_{w_n}(i(\gamma_n(h))) \mid \|h\| \leq \varepsilon \}.$$

Par ce qui précède, $\tilde{\ell}_n \in U_\varepsilon$ pour n assez grand. Plus généralement, pour tout ε fixé ($\varepsilon \leq \varepsilon_1$), $\tilde{\ell}_n \in U_\varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$, en conséquence des propositions 9.6.3 et 9.6.4 ainsi que de l'unicité dans le lemme 9.6.16. Par ailleurs, U_ε est connexe par arcs, donc sa projection $I_\varepsilon \subset \mathcal{L}(x, z)$ est un intervalle.

Lemme 9.6.18. *Il existe ε_2 tel que $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ et*

$$I_{\varepsilon_2} \subset [a, 1[= \widehat{\psi}_\nu([\rho_\nu, +\infty[).$$

Démonstration. Par construction $I_0 = [c, 1[$, avec $c > a$. Si la conclusion du lemme était fausse, on aurait une suite ε_k , décroissant vers 0 et telle que $I_{\varepsilon_k} \supset [a, 1[$, $I_{\varepsilon_k} \neq [a, 1[$ (puisque, pour tout ε , I_ε est un intervalle qui contient $I_0 = [c, 1[$). En particulier, on aurait des trajectoires $\lambda_k \in U_{\varepsilon_k}$ telles que

$$\widehat{\lambda}_k \in [a - \delta_1, a - \delta_2] \subset \mathcal{L}(x, z) \quad \text{pour } \delta_1, \delta_2 \text{ petits.}$$

En particulier, $\lambda_k \notin \psi_\nu([\bar{\rho}_\nu, +\infty[) = [c, 1[$. Posons alors

$$\lambda_k = \exp_{w_{n_k}}(i(\gamma_{n_k}(h_k))) \quad \text{avec } \|h_k\| < \varepsilon_k.$$

On distingue deux cas :

(1) Si n_k tend vers l'infini, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\gamma_{n_k}(h_k)\|_{W^{1,p}} = 0.$$

En effet, d'après le lemme 9.6.16,

$$\|\gamma_{n_k}(h_k)\|_{W^{1,p}} \leq \|h_k\|_{W^{1,p}} + C \left\| \widetilde{\mathcal{F}}(0) \right\|_{L^p} \leq \varepsilon_k + C \|\mathcal{F}(w_{n_k})\|_{L^p}$$

et le membre de droite tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Comme au lemme 9.4.16, on a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{\lambda}_k = (u, v) \quad \text{dans } \overline{\mathcal{L}}(x, z),$$

ce qui est impossible puisque $\widehat{\lambda}_k \in [a - \delta_1, a - \delta_2] \subset \mathcal{L}(x, z)$. Nous avons utilisé le fait que la topologie de $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ est séparée, comme nous l'avons démontré au §9.1.

(2) Si au contraire la suite n_k est bornée, elle admet une sous-suite constante (n_0). En nous restreignant à cette sous-suite, nous avons donc

$$\lambda_k = \exp_{w_{n_0}}(i(\gamma_{n_0}(h_k))) \quad \text{pour tout } k.$$

Puisque $\|h_k\| \leq \varepsilon_k$, on a $\lim h_k = 0$. Comme $h \mapsto \gamma_n(h)$ est continue, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \exp_{w_{n_0}}(i(\gamma_{n_0}(0))) = \psi_\nu(\rho_{n_0}) \in \psi_\nu([\bar{\rho}_\nu, +\infty[).$$

On en déduit que $\lim \hat{\lambda}_k \in \hat{\psi}_\nu([\bar{\rho}_\nu, +\infty[) = [c, 1[$, ce qui est impossible puisque

$$\hat{\lambda}_k \in [a - \delta_1, a - \delta_2] \quad \text{et} \quad c > a.$$

Le lemme est démontré. $\square$

Et aussi la proposition 9.6.5 : pour n assez grand, $\tilde{\ell}_n \in U_{\varepsilon_2}$ (ε_2 est celui du lemme 9.6.18), donc $\ell_n \in I_{\varepsilon_2} \subset \hat{\psi}_\nu([\rho_\nu, +\infty[)$. $\square$

La démonstration du corollaire 9.6.6 est immédiate puisque la proposition 9.6.1 donne que $\hat{\psi}_\nu([\rho_\nu, +\infty[) \subset \text{Im } \hat{\psi}$, donc $\ell_n \in \text{Im } \hat{\psi}$ pour n assez grand. $\square$

La démonstration du théorème 9.2.3 est elle aussi, enfin, complète.

CHAPITRE 10

DE FLOER À MORSE

Dans ce chapitre, nous démontrons que, dans le cas d'un hamiltonien non dégénéré ne dépendant pas du temps et assez petit (au sens de la topologie $\mathcal{C}^2$), lorsque l'on peut définir le complexe de Morse et celui de Floer, les deux coïncident.

10.1. Les énoncés

Dans un souci de simplicité et de légèreté, nous avons utilisé plus ou moins la même notation pour le complexe de Morse (au chapitre 3) et pour le complexe de Floer (au chapitre 9). Il convient maintenant de les distinguer (pour démontrer qu'ils coïncident). Pour plus de clarté, nous notons donc ici $CF_\star(H, J)$ le complexe de Floer associé au hamiltonien H et à la structure presque complexe J (qui s'appelait $(C_\star, \partial)$ au chapitre 9) et $CM_\star(H, J)$ le complexe de Morse associé à la fonction de Morse H et au champ de vecteurs $\text{grad } H$, gradient de H pour la métrique définie par J (et ω) (qui s'appelait $(C_\star(H), \partial_{\text{grad}_H})$ au chapitre 3).

Et nous voulons démontrer :

Théorème 10.1.1. *Il existe un H non dégénéré et assez petit (au sens de la topologie $\mathcal{C}^2$), pour lequel*

$$CF_\star(H, J) = CM_{\star+n}(H, J).$$

Cet énoncé contient bien sûr le fait que les deux complexes en question sont bien définis. En partant d'un hamiltonien H_0 non dégénéré, nous construirons H de la forme $H = H_0/k$ pour un k assez grand.

Le fait que H soit assez petit garantit que ses trajectoires périodiques sont constantes (c'est la proposition 6.1.5), donc $\text{Crit}(\mathcal{A}_H) = \text{Crit}(H)$.

D'autre part, la proposition 5.4.5, qui compare les deux notions de non-dégénérescence (des points critiques de la fonction H , des trajectoires périodiques du hamiltonien H), implique que H est de Morse et que $\text{Crit}(\mathcal{A}_H) = \text{Crit}(H)$.

Grâce à la remarque 5.4.6, nous savons que la hessienne de H n'a aucune valeur propre dans $2\pi\mathbf{Z}$, de sorte que la proposition 7.2.1 nous permet de comparer l'indice (de Morse) d'un point critique de H à l'indice (de Maslov) de la trajectoire constante correspondante :

$$\text{Ind}_H(x) = \mu(x) + n,$$

ce qui implique que les espaces vectoriels intervenant dans les définitions des deux complexes sont les mêmes au décalage d'indices près.

- Il faut ensuite considérer les deux différentielles. Plus exactement, il faut
- pouvoir définir les différentielles des deux complexes,
 - montrer qu'elles coïncident.

Pour définir la différentielle du complexe de Morse, nous avons besoin d'un champ de vecteurs X adapté à la fonction de Morse H et qui satisfasse à la condition de Smale. D'autre part, nous voulons qu'il y ait une relation entre les trajectoires de ce champ de vecteurs et les solutions de l'équation de Floer

$$\frac{du}{ds} + X(u) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H(u) = 0.$$

Nous voulons donc que X soit le gradient de la fonction H pour la métrique définie par une structure presque complexe J calibrée par ω . Nous démontrerons donc :

Théorème 10.1.2. *Soit H une fonction de Morse sur la variété symplectique (W, ω) . Il existe une partie dense $\mathcal{J}_{\text{rég}}(H)$ de structures presque complexes J calibrées par ω telles que le couple $(H, -JX_H)$ soit de Morse-Smale.*

Nous décomposerons la démonstration en deux étapes. La première étape sera consacrée à une fonction de Morse générale f et à un champ adapté X . Nous linéariserons l'équation

$$\frac{du}{ds} + X(u) = 0$$

du flot du champ $-X$ le long d'une de ses solutions en $L_u Y = 0$, puis nous montrerons :

Théorème 10.1.3. *Lorsque f est une fonction de Morse et u une trajectoire joignant deux points critiques x et y , L_u est un opérateur de Fredholm dont l'indice est la différence des indices de Morse des deux points critiques.*

À cause de la relation entre les indices de Morse et de Maslov mentionnée ci-dessus, le corollaire qui vient s'en déduit.

Corollaire 10.1.4. *Pour un hamiltonien non dégénéré H et pour une trajectoire u de $-JX_H$, les opérateurs de Fredholm $(d\mathcal{F})_u$ et L_u ont le même indice.*

Nous montrerons aussi :

Théorème 10.1.5. *Le champ X est de Morse-Smale si et seulement si les opérateurs L_u sont surjectifs.*

Dans la deuxième étape, nous nous consacrerons au cas spécifique du hamiltonien H et démontrerons le théorème 10.1.2, un résultat de transversalité analogue à ceux que nous avons établis au §8.5.

La structure presque complexe et donc le champ de Morse-Smale étant ainsi choisis, nous nous occuperons ensuite à comparer les solutions de l'équation de Floer et les trajectoires du champ de vecteurs.

Remarque 10.1.6. Il est bien clair que les solutions de l'équation de Floer qui ne dépendent pas de t sont exactement les trajectoires du champ de vecteurs $X = -\text{grad } H$.

C'est ce qui donne envie de démontrer la proposition :

Proposition 10.1.7. *Si H est assez petit (au sens $\mathcal{C}^2$),*

$$\text{Ker}(d\mathcal{F})_u = \text{Ker } L_u.$$

Ce que nous ferons. Les éléments du noyau de $(d\mathcal{F})_u$ ne dépendent donc pas de t . En utilisant l'identité des indices (le corollaire 10.1.4 et la caractérisation des champs de Morse-Smale (dans le théorème 10.1.5), cela implique :

Corollaire 10.1.8. *L'opérateur de Fredholm $(d\mathcal{F})_u$ est surjectif le long de toute trajectoire du gradient de H .*

D'autre part, nous montrons que, quitte à remplacer H par $H_k = H/k$ (qui a les mêmes points critiques avec les mêmes indices) pour k assez grand, toutes les solutions de Floer qui nous intéressent sont indépendantes de t . C'est la proposition :

Proposition 10.1.9. *Si k est assez grand, les solutions de l'équation de Floer pour H_k joignant des points critiques d'indices x et y tels que*

$$\text{Ind}_{H_k}(x) - \text{Ind}_{H_k}(y) \leq 2$$

sont toutes indépendantes de t .

La conclusion est que, pour $H = H/k$, avec k assez grand, et pour $J \in \mathcal{J}_{\text{rég}}$ (la partie dense donnée par le théorème 10.1.2), les trajectoires de Floer associées à (H, J) qui joignent les deux points critiques x et y (points critiques aussi bien de H que de $\mathcal{A}_H$ puisque les deux ensembles de points critiques coïncident), lorsque $\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) \leq 2$, sont exactement les trajectoires du champ de Morse-Smale $X = -JX_H$ (par la proposition 10.1.9) et l'opérateur de Floer linéarisé le long de ces trajectoires est surjectif (par le corollaire 10.1.8). Une telle condition de régularité fait que $\mathcal{M}^{(H,J)}(x, y)$ est une variété, ce qui permet de définir le complexe de Floer (voir le théorème 8.1.2).

Cette propriété de régularité n'est établie ici que pour $\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) \leq 2$ (et non pas en général, comme au chapitre 8 (voir le théorème 8.1.1)), mais ce cas suffit pour construire le complexe de Floer $CF_*(H, J)$. On a vu qu'il coïncide avec celui de Morse $CM_{*+n}(H, J)$, ce qui démontre le théorème 10.1.1. Il nous reste à démontrer tous les résultats intermédiaires (10.1.2, 10.1.3, 10.1.5, 10.1.7, énoncés ci-dessus).

10.2. La linéarisation du flot d'un champ de pseudo-gradient, démonstration du théorème 10.1.3

Considérons donc une fonction de Morse f sur une variété V et un champ de pseudo-gradient adapté X . Les trajectoires de ce champ de vecteurs sont les solutions de

$$\frac{du}{ds} + X(u(s)).$$

Pour simplifier, supposons que la variété V est plongée dans un espace $\mathbf{R}^m$ (m assez grand) de sorte que l'on peut considérer $u \mapsto X(u)$ comme une application à valeurs dans $\mathbf{R}^m$. Fixons ici une métrique g sur V de façon que X soit le gradient de f pour g .

L'espace

$$\mathcal{M} = \left\{ u : \mathbf{R} \rightarrow V \mid \frac{\partial u}{\partial s} + \text{grad } f = 0 \text{ et } \int_{\mathbf{R}} \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|^2 ds < +\infty \right\}$$

des solutions d'énergie finie est compact⁽¹⁾ et l'on a

$$\mathcal{M} = \bigcup_{x, y \in \text{Crit}(f)} \mathcal{M}(x, y).$$

⁽¹⁾Rappelons que, si V est compacte, toutes les trajectoires sont d'énergie finie.

10.2.a. Linéarisation de l'équation. Fixons une solution u qui joint un point critique x à un point critique y et fixons une trivialisation $(Z_1, \dots, Z_n)$ (orthonormale pour la métrique g) de TV au voisinage de l'image de u . À l'aide de cartes de Morse, choisissons les Z_i de façon que $Z_i(s)$ ne dépende pas de s au voisinage des points critiques x et y . Écrivons, pour

$$Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \tilde{Y}(s) = \sum_{i=1}^n y_i(s) Z_i(u(s)).$$

Linéariser l'équation du flot le long de la solution u donne une équation différentielle linéaire

$$\frac{d\tilde{Y}}{ds} + (dX)_{u(s)}(\tilde{Y}) = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{L}_u \tilde{Y} = 0$$

dont la fonction inconnue $s \mapsto \tilde{Y}(s)$ est un vecteur tangent à V le long de la solution u . Écrivons, dans la trivialisation donnée,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_u(\tilde{Y}) &= \frac{d}{ds} \left(\sum y_i Z_i \right) + S_u(s) \left(\sum y_i Z_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dy_i}{ds} + \sum_{j=1}^n (a_{ji} + S_{ji}) y_j \right) Z_i \end{aligned}$$

où $S_u(s) = (dX)_{u(s)}$, les matrices a_{ij} et S_{ij} sont définies par

$$\frac{dZ_i}{ds} = \sum a_{ij} Z_j \quad \text{et} \quad S_u(s) \cdot Z_i = \sum S_{ij} Z_j.$$

Posons $A_{ij} = a_{ij} + S_{ij}$ et appelons L_u l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} L_u : W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n) \\ Y &\longmapsto \frac{dY}{ds} + A(s)Y. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi, pour le vecteur $Y(s) \in \mathbf{R}^n$, l'équation différentielle

$$L_u Y = \frac{dY}{ds} + AY = 0.$$

Grâce à notre hypothèse sur les Z_i , $a_{ij}(s)$ est nulle pour $s \rightarrow \pm\infty$ et, à la limite, quand $s \rightarrow \pm\infty$, A tend vers la hessienne de f au point critique x ou y , une matrice symétrique,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} A(s) = \text{Hess}_x(f) \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} A(s) = \text{Hess}_y(f).$$

Remarque 10.2.1. Remarquons aussi que l'espace des solutions s'interprète comme l'espace tangent à l'espace de trajectoires $\mathcal{M}(x, y)$ au point u .

10.2.b. La décroissance exponentielle des solutions. Remarquons tout d'abord que, si Y est une solution de $L_u Y = 0$ dans $W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$, elle est continue, donc, satisfaisant à l'équation différentielle, est de classe $\mathcal{C}^1$, et ainsi de suite, les solutions dans $W^{1,2}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ (bootstrapping élémentaire). En particulier, les solutions forment un espace vectoriel de dimension finie.

Étudions le comportement que l'appartenance à $W^{1,2}$ impose aux solutions à l'infini. Au voisinage d'un point critique, disons x , utilisons une carte de Morse de V . Nous pouvons choisir la trivialisation de TV de façon standard dans cette carte et l'équation différentielle $L_u Y = 0$ s'écrit tout simplement

$$\frac{dY}{ds} = -AY$$

où A est une matrice constante que nous pouvons supposer diagonale, de sorte que le système est

$$\frac{dy_i}{ds} = -\lambda_i y_i \quad 1 \leq i \leq n$$

et ses solutions de la forme

$$y_i(s) = y_i e^{-\lambda_i s}.$$

Il est bien clair que, pour qu'un tel vecteur soit dans $W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$, il faut qu'il tende vers 0 quand $s \rightarrow -\infty$, ce qu'il ne peut faire qu'exponentiellement (et de même en $+\infty$).

Interprétons en termes de l'opérateur L_u les propriétés de la fonction f et du champ de vecteurs X que nous avons utilisées pour construire le complexe de Morse.

10.2.c. La propriété de Fredholm. Démontrons plus précisément.

Proposition 10.2.2. *Si u est une trajectoire de gradient joignant deux points critiques x et y non dégénérés, alors l'opérateur L_u est un opérateur de Fredholm.*

Il faut démontrer que l'image de L_u est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$, et que son noyau et son conoyau sont de dimensions finies. Nous voulons utiliser, comme au § 8.7.c, la proposition 8.7.4 et pour cela nous démontrons :

Proposition 10.2.3. *Pour $T > 0$ assez grand, il existe une constante C telle que, pour toute solution de $L_u Y = 0$,*

$$\|Y\|_{W^{1,2}} \leq C(\|L_u Y\|_{L^2} + \|Y\|_{L^2([-T, T])}).$$

Nous aurons ainsi exactement l'hypothèse de la proposition 8.7.4, l'inclusion de $L^2([-T, T]) = L^2([-T, T]; \mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$ étant compacte. La démonstration de cette proposition s'appuie sur les deux lemmes qui viennent.

Lemme 10.2.4. *Soit B une matrice inversible. Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que tout $Y \in W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$ satisfait à l'inégalité*

$$\|Y\|_{W^{1,2}} \leq C_1 \left\| \frac{dY}{ds} + BY \right\|_{L^2}.$$

Ce lemme est l'analogue, en théorie de Morse, de la proposition 8.7.3. Nous l'appliquons en utilisant pour B une des matrices symétriques $\text{Hess}_x(f)$, $\text{Hess}_y(f)$, qui sont inversibles parce que les points critiques x et y sont non dégénérés. La propriété étant clairement stable par petites perturbations, nous obtenons, si $Y(s) = 0$ pour $-M \leq s \leq M$ et M assez grand,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\|Y\|^2 + \left\| \frac{dY}{ds} \right\|^2 \right) ds \leq C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{dY}{ds} + AY \right\|^2 ds.$$

Ces intégrales sont calculées sur $]-\infty, -M] \cup [M, +\infty[$. Étudions donc, dans le deuxième lemme, ce qui se passe sur l'intervalle borné $[-M, M]$.

Lemme 10.2.5. *Il existe une constante $C_3 > 0$ telle que*

$$\int_{-M}^M \left(\|Y\|^2 + \left\| \frac{dY}{ds} \right\|^2 \right) ds \leq C_3 \int_{-M}^M \left(\|Y\|^2 + \left\| \frac{dY}{ds} + AY \right\|^2 \right) ds.$$

Choisissons ensuite une fonction β (toujours comme au § 8.7.c) qui vaut 1 sur $[-M, M]$ et 0 en dehors de $[-M-1, M+1]$ et posons, pour alléger l'écriture, $T = M+1$. De $Y = \beta Y + (1-\beta)Y$, déduisons :

$$\|Y\|_{W^{1,2}} \leq \|\beta Y\|_{W^{1,2}} + \|(1-\beta)Y\|_{W^{1,2}}.$$

Remarquons ensuite que, pour toute fonction α ,

$$L_u(\alpha Y) = \frac{d\alpha}{ds} Y + \alpha L_u Y.$$

Ainsi nous avons

– La fonction $(1-\beta)Y$ est nulle sur $[-M, M]$, donc satisfait à

$$\begin{aligned} \|(1-\beta)Y\|_{W^{1,2}} &\leq C'_1 \|L_u(1-\beta)Y\|_{L^2} \\ &\leq C'_1 \left(\left\| \frac{d(1-\beta)}{ds} Y \right\|_{L^2} + \|(1-\beta)L_u Y\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

– À βY , nulle en dehors de $[-T, T]$, nous appliquons l'inégalité du lemme 10.2.5,

$$\begin{aligned} \|\beta Y\|_{W^{1,2}} &\leq C'_2 (\|\beta Y\|_{L^2} + \|L_u(\beta Y)\|_{L^2}) \\ &\leq C'_2 \left(\|\beta Y\|_{L^2} + \left\| \frac{d\beta}{ds} Y \right\|_{L^2} + \|\beta L_u Y\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

Et donc

$$\|Y\|_{W^{1,2}} \leq C_3 \left(\|\beta Y\|_{L^2} + 2 \left\| \frac{d\beta}{ds} Y \right\|_{L^2} + \|\beta L_u Y\|_{L^2} + \|(1-\beta)L_u Y\|_{L^2} \right).$$

Utilisons maintenant le fait que β et $d\beta/ds$ sont nulles en dehors de $[-T, T]$, donc

$$\|\beta Y\|_{L^2} + 2 \left\| \frac{d\beta}{ds} Y \right\|_{L^2} \leq 3 \|Y\|_{L^2[-T, T]}$$

et de même

$$\begin{aligned} &\|\beta L_u Y\|_{L^2} + \|(1-\beta)L_u Y\|_{L^2} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{-M} \|L_u Y\|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_{-T}^T \|L_u Y\|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_T^{+\infty} \|L_u Y\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq 3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|L_u Y\|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons obtenu que, pour T assez grand, il existe une constante C_3 telle que

$$\|Y\|_{W^{1,2}} \leq C_3 (\|Y\|_{L^2[-T, T]} + \|L_u Y\|_{L^2}),$$

ce que nous voulions démontrer, puisque c'est l'énoncé de la proposition 10.2.3, modulo les démonstrations des lemmes 10.2.4 et 10.2.5, qui suivent.

Démonstration du lemme 10.2.4. La résolution de l'équation différentielle

$$\frac{dY}{ds} + BY = Z$$

par la méthode de variation des constantes donne les solutions sous la forme

$$Y(s) = e^{-Bs} Y_0(0) + e^{-Bs} \int_0^s e^{B\sigma} Z(\sigma) d\sigma.$$

Nous souhaitons montrer alors que, pour Z dans L^2 , Y est dans $W^{1,2}$, c'est-à-dire que

$$\|Y\|_{W^{1,2}} \leq C_1 \|Z\|_{L^2}$$

pour une certaine constante C_1 . Nous voulons donc comparer

$$\|Y\|_{W^{1,2}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\|Y\|^2 + \left\| \frac{dY}{ds} \right\|^2 \right) ds$$

et

$$\left\| \frac{dY}{ds} + BY \right\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{dY}{ds} + BY \right\|^2 ds$$

sous l'hypothèse que la matrice B est inversible. Nous utilisons la transformation de Fourier

$$\widehat{Y}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivs} Y(s) ds.$$

Soit $Z = \frac{dY}{ds} + BY$, de sorte que, pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{Z}(v) = (v \text{Id} + B) \widehat{Y}(v).$$

La matrice B est réelle. Choisissons un v imaginaire pur ($v = iu$ avec $u \in \mathbf{R}$), de sorte que

$$\|v \text{Id} + B\|^2 = u^2 + \|B\|^2.$$

Utilisons maintenant l'hypothèse que B est inversible : il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\|\widehat{Z}(iu)\|^2 = \|iu \text{Id} + B\|^2 \|\widehat{Y}(iu)\|^2 \geq (u^2 + C_0^2) \|\widehat{Y}(iu)\|^2.$$

Soit $C_1 = \max(1, 1/C_0^2)$, de sorte que $1 + u^2 \leq C_1(C_0^2 + u^2)$ pour tout u , ce qui donne

$$(1 + u^2) \|\widehat{Y}(iu)\|^2 \leq C_1(C_0^2 + u^2) \|\widehat{Y}(iu)\|^2 \leq C_1 \|\widehat{Z}(iu)\|^2,$$

et, en intégrant sur $\mathbf{R}$, l'inégalité espérée. $\square$

Démonstration du lemme 10.2.5. Minorons l'intégrale

$$\int_{-M}^M \|L_u Y\|^2 ds.$$

Développer $\|u + 2v\|^2 \geq 0$ donne l'inégalité

$$\|u + v\|^2 \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \|v\|^2,$$

et ici la minoration

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \|L_u Y\|^2 ds &= \int_{-M}^M \left\| \frac{dY}{ds} + AY \right\|^2 ds \geq \int_{-M}^M \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{dY}{ds} \right\|^2 - \|AY\|^2 \right) ds \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{-M}^M \left\| \frac{dY}{ds} \right\|^2 ds - C \int_{-M}^M \|Y\|^2 ds, \end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{1}{2} \int_{-M}^M \left\| \frac{dY}{ds} \right\|^2 ds \leq C \int_{-M}^M \|Y\|^2 ds + \int_{-M}^M \|L_u Y\|^2 ds$$

ce qui donne bien la majoration désirée. $\square$

Nous savons maintenant (grâce à la proposition 8.7.4) que L_u a un noyau de dimension finie et une image fermée. Afin de terminer de démontrer que L_u est opérateur de Fredholm, déterminons son conoyau.

Lemme 10.2.6. *Le conoyau de u est le noyau de l'opérateur*

$$L_u^* : W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$$

défini par

$$L_u^* Z = -\frac{dZ}{ds} + A^* Z$$

(où A^* est la transposée de A).

Démonstration. Le conoyau de L_u est

$$\left\{ Z \in L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n) \mid \int_{-\infty}^{+\infty} \langle L_u Y, Z \rangle ds = 0 \text{ pour tout } Y \in W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n) \right\}.$$

Soit L_u^* l'opérateur défini dans l'énoncé du lemme. On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle L_u(Y), Z \rangle ds &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{dY}{ds}, Z \right\rangle ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \langle AY, Z \rangle ds \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{dZ}{ds}, Y \right\rangle ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A^* Z, Y \rangle ds. \end{aligned}$$

Si $Z \in \text{Coker } L_u$, on a $L_u^* Z = 0$ au sens des distributions, donc, à cause de la définition de L_u^* , dZ/ds est dans L^2 et donc $Z \in W^{1,2}$ et donc $Z \in \text{Ker } L_u^*$. Donc $\text{Coker } L_u = \text{Ker } L_u^*$ (l'inclusion inverse est claire). $\square$

Le noyau de L_u^* est de dimension finie comme celui de L_u en vertu du même théorème sur les équations différentielles linéaires. Il en est donc de même du conoyau de L_u . Ceci termine la démonstration du fait que L_u est un opérateur de Fredholm lorsque L_u joint deux points critiques non dégénérés, c'est-à-dire de la proposition 10.2.2.

Corollaire 10.2.7. *Si f est une fonction de Morse, pour toute trajectoire u , l'opérateur L_u est un opérateur de Fredholm.* $\square$

10.2.d. Le calcul de l'indice. Calculons maintenant l'indice de cet opérateur.

Proposition 10.2.8. *L'indice de l'opérateur de Fredholm L_u est $\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y)$.*

Démonstration. Nous avons déjà remarqué que les solutions de $L_u Y = 0$ qui sont dans $W^{1,2}$ tendent vers 0 exponentiellement quand $s \rightarrow \pm\infty$. Si σ et s sont deux réels, définissons

$$\Phi_{(\sigma,s)} : T_{u(\sigma)} V \longrightarrow T_{u(s)} V$$

comme la résolvante de l'équation différentielle linéaire, c'est-à-dire l'application qui, au vecteur $\tilde{Y} \in T_{u(\sigma)}V$, associe la valeur en s de l'unique solution qui vaut $\tilde{Y}$ en σ . Définissons

$$E^u(\sigma) = \{\tilde{Y} \in T_{u(\sigma)}V \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi_{(\sigma,s)}\tilde{Y} = 0\}$$

et de même

$$E^s(\sigma) = \{\tilde{Y} \in T_{u(\sigma)}V \mid \lim_{s \rightarrow +\infty} \Phi_{(\sigma,s)}\tilde{Y} = 0\}.$$

Ces espaces sont les espaces tangents en $u(\sigma)$ aux variétés instables et stables (respectivement) de x et y ,

$$E^u(\sigma) = T_{u(\sigma)}W^u(x) \quad \text{et} \quad E^s(\sigma) = T_{u(\sigma)}W^s(y).$$

Si $\tilde{Y} \in E^u(\sigma) \cap E^s(\sigma)$, la solution $Y(s)$ qui vaut $\tilde{Y}$ en σ est dans $W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$ et réciproquement, de sorte que

$$\forall \sigma \in \mathbf{R}, \quad \text{Ker } L_u \cong E^u(\sigma) \cap E^s(\sigma).$$

On a ainsi

$$\text{Ker } L_u \cong T_{u(\sigma)}W^u(x) \cap T_{u(\sigma)}W^s(y).$$

Reste à déterminer le noyau de L_u^* . Définissons

$$\Psi_{(\sigma,s)} = \Phi_{(s,\sigma)}^* : T_{u(\sigma)}V \longrightarrow T_{u(s)}V.$$

Montrons que cette application est la résolvante de L_u^* . Choisissons $Z_0 \in \mathbf{R}^n$ et définissons $Z_0(s) = \Psi_{(\sigma,s)}Z_0$. Remarquons que, puisque $\Psi_{(\sigma,\sigma)} = \text{Id}$, on a $Z_0(\sigma) = Z_0$. Choisissons aussi $Y_0 \in \mathbf{R}^n$. Par définition de $\Psi_{(\sigma,s)}$,

$$\langle \Psi_{(\sigma,s)}Z_0, \Phi_{(\sigma,s)}Y_0 \rangle = \langle Z_0, Y_0 \rangle.$$

Dérivons cette identité par rapport à s , obtenant :

$$0 = \left\langle \frac{dZ_0}{ds}, \Phi_{(\sigma,s)}Y_0 \right\rangle + \left\langle \Psi_{(\sigma,s)}Z_0, \frac{dY_0}{ds} \right\rangle.$$

Utilisons le fait que le champ de vecteurs $Y_0(s) = \Phi_{(\sigma,s)}Y_0$ est solution de $L_u Y_0 = 0$, et donc que $Y_0(s)/ds = -AY_0(s)$, ce qui transforme notre égalité en

$$\left\langle \frac{dZ_0}{ds}, Y_0(s) \right\rangle - \langle Z_0(s), AY_0(s) \rangle = 0,$$

soit en

$$\left\langle \frac{dZ_0}{ds} - A^*Z_0(s), Y_0(s) \right\rangle = 0.$$

Comme on pouvait choisir pour Y_0 n'importe quel vecteur tangent, on a bien montré que $Z_0(\sigma) = Z_0$ et $L_u^*Z_0 = 0$, soit que $\Psi_{(\sigma,s)}$ est la résolvante de L_u^* .

Ce calcul montre aussi que, si $Z(s)$ est une solution de $L_u^*Z = 0$, on a $\lim_{s \rightarrow -\infty} Z(s) = 0$ si et seulement si $Z(\sigma) \perp E^u(\sigma)$ et de même $\lim_{s \rightarrow +\infty} Z(s) = 0$ si et seulement si $Z(\sigma) \perp E^s(\sigma)$. On a donc montré que

$$\text{Ker } L_u^* = (T_{u(\sigma)}W^u(x) + T_{u(\sigma)}W^s(y))^\perp.$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } \dim T_{u(\sigma)}W^u(x) &= \text{Ind}(x), \dim T_{u(\sigma)}W^s(y) = n - \text{Ind}(y), \text{ on obtient} \\ \dim \text{Ker } L_u &= \dim T_{u(\sigma)}W^u(x) \cap T_{u(\sigma)}W^s(y) \\ &= \dim W^u(x) + \dim W^s(y) - \dim(T_{u(\sigma)}W^u(x) + T_{u(\sigma)}W^s(y)), \\ \dim \text{Ker } L_u^* &= \dim(T_{u(\sigma)}W^u(x) + T_{u(\sigma)}W^s(y))^\perp \\ &= n - \dim(T_{u(\sigma)}W^u(x) + T_{u(\sigma)}W^s(y)), \\ \text{Ind}(L_u) &= \dim W^u(x) + \dim W^s(y) - n \\ &= \text{Ind}(x) + n - \text{Ind}(y) - n \\ &= \text{Ind}(x) - \text{Ind}(y), \end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

On trouvera une autre façon de calculer l'indice de cet opérateur dans l'exercice 46.

10.2.e. La condition de Smale. Nous démontrons ici que le champ de vecteurs X vérifie la condition de Smale si et seulement si tous les L_u sont surjectifs, c'est-à-dire le théorème 10.1.5.

Remarque 10.2.9. Si X est le gradient de f pour une métrique g , cette condition porte bien sûr sur ladite métrique.

Démonstration. C'est une conséquence du calcul ci-dessus. Dire que L_u est surjectif, c'est dire que son conoyau est réduit à 0, c'est-à-dire que L_u^* soit injectif, c'est-à-dire encore que

$$T_{u(\sigma)}W^u(x) + T_{u(\sigma)}W^s(y) = T_{u(\sigma)}V,$$

la condition de transversalité des variétés stables et instables, que nous voulons ici pour tous les points critiques x et y . $\square$

On aurait pu faire la théorie du complexe de Morse en ces termes (voir [60, 63]).

10.3. Démonstration du théorème (de régularité) 10.1.2

Ici H est fixé et nous considérons deux points critiques x et y . Définissons $\mathcal{Z}(x, y, H)$ comme

$$\{(u, J) \mid J \in \mathcal{J}_c(\omega) \text{ et } u \text{ est une trajectoire de } -JX_H \text{ joignant } x \text{ à } y\}.$$

10.3.a. Variations infinitésimales de la structure presque complexe

L'espace $\mathcal{J}_c(\omega)$ des structures presque complexes calibrées par ω est une partie de l'espace vectoriel des sections du fibré des endomorphismes de TW . Nous avons déjà remarqué (c'est la proposition 5.5.7) que l'espace tangent

$$T_J \mathcal{J}_c(\omega) = \{S \in \text{End}(TW) \mid JS + SJ = 0 \text{ et } \omega(S\xi, \eta) + \omega(\xi, S\eta) = 0\}.$$

Fixons un tel S et posons $J_t = J \exp(-tJS)$.

Lemme 10.3.1. *Pour t assez petit, l'endomorphisme J_t est une structure presque complexe calibrée par ω .*

Démonstration. D'abord, J_t est bien une structure presque complexe : comme J « anti-commute » avec S , $J_t = \exp(tJS)J$ et donc

$$J_t^2 = \exp(tJS)JJ \exp(-tJS) = J^2 = -\text{Id}.$$

Ensuite, J_t est une isométrie de ω , puisque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega(J_t \xi, J_t \eta) &= \frac{d}{dt} \omega(\exp(-tJS)\xi, \exp(-tJS)\eta) \\ &= \omega(-JS \exp(-tJS)\xi, \exp(-tJS)\eta) \\ &\quad + \omega(\exp(-tJS)\xi, -JS \exp(-tJS)\eta) \\ &= \omega(SJ \exp(-tJS)\xi, \exp(-tJS)\eta) \\ &\quad + \omega(\exp(-tJS)\xi, SJ \exp(-tJS)\eta) \\ &= \omega(SJ\xi, \eta) + \omega(\xi, SJ\eta) = 0 \end{aligned}$$

(où l'on a posé $\Xi = \exp(-tJS)\xi$ et $H = \exp(-tJS)\eta$) donc $\omega(J_t \xi, J_t \eta)$ est constant égal à $\omega(J\xi, J\eta) = \omega(\xi, \eta)$. Ce calcul donne aussi

$$\omega(J_t \xi, \eta) = \omega(J_t^2 \xi, J_t \eta) = -\omega(\xi, J_t \eta) = \omega(J_t \eta, \xi)$$

de sorte que $\omega(\cdot, J_t \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique. Ensuite, on a

$$\omega(\xi, J_t \eta) = \omega(\xi, J\eta) + O(t)$$

de sorte que $\omega(\cdot, J_t \cdot)$ est bien une métrique riemannienne, au moins pour t assez petit. $\square$

10.3.b. Démonstration du théorème 10.1.2. Comme au § 8.3, nous utilisons ici la norme $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ sur cet espace de perturbations de J ,

$$\|S\|_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \|S\|_{\mathcal{C}^k}$$

(pour une suite $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ assez décroissante). On a, comme au § 8.3 :

Proposition 10.3.2. *Pour une suite ε bien choisie, l'espace $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(J)$ des sections de $\text{End}(TW)$ telles que*

$$\begin{cases} JS + SJ = 0 \\ \omega(S\xi, \eta) + \omega(\xi, S\eta) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \|S\|_\varepsilon < +\infty$$

est un espace de Banach séparable et dense dans l'espace des sections L^2 du fibré $T\mathcal{J}_c(\omega)$. $\square$

Fixons donc une structure presque complexe $J_0 \in \mathcal{J}_c(\omega)$ et un nombre réel $\delta > 0$. Définissons l'image de la boule unité

$$\mathcal{J}_0(\delta) = \{J_0 \exp(-J_0 S) \mid S \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(J_0) \text{ et } \|S\|_\varepsilon < \delta\}$$

et

$$\mathcal{Z}_0(x, y) = \{(u, J) \in \mathcal{Z}(x, y) \mid J \in \mathcal{J}_0(\delta)\}$$

(cet espace dépend du choix du rayon δ , que nous n'avons pas fait figurer dans la notation dans un souci de légèreté).

Proposition 10.3.3. *Le sous-espace $\mathcal{Z}_0(x, y)$ est une variété de Banach.*

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de cette proposition. Nous allons, comme au § 8.5, exhiber $\mathcal{Z}_0$ comme ensemble des zéros d'une section d'un fibré vectoriel. L'analyse est plus facile ici car nous n'avons qu'une seule variable et pouvons rester dans L^2 et $W^{1,2}$. Considérons donc

$$\mathcal{P}^{1,2}(x, y) = \{u \in W^{1,2}(\mathbf{R}; W) \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = x \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = y\}$$

(la limite a un sens puisque les éléments de $W^{1,2}$ sont des applications continues) et

$$\mathcal{E} = \{(u, J, Y) \mid u \in \mathcal{P}^{1,2}(x, y),$$

$$J \in \mathcal{J}_0(\delta), Y \text{ est un champ de vecteurs } L^2 \text{ le long de } u\},$$

fibré sur $\mathcal{P}^{1,2}(x, y) \times \mathcal{J}_0(\delta)$ dont la fibre en (u, J) est l'espace des champs de vecteurs L^2 le long de u . Grâce à une trivialisations Z_i de TW (comme celle que nous avons fixée au chapitre 8), cet espace n'est autre que $L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n})$. L'application

$$\mathcal{G} : \mathcal{P}^{1,2}(x, y) \times \mathcal{J}_0(\delta) \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$(u, J) \longmapsto \left(u, \frac{du}{ds} + \text{grad}_u H\right) = \left(u, \frac{du}{ds} - JX_H\right)$$

est une section de $\mathcal{E}$ qui s'annule le long de $\mathcal{Z}_0(x, y)$. Montrons donc qu'elle est transverse à la section nulle. Nous devons en calculer la différentielle

$$(d\mathcal{G})_{(u, J_0)} : W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n}) \times \mathcal{J}_0(\delta) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n}).$$

Nous avons déjà linéarisé $\mathcal{G}$ à métrique constante (donc à J constant au §10.2.a) et $\mathcal{F}$ (avec la variable t supplémentaire) au §8.4. Le même calcul donne, en composant avec la projection sur la fibre :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \pi \circ (d\mathcal{G})_{(u, J_0)}(Y, S) = \left(\frac{dY}{ds} - J_0[(X_H)_u, Y] \right) - S(X_H)_u \\ &= L_u(Y) - S(X_H)_u,\end{aligned}$$

où $L_u : W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n})$ est l'opérateur défini au §10.2.a. Nous avons dit que L_u est un opérateur de Fredholm (parce que H est une fonction de Morse), donc son image est fermée et de codimension finie. Le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 8.5.1 donne le fait que l'image de Γ est un sous-espace fermé de codimension finie. Pour montrer la surjectivité de Γ en les points de $\mathcal{Z}_0$, il suffit de montrer, ce que nous faisons ici (le dual de L^2 est L^2 lui-même) :

Lemme 10.3.4. *L'orthogonal de l'image de Γ dans $L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n})$ est réduit à 0.*

Démonstration. Soit Z un élément de l'orthogonal, c'est-à-dire tel que l'on ait, pour tous Y et S ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle Z(s), \Gamma(Y, S) \rangle ds = 0,$$

ou encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle Z(s), \frac{dY}{ds} - J_0[X_H, Y] \right\rangle ds - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle Z(s), S(X_H) \rangle ds = 0$$

pour tous Y et S , soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle Z(s), \frac{dY}{ds} - J_0[X_H, Y] \right\rangle ds = 0 \quad \text{pour tout champ } Y \text{ le long de } u$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle Z(s), S(X_H) \rangle ds = 0 \quad \text{pour toute section } S.$$

La première de ces égalités, $\langle Z, L_u(Y) \rangle = 0$, revient à $\langle L_u^* Z, Y \rangle = 0$ pour tout Y , soit $L_u^* Z = 0$, une équation différentielle de la forme

$$-\frac{dZ}{ds} + B(s)Z = 0,$$

ce qui garantit que la solution Z , supposée au départ seulement dans L^2 , est dans $W^{1,2}$ et donc $\mathcal{C}^\infty$. Nous allons ainsi pouvoir raisonner avec les valeurs que prend Z .

La deuxième égalité est

$$\langle Z, S(X_H) \rangle = \left\langle Z, -SJ \frac{du}{ds} \right\rangle = -\left\langle SZ, J \frac{du}{ds} \right\rangle$$

puisque S est symétrique. Nous voulons montrer que Z est nul. Supposons donc que ce ne soit pas le cas et choisissons un s_0 tel que $Z(s_0) \neq 0$. Utilisons une trivialisat on unitaire au voisinage de $x_0 = u(s_0) \in W$ dans laquelle J_0 est standard. Alors, S est simplement une matrice symétrique (d ependant du point considéré) telle que $S = J_0 S J_0$. Considérons le vecteur $J_0 du/ds(s_0)$ et construisons une matrice S_0 telle que

$$\left\langle Z(s_0), S_0 J_0 \frac{du}{ds}(s_0) \right\rangle \neq 0.$$

C'est un lemme facile d'algèbre linéaire :

Lemme 10.3.5. *Soient U et V deux vecteurs non nuls de $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$. Il existe une matrice symétrique réelle S , anti- $\mathbf{C}$ -linéaire et telle que le produit scalaire euclidien $\langle U, SV \rangle$ soit non nul.*

Ce lemme acquis, il existe une application $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$, à support au voisinage de x_0 et qui prend la valeur S_0 en x_0 . Ce qui donne la contradiction voulue. $\square$

Dans un souci de complétude, donnons une démonstration du lemme 10.3.5. Le sous-espace vectoriel complexe engendré par les deux vecteurs U et V est (au plus) de dimension 2, il suffit donc de démontrer ce lemme dans $\mathbf{C}^2$. Comme U n'est pas nul, on peut donc supposer que c'est le premier vecteur d'une base, dans laquelle tout ce qui suit est écrit. La matrice S doit avoir la forme

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \quad \text{où } A \text{ est symétrique et } B \text{ antisymétrique.}$$

Il n'y a donc aucune contrainte sur la première colonne de S , que nous pouvons choisir égale au vecteur V . Mais alors, $S(U) = V$ et

$$\langle U, SV \rangle = \langle SU, V \rangle = \langle V, V \rangle = \|V\|^2 \neq 0,$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

Pour finir la démonstration du théorème 10.1.2, considérons la projection

$$\pi : \mathcal{Z}_0(x, y) \longrightarrow \mathcal{J}_0(\delta)$$

définie par $\pi(u, J) = J$. Le théorème de Sard-Smale (ici théorème 8.5.6) affirme l'existence d'un sous-ensemble ouvert dense $\mathcal{J}_{\text{r g}} \subset \mathcal{J}_0(\delta)$ formé de valeurs régulières de π . Nous démontrons :

Lemme 10.3.6. *Si $J \in \mathcal{J}_{\text{r g}}$, pour toute trajectoire u du champ $-JX_H$ joignant x   y , l'opérateur linéarisé L_u est surjectif.*

Démonstration. Si $L_u : W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n})$ n'est pas surjectif, il existe $Z \in L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n})$ orthogonal à l'image de L_u . Par ailleurs, l'hypothèse affirme que $(d\pi)_{(u,J)}$ est surjectif. La démonstration de la proposition 10.3.2 donne une description de l'espace tangent $T_{(u,J)}\mathcal{Z}_0(x,y)$, comme le noyau de Γ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} T_{(u,J)}\mathcal{Z}_0(x,y) \\ = \left\{ (Y, S) \in W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n}) \times T_J\mathcal{J}_0(\delta) \mid L_u(Y) - S(X_H)_u = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Puisque $\langle L_u Y, Z \rangle = 0$ pour tout $Y \in W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^{2n})$, la surjectivité de $(d\pi)_{(u,J)}$ implique que

$$\text{pour tout } S \in T_J\mathcal{J}_0(\delta), \quad \langle S(X_H)_u, Z \rangle = 0.$$

Nous avons vu, dans la démonstration du lemme 10.3.4, que cela implique que $Z = 0$, ce qui, à la fois contredit la supposition faite et démontre le lemme. $\square$

En prenant l'intersection des différents ensembles $\mathcal{J}_{\text{rég}}$ obtenus pour les différents couples de points critiques de H , on obtient l'ensemble $\mathcal{J}_{\text{rég}}(H)$ annoncé dans l'énoncé du théorème 10.1.2 (on utilise aussi le théorème 10.1.5) $\square$

10.4. Les trajectoires de Morse et de Floer coïncident

10.4.a. Les trajectoires indépendantes de t sont régulières. Nous montrons ici la proposition 10.1.7 (et le corollaire 10.1.8). On a clairement $\text{Ker } L_u \subset \text{Ker}(d\mathcal{F})_u$: si $Y(s)$ vérifie

$$\frac{dY}{ds} + S(s)Y = 0,$$

alors il vérifie aussi

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} + S(s)Y = 0.$$

Montrons l'inclusion inverse. Soit $Y \in \text{Ker } L$. Notons $L = (d\mathcal{F})_u$ et $L_0 = L_u$. Nous avons

$$\int_0^1 J \frac{\partial Y}{\partial t} dt = 0, \quad \text{donc} \quad \int_0^1 Y(s, t) dt \in \text{Ker } L_0.$$

On peut ainsi supposer que $\int_0^1 Y(s, t) dt = 0$. On utilise un lemme élémentaire de fonctions de variable réelle (dont la démonstration est donnée plus bas).

Lemme 10.4.1. *Soit f une application dérivable sur $[0, 1]$, de moyenne nulle sur cet intervalle. Alors on a, pour tout p ,*

$$\int_0^1 \|f(t)\|^p dt \leq \int_0^1 \|f'(t)\|^p dt.$$

On l'applique à $f(t) = Y(s, t)$ et à $p = 2$. On intègre par rapport à s :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \|Y(s, t)\|^2 dt ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\| \frac{\partial Y}{\partial t}(s, t) \right\|^2 dt ds.$$

Ensuite, en norme L^2 , on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial Y}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 &= \left\langle \frac{\partial Y}{\partial s}, \frac{\partial Y}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t} \right\rangle \\ &= -\langle Y, \Delta Y \rangle \\ &= -\left\langle Y, \left(\frac{\partial}{\partial s} - J \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial s} + J \frac{\partial}{\partial t} \right) Y \right\rangle \\ &= \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} + J \frac{\partial Y}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 \\ &= \|S(s)Y\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sup_s \|S(s)\|^2 \|Y\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

(c'est la norme opératorielle de $S(s)$ qui apparaît dans cette formule). Donc, grâce à notre lemme, on trouve

$$\|Y\|_{L^2}^2 \leq \|\text{grad } Y\|_{L^2}^2 \leq \sup_s \|S(s)\|^2 \|Y\|_{L^2}^2.$$

Le fait que H soit « $\mathcal{C}^2$ -petite » implique que $\sup_s \|S(s)\|$ est assez petite et donc que $Y = 0$. $\square$

Démonstration du lemme 10.4.1. On écrit, pour $t, t_1 \in [0, 1]$,

$$f(t_1) - f(t) = \int_t^{t_1} f'(\tau) d\tau,$$

relation que l'on intègre par rapport à t entre 0 et 1,

$$f(t_1) = \int_0^1 \left(\int_t^{t_1} f'(\tau) d\tau \right) dt,$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^1 \|f(t_1)\|^p dt_1 \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_t^{t_1} \|f'(\tau)\|^p d\tau dt \right) dt_1 \leq \int_0^1 \|f'(\tau)\|^p d\tau,$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

10.4.b. Les trajectoires sont indépendantes de t . Montrons maintenant que les trajectoires de $H = H/kk$ comptées pour le complexe de Floer sont exactement celles comptées pour le complexe de Morse, c'est-à-dire la proposition 10.1.9.

Démonstration de la proposition 10.1.9. Supposons que ce ne soit pas vrai. C'est dire qu'il existe une suite (n_k) tendant vers l'infini et une solution u_{n_k} (dépendant effectivement de t), dont on peut supposer qu'elle relie les points critiques x et y , de l'équation de Floer

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{n_k} \text{grad } H = 0.$$

Posons

$$v_{n_k}(s, t) = u_{n_k}(n_k s, n_k t).$$

C'est une solution de l'équation de Floer pour le hamiltonien originel H , qui est périodique de période $1/n_k$ et que l'on peut donc considérer comme périodique de période 1, $v_{n_k} \in \mathcal{M}(x, y, H)$.

Considérons d'abord le cas où la différence d'indice vaut 1,

$$\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) = 1 = \mu(x) - \mu(y).$$

Grâce au théorème de convergence vers les trajectoires brisées (théorème 9.1.7), on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite (v_{n_k}) tend vers une limite $v \in \mathcal{M}(x, y, H)$. Si nous montrons que v ne dépend pas de t , comme $(d\mathcal{F})_v$ est surjective (par la proposition 10.1.7), v devra être dans une composante de dimension 1 de $\mathcal{M}(x, y, H)$, ou encore un point isolé de $\mathcal{L}(x, y)$. Pour k assez grand, on aurait

$$v_{n_k}(s, t) = v(s + \sigma_k, t) = v(s + \sigma_k),$$

et v_{n_k} ne dépendrait pas de t , en contradiction avec la supposition faite.

Il suffit donc de démontrer que la limite v ne dépend pas de t . On utilise le fait que v est la limite d'une suite dont la période tend vers 0. Soit $r \in \mathbf{R}$. Fixons $s \in \mathbf{R}$ et $t \in [0, 1]$. Comme v_{n_k} est périodique de période $1/n_k$, on a

$$v_{n_k}(s, t) = v_{n_k}\left(s, t + \frac{[rn_k]}{n_k}\right)$$

(dans cette écriture, $[rn_k]$ désigne la partie entière de rn_k). Quand k tend vers l'infini, $[rn_k]/n_k$ tend vers r , de sorte que le membre de gauche tend vers $v(s, t)$ et celui de droite vers $v(s, t + r)$, donc, pour tout r ,

$$v(s, t) = v(s, t + r)$$

ce que nous voulions démontrer.

Supposons maintenant que la différence d'indice est 2,

$$\text{Ind}(x) - \text{Ind}(y) = 2 = \mu(x) - \mu(y).$$

Dans ce cas, le théorème 9.1.7 affirme qu'une sous-suite de $(v_{n_k}(s + s_k, t))$ tend, soit vers une limite $v \in \mathcal{M}(x, y, H)$, soit vers une trajectoire brisée

$$(v, w) \in \mathcal{M}(x, z) \times \mathcal{M}(z, y).$$

Dans la première éventualité, on démontre comme ci-dessus que v est indépendant de t . Ici encore, $(d\mathcal{F})_v$ est surjective grâce à la proposition 10.1.7. On obtient donc comme dans la démonstration du lemme 8.5.8 que $\mathcal{M}(x, y, H)$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathcal{Z}(x, y, J)$ dans un voisinage de (v, H) (on utilise ici la notation

$$\mathcal{Z}(x, y, J) = \{(v, H + h) \mid h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H), v \in \mathcal{M}(x, y, J, H + h)\}$$

du chapitre 8). Par ailleurs, comme le gradient $-JX_H$ de H est de Morse-Smale, ses trajectoires qui joignent x à y forment une variété de dimension 2. Mais ces trajectoires sont aussi dans $\mathcal{M}(x, y, H)$, on obtient par suite un paramétrage de cette sous-variété au voisinage de v , par des trajectoires qui ne dépendent pas de t . Puis, comme $v_{n_k}(s + s_k, t) \in \mathcal{M}(x, y, H)$, et comme cette suite tend vers v , il suit que $v_{n_k}(s + s_k, t)$ est indépendant de t pour k assez grand, une contradiction.

Reste le cas où $\lim v_{n_k} = (v, w)$, c'est-à-dire celui où existent des suites (s_k^1) et (s_k^2) telles que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v_{n_k}(s + s_k^1, t) = v(s, t) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} v_{n_k}(s + s_k^2, t) = w(s, t).$$

On démontre comme ci-dessus que v et w ne dépendent pas de t . Par la proposition 10.1.7, les deux opérateurs $(d\mathcal{F})_v$ et $(d\mathcal{F})_w$ sont surjectifs. On peut alors appliquer le théorème de recollement (théorème 9.2.3). On en déduit l'existence d'un plongement

$$\widehat{\psi} : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(x, y)$$

tel que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\rho) = (\widehat{v}, \widehat{w}) \in \mathcal{L}(x, z) \times \mathcal{L}(z, y).$$

D'autre part, v et w sont aussi des trajectoires (de Morse) du champ de Morse-Smale $-JX_H$. Le théorème de recollement dans ce cadre (c'est-à-dire le théorème 3.2.7) affirme alors que la trajectoire brisée $(\widehat{u}, \widehat{v})$ est un point du bord d'une variété de dimension 1 formée de trajectoires de Morse qui joignent x à y . Mais celles-ci sont aussi des trajectoires de Floer, de sorte que nous avons une application

$$\varphi : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{M}(x, y, H)$$

telle que

$$\widehat{\varphi} : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(x, y)$$

est un plongement. De surcroît, lorsque ρ tend vers $+\infty$, $\widehat{\varphi}(\rho)$ tend vers $(\widehat{v}, \widehat{w})$ au sens de la convergence vers les orbites brisées en théorie de Morse (celle définie au § 3.2.a). En particulier, cela signifie que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi(\rho)(s_\rho^+) = v(s^+)$$

où s_{ρ^+} et s^+ désignent les points où les trajectoires $\varphi(\rho)$ et v (respectivement) sortent d'un voisinage de Morse (fixé) de x . Ceci implique que, pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi(\rho)(s + s_\rho^+) = v(s + s^+)$$

(pour s'en convaincre, il suffit d'écrire

$$\varphi(\rho)(s + s_\rho^+) = \Phi_s(\varphi(\rho)(s_\rho^+)) \quad \text{et} \quad v(s + s^+) = \Phi_s(v(s^+))$$

où Φ_s est le flot de $-JX_H$).

Le même raisonnement s'applique à w . Ainsi nous obtenons le fait que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\varphi}(\rho) = (\widehat{v}, \widehat{w})$$

au sens de la convergence vers les orbites brisées en théorie de Floer (celle définie par le théorème 9.1.7).

Tous comptes faits, nous avons donc trois convergences vers $(\widehat{v}, \widehat{w})$ (voir la figure 1) :

- celle, que nous avons supposée, de (v_{n_k}) pour k tendant vers l'infini,
- celle de $\widehat{\psi}(\rho)$ pour $\rho \rightarrow +\infty$ donnée par le recollement « de Floer »,
- celle de $\widehat{\varphi}(\rho)$ pour $\rho \rightarrow +\infty$ donnée par le recollement « de Morse ».

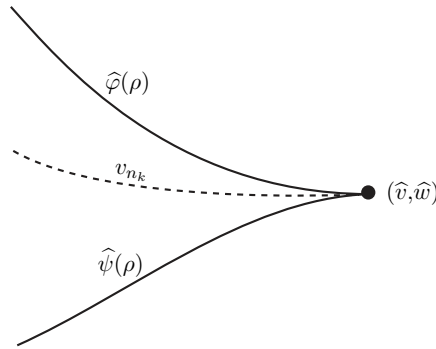


FIGURE 1

Appliquons la partie « unicité » du théorème de recollement (théorème 9.2.3). Elle implique que, pour k assez grand, (v_{n_k}) est dans l'image

de $\widehat{\psi}$. Le même argument d'unicité donne aussi que, pour ρ assez grand, disons $\rho \geq \rho_1$, $\widehat{\varphi}(\rho) \in \text{Im } \widehat{\psi}$. De plus, $\widehat{\varphi}([\rho_1, +\infty[)$ est un intervalle dans la variété $\mathcal{L}(x, y)$, qui est de dimension 1. Comme

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\varphi}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \widehat{\psi}(\rho) = (\widehat{v}, \widehat{w}) \notin \mathcal{L}(x, y),$$

c'est donc que $\widehat{\psi}(\rho) \in \text{Im } \widehat{\varphi}$ pour ρ assez grand. En particulier, $\widehat{v}_{n_k} \in \text{Im } \widehat{\varphi}$ pour k assez grand, ce qui contredit le fait que v_{n_k} dépend de t . $\square$

On a bien montré que toutes les solutions de Floer liant deux points critiques consécutifs sont des trajectoires de Morse et que $(d\mathcal{F})_v$ est surjective le long de ces trajectoires. Donc on a bien l'égalité désirée des complexes.

CHAPITRE 11

HOMOLOGIE DE FLOER : INVARIANCE

Nous venons de définir l'homologie de Floer $HF_*(H, J)$ comme l'homologie du complexe $CF_*(H, J)$. L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'homologie $HF_*(H, J)$ ne dépend pas du couple régulier (au sens du §8.1) $(H, J) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{J})_{\text{reg}}$ choisi.

Pour le démontrer, nous allons utiliser une méthode analogue à celle qui nous a permis de démontrer l'invariance de l'homologie de Morse au §3.4. Nous procédons de la manière suivante : soient (H^a, J^a) et (H^b, J^b) deux couples de $(\mathcal{H} \times \mathcal{J})_{\text{reg}}$. Considérons une homotopie lisse $\Gamma = (H, J)$ qui joint (H^a, J^a) à (H^b, J^b) , et plus précisément

$$H : \mathbf{R} \times S^1 \times W \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{et} \quad J : \mathbf{R} \longrightarrow \text{End}(TW)$$

avec $J(s) \in \mathcal{J}$ pour tout s et

$$\begin{cases} H(s, \cdot, \cdot) = H^a & \text{si } s \leq -R \\ H(s, \cdot, \cdot) = H^b & \text{si } s \geq R, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} J(s) = J^a & \text{si } s \leq -R \\ J(s) = J^b & \text{si } s \geq R. \end{cases}$$

Ici R est une constante (qui ne sera pas forcément la même pour toutes les homotopies). L'existence de telles homotopies découle du fait que $\mathcal{J}$ est contractile (c'est la proposition 5.5.6).

La démonstration se fait en deux étapes :

(1) À partir d'une homotopie Γ , nous définissons aux §§11.1 et 11.2 un morphisme de complexes

$$\Phi^\Gamma : CF_*(H^a, J^a) \longrightarrow CF_*(H^b, J^b)$$

et nous vérifierons que, pour l'homotopie stationnaire Γ joignant (H^a, J^a) à lui-même, ce morphisme Φ^Γ est l'identité (c'est la proposition 11.1.14).

(2) Si (H^a, J^a) , (H^b, J^b) et (H^c, J^c) sont des couples de $(\mathcal{H} \times \mathcal{J})_{\text{reg}}$ et si Γ , Γ' et Γ'' sont des homotopies joignant respectivement (H^a, J^a) à (H^c, J^c) ,

(H^a, J^a) à (H^b, J^b) et (H^b, J^b) à (H^c, J^c) , nous démontrons que les morphismes

$$\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'} \quad \text{et} \quad \Phi^{\Gamma} : CF_{\star}(H^a, J^a) \longrightarrow CF_{\star}(H^c, J^c)$$

sont homotopes et en particulier induisent le même morphisme en homologie. Cette deuxième étape comporte à son tour deux sous-étapes :

(a) Nous démontrons d'abord que les deux homotopies Γ_1 et Γ_2 définissent des morphismes homotopes Φ^{Γ_1} et Φ^{Γ_2} (c'est la proposition 11.2.8, démontrée aux §§ 11.3 et 11.4).

(b) Nous démontrons ensuite l'existence d'une homotopie Γ pour laquelle les morphismes de complexes $\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'}$ et Φ^{Γ} coïncident (c'est la proposition 11.2.9, démontrée au § 11.5).

Comme au § 3.4, nous en déduisons l'invariance de l'homologie de Floer en considérant le cas particulier où $(H^a, J^a) = (H^c, J^c)$ et où $\Gamma = \text{Id}$. Il est clair qu'alors $\Phi^{\Gamma'}$ et $\Phi^{\Gamma''}$ induisent des isomorphismes inverses l'un de l'autre en homologie.

11.1. Le morphisme Φ^{Γ}

11.1.a. L'équation de Floer à paramètre. Posons $\Gamma(s) = (H_{s,t}, J_s)$ et considérons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_s(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u H_{s,t} = 0$$

qui peut s'écrire aussi

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_s(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{s,t}(u) \right) = 0,$$

où $X_{s,t}$ est le dual symplectique de $dH_{s,t}$. Si u est une solution, définissons son énergie par

$$E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|^2 dt ds.$$

La norme utilisée ici est celle associée à la métrique $\omega(\cdot, J_s \cdot)$ — elle dépend donc de s .

Considérons l'espace

$$\mathcal{M}^{\Gamma} = \{u : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow W \mid u \text{ est une solution contractile et } E(u) < +\infty\}.$$

Rappelons que l'homotopie Γ a été définie comme stationnaire pour $|s| \geq R$. Ce qui permet de démontrer de façon (à peu près) analogue les versions à paramètre des énoncés du chapitre 6 que voici.

D'abord une version à paramètre du théorème 6.5.6 :

Théorème 11.1.1. *Soient X^a et X^b les deux symplectiques des formes dH^a et dH^b respectivement. Supposons que toutes les trajectoires 1-périodiques de X^a et X^b sont non dégénérées. Alors, pour tout $u \in \mathcal{M}^\Gamma$, il existe un point critique x de $\mathcal{A}_{H^a}$ et un point critique y de $\mathcal{A}_{H^b}$ tels que*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, \cdot) = x(\cdot) \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, \cdot) = y(\cdot).$$

Définissons

$$\mathcal{M}^\Gamma(x, y) = \left\{ u \in \mathcal{M}^\Gamma \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = x \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = y \right\}.$$

Un élément de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ est donc une trajectoire qui part de x en suivant une trajectoire du gradient de $\mathcal{A}_{H^a}$ pour $s \leq -R$ et arrive à y en suivant, pour $s \geq R$, une trajectoire du gradient de $\mathcal{A}_{H^b}$. Toute solution d'énergie finie joint donc deux points critiques respectivement de $\mathcal{A}_{H^a}$ et de $\mathcal{A}_{H^b}$.

Pour $s \leq -R$ (resp. $s \geq R$), notre équation coïncide avec l'équation de Floer (sans paramètre) pour (H^a, J^a) (resp. (H^b, J^b)). Ce qui fait que le théorème 11.1.1 se démontre de manière similaire au théorème 6.5.6 : on reproduit d'abord la démonstration de la proposition 6.5.7 pour montrer que, pour tout $u \in \mathcal{M}^\Gamma$, il existe deux points critiques $x \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^a})$ et $y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b})$ tels que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \mathcal{A}_{H^a}(u(s)) = \mathcal{A}_{H^a}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(u(s)) = \mathcal{A}_{H^b}(y).$$

Ensuite, on démontre le résultat :

Proposition 11.1.2. *Il existe une constante k telle que, pour tout $u \in \mathcal{M}^\Gamma$ vérifiant les conditions ci-dessus pour certains points critiques $x \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^a})$ et $y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b})$, on ait*

$$E(u) \leq \mathcal{A}_{H^a}(x) - \mathcal{A}_{H^b}(y) + k.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{\mathbf{R} \times S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|^2 ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R} \times S^1} \left\langle \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right\rangle ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R} \times S^1} \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, J_s \frac{\partial u}{\partial s} \right) ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R} \times S^1} \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} - X_{t,s} \right) ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R} \times S^1} u^* \omega - dH_{t,s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) ds dt. \end{aligned}$$

Choisissons, comme la contractilité de x nous y autorise, un prolongement de u , c'est-à-dire une application

$$\tilde{u} : \mathbf{R} \times D^2 \longrightarrow W \quad \text{telle que } \tilde{u}|_{\partial D^2} = u$$

et évaluons l'énergie de u à l'aide de ce prolongement :

$$\begin{aligned} E(u) &= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{[-\sigma, \sigma] \times S^1} u^* \omega - dH_{s,t} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) ds dt \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left(\int_{[-\sigma, \sigma] \times S^1} u^* \omega + \int_{[-\sigma, \sigma] \times S^1} -\frac{\partial}{\partial s} H_{s,t}(u) + \frac{\partial H}{\partial s}(u) ds dt \right) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left(\int_{D^2} \tilde{u}_\sigma^* \omega - \int_{D^2} \tilde{u}_{-\sigma}^* \omega - \int_{S^1} H_t^b(u_\sigma) dt + \int_{S^1} H_t^a(u_{-\sigma}) dt \right) \\ &\quad + \int_{[-R, R] \times S^1} \frac{\partial H}{\partial s}(u) ds dt, \end{aligned}$$

où

$$u_{\pm\sigma}(t) = u(\pm\sigma, t) \text{ pour } t \in S^1 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_{\pm\sigma}(z) = \tilde{u}(\pm\sigma, z) \text{ pour } z \in D^2.$$

On a utilisé le fait que l'homotopie $H_{s,t}$ est stationnaire pour $|s| \geq R$. On en déduit que

$$\begin{aligned} E(u) &= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} (\mathcal{A}_{H^a}(u_{-\sigma}) - \mathcal{A}_{H^b}(u_\sigma)) + \int_{[-R, R] \times S^1} \frac{\partial H}{\partial s}(u) ds dt \\ &= \mathcal{A}_{H^a}(x) - \mathcal{A}_{H^b}(y) + \int_{[-R, R] \times S^1} \frac{\partial H}{\partial s}(u) ds dt \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse. Posons

$$k = \sup_{\substack{s \in [-R, R] \\ t \in S^1 \\ z \in W}} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, z)$$

pour obtenir que

$$E(u) \leq \mathcal{A}_{H^a}(x) - \mathcal{A}_{H^b}(y) + k$$

et achever la démonstration de la proposition. $\square$

De la finitude du nombre de points critiques de $\mathcal{A}_{H^a}$ et $\mathcal{A}_{H^b}$ suit un corollaire (analogue au corollaire 6.5.11) :

Corollaire 11.1.3. *Il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{M}^\Gamma$, $E(u) \leq C$.*

Ce résultat permet de démontrer une propriété de compacité, analogue au théorème 6.5.4 :

Théorème 11.1.4. *L'espace de trajectoires $\mathcal{M}^\Gamma$ est compact au sens de la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R} \times S^1, W)$.*

La démonstration est en tous points semblable à celle de 6.5.4, elle s'appuie sur la proposition (analogue à 6.6.2) :

Proposition 11.1.5. *Il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$\forall u \in \mathcal{M}^\Gamma, \forall (s, t) \in \mathbf{R} \times S^1, \quad \|\text{grad}_{(s,t)} u\| \leq A.$$

Remarque. La démonstration, comme celle de 6.6.2, utilise le corollaire 11.1.3 (analogue de 6.5.11) et se fait par l'absurde. Si la conclusion était fausse, on en déduirait l'existence d'une application $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow W$ telle que

$$\frac{\partial v}{\partial s} + J(s) \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Ce n'est pas exactement une courbe holomorphe comme dans la démonstration de 6.6.2 puisque J dépend de s , mais la démonstration se fait de manière analogue en utilisant les métriques

$$g_s(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J(s)\cdot).$$

En particulier, pour calculer l'aire de $v(\mathbf{R}^2)$ et la longueur de $v(\partial B(0, r_k))$, comme dans la démonstration du lemme 6.6.5, on doit utiliser la métrique g définie par

$$g_{v(s,t)}(\cdot, \cdot) = \omega_{v(s,t)}(\cdot, J(s)\cdot).$$

En utilisant le théorème 11.1.4, on achève la preuve du théorème 11.1.1 de la même façon que celle de 6.5.6. On a besoin pour le faire d'un résultat analogue à celui du lemme 6.5.13 qui se démontre, de façon similaire, à l'aide du lemme 11.1.12 ci-dessous.

11.1.b. La transversalité. Nous reprenons ici les résultats du chapitre 8 et les adaptons à l'équation de Floer à paramètre. La dépendance en s va simplifier certaines des démonstrations, comme nous allons le voir : un espace de départ plus grand va donner la surjectivité plus facilement. Soit toujours $\Gamma = (H, J)$ une homotopie qui joint (H^a, J^a) et (H^b, J^b) . Nous introduisons l'espace $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ des fonctions (perturbations)

$$h : \mathbf{R} \times S^1 \times W \longrightarrow \mathbf{R}$$

à support compact telles que $\|h\|_\varepsilon < +\infty$. Ici, comme h est à support compact (en s), les trajectoires de Floer de l'homotopie perturbée sont les mêmes que celles de l'homotopie non perturbée près des points critiques.

Nous démontrons une version paramétrée des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2 :

Théorème 11.1.6. *Il existe un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ et une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathcal{H}_{\text{reg}}$ dans ce voisinage tels que, si $h \in \mathcal{H}_{\text{reg}}$, alors, pour $\Gamma(h) = (H + h, J)$, l'espace de trajectoires $\mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y)$ est,*

pour tout $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$ et pour tout $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$, une variété de dimension $\mu(x) - \mu(y)$. De plus, pour tout $u \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y)$, la différentielle

$$(d\mathcal{F}^\Gamma)_u : W^{1,p}(u^*TW) \longrightarrow L^p(u^*TW)$$

est surjective.

Pour ne pas alourdir l'écriture, nous n'incluons pas dans la notation le fait que les indices de Maslov $\mu(x)$ et $\mu(y)$ sont calculés avec les flots de X^a et X^b respectivement.

La démonstration du théorème 11.1.6 est à peu près analogue à celle de 8.1.2. Notons

$$\mathcal{F}^\Gamma : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1, u^*TW) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1, u^*TW)$$

défini par

$$\mathcal{F}^\Gamma(u) = \frac{\partial u}{\partial s} + J_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{s,t} \right).$$

L'ingrédient principal de la démonstration du théorème 11.1.6 est le théorème 11.1.7, analogue du théorème 8.1.5 :

Théorème 11.1.7. *Pour tout $u \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y)$, l'opérateur linéarisé de $\mathcal{F}^\Gamma$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\mu(x) - \mu(y)$.*

La démonstration est identique à celle de 8.1.5 et ceci parce que, puisque Γ est stationnaire pour $|s| \geq R$, l'opérateur linéarisé $(d\mathcal{F}^\Gamma)_u$, écrit dans une base unitaire le long de u , a la même forme

$$(d\mathcal{F}^\Gamma)_u(Y) = \bar{\partial}Y + SY$$

que le linéarisé $(d\mathcal{F})_u$, avec $S(s, t)$ une matrice qui tend vers une matrice symétrique quand $s \rightarrow \pm\infty$.

Suivant le modèle du chapitre 8 et plus précisément le plan dessiné page 214, le théorème 11.1.7 sert à prouver la version à paramètre de la proposition 8.1.3, qui est une conséquence immédiate de l'analogue suivant de la proposition 8.1.4, via le théorème des fonctions implicites :

Proposition 11.1.8. *Soit $\Gamma = (H_0, J_0)$ une homotopie entre (H^a, J^a) et (H^b, J^b) . Si $u \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y)$, alors l'application*

$$\begin{aligned} \Phi : W^{1,p}(u^*W) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0) &\longrightarrow L^p(u^*W) \\ (Y, h) &\longmapsto (d\mathcal{F}^\Gamma)_u(Y) + \text{grad}_u h \end{aligned}$$

est surjective.

Démonstration. La dépendance en s des hamiltoniens de $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ rend la preuve de la surjectivité considérablement plus simple que celle de la proposition 8.1.4 : l'espace de départ est plus grand. Nous n'avons plus besoin

de la régularité (c'est-à-dire de 8.5.4) ni du § 8.6 qui explique cette notion. Voici les détails.

On commence, comme au § 8.5, par démontrer de manière analogue à 8.5.1, que, si Φ n'est pas surjective, alors il existe un champ *non nul* $Z \in L^q(u^*TW)$ (q est tel que $1/p + 1/q = 1$), de classe $\mathcal{C}^\infty$, tel que, pour tout $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$ et pour tout $Y \in W^{1,p}(u^*TW)$, on a

$$\langle Z, (d\mathcal{F}^\Gamma)_u(Y) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle Z, \text{grad}_u(h) \rangle = 0.$$

Ensuite on remplace le lemme 8.5.3 par le résultat plus fort :

Lemme 11.1.9. *Si $Z \in L^q(u^*TW) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; TW)$ vérifie $\langle Z, \text{grad}_u h \rangle = 0$ pour tout $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$, alors Z est identiquement nul.*

Ce lemme étant en contradiction avec ce qui précède, on en déduit, par l'absurde, que Φ est surjectif, et la proposition 11.1.8 est démontrée. $\square$

Démonstration du lemme 11.1.9. La relation qui est l'hypothèse du lemme se réécrit

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} dh(Z) ds dt = 0 \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0).$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \mathbf{R} \times S^1 &\longrightarrow W \times \mathbf{R} \times S^1 \\ (s, t) &\longmapsto (u(s, t), s, t). \end{aligned}$$

On montre facilement que $\tilde{u}$ est un plongement. On voit Z comme un champ de vecteurs le long de $\tilde{u}$ sur $W \times \mathbf{R} \times S^1$, qui n'a pas de composante dans les directions $\partial/\partial t \in TS^1$ et $\partial/\partial s \in T\mathbf{R}$. En particulier, Z n'est pas dans le plan tangent à $\tilde{u}$ en les points où il n'est pas nul.

Supposons par l'absurde qu'il existe un tel point $(s_0, t_0) \in \mathbf{R} \times S^1$. On procède exactement comme dans la preuve de 8.5.3 : on considère un petit voisinage C_δ de (s_0, t_0) dans $\mathbf{R} \times S^1$ tel que $Z(s, t)$ n'est pas nul (et donc transverse à $\tilde{u}$ pour (s, t) dans ce voisinage). On prend une fonction à support dans ce voisinage

$$\beta : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow \mathbf{R}$$

et on définit $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty(H_0)$, à support dans un voisinage tubulaire B de $\tilde{u}(C_\delta)$, de sorte que, si $\gamma_{(s,t)}(\sigma)$ est la courbe intégrale de Z qui passe en $\tilde{u}(s, t)$ pour $\sigma = 0$, on ait :

$$h_{s,t}(\gamma_{(s,t)}(\sigma)) = \beta(s, t) \cdot \sigma \quad \text{pour } |\sigma| \leq \eta$$

($\eta > 0$ est assez petit). Comme Z est transverse à $\tilde{u}(C_\delta)$, la fonction h est bien définie. On suppose également que

$$B \cap \text{Im}(\tilde{u}) = \tilde{u}(C_\delta)$$

ce qui signifie en particulier que

$$\text{Supp}(h) \cap \text{Im}(\tilde{u}) = \tilde{u}(C_\delta)$$

(voir la figure 1).

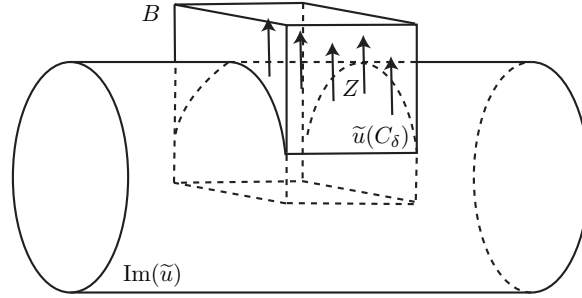


FIGURE 1

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R} \times S^1} dh(Z(s, t)) ds dt &= \int_{C_\delta} dh_{s,t}(Z(s, t)) ds dt \\ &= \int_{C_\delta} dh_{s,t} \left(\frac{\partial \gamma_{s,t}(\sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} \right) ds dt \\ &= \int_{C_\delta} \frac{\partial}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} h_{s,t}(\gamma_{(s,t)}(\sigma)) ds dt \\ &= \int_{C_\delta} \beta(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir β de sorte que cette intégrale ne soit pas nulle pour aboutir à une contradiction, qui montre que $Z(s, t) = 0$ pour tous $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$. Ce qui termine la démonstration du lemme. $\square$

La fin de la démonstration du théorème 11.1.6 est analogue à celles de 8.1.1 et 8.1.2.

Nous appellerons *homotopie régulière* une homotopie satisfaisant à la conclusion du théorème 11.1.6.

Remarque. La perturbation h étant à support compact, l'homotopie $\Gamma(h)$ joint (H^a, J^a) et (H^b, J^b) et elle est stationnaire pour $|s| \geq R$ (pour un R assez grand).

11.1.c. La compacité. Soit Γ une homotopie régulière reliant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) . Le morphisme

$$\Phi^\Gamma : CF_\star(H^a, J^a) \longrightarrow CF_\star(H^b, J^b)$$

que nous avons en vue sera défini comme suit. Pour x un point critique de $\mathcal{A}_{H^a}$ d'indice $\mu(x) = k$, nous poserons

$$\Phi_k^\Gamma(x) = \sum_{\substack{y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(y) = k}} n^\Gamma(x, y) y,$$

$n^\Gamma(x, y)$ désignant le nombre (modulo 2) d'éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$... dont nous devrons, pour que ce Φ^Γ soit bien défini, montrer la finitude. Nous devrons aussi vérifier que ce Φ^Γ est bien un morphisme de complexes, c'est-à-dire que

$$\Phi^\Gamma \circ \partial_{(H^a, J^a)} = \partial_{(H^b, J^b)} \circ \Phi^\Gamma.$$

À ces fins, nous avons besoin du résultat de compacité énoncé dans le théorème suivant, qui est une version paramétrée du théorème 9.1.7 :

Théorème 11.1.10. *Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$. Il existe*

- une sous-suite de (u_n) ,
- des points critiques $x = x_0, x_1, \dots, x_k$ de $\mathcal{A}_{H^a}$,
- des points critiques $y_0, y_1, \dots, y_\ell = y$ de $\mathcal{A}_{H^b}$,
- des suites réelles (s_n^i) , pour $0 \leq i \leq k-1$, tendant vers $-\infty$, et $(s_n'^j)$, pour $0 \leq j \leq \ell-1$, tendant vers $+\infty$,
- des éléments $u^i \in \mathcal{M}_{(H^a, J^a)}(x_i, x_{i+1})$ (pour $0 \leq i \leq k-1$) et des éléments $v^j \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y_j, y_{j+1})$,
- un élément $w \in \mathcal{M}^\Gamma(x_k, y_0)$

tels que, pour $0 \leq i \leq k-1$ et pour $0 \leq j \leq \ell-1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot s_n^i = u^i, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot s_n'^j = v^j$$

et tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = w.$$

Ce théorème affirme que les suites de trajectoires dans $\mathcal{M}^\Gamma$ ont, à extraction de sous-suites près, des limites, qui sont des concaténations entre (au plus) une trajectoire brisée correspondant au couple (H^a, J^a) , exactement une trajectoire de $\mathcal{M}^\Gamma$ et (au plus) une trajectoire brisée correspondant au couple (H^b, J^b) .

Avant de donner une démonstration du théorème 11.1.10, énonçons-en une conséquence immédiate (une majoration du nombre de brisures) :

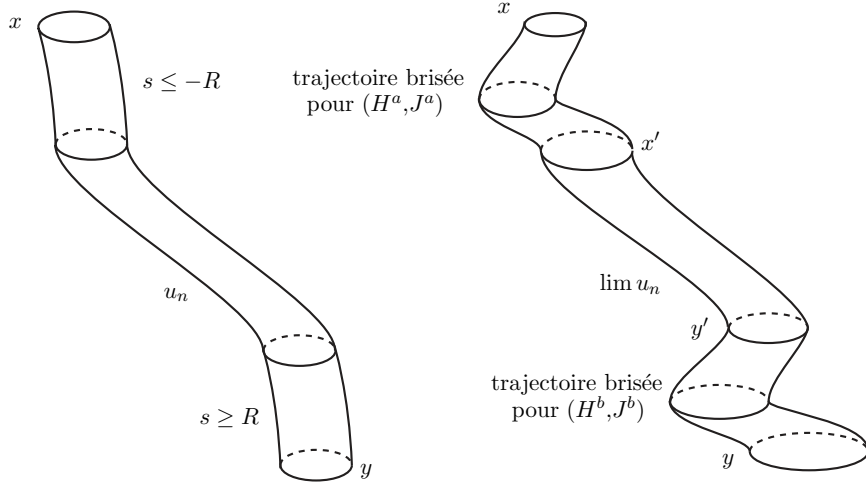


FIGURE 2

Corollaire 11.1.11. *Sous les hypothèses du théorème 11.1.10,*

$$\mu(x) - \mu(y) \geq k + \ell.$$

Démonstration. D'après le théorème 8.1.2 (et le §9.1.a), nous savons que

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{(H^a, J^a)}(x_i, x_{i+1}) = \emptyset & \text{si } \mu(x_i) - \mu(x_{i+1}) < 1 \\ \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y_j, y_{j+1}) = \emptyset & \text{si } \mu(y_j) - \mu(y_{j+1}) < 1 \end{cases}$$

donc nous avons, pour $0 \leq i \leq k-1$ et $0 \leq j \leq \ell-1$,

$$\mu(x_i) - \mu(x_{i+1}) \geq 1 \quad \text{et} \quad \mu(y_j) - \mu(y_{j+1}) \geq 1.$$

Par le théorème 11.1.6, $\mathcal{M}^\Gamma(x_k, y_0) \neq \emptyset$ implique que $\mu(x_k) \geq \mu(y_0)$. En sommant toutes ces inégalités, on trouve l'inégalité voulue (rappelons que $x_0 = x$ et $y_\ell = y$). $\square$

Démonstration du théorème 11.1.10. Elle commence par un lemme.

Lemme 11.1.12. *Soient (u_n) une suite dans $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ et (s_n) une suite de nombres réels tels que $\lim s_n = +\infty$. Alors il existe une sous-suite de (u_n) (encore notée (u_n)) et un élément $v \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}$ tels que $\lim u_n \cdot s_n = v$. De même si $\lim s_n = -\infty$, il existe un $u \in \mathcal{M}_{(H^a, J^a)}$ tel que (modulo extraction d'une sous-suite) $\lim u_n \cdot s_n = u$.*

Démonstration. Comme précédemment, nous omettons la variable t dans l'écriture de $u_n = u_n(s, t)$. Il suffit bien entendu de considérer le cas d'une suite (s_n) tendant vers $+\infty$. Comme $u_n \in \mathcal{M}^\Gamma$, la conclusion de la proposition 11.1.5, à savoir le fait que $\|\text{grad}_{(s,t)} u\| \leq A$, est vraie pour u_n et donc

aussi pour $u_n \cdot s_n$, de sorte que la famille $(u_n \cdot s_n)$ est équicontinue et qu'il existe, d'après Ascoli (voir au besoin le § 16.1), une sous-suite de $(u_n \cdot s_n)$ qui converge, pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$, vers une limite v continue.

Mais $v_n = u_n \cdot s_n$ est solution de l'équation de type Floer

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + J_{s+s_n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} - X_{s+s_n, t} \right) = 0.$$

La régularité elliptique (toujours la proposition 6.5.3) implique alors que v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que (v_n) converge vers v dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$.

Il reste à vérifier que $v \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}$. Considérons un intervalle fermé $[-r, r] \subset \mathbf{R}$ et le compact $K = [-r, r] \times S^1$ dans $\mathbf{R} \times S^1$. Pour n assez grand, $s_n > R + r$, de sorte que, pour $(s, t) \in K$ et n assez grand, nous avons $s + s_n > R$ et donc

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + J^b \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} - X_t^b(v_n) \right) = 0.$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette équation, nous obtenons bien que la limite v est dans $\mathcal{M}_{(H^b, J^b)}$. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 11.1.10 proprement dit. Comme dans la démonstration du théorème 6.5.6, choisissons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que les boules ouvertes

$$B(z, \varepsilon) = \{\gamma \in \mathcal{L}W \mid d_\infty(z, \gamma) < \varepsilon\}$$

soient disjointes pour $z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$ (la même propriété étant vraie pour $z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$).

Dans ce qui suit et pour simplifier les notations, nous ne faisons pas figurer les nécessaires extractions de sous-suites. Comme $\mathcal{M}^\Gamma$ est compact (théorème 11.1.4), nous avons $w = \lim u_n \in \mathcal{M}^\Gamma$. En vertu du théorème 11.1.1, il existe des points critiques x' de $\mathcal{A}_{H^a}$ et y' de $\mathcal{A}_{H^b}$ tels que $w \in \mathcal{M}(x', y')$. Reprenons l'argument de la démonstration du corollaire 9.1.9. Il existe $s^* \in \mathbf{R}$ tel que $w(s) \in B(y', \varepsilon)$ pour $s \geq s^*$. Comme $w = \lim u_n$, nous avons aussi

$$u_n(s^*) \in B(y', \varepsilon) \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Si $y' \neq y$ (sinon, il n'y a rien à démontrer), la trajectoire doit sortir de la boule $B(y', \varepsilon)$ pour un $s \geq s^*$. Appelons s_n son premier point de sortie

$$s_n = \sup \{s \geq s^* \mid u_n(\sigma) \in B(y', \varepsilon) \text{ pour } \sigma \in [s^*, s]\}.$$

Montrons que la suite (s_n) tend vers $+\infty$. Supposons en effet qu'elle soit bornée et donc, modulo extraction d'une sous-suite, qu'elle tende vers un $s_\bullet \in \mathbf{R}$. Comme la convergence de (u_n) vers w a lieu dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ et comme $s_\bullet \geq s^*$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(s_n) = w(s_\bullet) \in B(y', \varepsilon).$$

Mais, par définition de s_n , nous savons que $u_n(s_n) \in \partial B(y', \varepsilon)$ pour tout n , ce qui est contradictoire avec l'assertion précédente.

Il est donc acquis que $\lim s_n = +\infty$, donc (d'après le lemme 11.1.12),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot s_n = v^0 \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}.$$

Soit $s < 0$. Pour n assez grand, $s^* < s + s_n < s_n$, de sorte que, par définition de s_n ,

$$u_n(s + s_n) \in B(y', \varepsilon) \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

ce qui implique que $v^0(s) \in B(y', \varepsilon)$. Donc

$$v^0 \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y', y_1) \quad \text{pour un } y_1 \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}.$$

La démonstration se déroule ensuite (et se termine) de manière totalement analogue à celle du corollaire 9.1.9, elle conduit à une limite qui est une trajectoire brisée $(v^0, v^1, \dots, v^\ell)$ avec $v^j \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y_j, y_{j+1})$ ($y_0 = y'$ et $y_\ell = y$).

Supposons maintenant que $x' \neq x$. Un raisonnement analogue utilisant s_* tel que $w(s) \in B(x', \varepsilon)$ pour $s < s_*$, puis le dernier point d'entrée $s'_n < s_*$ de $u_n(s)$ dans $B(x', \varepsilon)$ produit une suite s'_n qui tend vers $-\infty$ et telle que $\lim u_n \cdot s'_n = u^\bullet \in \mathcal{M}(x_1, x')$. Puis, comme dans la démonstration de 9.1.9, la limite est une trajectoire brisée $(u^0, u^1, \dots, u^k)$ avec $u^i \in \mathcal{M}_{(H^a, J^a)}(x_i, x_{i+1})$ ($x_0 = y$, $x_k = x$). Et le théorème est démontré. $\square$

Corollaire 11.1.13. *Si $\mu(x) = \mu(y)$, l'espace $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ est compact.*

Démonstration. Le corollaire 11.1.11 montre qu'une suite (u_n) de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ ne peut pas tendre vers une trajectoire brisée. $\square$

L'application

$$\Phi_k^\Gamma : CF_k(H^a, J^a) \longrightarrow CF_k(H^b, J^b)$$

est donc bien définie par la formule

$$\Phi_k^\Gamma(x) = \sum_{\substack{y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(y) = k}} n^\Gamma(x, y) y.$$

Vérifions aussi :

Proposition 11.1.14. *Si $(H^a, J^a) = (H^b, J^b)$ et $\Gamma = \text{Id}$, alors Φ_k^Γ est l'identité pour tout k .*

Démonstration. Sous l'hypothèse, $\mathcal{M}^\Gamma(x, y) = \mathcal{M}_{(H^a, J^a)}(x, y)$. Si en plus $\mu(x) = \mu(y)$, nous savons (voir la remarque §9.1.6) que

$$\mathcal{M}_{(H^a, J^a)}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \neq y \\ \{x\} & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Donc $\Phi_k^\Gamma = \text{Id}$. $\square$

Pour finir de remplir les objectifs que nous nous sommes fixés pour ce paragraphe, il nous reste à prouver que Φ^Γ est un morphisme de complexes, c'est-à-dire que

$$\Phi^\Gamma \circ \partial_{(H^a, J^a)} = \partial_{(H^b, J^b)} \circ \Phi^\Gamma.$$

Il nous faut montrer que, si $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$, pour tout $z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$ tels que $\mu(x) - \mu(z) = 1$, l'égalité qui suit a lieu (modulo 2)

$$\sum_{\substack{y' \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ \mu(x) - \mu(y') = 1}} n^a(x, y') n^\Gamma(y', z) = \sum_{\substack{y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(x) = \mu(y)}} n^\Gamma(x, y) n^b(y, z)$$

(il va sans dire que dans cette écriture, n^a et n^b sont les coefficients qui apparaissent dans les différentielles $\partial_{(H^a, J^a)}$ et $\partial_{(H^b, J^b)}$ respectivement). Il nous suffira de vérifier que le nombre de points de la variété compacte de dimension 0

$$\begin{aligned} \Pi^\Gamma(x, z) = & \bigcup_{\substack{y' \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ \mu(x) - \mu(y') = 1}} \mathcal{L}_{(H^a, J^a)}(x, y') \times \mathcal{M}^\Gamma(y', z) \cup \\ & \cup \bigcup_{\substack{y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(x) = \mu(y)}} \mathcal{M}^\Gamma(x, y) \times \mathcal{L}_{(H^b, J^b)}(y, z) \end{aligned}$$

est pair. Ce sera une conséquence du théorème :

Théorème 11.1.15. *Pour $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$ et $z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$ avec $\mu(x) - \mu(z) = 1$, l'espace $\mathcal{M}^\Gamma(x, z) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$ est une variété à bord compacte de dimension 1 dont le bord est $\Pi^\Gamma(x, z)$.*

Nous savons (en vertu du théorème 11.1.6) que $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ est une variété (sans bord) de dimension 1. En utilisant la convergence vers des trajectoires brisées décrites dans l'énoncé du théorème 11.1.10, définissons une topologie sur $\mathcal{M}^\Gamma(x, z) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$, compatible avec celle de $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ (c'est-à-dire la topologie de la convergence $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$). Comme dans la proposition 9.1.2, cette topologie est séparée et le théorème 11.1.10 nous assure donc que cet espace est compact. Il reste à démontrer la partie « variété à bord » du théorème, c'est-à-dire à étudier la structure de $\mathcal{M}^\Gamma(x, z) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$ près des points de $\Pi^\Gamma(x, z)$. C'est ce que nous faisons maintenant.

11.1.1.d. Le recollement. Pour $\mu(x) - \mu(z) = 1$, les éléments de $\Pi^\Gamma(x, z)$ sont des trajectoires brisées (u, v) . Une de ces trajectoires est solution de l'équation de Floer à paramètre et l'autre de l'équation de Floer sans paramètre associée à (H^a, J^a) ou à (H^b, J^b) . Pour démontrer le théorème 11.1.15,

il suffira de recoller les trajectoires u et v comme au §9.2. Nous démontrons le théorème ci-dessous, analogue au théorème de recollement 9.2.3.

Théorème 11.1.16. *Soient x un point critique de $\mathcal{A}_{H^a}$ et y, z des points critiques de $\mathcal{A}_{H^b}$ tels que*

$$\mu(x) = \mu(y) = \mu(z) + 1.$$

Soient $u \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ et $\widehat{v} \in \mathcal{L}_{(H^b, J^b)}(y, z)$. Alors

– il existe un plongement

$$\psi : [\rho_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{M}^\Gamma(x, z)$$

(pour un certain $\rho_0 > 0$) tel que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \psi(\rho) = (u, \widehat{v});$$

– de plus, si (ℓ_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ qui tend vers $(u, \widehat{v})$, alors $\ell_n \in \text{Im } \psi$ pour n assez grand.

Remarques.

– Les indices $\mu(y)$ et $\mu(z)$ correspondent à H^b alors que $\mu(x)$ correspond à H^a , une dépendance que nous avons omise dans la notation.

– La convergence de $\psi(\rho)$ vers $(u, \widehat{v})$ affirmée dans cet énoncé est à comprendre au sens du théorème 11.1.10.

– Pour démontrer le théorème 11.1.15, il faut aussi recoller des trajectoires

$$\widehat{u}' \in \mathcal{L}_{H^a, J^a}(x, y') \quad \text{et} \quad v' \in \mathcal{M}^\Gamma(y', z)$$

(pour $\mu(y') = \mu(z) = \mu(x) - 1$). Un tel recollement se fait de manière analogue à celle décrite par le théorème 11.1.16 et on montre ainsi qu'au voisinage des points de $\Pi^\Gamma(x, z)$, l'espace $\mathcal{M}^\Gamma(x, z) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$ est une variété de dimension 1. On a ainsi une démonstration complète du théorème 11.1.15.

Nous consacrons la section qui suit à cette démonstration.

11.2. Démonstration du théorème 11.1.16

Pour démontrer le théorème 11.1.16, nous fixons un relèvement $v \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y, z)$ de $\widehat{v}$. Nous voulons définir, pour $\rho \geq \rho_0$, une application

$$\psi_\rho : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow W$$

qui soit, pour tout ρ , une solution de l'équation de Floer à paramètre

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial s} + J_s \frac{\partial \psi_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{\psi_\rho} H_{s,t} = 0.$$

La convergence vers $(u, \hat{v})$ pour $\rho \rightarrow +\infty$ sera démontrée si l'on a prouvé que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \psi_\rho(s, t) = u(s, t) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \psi_\rho(s + 2\rho, t) = v(s, t)$$

uniformément sur les compacts. Pour pouvoir procéder comme dans la démonstration de 9.2.3, il convient d'utiliser la substitution

$$\varphi_\rho(s, t) = \psi_\rho(s + \rho, t).$$

Ainsi $\varphi_\rho \in \mathcal{C}^\infty(x, z)$ sera solution de

$$\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial s} + J_{s+\rho} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{\varphi_\rho} H_{s+\rho, t} = 0$$

et satisfera aux conditions

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s - \rho, t) = u(s, t) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s + \rho, t) = v(s, t)$$

(c'est-à-dire à la propriété de convergence voulue pour ψ_ρ).

Nous allons, comme dans la démonstration de 9.2.3, procéder en trois étapes :

- (1) Pré-recollement, au § 11.2.a.
- (2) Construction de φ (et donc de ψ), au § 11.2.b.
- (3) Vérification des propriétés de ψ , au § 11.2.c.

11.2.a. Pré-recollement. Soit $\rho_0 \geq 0$ tel que l'homotopie $\Gamma(s, t) = (H_{s, t}, J_s)$ soit stationnaire et égale à (H_t^b, J^b) pour $s \geq \rho_0$. En utilisant les mêmes notations qu'au § 9.3, définissons le pré-recollement w_ρ de u et v pour $\rho \geq \rho_0$ par la (même) formule⁽¹⁾

$$w_\rho(s, t) = \begin{cases} u(s + \rho, t) & \text{si } s \leq -1 \\ \exp_{y(t)} \left(\beta^-(s) \exp_{y(t)}^{-1}(u(s + \rho, t)) \right. \\ \quad \left. + \beta^+(s) \exp_{y(t)}^{-1}(v(s - \rho, t)) \right) & \text{si } s \in [-1, 1] \\ v(s - \rho, t) & \text{si } s \geq 1 \end{cases}$$

(on a supposé ρ_0 assez grand pour que w_ρ soit ainsi bien défini). On peut alors de même définir, pour $Y \in T_u \mathcal{P}(x, y)$ et $Z \in T_v \mathcal{P}(y, z)$, le pré-recollement

$$Y \#_\rho Z \in T_{w_\rho} \mathcal{P}(x, z)$$

⁽¹⁾Rappelons la convention faite sur la notation $\rho \geq \rho_0$, énoncée page 295, et qui signifie « ρ assez grand ».

par la même formule qu'au §9.3. Puisqu'elles utilisent les mêmes formules, ces constructions fournissent des objets ayant toutes les propriétés énoncées dans le §9.3. Remarquons également que, si $\mathcal{F}_\rho^\Gamma$ est l'opérateur

$$\mathcal{F}_\rho^\Gamma = \frac{\partial}{\partial s} + J_{s+\rho} \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H_{s+\rho, t},$$

nous avons

$$\mathcal{F}_\rho^\Gamma(w_\rho)(s, t) = 0 \quad \text{pour } |s| \geq 1 :$$

– pour $s \leq -1$, cela vient du fait que u est solution de l'équation de Floer à paramètre,

– pour $s \geq 1$, on remarque que

$$\mathcal{F}_\rho^\Gamma = \frac{\partial}{\partial s} + J^b \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H^b \quad \text{pour } \rho \geq \rho_0$$

et $v(s - \rho, t)$ est une solution de l'équation de Floer associée au couple (H^b, J^b) .

Le dernier argument donne aussi le fait que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_\rho^\Gamma(w_\rho(s, t)) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$$

puisque $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} w_\rho(s, t) = y(t)$.

11.2.b. Construction de φ . Nous voulons construire $\varphi(\rho)$, vérifiant $\mathcal{F}_\rho^\Gamma(\varphi(\rho)) = 0$, à partir du pré-recollement w_ρ . Pour le faire, nous utilisons la méthode de Newton-Picard, comme au §9.4.

L'opérateur $\mathcal{F}_\rho^\Gamma$. Comme au §9.4, partons de trivialisations unitaires $(Z_i^u(s, t))_{i=1, \dots, 2n}$ et $(Z_i^v(s, t))_{i=1, \dots, 2n}$ du fibré tangent TW le long de u et v respectivement. Une trivialisation unitaire $(Z_i^\rho(s, t))_{i=1, \dots, 2n}$ le long de w_ρ s'en déduit, que l'on prolonge par transport parallèle (voir le §14.5) en une trivialisation orthonormale de TW dans un voisinage de $w_\rho(s, t)$ (pour tous (s, t)). Cette dernière trivialisation est notée $(Z_i^{\rho, \xi}(s, t))_{i=1, \dots, 2n}$, avec

$$Z_i^{\rho, \xi}(s, t) \in T_{\exp_{w_\rho}(s, t)\xi} W \quad \text{où } \xi \in T_{w_\rho(s, t)} W$$

(et la norme de ξ est inférieure au rayon d'injectivité de la métrique sur W). Grâce à ces trivialisations, définissons un opérateur (non linéaire)

$$F_\rho^\Gamma : B(0, r) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

pour r convenablement choisi ($r = r_0/K$, où r_0 est le rayon d'injectivité de la métrique et K la norme de l'injection $W^{1,p} \subset L^\infty$, convient).

Par définition, si ξ est écrit

$$\xi = \sum y_i Z_i^\rho \quad \text{dans la base } (Z_i^\rho),$$

$F_\rho^\Gamma(y_1, \dots, y_{2n})$ est $\mathcal{F}_\rho^\Gamma(\exp_{w_\rho}(\xi))$ écrit dans la base $(Z_i^{\rho, \xi})$.

Les propriétés de F_ρ^Γ . La construction de F_ρ^Γ est analogue à celle du F_ρ du §9.4. L'opérateur de Floer qui le définit dépend de Γ mais, une fois F_ρ^Γ écrit en coordonnées, cette dépendance n'est plus visible. Autrement dit, les opérateurs F_ρ^Γ et F_ρ ont la même forme et les mêmes propriétés. Pour simplifier la notation et clarifier la lecture, nous renonçons donc, à partir d'ici, à indiquer la dépendance en Γ . Récapitulons les propriétés de F_ρ :

(1) $F_\rho(0) = [\mathcal{F}_\rho^\Gamma(w_\rho)]_{Z_i^\rho}$, en particulier

$$F_\rho(0) = 0 \text{ pour } |s| \geq 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} F_\rho(0) = 0 \text{ dans } \mathbb{C}_{\text{loc}}^\infty.$$

(2) Considérons les opérateurs

$$F_u, F_v : B(0, r) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

définis de manière analogue à partir des opérateurs de Floer $\mathcal{F}^\Gamma$ et $\mathcal{F}$ à l'aide des trivialisations Z_i^u et Z_i^v . Posons

$$L^u = (dF^u)_0, L^v = (dF^v)_0 \quad \text{et} \quad L_\rho = (dF_\rho)_0.$$

Le même calcul qu'au §9.4 donne

$$\begin{aligned} L^u(Y) &= \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S^u(Y) \\ L^v(Y) &= \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S^v(Y) \\ L_\rho(Y) &= \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S_\rho^\Gamma(Y) \end{aligned}$$

où J_0 désigne la structure complexe standard de $\mathbf{R}^{2n}$ et les opérateurs

$$S^u, S^v, S_\rho^\Gamma : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow \text{End}(\mathbf{R}^{2n})$$

satisfont à

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} S^u(s, t) &= S^x(t), & \lim_{s \rightarrow +\infty} S^u(s, t) &= S^y(t) \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} S^v(s, t) &= S^y(t), & \lim_{s \rightarrow +\infty} S^v(s, t) &= S^z(t) \end{aligned}$$

(où S^x, S^y et S^z sont les lacets de matrices symétriques définis par les points critiques x, y et z), ainsi qu'à

$$\begin{aligned} S_\rho^\Gamma(s, t) &= S^u(s + \rho, t) \quad \text{pour } s \leq -1 \\ S_\rho^\Gamma(s, t) &= S^v(s - \rho, t) \quad \text{pour } s \geq 1 \text{ et } \rho \geq R \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} S_\rho^\Gamma(s, t) &= S^y(t). \end{aligned}$$

La dernière relation nécessite une petite démonstration que voici. Fixons un compact $K \subset \mathbf{R} \times S^1$. Pour $\rho \geq \rho_0$, la restriction de $\mathcal{F}_\rho^\Gamma$ à $W^{1,p}(K; TW)$ est l'opérateur de Floer associé à (H^b, J^b) . Écrite dans la trivialisation $(Z_i^\rho)_i$, sa différentielle $(d\mathcal{F}_\rho^\Gamma)_{w_\rho}$ est $(dF_\rho)_0$, que nous avons notée L_ρ .

Comme $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} w_\rho = y$ dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$, la partie d'ordre 0 de $L_\rho = (dF_\rho)_0$ (restreinte à $W^{1,p}(K; \mathbf{R}^{2n})$) tend vers la partie d'ordre 0 de $(d\mathcal{F}^b)_y$ écrite dans la base Z_i^y , c'est-à-dire vers S^y .

(3) Nous savons, grâce au théorème 8.1.5, que L^u , L^v et L_ρ^Γ sont des opérateurs de Fredholm d'indices respectifs

$$\text{Ind}(L^u) = \mu(x) - \mu(y) = 0$$

$$\text{Ind}(L^v) = \mu(y) - \mu(z) = 1$$

$$\text{Ind}(L_\rho) = \mu(x) - \mu(z) = 1.$$

Par ailleurs l'homotopie Γ et la paire (H^b, J^b) sont régulières, donc, compte tenu du théorème 8.1.1 et du théorème 11.1.6, les opérateurs L^u et L^v sont surjectifs et en particulier

$$\text{Ker } L^u = 0 \quad \text{et} \quad \text{Ker } L^v = \{\alpha \partial v / \partial s \mid \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Considérons maintenant les sous-espaces

$$W_\rho = \{0 \#_\rho \beta \mid \beta \in \text{Ker } L^v\}$$

et

$$W_\rho^\perp = \left\{ Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \mid \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle Y, Z \rangle ds dt = 0 \quad \forall Z \in W_\rho \right\}.$$

La reproduction de la démonstration de la proposition 9.4.7 donne le résultat analogue :

Proposition 11.2.1. *Il existe une constante $C > 0$ tels que, pour tout $\rho \geq \rho_0$, on ait*

$$\forall Y \in W_\rho^\perp, \quad \|L_\rho(Y)\|_{L^p} \geq C \|Y\|_{W^{1,p}}.$$

Comme au §9.4, on en déduit que L_ρ est surjectif et qu'il admet un inverse à droite

$$G_\rho : L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow W_\rho^\perp \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Nous sommes donc maintenant en position d'appliquer la méthode de Newton-Picard et précisément le lemme 9.4.4. En utilisant les mêmes arguments qu'au §9.4, on démontre :

Théorème 11.2.2. *Il existe $\rho_0 > 0$ tel que, pour tout $\rho \geq \rho_0$, il existe*

$$\gamma(\rho) \in W_\rho^\perp \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

tel que $F_\rho(\gamma(\rho)) = 0$. Un tel γ est unique dans $B(0, \varepsilon) \cap W_\rho^\perp$ pour un $\varepsilon > 0$ indépendant de ρ . Il satisfait de plus à

- (1) $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma(\rho)\|_{W^{1,p}} = 0$,
- (2) l'application $\rho \mapsto \gamma(\rho)$ est dérivable,
- (3) $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\partial \gamma / \partial \rho\|_{W^{1,p}} = 0$.

Démonstration. Pour démontrer le théorème, il faut vérifier que $F_\rho = F_\rho^\Gamma$ satisfait aux propriétés que nous rassemblons dans le chapitre 13. La différence entre les situations étudiées ici et dans ce § vient du fait que l'opérateur de Floer est maintenant $\mathcal{F}_\rho^\Gamma$.

Comme Γ est stationnaire pour $|s| \geq R$, on obtient les mêmes estimations de façon semblable (et sans beaucoup de mal) : il suffit de réécrire le lemme 13.2.3 pour des applications

$$A : \mathbf{R} \times W \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^m \quad \text{et} \quad B : \mathbf{R} \times W \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

qui sont constantes (par rapport à la première variable $s \in \mathbf{R}$) lorsque $|s| \geq R$ (avec une preuve complètement analogue).

Quant à l'énoncé analogue à celui du lemme 9.4.16, sa démonstration demande une modification plus sérieuse : il faut ici tenir compte de la dépendance en le paramètre ρ de H et de J . Voir la démonstration de cette variante au §13.8. $\square$

Nous pouvons maintenant définir les applications φ_ρ et ψ_ρ désirées : posons

$$\varphi_\rho = \exp_{w_\rho} \gamma(\rho) \quad \text{et} \quad \psi_\rho(s, t) = \varphi_\rho(s - \rho, t).$$

Par définition, φ_ρ est solution de

$$\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial s} + J_{s+\rho} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \text{grad } H_{s+\rho, t}(\varphi_\rho) = 0$$

et satisfait à

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi_\rho(s, t) = x(t) \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s, t) = z(t),$$

de sorte que $\psi_\rho \in \mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ pour tout $\rho \geq \rho_0$.

11.2.c. Les propriétés de ψ_ρ . Nous vérifions maintenant que ψ_ρ a bien les propriétés attendues.

(1) Elle tend bien vers $(u, \widehat{v})$. On utilise les propriétés du pré-recollement w_ρ et celles de $\gamma(\rho)$ (énoncées dans le théorème 11.2.2) pour obtenir, comme au §9.4, que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s - \rho, t) = u(s, t) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s + \rho, t) = v(s, t),$$

autrement dit,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s, t) = u(s, t) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s + 2\rho, t) = v(s, t),$$

de sorte qu'en effet

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \psi_\rho = (u, \widehat{v}) \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y) \times \mathcal{L}_{(H^b, J^b)}(y, z).$$

(2) C'est une immersion. Montrons que $\psi'(\rho) \neq 0$. Sinon,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(\rho, s - \rho, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial s}(\rho, s - \rho, t) = 0,$$

donc $\partial \varphi / \partial \rho = \partial \varphi / \partial s$. La même démonstration qu'au § 9.5 (dans laquelle α_n est remplacé par 1) mène à une contradiction.

(3) Elle est injective. En effet, son image est contenue dans une composante de la variété $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ dont la dimension est 1. Cette composante n'est pas compacte, puisque

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \psi(\rho) \notin \mathcal{M}^\Gamma(x, z).$$

C'est donc un intervalle de $\mathbf{R}$ et l'injectivité de ψ est conséquence du fait qu'elle est immersive (et du théorème de Rolle...).

Il reste à démontrer la propriété d'unicité de la manière de tendre vers la limite, c'est-à-dire la dernière assertion du théorème 11.1.16. Comme dans cet énoncé, considérons donc une suite $(\ell_n)_n$ tendant vers $(u, \widehat{v})$ et montrons que, pour n assez grand, $\ell_n \in \text{Im } \psi$. Comme dans la remarque 9.6.2, il suffit de le démontrer pour une sous-suite de (ℓ_n) (et les énoncés qui suivent sont à comprendre « à extraction d'une sous-suite près »). Comme dans le § 9.6 (et comme d'habitude), nous allons procéder en plusieurs étapes (mais nous n'aurons pas besoin de la première étape de 9.6) :

(1) Nous démontrons une proposition, analogue simplifiée de 9.6.3 :

Proposition 11.2.3. *Il existe une suite réelle (ρ_n) tendant vers $+\infty$ et, pour tout n , un vecteur $Y_n \in w_{\rho_n}^* TW$, tels que, pour tout $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$,*

$$\ell_n(s + \rho_n, t) = \exp_{w_{\rho_n}(s, t)} Y_n(s, t).$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_\infty = 0$.

(2) Nous faisons de même avec un analogue de 9.6.4 :

Proposition 11.2.4. *Le champ Y_n est dans $W^{1,p}(w_{\rho_n}^* TW)$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 0$.*

(3) Enfin, nous achevons la démonstration.

Démonstration de la proposition 11.2.3. Rappelons que R désigne un nombre réel positif tel que pour $s \geq R$ l'homotopie $\Gamma(s)$ est stationnaire, égale à (H^b, J^b) . Pour simplifier l'écriture, nous supprimons dans cette démonstration la mention de la variable $t \in S^1$ dans l'expression des applications définies sur $\mathbf{R} \times S^1$.

Et nous commençons la démonstration par un analogue du lemme 9.6.9 :

Lemme 11.2.5. Soient (λ_n) une suite dans $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ et $(s_n), (\sigma_n)$ deux suites réelles tendant vers $+\infty$. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(s + s_n) = a(s) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(s + \sigma_n) = b(s)$$

pour

$$a \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(\alpha, \beta), \quad b \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(\gamma, \delta)$$

(α, β, γ et δ étant des points critiques de $\mathcal{A}_{H^b}$). Alors

$$- \text{ si } \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - \sigma_n) = -\infty,$$

$$\mathcal{A}_{H^b}(\alpha) \geq \mathcal{A}_{H^b}(\beta) \geq \mathcal{A}_{H^b}(\gamma) \geq \mathcal{A}_{H^b}(\delta),$$

$$- \text{ si } \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - \sigma_n) = +\infty,$$

$$\mathcal{A}_{H^b}(\gamma) \geq \mathcal{A}_{H^b}(\delta) \geq \mathcal{A}_{H^b}(\alpha) \geq \mathcal{A}_{H^b}(\beta).$$

Démonstration. Les deux assertions se montrent de manière complètement analogue. Montrons donc la deuxième. Supposons donc que $\lim(s_n - \sigma_n) = +\infty$. Pour $s \geq R$, $\lambda_n(s)$ est solution de l'équation de Floer pour (H^b, J^b) , de sorte en particulier que $s \mapsto \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s))$ est une fonction strictement décroissante sur $[R, +\infty[$. Fixons σ et $\tau \in \mathbf{R}$ et choisissons n assez grand pour que

$$s_n + \tau > \sigma_n + \sigma \geq R.$$

Nous avons

$$\mathcal{A}_{H^b}(\lambda_n(s_n + \tau)) < \mathcal{A}_{H^b}(\lambda_n(\sigma_n + \tau)).$$

Faisons tendre n vers l'infini, obtenant

$$\mathcal{A}_{H^b}(a(\tau)) \leq \mathcal{A}_{H^b}(b(\sigma)),$$

une inégalité valable pour tous τ et σ . Il suffit de faire tendre σ vers $+\infty$ et τ vers $-\infty$ pour finir la démonstration du lemme. $\square$

Lemme que nous utilisons pour démontrer :

Lemme 11.2.6. Soit (ℓ_n) une suite dans $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$, tendant vers $(u, \widehat{v}) \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y) \times \mathcal{L}_{(H^b, J^b)}(y, z)$. Alors

(1) Il existe une suite réelle (s_n) avec $s_n \geq R$ et tendant vers $+\infty$ telle que $\mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s_n)) = \mathcal{A}_{H^b}(y)$,

(2) de plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + s_n) = y$.

Démonstration. Comme dans la démonstration du lemme précédent, la fonction $s \mapsto \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s))$ est strictement décroissante pour $s \geq R$. Puisque $u \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y)$, la même conclusion vaut pour $s \mapsto \mathcal{A}_{H^b}(u(s))$. Fixons un $s \geq R$. Puisque $\lim \ell_n(s) = u(s)$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s)) = \mathcal{A}_{H^b}(u(s)) > \mathcal{A}_{H^b}(y).$$

En particulier $\mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s)) > \mathcal{A}_{H^b}(y)$ pour n assez grand.

Nous avons fixé un relèvement $v \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y, z)$ de $\hat{v}$. La convergence de (ℓ_n) implique l'existence d'une suite (σ_n) qui tend vers $+\infty$ et vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \sigma_n) = v(s).$$

En particulier, pour le s fixé ci-dessus, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s + \sigma_n)) = \mathcal{A}_{H^b}(v(s)) < \mathcal{A}_{H^b}(y),$$

ce qui implique que

$$\mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s + \sigma_n)) < \mathcal{A}_{H^b}(y)$$

pour n assez grand. D'où l'existence pour n assez grand de $s_n \in]s, s + \sigma_n[$ tel que $\mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s_n)) = \mathcal{A}_{H^b}(y)$.

Supposons que la suite (s_n) soit bornée. Quitte à en extraire une sous-suite, supposons qu'elle tend vers une limite $s^* \geq R$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + s_n) = u(s + s^*) \quad \text{dans } \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty.$$

En particulier, $\lim \ell_n(s_n) = u(s^*)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s_n)) = \mathcal{A}_{H^b}(u(s^*)) > \mathcal{A}_{H^b}(y),$$

ce qui est une contradiction puisque la suite du membre de gauche est constante égale à $\mathcal{A}_{H^b}(y)$. Par suite (toujours à extraction d'une sous-suite près), $\lim s_n = +\infty$.

Nous avons ainsi montré la première assertion du lemme. La deuxième en est une conséquence. Utilisons le lemme 11.1.12, pour obtenir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + s_n) = a \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(\alpha, \beta) \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b}).$$

Remarquons que

$$\mathcal{A}_{H^b}(a(0)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s_n)) = \mathcal{A}_{H^b}(y)$$

(et rappelons que $\lim \ell_n(s + \sigma_n) = v$). Supposons que $\sigma_n - s_n$ soit bornée, donc (modulo extraction de sous-suite) convergente vers $s^\bullet$. Alors $v(s) = a(s + s^\bullet)$, en particulier,

$$\mathcal{A}_{H^b}(v(-s^\bullet)) = \mathcal{A}_{H^b}(a(0)) = \mathcal{A}_{H^b}(y),$$

ce qui n'est pas possible puisque $v \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y, z)$. C'est donc que $\sigma_n - s_n$ n'est pas bornée. Le lemme précédent implique alors que

$$\mathcal{A}_{H^b}(a(s)) = \mathcal{A}_{H^b}(y) \quad \text{pour tout } s.$$

Donc a ne dépend pas de s , donc c'est un point critique de $\mathcal{A}_{H^b}$. Comme les valeurs critiques de $\mathcal{A}_{H^b}$ sont distinctes (voir au besoin le lemme 6.3.5), on a donc $a = y$, ce qui termine la démonstration du lemme. $\square$

Reprenons les notations de la proposition 9.6.3. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons un $\delta > 0$ qui satisfait au lemme 9.6.11. Considérons les boules ouvertes (pour la distance $\mathcal{C}^0$) $B(x, \delta)$, $B(y, \delta)$ et $B(z, \delta)$ dans l'espace $\mathcal{LW}$ des lacets. Quitte à prendre δ plus petit, nous supposons qu'elles sont mutuellement disjointes et que $u(0) \notin B(x, \delta) \cup B(y, \delta)$. Grâce au lemme précédent, nous savons que $\ell_n(s + s_n)$ tend vers y donc, pour n assez grand, $\ell_n(s_n) \in B(y, \delta)$. Définissons les nombres

$$\begin{aligned}\sigma'_n &= \sup \{s \mid \ell_n([-\infty, s]) \subset B(x, \delta)\} \\ \sigma_n &= \inf \{s < s_n \mid \ell_n([s, s_n]) \subset B(y, \delta)\} \\ \tau_n &= \sup \{s > s_n \mid \ell_n([s_n, s]) \subset B(y, \delta)\} \\ \tau'_n &= \inf \{s \mid \ell_n([s, +\infty[) \subset B(z, \delta)\}.\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\ell_n(\sigma'_n) \in \partial B(x, \delta), \quad \ell_n(\sigma_n) \text{ et } \ell_n(\tau_n) \in \partial B(y, \delta) \text{ et } \ell_n(\tau'_n) \in \partial B(z, \delta).$$

Comme ces trois boules sont disjointes, nous avons

$$\sigma'_n \leq \sigma_n \leq \tau_n \leq \tau'_n.$$

De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s) = u(s)$, pour n assez grand,

$$\ell_n(0) \notin B(x, \delta) \cup B(y, \delta),$$

donc

$$\sigma'_n \leq 0 \leq \sigma_n.$$

Démontrons maintenant :

Lemme 11.2.7. *Les suites (σ'_n) , (σ_n) et $(\tau'_n - \tau_n)$ sont bornées. De plus, il existe un $\tau^* \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \tau_n) = v(s + \tau^*).$$

Démonstration. Supposons que (σ'_n) ne soit pas bornée donc, à extraction près d'une sous-suite, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma'_n = -\infty$. Posons

$$\lambda_n(s) = \ell_n(s + \sigma'_n).$$

Le lemme 11.1.12 assure l'existence de $w \in \mathcal{M}_{(H^a, J^a)}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(s) = w(s).$$

Comme $\lambda_n(s) \in B(x, \delta)$ pour tout $s < 0$, $w \in \mathcal{M}_{(H^a, J^a)}(x, x')$ pour un certain x' , et $x \neq x'$ puisque

$$w(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(\sigma'_n) \in \partial B(x, \delta).$$

Montrons que ceci est absurde. On sait que, pour $s < -R$, ℓ_n et u sont solutions de l'équation de Floer associée à (H^a, J^a) . En particulier, les fonctions

$$s \mapsto \mathcal{A}_{H^a}(\ell_n(s)) \quad \text{et} \quad s \mapsto \mathcal{A}_{H^a}(u(s))$$

sont strictement décroissantes pour $s < -R$. Il en est de même de la fonction $s \mapsto \mathcal{A}_{H^a}(w(s))$. Choisissons donc s_1 et $s_2 < -R$ tels que $\mathcal{A}_{H^a}(u(s_1)) > \mathcal{A}_{H^a}(w(s_2))$, ce qui revient à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^a}(\ell_n(s_1)) > \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^a}(\ell_n(s_2 + \sigma'_n)).$$

Pour n assez grand, l'hypothèse faite sur σ'_n impose que $s_2 + \sigma'_n < s_1 < -R$ et donc que

$$\mathcal{A}_{H^a}(\ell_n(s_1)) < \mathcal{A}_{H^a}(\ell_n(s_2 + \sigma'_n)),$$

ce qui est la contradiction recherchée. Donc (σ'_n) est bornée.

Passons maintenant à (σ_n) et montrons que cette suite est, elle aussi, bornée. Supposons donc qu'elle ne l'est pas et donc (toujours à extraction d'une sous-suite près) qu'elle tend vers $+\infty$. Nous obtenons de même que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \sigma_n) = w' \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}$$

avec

$$w'(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(\sigma_n) \in \partial B(y, \delta).$$

En particulier, la suite $(s_n - \sigma_n)$ tend vers $+\infty$, puisque, si nous la supposons bornée, de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \sigma_n) = y$, nous déduirions que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \sigma_n) = y$$

et donc que $w' = y$, ce qui est absurde. Donc tout $s > 0$ est tel que $s + \sigma_n \in]\sigma_n, s_n]$ pour n assez grand et donc $\ell_n(s + \sigma_n) \in B(y, \delta)$. Ainsi

$$w'(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \sigma_n) \in \overline{B}(y, \delta),$$

en particulier $w' \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y', y)$ pour un certain point critique $y' \neq y$ de $\mathcal{A}_{H^b}$. Une contradiction sera mise en évidence comme ci-dessus en prenant s_1 et $s_2 > R$ tels que

$$\mathcal{A}_{H^b}(u(s_1)) < \mathcal{A}_{H^b}(w'(s_2)).$$

Venons-en maintenant à la suite $(\tau'_n - \tau_n)$. Pour n assez grand, nous avons $s_n > R$ (par le lemme 11.2.6), donc $\tau'_n \geq \tau_n \geq s_n > R$. En particulier

$$\mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s_n)) > \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(\tau_n)) > \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(\tau'_n)) > \mathcal{A}_{H^b}(z).$$

Le lemme 11.2.6 donne le fait que $\mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s_n)) = \mathcal{A}_{H^b}(y)$, donc

$$\mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(\tau_n)) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(\tau'_n)) \in]\mathcal{A}_{H^b}(z), \mathcal{A}_{H^b}(y)[$$

et la restriction de ℓ_n à l'intervalle $[\tau_n, \tau'_n]$ est solution de l'équation de Floer associée à (H^b, J^b) . Les mêmes arguments que dans la démonstration du lemme 9.6.12 montrent alors que $(\tau_n - \tau'_n)$ est bornée.

Montrons enfin la dernière assertion. C'est toujours 11.1.12 qui assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \tau_n) = w'' \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)},$$

avec, comme ci-dessus, $w'' \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y, y'')$ pour un $y'' \neq y$ (en utilisant le fait que $(\tau_n - s_n)$ tend vers $+\infty$, fait qui, lui aussi, se démontre comme ci-dessus). L'hypothèse faite sur ℓ_n entraîne par ailleurs l'existence d'une suite (ρ_n) tendant vers $+\infty$ et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \rho_n) = v$. Le lemme 11.2.5 implique alors que la suite $(\tau_n - \rho_n)$ est bornée, donc (à extraction près d'une sous-suite) convergente, vers une limite que nous notons τ^* . Mais alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \tau_n) = v(s + \tau^*)$$

et le lemme est démontré. $\square$

Achevons maintenant de démontrer la proposition 11.2.3. Posons

$$\rho_n = \frac{\tau_n - \tau^*}{2}$$

(τ^* est celui dont nous venons de démontrer l'existence) et montrons que (ρ_n) satisfait bien aux propriétés annoncées. Considérons donc le pré-recollement w_{ρ_n} défini, rappelons-le, par

$$w_{\rho_n}(s) = \begin{cases} u(s + \rho_n) & \text{si } s \leq -1 \\ \exp_y \left(\beta^-(s) \exp_y^{-1}(u(s + \rho_n)) \right. \\ \quad \left. + \beta^+(s) \exp_y^{-1}(v(s - \rho_n)) \right) & \text{si } s \in [-1, 1] \\ v(s - \rho_n) & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

Montrons que

$$\ell_n(s + \rho_n) = \exp_{w_{\rho_n}(s)} X(s), \quad \text{avec } \|X\|_\infty < \varepsilon.$$

Choisissons A et $B \in \mathbf{R}$ tels que

- $A - \tau^* < 0$, $B - \tau^* > \tau'_n - \tau_n$ et $[\sigma_n, \sigma'_n] \subset [A, B]$,
- pour $s \leq A$, $u(s) \in B(x, \delta)$ et $v(s) \in B(y, \delta)$,
- pour $s \geq B$, $u(s) \in B(y, \delta)$ et $v(s) \in B(z, \delta)$.

Nous allons démontrer la relation voulue pour tout $s \in \mathbf{R}$ en découpant $\mathbf{R}$ en plusieurs intervalles (de façon similaire à ce que nous avons fait pour démontrer la proposition 9.6.3) :

(1) Sur $] -\infty, A - \rho_n]$. Comme $s + \rho_n < A$,

$$w_{\rho_n}(s) = u(s + \rho_n) \in B(x, \delta),$$

et, comme $s + \rho_n < A < \sigma'_n$,

$$\ell_n(s + \rho_n) \in B(x, \delta).$$

Dans ce cas, la relation suit de 9.6.11.

(2) Sur $[A - \rho_n, B - \rho_n]$. Cette fois, $s + \rho_n \in [A, B]$, nous avons $w_{\rho_n}(s) = u(s + \rho_n)$. Puis, $\ell_n(s)$ tend vers $u(s)$ uniformément sur $[A, B]$, donc, pour n assez grand et $s \in [A, B]$,

$$\ell_n(s) = \exp_{u(s)} Y(s), \quad \text{avec } \|Y\|_\infty < \varepsilon.$$

Posons donc $X(s) = Y(s + \rho_n)$, de sorte qu'évidemment, $\|X\|_\infty < \varepsilon$ et que

$$\ell_n(s + \rho_n) = \exp_{u(s + \rho_n)} Y(s + \rho_n) = \exp_{w_{\rho_n}(s)} X(s).$$

(3) Sur $[B - \rho_n, A + \rho_n]$. Ici

$$s + \rho_n \in [B, A + 2\rho_n] = [B, A + \tau_n - \tau^*] \quad \text{et} \quad s - \rho_n \in [B - 2\rho_n, A],$$

ce qui implique que

$$u(s + \rho_n) \in B(y, \delta) \quad \text{et} \quad v(s - \rho_n) \in B(y, \delta).$$

Et, comme $B > \sigma_n$ et $A + \tau_n - \tau^* < \tau_n$,

$$\ell_n(s + \rho_n) \in B(y, \delta).$$

La relation désirée découle alors de 9.6.11.

(4) Sur $[A + \rho_n, B + \rho_n]$. Cette fois,

$$s + \rho_n \in [A + 2\rho_n, B + 2\rho_n] = [A + \tau_n - \tau^*, B + \tau_n - \tau^*], \quad s - \rho_n \in [A, B]$$

et $w_{\rho_n}(s) = v(s - \rho_n)$. Sur le compact $[A - \tau^*, B - \tau^*]$, la suite $\ell_n(s + \tau_n)$ converge uniformément vers $v(s + \tau^*)$ en vertu du lemme 11.2.7. En particulier, si n est assez grand et si $s \in [A - \tau^*, B - \tau^*]$,

$$\ell_n(s + \tau_n) = \exp_{v(s + \tau^*)} Y(s), \quad \text{avec } \|Y\|_\infty < \varepsilon.$$

Remplaçons s par $s - \tau^* - \rho_n$ dans cette égalité pour obtenir, pour $s \in [A + \rho_n, B + \rho_n]$,

$$\ell_n(s + \tau_n - \tau^* - \rho_n) = \exp_{v(s - \rho_n)} Y(s - \tau^* - \rho_n),$$

ce qui s'écrit encore $\ell_n(s + \rho_n) = \exp_{w_{\rho_n}(s)} X(s)$ pour s dans l'intervalle voulu, avec $X(s) = Y(s - \tau^* - \rho_n)$ satisfaisant à $\|X\|_\infty < \varepsilon$ sur cet intervalle.

(5) Sur $[B + \rho_n, +\infty[$. Ici

$$s + 2\rho_n \in [B + 2\rho_n, +\infty[= [B + \tau_n - \tau^*, +\infty[\quad s - \rho_n \in [B, +\infty[,$$

et $w_{\rho_n}(s) = v(s - \rho_n)$. Ainsi, comme $B + \tau_n - \tau^* > \tau'_n$,

$$w_{\rho_n}(s) \in B(z, \delta) \quad \text{et} \quad \ell_n(s + \rho_n) \in B(z, \delta),$$

de sorte que, cette fois encore, la relation voulue est conséquence de 9.6.11. La proposition 11.2.3 est ainsi démontrée. $\square$

Démonstration de la proposition 11.2.4. Elle se fait de façon analogue à celle de la proposition 9.6.4 au §9.6.c, en utilisant les lemmes 9.6.13, 9.6.14 et 13.7.1. Ces trois lemmes restent en effet valables dans le contexte présent :

- pour 9.6.13, la démonstration est identique, fondée sur le fait que ℓ_n , solution d'une équation de Floer, satisfait une propriété de décroissance exponentielle,
- la démonstration de 9.6.14 est simplifiée par le fait qu'ici W_ρ est de dimension 1,
- enfin l'analogue de 13.7.1 se démontre de façon identique puisque les opérateurs de Floer $\mathcal{F}_\rho^\Gamma$ et $\mathcal{F}_\rho$ jouissent des mêmes propriétés. $\square$

Fin de la démonstration de la propriété d'unicité. Ici encore, elle est complètement analogue à la démonstration de la propriété correspondante 9.6.5, cette fois au §9.6.d. En appliquant les lemmes 9.6.16 et 9.6.17 à l'opérateur

$$F_{\rho_n}^\Gamma : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}),$$

nous obtenons l'existence d'un $\varepsilon_1 > 0$, indépendant de n et d'une application continue

$$\gamma_n : \text{Ker}(L_{\rho_n}^\Gamma) \cap B(0, \varepsilon_1) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

tels que pour tout h , $F_{\rho_n}^\Gamma(\gamma_n(h)) = 0$ et que $\gamma_n(h)$ soit l'unique élément de $h + W_u^\perp \cap B(0, \varepsilon_1)$ possédant cette propriété. En utilisant les propositions 11.2.3 et 11.2.4, nous obtenons, pour n assez grand, l'existence de

$$h_n \in B(0, \varepsilon_1) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

telle que

$$\ell_n(s + \rho_n) = \exp_{w_{\rho_n}(s)}(i_{\rho_n}(\gamma_n(h_n(s))))$$

(c'est-à-dire que $\ell_n(s + \rho_n)$ est une solution obtenue par la méthode de Newton-Picard). D'autre part, la formule

$$h \longmapsto \left(\exp_{w_{\rho_n}}(i_{\rho_n}(\gamma_n(h_n))) \right) (s - \rho_n, t)$$

définit une application continue de $B(0, \varepsilon_1) \cap \text{Ker}(L_{\rho_n}^\Gamma)$ dans l'espace de solutions $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ qui est de dimension 1.

Soit $\bar{\rho}_0$ un réel plus grand que le ρ_0 donné par la première partie du théorème 11.1.16. Pour $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$, appelons I_ε l'intervalle contenu dans $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ et défini par

$$I_\varepsilon = \psi([\bar{\rho}_0, +\infty[) \cup \bigcup_{\rho_n > \bar{\rho}_0} \{ \exp_{\rho_n}(i_{\rho_n}(\gamma_n(h))) \mid \|h\| \leq \varepsilon \}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, par ce qui précède, $\ell_n \in I_\varepsilon$ pour n assez grand. L'analogie du lemme 9.6.18 (qui se démontre lui aussi de façon identique) montre qu'il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que

$$I_{\varepsilon_2} \subset \psi([\rho_0, +\infty[).$$

Et ceci achève la démonstration du théorème 11.1.16. $\square$

Par conséquent, le théorème 11.1.15 est lui aussi complètement démontré. Avec cette démonstration, nous avons achevé la première partie du plan établi au début de ce chapitre, à savoir la définition du morphisme de complexes

$$\Phi^\Gamma : CF_\star(H^a, J^a) \longrightarrow CF_\star(H^b, J^b).$$

La deuxième et dernière étape de ce plan a pour but de démontrer que ce morphisme induit un isomorphisme en homologie. Elle se décompose à son tour en deux étapes correspondant aux deux énoncés suivants.

Proposition 11.2.8. *Le morphisme Φ^Γ induit au niveau de l'homologie un morphisme qui est indépendant du choix de l'homotopie régulière Γ entre (H^a, J^a) et (H^b, J^b) .*

Proposition 11.2.9. *Soient (H^a, J^a) , (H^b, J^b) et $(H^c, J^c) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{J})_{\text{reg}}$ et soient Γ', Γ'' deux homotopies régulières joignant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) , respectivement (H^b, J^b) à (H^c, J^c) . Il existe alors une homotopie régulière Γ joignant (H^a, J^a) à (H^c, J^c) telle que*

$$\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'} \quad \text{et} \quad \Phi^\Gamma : CF_\star(H^a, J^a) \longrightarrow CF_\star(H^c, J^c)$$

induisent le même homomorphisme en homologie.

Ces deux propositions impliquent la relation

$$\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'} = \Phi^\Gamma \text{ en homologie}$$

quelles que soient les homotopies régulières Γ'', Γ' et Γ comme ci-dessus. Ceci est l'énoncé de l'étape 2 du plan de ce chapitre, tel qu'énoncé en son début. On en déduit que $\Phi^{\Gamma'}$ est un isomorphisme en homologie en prenant $(H^a, J^a) = (H^c, J^c)$, $\Gamma = \text{Id}$, et en utilisant le fait que $\Phi^{\text{Id}} = \text{Id}$.

Les deux sections qui viennent contiennent les démonstrations des deux propositions.

11.3. Invariance de Φ^Γ : démonstration de la proposition 11.2.8

Considérons deux homotopies régulières Γ_0 et Γ_1 joignant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) . Nous voulons démontrer que $\Phi^{\Gamma_0} = \Phi^{\Gamma_1}$ au niveau de l'homologie.

Pour ce faire, nous allons construire une homotopie

$$S : CF_{\star}(H^a, J^a) \longrightarrow CF_{\star+1}(H^b, J^b)$$

entre Φ^{Γ_0} et Φ^{Γ_1} , autrement dit un S vérifiant la relation

$$\Phi^{\Gamma_1} - \Phi^{\Gamma_0} = S \circ \partial_{(H^a, J^a)} + \partial_{(H^b, J^b)} \circ S$$

(qui implique l'égalité désirée).

À cette fin, considérons une « homotopie d'homotopies » $\Gamma = (\Gamma_{\lambda})_{\lambda \in [0,1]}$ qui joint Γ_0 et Γ_1 , que nous supposons stationnaire près de $\lambda = 0$ et de $\lambda = 1$. Elle peut être choisie de façon qu'il existe $R > 0$ avec la propriété que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\Gamma_{\lambda}(s) = \begin{cases} (H^a, J^a) & s \leq -R \\ (H^b, J^b) & s \geq R. \end{cases}$$

Voir la figure 3. Nous utilisons ici le fait que $\mathcal{J}$ est contractile (plus exactement, le fait qu'il est simplement connexe).

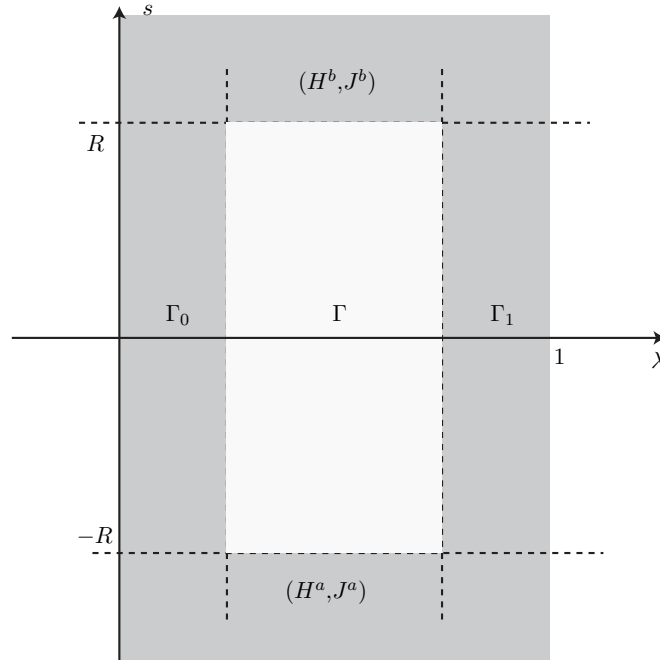


FIGURE 3

On voit Γ comme une application (H, J) , où

$$\begin{aligned} H &: [0, 1] \times \mathbf{R} \times S^1 \times W \longrightarrow \mathbf{R}, \\ J &: [0, 1] \times \mathbf{R} \longrightarrow \text{End}(TW), \end{aligned}$$

avec $J_s^\lambda \in \mathcal{J}$ pour tous $(\lambda, s) \in [0, 1] \times \mathbf{R}$. On peut supposer que H et J sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ces données définissent pour chaque $\lambda \in [0, 1]$ une équation de Floer à paramètre. En utilisant ces équations, nous démontrerons la proposition 11.2.8 en suivant à peu près le même plan qu'au § 11.1.

11.3.a. Les équations de Floer. Pour $\Gamma_\lambda(s) = (H_{s,t}^\lambda, J_s^\lambda)$, avec $\lambda \in [0, 1]$ fixé, considérons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_s^\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u H_{s,t}^\lambda = 0$$

et l'espace de solutions correspondant

$$\mathcal{M}^{\Gamma_\lambda} = \{u : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow W \mid u \text{ est contractile, avec } E(u) < +\infty\}.$$

Nous savons, grâce au théorème 11.1.1, que

$$\mathcal{M}^{\Gamma_\lambda} = \bigcup_{\substack{x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}}} \mathcal{M}^{\Gamma_\lambda}(x, y).$$

Définissons, pour $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$ et $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$ l'espace

$$\mathcal{M}^\Gamma(x, y) = \{(\lambda, u) \mid \lambda \in [0, 1], u \in \mathcal{M}^{\Gamma_\lambda}(x, y)\}.$$

Remarque 11.3.1. On peut voir $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ comme un cobordisme entre les variétés $\mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, y)$ et $\mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, y)$. En effet, si

$$\pi : \mathcal{M}^\Gamma(x, y) \longrightarrow [0, 1]$$

désigne la projection (sur l'espace des λ), on a

$$\pi^{-1}(\lambda) = \mathcal{M}^{\Gamma_\lambda}(x, y).$$

Il faudrait aussi montrer que $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ est une variété. Ce sera fait dès le paragraphe suivant.

11.3.b. La transversalité. Nous utiliserons l'espace (de perturbations) $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ des applications

$$h : [0, 1] \times \mathbf{R} \times S^1 \times W \longrightarrow \mathbf{R}$$

à support compact dans $]0, 1[\times \mathbf{R} \times W$ telles que $\|h\|_\varepsilon < +\infty$. Notons

$$h_{s,t}^\lambda(z) = h(\lambda, s, t, z).$$

Fixons $\Gamma = (H, J)$. Démontrons le théorème suivant.

Théorème 11.3.2. *Il existe un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ et une intersection dénombrable d'ouverts denses $\mathcal{H}_{\text{reg}}$ dans ce voisinage telle que, si $h \in \mathcal{H}_{\text{reg}}$, alors, pour $\Gamma(h) = (H + h, J)$, l'espace $\mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y)$ est, pour tout $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$ et tout $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$ une variété à bord, de dimension $\mu(x) - \mu(y) + 1$, dont le bord est*

$$\partial \mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y) = (\{0\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, y)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, y)).$$

Dans cet énoncé, nous utilisons la topologie sur $\mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y)$ induite par celle de $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; W)$.

Commençons par regarder ce qui se passe près du bord. Soient $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$ et $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$. Pour un $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ arbitraire et fixé, analysons la structure de $\mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y)$ près de ses points (λ, u) , avec $\lambda \in \{0, 1\}$.

Soit $\delta > 0$, assez petit pour que

$$\text{Supp}(h) \subset [\delta, 1 - \delta] \times \mathbf{R} \times S^1 \times W$$

et pour que l'isotopie $\Gamma = (H, J)$ soit stationnaire pour $\lambda \leq \delta$ et pour $\lambda \geq 1 - \delta$. On a donc $\Gamma(h) = \Gamma_0$ pour $\lambda \leq \delta$ et $\Gamma(h) = \Gamma_1$ pour $\lambda \geq 1 - \delta$. Il est alors clair que

$$\mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y) \cap \{\lambda < \delta\} = [0, \delta[\times \mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, y)$$

$$\text{et } \mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y) \cap \{\lambda > 1 - \delta\} =]1 - \delta, 1] \times \mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, y).$$

Cela montre qu'au voisinage des points de

$$\{0\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, y) \cup \{1\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, y),$$

l'espace $\mathcal{M}^{\Gamma(h)}$ a une structure de variété à bord, comme dans l'énoncé du théorème.

Nous suivons ensuite le même plan qu'au chapitre 8 (voir à nouveau le schéma à la fin du §8.1). Notre point de départ est un analogue du théorème 8.1.5, c'est une version du théorème 11.1.7, valide pour les homotopies Γ_λ , pour λ fixé dans $[0, 1]$:

Théorème 11.3.3. *Pour tout $\lambda \in]0, 1[$ fixé, pour tous points critiques $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$, $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$ et pour tout $u \in \mathcal{M}^{\Gamma_\lambda}(x, y)$, l'opérateur $(d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda})_u$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\mu(x) - \mu(y)$.*

À l'aide de ce théorème, on établit un énoncé analogue à 8.1.3. À cet effet, on fixe $J = (J^\lambda)_{\lambda \in [0, 1]}$ et on considère, comme au §8.5, le fibré

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}^{1,p}(x, y) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$$

où

$$\mathcal{E} = \{(u, h, Y) \mid (u, h) \in \mathcal{P}^{1,p}(x, y) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty, Y \in L^p(u^*TW)\}.$$

On définit une famille de sections $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ par

$$\sigma_\lambda(u, h) = \frac{\partial u}{\partial s} + J^\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u(H^\lambda + h^\lambda).$$

Exactement comme au § 11.1 (en utilisant l'analogue de la proposition 11.1.8), on démontre que, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, l'application σ_λ est transverse à la section nulle du fibré $\mathcal{E}$ ci-dessus. Il s'ensuit que la même propriété est vérifiée par l'application $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{aligned} \sigma :]0, 1[\times \mathcal{P}^{1,p}(x, y) \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (\lambda, u, h) &\longmapsto \sigma_\lambda(u, h), \end{aligned}$$

ce qui implique, en vertu du théorème des fonctions implicites, l'analogue de 8.1.3 :

Proposition 11.3.4. *Pour $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$, $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$, l'espace $\mathcal{Z}(x, y, J)$ des*

$$\{(\lambda, u, H + h) \mid \lambda \in]0, 1[, h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty, u \in \mathcal{M}^{\Gamma^\lambda}(x, y, (H + h)^\lambda, J^\lambda)\}$$

est une variété de Banach.

La présence du paramètre λ oblige à modifier (par rapport au § 8.5.c) l'expression de l'espace tangent à $\mathcal{Z}(x, y, J)$ en un point $(\lambda, u, H + h_0)$. Dans notre nouveau contexte, cet espace, qui est le noyau de $(d\sigma)_{(\lambda, u, H + h_0)}$, est constitué de tous les $(a, Y, h) \in \mathbf{R} \times W^{1,p} \times \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ qui vérifient l'équation

$$a \frac{\partial J^\lambda}{\partial \lambda}(u) \frac{\partial u}{\partial t} + a \text{grad}_u \frac{\partial(H + h_0)^\lambda}{\partial \lambda} + (d\mathcal{F}^{\Gamma^\lambda})_u(Y) + \text{grad}_u(h^\lambda) = 0.$$

Pour démontrer le théorème 11.3.3, nous utilisons :

Proposition 11.3.5. *Soit $\pi : \mathcal{Z}(x, y, J) \rightarrow \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ la projection. L'ensemble des valeurs régulières de π situées dans un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ est un ouvert dense de ce voisinage.*

Démonstration. L'énoncé est une application directe du théorème de Sard-Smale (ici le théorème 8.5.6), à condition que nous prouvions que π est une application de Fredholm. Montrons donc que pour tout $(\lambda, u, H + h_0) \in \mathcal{Z}(x, y, J)$, l'opérateur

$$(d\pi)_{(\lambda, u, H + h_0)} : T_{(\lambda, u, H + h_0)} \mathcal{Z}(x, y, J) \longrightarrow T_{h_0} \mathcal{C}_\varepsilon^\infty,$$

qui est de la forme $(a, Y, h) \mapsto h$, est un opérateur de Fredholm. Notons V le champ de vecteurs

$$V = \frac{\partial J^\lambda}{\partial \lambda}(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u \frac{\partial(H^\lambda + h_0^\lambda)}{\partial \lambda} \in L^p(u^*TW).$$

D'après l'expression de l'espace tangent à $\mathcal{Z}(x, y, J)$, nous voyons que le noyau de $(d\pi)_{(\lambda, u, H+h_0)}$ est l'espace

$$\{(a, Y, 0) \mid (a, Y) \in \mathbf{R} \times W^{1,p}(u^*TW) \text{ et } aV + (d\mathcal{F}^{\Gamma^\lambda})_u(Y) = 0\}.$$

Montrons donc que cet espace est de dimension finie. On distingue deux cas :

(1) Si $V \notin \text{Im}((d\mathcal{F}^{\Gamma^\lambda})_u)$. On trouve dans ce cas

$$\text{Ker}(d\pi)_{(\lambda, u, H+h_0)} = \{(0, Y, 0) \mid Y \in \text{Ker}(d\mathcal{F}_u^{\Gamma^\lambda})\}$$

qui est de dimension finie par le théorème 11.3.3.

(2) Si $V \in \text{Im}((d\mathcal{F}^{\Gamma^\lambda})_u)$. Choisissons un $Y_0 \in W^{1,p}(u^*TW)$ tel que $(d\mathcal{F}^{\Gamma^\lambda})_u(Y_0) = V$. On en déduit

$$\text{Ker}(d\pi)_{(\lambda, u, H+h_0)} = \{(a, Y, 0) \mid a(d\mathcal{F}^{\Gamma^\lambda})_u(Y_0) + (d\mathcal{F}^{\Gamma^\lambda})_u(Y) = 0\}.$$

Cet espace est isomorphe à $\mathbf{R}Y_0 + \text{Ker}(d\mathcal{F}^{\Gamma^\lambda})_u$, qui est aussi de dimension finie.

Ensuite, l'image de $(d\pi)_{(\lambda, u, H+h_0)}$ est fermée et de codimension finie, toujours en vertu du théorème 11.3.3. En effet, c'est l'image réciproque du sous-espace fermé de codimension finie

$$\mathbf{R}V + \text{Im}((d\mathcal{F}_u^{\Gamma^\lambda}) \subset L^p(u^*TW)$$

par l'application linéaire $h \mapsto \text{grad}_u h$ vue comme une application

$$\mathcal{C}_\varepsilon^\infty \longrightarrow L^p(u^*TW).$$

Par conséquent, π est bien une application de Fredholm, ce qui démontre la proposition 11.3.5 (grâce au théorème de Sard-Smale). $\square$

Notons donc $\mathcal{H}_{\text{reg}} \subset \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ le voisinage donné par cette proposition. Nous venons de démontrer que, pour $h \in \mathcal{H}_{\text{reg}}$, l'homotopie $\Gamma(h)$ a la propriété que, pour tous points critiques $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$, $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$, l'ensemble

$$\pi^{-1}(h) = \mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y) \cap \{\lambda \in]0, 1[\}$$

est une variété (avec la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ (voir la remarque 8.5.9)). On en déduit, en utilisant le même argument qu'au début de la démonstration du théorème 11.3.2, que $\mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y)$ est une variété à bord.

Pour finir la démonstration de ce théorème 11.3.2, déterminons la dimension de cette variété. Elle est égale à la dimension du noyau de $(d\pi)_{(\lambda, u, H+h_0)}$ pour un $h_0 \in \mathcal{H}_{\text{reg}}$. Nous avons décrit cet espace vectoriel dans la démonstration de la proposition 11.3.5. Pour déterminer sa dimension, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 11.3.6. Soit $h_0 \in \mathcal{H}_{\text{reg}}$ et soit $(\lambda, u) \in \mathcal{M}^{\Gamma(h_0)}(x, y)$. L'opérateur

$$\mathcal{Y} : \mathbf{R} \times W^{1,p}(u^*TW) \longrightarrow L^p(u^*TW)$$

défini par $\mathcal{Y}(a, Y) = aV + (d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda(H+h_0)})_u(Y)$ est surjectif.

Dans cet énoncé, V désigne toujours le champ de vecteurs défini et utilisé dans la démonstration de la proposition 11.3.5.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\text{Ker } \mathcal{Y} = \text{Ker}(d\pi)_{(\lambda, u, H+h_0)}$ est de dimension finie et que $\text{Im } \mathcal{Y} = \mathbf{R}V + \text{Im}(d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda})_u$ est fermé et de codimension finie dans $L^p(u^*TW)$. Autrement dit, $\mathcal{Y}$ est un opérateur de Fredholm. Supposons qu'il ne soit pas surjectif. Il existe donc, comme dans le lemme 8.5.1, un champ de vecteurs non nul $Z \in L^q(u^*TW)$ (ici $1/p + 1/q = 1$) tel que $\langle Z, \text{Im } \mathcal{Y} \rangle = 0$, ce qui revient à :

$$\langle Z, V \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle Z, \text{Im}(d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda})_u \rangle = 0.$$

La deuxième condition implique que Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en vertu de la régularité elliptique, comme dans la démonstration de 8.5.1. Utilisons maintenant l'hypothèse que $h_0 \in \mathcal{H}_{\text{reg}}$. Elle implique que $(d\pi)_{(\lambda, u, H+h_0)}$ est surjective, ce qui signifie que pour tout $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$, il existe $(a, Y) \in \mathbf{R} \times W^{1,p}(u^*TW)$ tel que

$$aV + (d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda})_u(Y) + \text{grad}_u h = 0$$

(autrement dit, $(a, Y, h) \in T_{(\lambda, u, H+h_0)}\mathcal{Z}(x, y, J)$). On en déduit que

$$\langle Z, \text{grad}_u h \rangle = 0 \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty,$$

ce qui est contradictoire, compte tenu du lemme 11.1.9. Le lemme est démontré. $\square$

On trouve alors, avec les notations du lemme précédent,

$$\dim \mathcal{M}^{\Gamma(h)}(x, y) = \dim \text{Ker}(d\pi)_{(\lambda, u, H+h_0)} = \dim \text{Ker } \mathcal{Y} = \text{Ind } \mathcal{Y}.$$

Pour calculer l'indice de Fredholm de $\mathcal{Y}$, considérons le chemin d'opérateurs $(\mathcal{Y}_\sigma)_{\sigma \in [0,1]}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\sigma : \mathbf{R} \times W^{1,p}(u^*TW) &\longrightarrow L^p(u^*TW) \\ (a, Y) &\longmapsto a\sigma V + (d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda(H+h)})_u(Y). \end{aligned}$$

Ce sont des opérateurs de Fredholm puisqu'ils ont la même forme que $\mathcal{Y}$. En particulier, leur indice ne dépend pas de σ (d'après 16.2.11), il est donc égal à celui de $\mathcal{Y}_0$, mais

$$\mathcal{Y}_0(a, Y) = (d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda})_u(Y),$$

donc

$$\text{Ind } \mathcal{Y} = \text{Ind } \mathcal{Y}_0 = \text{Ind}(d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda})_u + 1 = \mu(x) - \mu(y) + 1$$

d'après le théorème 11.3.3. Le théorème 11.3.2 est maintenant complètement démontré. $\square$

Nous supposons désormais que les homotopies $\Gamma = (H, J)$ sont régulières, ce qui implique que les espaces $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ sont des variétés de dimension $\mu(x) - \mu(y) + 1$, comme dans la conclusion du théorème 11.3.2. Nous supposons de plus que l'opérateur $\mathcal{Y}$ défini dans le lemme 11.3.6 est surjectif, ce que le théorème 11.3.2 nous autorise à faire, en perturbant au besoin H par un $h \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$.

11.3.c. Compacité, orbites brisées. Soit $\Gamma = (H, J)$ comme ci-dessus. Notons

$$\mathcal{M}^\Gamma = \bigcup_{\substack{x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}}} \mathcal{M}^\Gamma(x, y) = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \{\lambda\} \times \mathcal{M}^{\Gamma^\lambda}.$$

Nous démontrons :

Théorème 11.3.7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que $E(u) \leq C$ pour tous $(\lambda, u) \in \mathcal{M}^\Gamma$. L'espace $\mathcal{M}^\Gamma$ est compact pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$.*

Dans cet énoncé, l'énergie $E(u)$ est calculée avec la norme associée à la métrique $\omega(\cdot, J_s^\lambda)$.

Démonstration. Montrons d'abord que l'énergie est bornée. Soit $(\lambda, u) \in \mathcal{M}^\Gamma$. Il existe deux points critiques x et y (respectivement de H^a et de H^b) tels que $u \in \mathcal{M}^{\Gamma^\lambda}(x, y)$. La proposition 11.1.2 affirme que

$$E(u) \leq \mathcal{A}_{H^a} - \mathcal{A}_{H^b} + k$$

où k est le maximum sur $[-R, R] \times S^1 \times W$ de $\partial H^\lambda / \partial s(s, t, z)$. Il suffit de définir K comme le maximum de cette même fonction quand λ varie lui aussi,

$$K = \sup \left\{ \frac{\partial H^\lambda}{\partial s}(s, t, z) \mid (\lambda, s, t, z) \in [0, 1] \times [-R, R] \times S^1 \times W \right\},$$

de poser

$$C = \max_{\substack{x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}}} \mathcal{A}_{H^a} - \mathcal{A}_{H^b} + K$$

pour avoir $E(u) \leq C$.

Montrons maintenant l'énoncé de compacité proprement dit. Soit $(\lambda_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}^\Gamma$. À extraction d'une sous-suite près, (λ_n) converge vers un $\lambda \in [0, 1]$. En utilisant le fait que l'énergie est bornée, on démontre de façon analogue à 11.1.5 :

Proposition 11.3.8. *Il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$\forall (u, \lambda) \in \mathcal{M}^{\Gamma_\lambda}, \forall (s, t) \in \mathbf{R} \times S^1, \quad \|\text{grad}_{(s,t)} u\| \leq A.$$

Cet énoncé implique que la famille (u_n) est équicontinue, d'où l'on conclut à l'aide du théorème d'Ascoli et de la régularité elliptique 12.1.1 que la suite (u_n) tend vers une limite u dans la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$. Cette limite u est solution de

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_s^\lambda \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u H_{s,t}^\lambda(u) = 0,$$

elle vérifie que $E(u) \leq C$, donc $u \in \mathcal{M}^{\Gamma_\lambda}$ et par conséquent $(\lambda, u) \in \mathcal{M}^\Gamma$. Et le théorème 11.3.7 est démontré. $\square$

Analysons maintenant le comportement des suites (λ_n, u_n) d'éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$. Voici pour commencer un analogue du lemme 11.1.12.

Lemme 11.3.9. *Soient $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$, $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$ et (λ_n, u_n) une suite dans $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$. Soit (s_n) une suite de nombres réels qui tend vers $+\infty$. Alors il existe une sous-suite (encore notée (λ_n, u_n)) et un élément $(\lambda_\star, v) \in [0, 1] \times \mathcal{M}^{(H^b, J^b)}$ tels que*

$$\lim \lambda_n = \lambda_\star \quad \text{et} \quad \lim u_n \cdot s_n = v.$$

De même, si $\lim s_n = -\infty$, il existe une sous-suite et un élément $(\lambda_\star, u) \in [0, 1] \times \mathcal{M}^{(H^a, J^a)}$ tels que

$$\lim \lambda_n = \lambda_\star \quad \text{et} \quad \lim u_n \cdot s_n = u.$$

Démonstration. Quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite des λ_n converge, vers un $\lambda_\star \in [0, 1]$. Puis, $v_n = u_n \cdot s_n$ est solution de l'équation de Floer

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + J_{s+s_n}^{\lambda_n} \frac{\partial v_n}{\partial t} + \text{grad}_{v_n} H_{s+s_n}^{\lambda_n} = 0.$$

En appliquant la proposition 11.3.8, on montre, à l'aide du théorème d'Ascoli et de la régularité elliptique 12.1.1, que $u_n \cdot s_n$ converge, pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$, vers une limite $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; W)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'équation de Floer, on trouve bien que v est solution de

$$\frac{\partial v}{\partial s} + J^b \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad}_v H^b = 0$$

(parce que $\Gamma = (H^b, J^b)$ pour s assez grand), autrement dit, $v \in \mathcal{M}^{(H^b, J^b)}$. Le cas où (s_n) tend vers l'infini est analogue. $\square$

Nous allons utiliser ce lemme pour démontrer un théorème de convergence vers les orbites brisées, analogue à 11.1.10.

Théorème 11.3.10. Soit (λ_n, u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$. Il existe

- une sous-suite de (λ_n, u_n) ,
- des points critiques $x = x_0, x_1, \dots, x_k$ de $\mathcal{A}_{H^a}$,
- des points critiques $y_0, y_1, \dots, y_\ell = y$ de $\mathcal{A}_{H^b}$,
- des suites réelles (s_n^i) pour $0 \leq i \leq k-1$ (tendant vers $-\infty$) et (s_n^j) pour $0 \leq j \leq \ell-1$ (tendant vers $+\infty$),
- des éléments $u^i \in \mathcal{M}^{(H^a, J^a)}(x_i, x_{i+1})$ pour $0 \leq i \leq k-1$ et des éléments $v^j \in \mathcal{M}^{(H^b, J^b)}(y_j, y_{j+1})$ pour $0 \leq j \leq \ell-1$,
- un élément $(\lambda_\star, w) \in \mathcal{M}^\Gamma(x_k, y_0)$

tels que pour $0 \leq i \leq k-1$ et pour $0 \leq j \leq \ell-1$, on ait

$$\lim u_n \cdot s_n^i = u^i \quad \text{et} \quad \lim u_n \cdot s_n^j = v^j$$

et

$$\lim(\lambda_n, u_n) = (\lambda_\star, w).$$

De plus, on a l'inégalité

$$\mu(x) - \mu(y) + 1 \geq k + \ell.$$

Démonstration. La preuve de l'assertion d'existence est en tout point analogue à celle de l'assertion analogue 11.1.10. Elle s'appuie sur l'assertion de compacité du théorème 11.3.7 et sur le lemme 11.3.9. L'inégalité finale se démontre de la même façon que le corollaire 11.1.11. $\square$

Voici un énoncé conséquence du théorème 11.3.10 :

Théorème 11.3.11.

(i) Soient x et y des points critiques de H^a et H^b respectivement et soit $\Gamma = (H, J)$ une homotopie régulière. Si $\mu(x) - \mu(y) + 1 = 0$, alors $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ est une variété compacte de dimension 0 (c'est-à-dire un nombre fini de points).

(ii) Soient x et z des points critiques de H^a et H^b respectivement et soit $\Gamma = (H, J)$ une homotopie régulière. Si $\mu(x) = \mu(z)$, et si $\Pi^\Gamma(x, z)$ désigne

$$\begin{aligned} \Pi^\Gamma(x, z) = & \left(\bigcup_{\substack{y' \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ \mu(x) - \mu(y') = 1}} \mathcal{L}_{(H^a, J^a)}(x, y') \times \mathcal{M}^\Gamma(y', z) \right) \\ & \cup \left(\bigcup_{\substack{y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(y) - \mu(z) = 1}} \mathcal{M}^\Gamma(x, y) \times \mathcal{L}_{(H^b, J^b)}(y, z) \right). \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{M}^\Gamma(x, z) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$ est une variété à bord compacte de dimension 1 dont le bord est

$$\Pi^\Gamma(x, z) \cup (\{0\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, z)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, z)).$$

Supposons pour le moment ce théorème démontré. Nous pouvons alors atteindre le but de ce paragraphe, qui était la démonstration de la proposition 11.2.8.

Démonstration de la proposition 11.2.8. Définissons l'homotopie

$$S : CF_*(H^a, J^a) \longrightarrow CF_{*+1}(H^b, J^b).$$

Si x est un point critique de $\mathcal{A}_{H^a}$ d'indice $\mu(x) = k$, posons

$$S_k(x) = \sum_{\substack{y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ \mu(y)=k+1}} m^\Gamma(x, y) \cdot y$$

où $m^\Gamma(x, y)$ est, bien sûr, le nombre d'éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ comptés modulo 2. Nous voulons montrer que

$$\Phi^{\Gamma_1} - \Phi^{\Gamma_0} = S \circ \partial_{(H^a, J^a)} + \partial_{(H^b, J^b)} \circ S.$$

Évaluons le membre de droite pour un $x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$ avec $\mu(x) = k$. Nous avons

$$\begin{aligned} S \circ \partial_{(H^a, J^a)}(x) + \partial_{(H^b, J^b)} \circ S(x) &= S_{k-1} \sum_{\substack{y' \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ \mu(y')=k-1}} n^a(x, y') y' + \partial_{(H^b, J^b)} \sum_{\substack{y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(y)=k+1}} m^\Gamma(x, y) y \\ &= \sum_{\substack{z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(z)=k}} \sum_{\substack{y' \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a} \\ \mu(y')=k-1}} n^a(x, y') m^\Gamma(y', z) z \\ &\quad + \sum_{\substack{z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(z)=k}} \sum_{\substack{y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(y)=k+1}} m^\Gamma(x, y) n^b(y, z) z \\ &= \sum_{\substack{z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(z)=k}} (\# \Pi^\Gamma(x, z)) z. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\Phi^{\Gamma_0}(x) + \Phi^{\Gamma_1}(x) = \sum_{\substack{z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(z)=k}} (\# \mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, z)) z + \sum_{\substack{z \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b} \\ \mu(z)=k}} (\# \mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, z)) z.$$

Comme, d'après le théorème 11.3.11, le bord de la variété $\mathcal{M}^\Gamma(x, z) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$ (qui est compacte de dimension 1) est la réunion

$$\Pi^\Gamma(x, z) \cup (\{0\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, z)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, z)),$$

le nombre total de points de cette réunion est pair, d'où

$$S \circ \partial_{(H^a, J^a)}(x) + \partial_{(H^b, J^b)} \circ S(x) = (\Phi^{\Gamma_0} + \Phi^{\Gamma_1})(x),$$

ce qui modulo 2 est bien l'égalité

$$S \circ \partial_{(H^a, J^a)} + \partial_{(H^b, J^b)} \circ S = \Phi^{\Gamma_1} - \Phi^{\Gamma_0}.$$

Nous avons démontré la proposition 11.2.8. $\square$

Il nous reste encore une démonstration, celle du théorème 11.3.11.

Démonstration du théorème 11.3.11.

(i) L'homotopie Γ est régulière, donc $\mathcal{M}^\Gamma$ est une variété de dimension 0. La compacité de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ résulte du théorème 11.3.10.

Remarque 11.3.12. Sous les hypothèses du théorème 11.3.11, notons $(\lambda_1, u_1), \dots, (\lambda_k, u_k)$ les éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$. Alors les homotopies Γ_i correspondantes joignant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) ne peuvent pas être régulières. En effet, si Γ_1 par exemple était régulière, $\mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, y)$ serait vide (puisque sa dimension $\mu(x) - \mu(y) = -1$ serait négative). Cela serait en contradiction avec le fait que $u_1 \in \mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, y)$.

Revenons à la démonstration du théorème 11.3.11 et démontrons-en la partie (ii). La compacité de $\mathcal{M}^\Gamma(x, y) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$ est elle aussi une conséquence immédiate du théorème 11.3.10. Ensuite, comme Γ est régulière, $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ est une variété à bord de dimension 1 dont le bord est

$$(\{0\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, z)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, z)).$$

Pour finir cette démonstration, il reste à étudier la structure de $\mathcal{M}^\Gamma(x, z) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$ près des points de la variété (compacte, de dimension 0) $\Pi^\Gamma(x, z)$. Nous le ferons au paragraphe suivant, par une méthode de type « recollement ». Avant cela, mettons en évidence un cas particulier où cette étude est inutile parce que $\Pi^\Gamma(x, z)$ est vide. $\square$

Remarque 11.3.13. Si l'homotopie d'homotopies Γ se fait à travers des homotopies Γ_λ qui sont toutes régulières, alors $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ est compact : c'est un cobordisme compact entre $\mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, z)$ et $\mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, z)$ (voir la remarque 11.3.1 et les figures 4 et 5 ci-dessous). Par conséquent, les nombres d'éléments de $\mathcal{M}^{\Gamma_0}(x, z)$ et de $\mathcal{M}^{\Gamma_1}(x, z)$ ont même parité et en particulier les deux morphismes

$$\Phi^{\Gamma_0}, \Phi^{\Gamma_1} : CF_\star(H^a, J^a) \longrightarrow CF_\star(H^b, J^b)$$

coïncident.

Cette remarque est une conséquence facile de la remarque 11.3.12. Si toutes les homotopies Γ_λ sont régulières, alors $\Pi^\Gamma(x, z)$ est vide puisque les espaces $\mathcal{M}^\Gamma(y', z)$ et $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ qui interviennent dans sa définition sont vides. Donc le cobordisme $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ est compact.

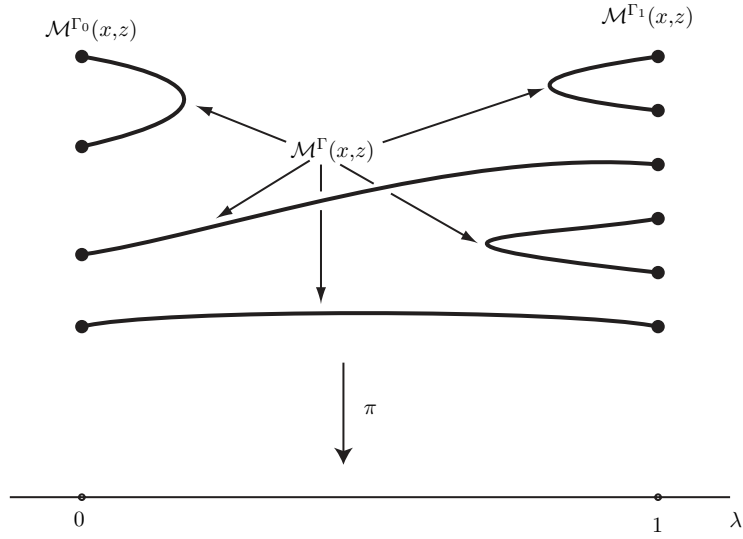


FIGURE 4

La figure 4 représente le cas où Γ_λ est régulière pour tout $\lambda \in [0, 1]$, cas où $\Pi^\Gamma(x, z)$ est vide. La figure 5 représente, elle le cas général où Γ est régulière mais pas chacune des Γ_λ .

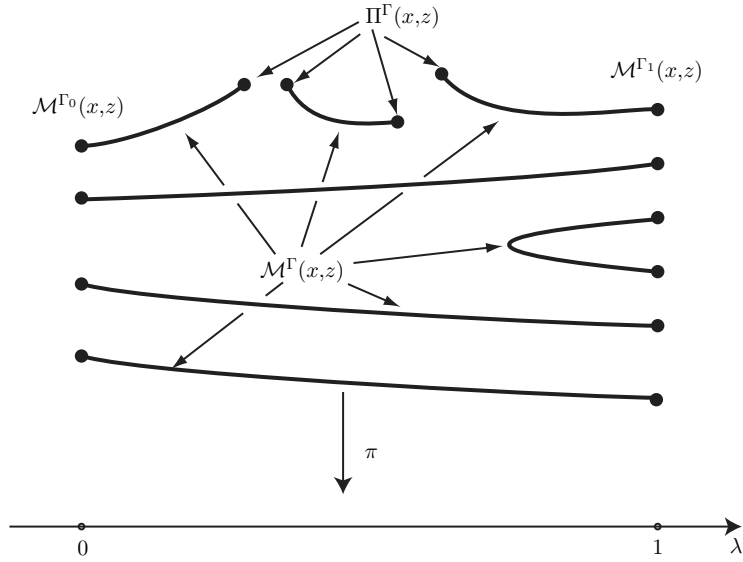


FIGURE 5

11.3.d. Le recollement. Lorsque $\mu(x) = \mu(z)$, un point de $\Pi^\Gamma(x, z)$ est une orbite brisée, qui peut-être

- de la forme $[\hat{u}', (\lambda', v')] \in \mathcal{L}_{(H^a, J^a)}(x, y') \times \mathcal{M}^\Gamma(y', z)$,
- ou bien de la forme $[(\lambda, u), \hat{v}] \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y) \times \mathcal{L}_{(H^b, J^b)}(y, z)$,

pour un $y' \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^a})$ qui vérifie $\mu(x) - \mu(y) = 1$ ou pour un $y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b})$ qui vérifie $\mu(y) - \mu(z) = 1$.

Pour finir la démonstration du théorème 11.3.11 (ii), nous utilisons un procédé de recollement analogue à celui du § 11.1.d pour construire, pour chaque point de $\Pi^\Gamma(x, z)$, un plongement $\rho \mapsto \psi(\rho)$ dans $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$, qui donnera un paramétrage de la variété à bord $\mathcal{M}^\Gamma(x, z) \cup \Pi^\Gamma(x, z)$ près du point de $\Pi^\Gamma(x, z)$ considéré.

Nous nous contenterons de le faire seulement pour les points de la forme $[(\lambda, u), \hat{v}]$, la démonstration pour les autres étant analogue. L'énoncé précis est :

Théorème 11.3.14. *Soit x un point critique de $\mathcal{A}_{H^a}$, et soient y, z , des points critiques de $\mathcal{A}_{H^b}$ tels que*

$$\mu(x) = \mu(z) = \mu(y) - 1.$$

Soient $(\lambda_\star, u) \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ et $\hat{v} \in \mathcal{L}_{(H^b, J^b)}(y, z)$. Alors :

- *Il existe un plongement $\psi : [\rho_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ (pour un certain ρ_0) tel que $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \psi(\rho) = [(\lambda_\star, u), \hat{v}]$.*
- *Si $[\lambda_n, \ell_n]$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ qui tend vers $[(\lambda_\star, u), \hat{v}]$, alors $[\lambda_n, \ell_n] \in \text{Im } \psi$ pour n assez grand.*

La convergence dont il est question dans ce théorème est celle définie dans le théorème 11.3.10. La démonstration est donnée dans la section qui suit.

11.4. Démonstration du théorème 11.3.14

Nous reprenons la démonstration (donnée au § 11.2) du théorème 11.1.16, en soulignant les modifications à opérer.

Notons d'abord que le $\lambda_\star$ de l'énoncé est dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$. En effet, la variété (de dimension 0) $\mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ est formée de couples (λ, u) pour lesquels les homotopies Γ_λ ne sont pas régulières (c'est la remarque 11.3.12). Cela exclut les valeurs $\lambda_\star = 0$ ou 1 . Notre objectif est de définir, pour $\rho \geq \rho_0$, une application

$$\psi_\rho : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow W$$

et une constante λ_ρ telles que ψ_ρ soit une solution de l'équation de Floer à paramètres

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial s} + J_{s+\rho}^{\lambda_\rho} \frac{\partial \psi_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{\psi_\rho} H_{s,t}^{\lambda_\rho} = 0$$

avec les conditions

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi_\rho(s, \bullet) = x, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi_\rho(s, \bullet) = z.$$

Remarque 11.4.1. Une solution naïve serait de prendre $\lambda_\rho = \lambda_\star$ et d'essayer de définir ψ_ρ comme au § 11.2, à partir du pré-recollement de u et d'un relèvement $v \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y, z)$ de $\widehat{v}$. Cette méthode est vouée à l'échec puisque, comme l'homotopie $\Gamma_{\lambda_\star}$ n'est pas régulière (encore la remarque 11.3.12), nous ne pouvons pas déduire que l'opérateur linéarisé $L_u = (d\mathcal{F}^{\Gamma_\lambda})_u$ est surjectif. Nous ne pouvons donc pas construire l'opérateur inverse G_ρ , qui est indispensable pour la méthode de Newton-Picard des § 9.4 et 11.2. ici Coker L_u est de dimension 1. C'est la variation de λ qui va fournir la dimension manquante.

Suivant toujours le § 9.4, faisons la substitution

$$\varphi_\rho(s, t) = \psi_\rho(s + \rho, t).$$

L'application φ_ρ devra satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial s} + J_{s+\rho}^{\lambda_\rho} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{\varphi_\rho} H_{s+\rho, t}^{\lambda_\rho} = 0.$$

Nous conservons le même plan qu'aux § 9.4 et 11.2, c'est-à-dire

- (1) pré-recollement ;
- (2) construction de φ (et donc de ψ , *via* la substitution ci-dessus) ;
- (3) propriétés de ψ .

11.4.a. Pré-recollement. Fixons un relèvement $v \in \mathcal{M}_{(H^b, J^b)}(y, z)$ de $\widehat{v}$. La formule du pré-recollement $w_\rho = u \#_\rho v$ est inchangée :

$$w_\rho(s, t) = \begin{cases} u(s + \rho, t) & \text{si } s \leq -1 \\ \exp_{y(t)} \left(\beta^-(s) \exp_{y(t)}^{-1}(u(s + \rho, t)) \right. \\ \quad \left. + \beta^+(s) \exp_{y(t)}^{-1}(v(s - \rho, t)) \right) & \text{si } s \in [-1, 1] \\ v(s - \rho, t) & \text{si } s \geq 1 \end{cases}$$

et ses propriétés sont analogues à celles données au 9.3.

De même, la version linéaire du pré-recollement

$$Y \#_\rho Z, \quad \text{pour } Y \in T\mathcal{P}_u(x, y) \text{ et } Z \in T\mathcal{P}_v(y, z)$$

est définie par la même formule et a les mêmes propriétés que son analogue du 9.3.

11.4.b. Construction de φ . Nous utilisons encore une fois, comme aux § 9.4 et 11.2.b, la méthode de Newton-Picard. En nous inspirant de la remarque 11.4.1, nous reproduisons le début du § 11.2.b pour $\lambda = \lambda_*$. Nous définissons les opérateurs (non linéaires)

$$F_u, F_v, F_\rho^{\Gamma_{\lambda_*}} : B(0, r) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

et leur linéarisés (différentielles en 0) respectifs

$$L^u, L^v, L_\rho^{\Gamma_{\lambda_*}} : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Comme au § 11.2.b, ces opérateurs sont de Fredholm. En revanche, leurs indices sont modifiés comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Ind } L^u &= \mu(x) - \mu(y) = -1 \\ \text{Ind } L^v &= \mu(y) - \mu(z) = 1 \\ \text{Ind } L_\rho^{\Gamma_{\lambda_*}} &= \mu(x) - \mu(z) = 0. \end{aligned}$$

Nous avons observé (remarque 11.4.1) que nous ne pourrions pas construire φ en maintenant λ constant égal à λ_* . Considérons alors, pour $\lambda \in]0, 1[$, l'opérateur de Floer $\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_\lambda}$ défini par

$$\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_\lambda} = \frac{\partial}{\partial s} + J_{s+\rho}^\lambda \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H_{s+\rho, t}^\lambda.$$

En utilisant les trivialisations du § 11.2.b, $\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_\lambda}$ définit un opérateur (non linéaire)

$$F_\rho^{\Gamma_\lambda} : B(0, r) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Toujours à l'aide des mêmes trivialisations, cela définit un opérateur (non linéaire)

$$F_\rho^\Gamma :]0, 1[\times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

par la formule

$$F_\rho^\Gamma(\lambda, Y) = F_\rho^{\Gamma_\lambda}(Y).$$

Remarquons que, si (λ_ρ, Y_ρ) est un zéro de F_ρ^Γ , alors $\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_\rho}}(\exp_{w_\rho} Y_\rho) = 0$, ce qui signifie que $\varphi_\rho = \exp_{w_\rho}(Y_\rho)$ satisfait bien à l'équation de Floer désirée.

Notre objectif est donc de trouver un tel zéro... par la méthode de Newton-Picard. À cette fin, déterminons d'abord l'opérateur linéarisé $L_\rho^\Gamma = (dF_\rho^\Gamma)_{(\lambda_*, 0)}$. Remarquons tout d'abord que $L_\rho^\Gamma(0, \bullet)$ est, par définition,

l'opérateur $L_\rho^{\Gamma_{\lambda_*}} = (d\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_*}})_0$. Puis

$$\begin{aligned} L_\rho^\Gamma(a, 0) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} (\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_*} + a\lambda} \exp_{w_\rho}(0))_{(Z_i^\rho)_{i=1, \dots, 2n}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial s} + J_{s+\rho}^{\lambda_* + a\lambda} \frac{\partial w}{\partial t} + \text{grad}_{w_\rho} H_{s+\rho, t}^{\lambda_* + a\lambda} \right)_{(Z_i^\rho)_{i=1, \dots, 2n}} \\ &= a \left(\frac{\partial J}{\partial \lambda}(\lambda_*, s + \rho) \frac{\partial w_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{w_\rho} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda_*, s + \rho, t) \right)_{(Z_i^\rho)_{i=1, \dots, 2n}} \\ &= a(V_\rho)_{(Z_i^\rho)_{i=1, \dots, 2n}} \end{aligned}$$

où la formule définit V_ρ , champ de vecteurs le long de w_ρ . Sa forme ressemble beaucoup à celle du champ V défini dans la démonstration de la proposition 11.3.5 le long de $u \in \mathcal{M}^\Gamma(x, y)$ (ici $\Gamma = \Gamma_{\lambda_*}$). Nous omettrons dorénavant la mention du repère $(Z_i^\rho)_{i=1, \dots, 2n}$ dans l'écriture de la formule pour L_ρ^Γ .

Ces deux champs de vecteurs satisfont à la relation

$$V_\rho(s, t) = V(s + \rho, t) \quad \text{si } s \leq -1.$$

Remarquons également que, comme $\Gamma = (H^b, J^b)$ pour $s \geq R$ et $\lambda \in [0, 1]$, nous avons

$$V_\rho(s, t) = 0 \quad \text{si } s + \rho \geq R,$$

ce qui inclut le cas $s \geq 1$ et $\rho \geq R$. Nous avons finalement obtenu

$$L_\rho^\Gamma = a(V_\rho) + L_\rho^{\Gamma_{\lambda_*}}(Y).$$

En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 11.3.5, nous trouvons que L_ρ est un opérateur de Fredholm, dont nous calculons l'indice en utilisant le chemin d'opérateurs de Fredholm

$$L_{\rho, \sigma}(a, Y) = a\sigma V_\rho + L_\rho^{\Gamma_{\lambda_*}}(Y) \quad \text{pour } \sigma \in [0, 1].$$

Nous obtenons

$$\text{Ind } L_\rho^\Gamma = \text{Ind } L_{\rho, 0}^\Gamma = \text{Ind } L_\rho^{\Gamma_{\lambda_*}} + 1 = 1.$$

Rappelons que, d'après le lemme 11.3.6, l'opérateur

$$\mathcal{Y}^u : \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

défini par

$$\mathcal{Y}(a, Y) = aV + L^u(Y)$$

est de Fredholm et d'indice (calculé comme ci-dessus)

$$\text{Ind } \mathcal{Y}^u = 1 + \text{Ind } L^u = 0.$$

De plus, comme l'homotopie Γ est régulière, le lemme 11.3.6 affirme que $\mathcal{Y}^u$ est surjectif, donc $\text{Ker } \mathcal{Y}^u = 0$ et $\mathcal{Y}^u$ est bijectif.

D'autre part, l'homotopie (H^b, J^b) est également régulière, donc L^v est surjectif, donc son noyau est de dimension 1 et nous avons

$$\text{Ker } L^v = \left\{ \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_{(Z_i^v)} \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}.$$

Suivant toujours le 11.2.b, définissons, pour $\rho \geq \rho_0$, les espaces

$$W_\rho = \{0 \#_\rho \beta \mid \beta \in \text{Ker } L^v\}$$

et

$$W_\rho^\perp = \left\{ Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \mid \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle Y, Z \rangle = 0 \text{ pour tout } Z \in W_\rho \right\}.$$

Ici nous avons considéré que $W_\rho \subset L^q(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ (avec $1/p + 1/q = 1$), à l'aide du repère (Z_i^ρ) et de la décroissance exponentielle (du § 8.9 et plus précisément de la remarque 8.9.3), comme au § 9.4.

Afin d'appliquer la méthode de Newton-Picard (le lemme 9.4.4) nous devons définir un inverse à droite pour l'opérateur L_ρ^Γ . Pour ce faire, nous avons besoin de l'analogue de la proposition 9.4.7 que voici :

Proposition 11.4.2. *Il existe un $\rho_0 > 0$ et une constante $C > 0$ telle que, pour $\rho \geq \rho_0$,*

$$\forall Y \in W_\rho^\perp, \forall a \in \mathbf{R}, \quad \|L_\rho^\Gamma(a, Y)\|_{L^p} \geq C (\|Y\|_{W^{1,p}} + |a|).$$

Sur la signification de $\rho \geq \rho_0$, nous maintenons la convention de la page 295 (autrement dit, il n'est pas nécessaire de préciser ρ_0).

Démonstration. Supposons le contraire (comme au début de la démonstration de la proposition 9.4.7). Il existe alors des suites $\rho_n \rightarrow +\infty$ et $(a_n, Y_n) \in \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tels que

$$|a_n| + \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_{\rho_n}^\Gamma(a_n, Y_n)\|_{L^p} = 0.$$

Posons $r_n = \rho_n/2$. Nous avons

$$V_{\rho_n}(s, t) = 0 \quad \text{pour } (s, t) \in [-r_n, r_n] \times S^1 \text{ et } n \text{ assez grand}$$

(en général, nous avons vu que $V_\rho(s, t) = 0$ pour $s + \rho > R$, où R est la constante au delà de laquelle Γ_s est stationnaire). Nous avons donc, pour n assez grand

$$\|L_{\rho_n}^\Gamma(a_n, Y_n)\|_{L^p([-r_n, r_n] \times S^1)} = \|L_{\rho_n}^{\Gamma_{\lambda^*}} Y_n\|_{L^p([-r_n, r_n] \times S^1)}$$

et donc, en particulier, ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On peut alors utiliser le même argument que dans le lemme 9.4.9 pour démontrer le lemme suivant.

Lemme 11.4.3. *Pour tout compact K de $\mathbf{R} \times S^1$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}(K)} = 0. \quad \square$$

Ensuite, en suivant à son tour la démonstration du lemme 9.4.10, considérons la fonction réelle β^- utilisée pour fabriquer le pré-recollement w_ρ : elle est à support dans $] -\infty, 0]$ et vaut 1 sur $] -\infty, -1]$. Nous utilisons, comme pour le lemme 9.4.10,

$$\begin{aligned} & \|L_{\rho_n}^\Gamma(a_n, \beta^-(s+1)Y_n(s, t))\|_{L^p} \\ &= \|\dot{\beta}^- Y_n(s+1, t) + \beta^-(s+1)L_{\rho_n}^\Gamma(a_n, Y_n(s, t))\|_{L^p} \\ &\leq (\sup \dot{\beta}^-) \|Y_n\|_{L^p([-1, 1] \times S^1)} + \|L_{\rho_n}^\Gamma(a_n, Y_n)\|_{L^p}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_{\rho_n}^\Gamma(a_n, \beta^-(s+1)Y_n(s, t))\|_{L^p} = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{Y}^{u(s+\rho_n, t)}(a_n, \beta^-(s+1)Y_n(s, t))\|_{L^p} = 0$$

c'est-à-dire à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{Y}^u(a_n, \beta^-(s-\rho_n+1)Y_n(s-\rho_n, t))\|_{L^p} = 0.$$

Mais, nous l'avons dit, $\mathcal{Y}^u$ est un opérateur de Fredholm bijectif. Autrement dit,

– d'abord $\lim a_n = 0$ (ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 1$$

puisque la somme des deux vaut 1)

– et, dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta^-(s-\rho_n+1)Y_n(s-\rho_n, t) = 0,$$

ce qui est la première partie du résultat du lemme 9.4.10.

Obtenir la deuxième partie de ce résultat et la fin de la preuve de la proposition 11.4.2 se fait comme au §9.4. $\square$

Corollaire 11.4.4. *Pour $\rho \geq \rho_0$, L_ρ^Γ est surjective et admet un inverse à droite*

$$G_\rho : L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Démonstration. Nous avons vu que la dimension de W_ρ est 1 et il est clair que

$$W_\rho \oplus W_\rho^\perp = W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Par ailleurs la proposition 11.4.2 implique que

$$\text{Ker } L_\rho^\Gamma \cap (\mathbf{R} \times W_\rho^\perp) = \{0\},$$

donc $\dim \text{Ker } L_\rho^\Gamma \leq 1$ et donc, puisque L_ρ^Γ est d'indice 1, cet opérateur doit être surjectif et son noyau de dimension 1. D'où nous déduisons

$$\text{Ker } L_\rho^\Gamma \oplus (\mathbf{R} \times W_\rho^\perp) = \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}),$$

ce qui nous permet de définir l'inverse à droite G_ρ , dont la proposition 11.4.2 implique qu'il est continu et de norme inférieure à une constante indépendante de ρ . $\square$

Nous appliquons maintenant la méthode de Newton-Picard, c'est-à-dire le lemme 9.4.4, à l'opérateur

$$\bar{F}_\rho : \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

défini par

$$\bar{F}_\rho(\lambda, Y) = F_\rho^{\Gamma_{\lambda+\lambda_\star}}(Y).$$

Notons d'une part que

$$\bar{F}_\rho(\lambda, Y) = \begin{cases} F_\rho^{\Gamma_0}(Y) & \text{si } \lambda + \lambda_\star < 0 \\ F_\rho^{\Gamma_1}(Y) & \text{si } \lambda + \lambda_\star > 1, \end{cases}$$

et d'autre part que notre opérateur L_ρ^Γ est exactement la différentielle en 0 de $\bar{F}_\rho$ (raison pour laquelle nous avons modifié F_ρ^Γ par la translation de $\lambda_\star$).

Vérifions maintenant que les hypothèses du lemme 9.4.4 sont satisfaites. L'hypothèse (1) est exactement la conclusion du corollaire 11.4.4.

Vérifions l'hypothèse (3). Avec la constante C donnée par la proposition 11.4.2, nous avons d'abord

$$\|G_\rho(\bar{F}_\rho(0, 0))\|_{W^{1,p}} \leq C^{-1} \|\bar{F}_\rho(0, 0)\|_{L^p},$$

puis

$$\|\bar{F}_\rho(0, 0)\|_{L^p} = \|F_\rho^{\Gamma_{\lambda_\star}}(0)\|_{L^p} = \|(\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_\star}}(w_\rho))_{(Z_i^p)}\|_{L^p},$$

où $\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_\star}}$ est l'opérateur de Floer

$$\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_\star}} = \frac{\partial}{\partial s} + J_{s+\rho}^{\Gamma_{\lambda_\star}} \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H_{s+\rho, t}^{\lambda_\star}.$$

Or $\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_\star}}(w_\rho)(s, t) = 0$ pour $|s| \geq 1$ et $\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_\star}}(w_\rho)$ tend vers 0 uniformément sur $[-1, 1] \times S^1$, ce qui implique que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \|\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda_\star}}(w_\rho)\|_{L^p} = 0 \text{ et donc que } \lim_{\rho \rightarrow 0} \|\bar{F}_\rho(0, 0)\|_{L^p} = 0.$$

Et ceci implique que l'hypothèse (3) du lemme 9.4.4 est satisfaite.

L'hypothèse (2) se vérifie comme au §9.4 (lorsque nous avons vérifié l'hypothèse (2) du lemme page 305), en utilisant la proposition 11.4.2, à cela près qu'il est nécessaire d'adapter le lemme 9.4.8 ainsi :

Lemme 11.4.5. *Soit $r_0 > 0$. Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $\rho \geq \rho_0$ et pour tous $(\lambda, Z) \in \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ (avec $\|Z\| \leq r_0$), on ait*

$$\|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)}\|^{\text{op}} \leq K(\|Z\|_{W^{1,p}} + |\lambda|).$$

La démonstration de cette version se trouve au §13.8.

La méthode de Newton-Picard (le lemme 9.4.4) nous produit alors un couple $(\bar{\lambda}_\rho, \gamma_\rho)$ tel que

$$\bar{F}_\rho(\bar{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) = 0,$$

ce qui, par définition de $\bar{F}_\rho$, équivaut à

$$F_\rho^\Gamma(\bar{\lambda}_\rho + \lambda_\star, \gamma_\rho) = 0.$$

Ainsi, $\varphi_\rho = \exp_{w_\rho} \gamma_\rho$ est solution de l'équation

$$\mathcal{F}_\rho^{\lambda_\rho}(\cdot) = 0 \quad (\text{avec } \lambda_\rho = \bar{\lambda}_\rho + \lambda_\star).$$

Dans notre division en trois parties de la démonstration du théorème 11.3.14 (page 400), la construction de ce φ nous a amenés à la fin de la deuxième partie. Nous posons

$$\psi_\rho(s, t) = \varphi_\rho(s - \rho, t)$$

et obtenons le fait que

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial s} + J_s^{\lambda_\rho} \frac{\partial \psi_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{\psi_\rho} H_{s,t}^{\lambda_\rho} = 0,$$

c'est-à-dire que $(\lambda_\rho, \psi_\rho) \in \mathcal{M}^\Gamma(x, z)$. Nous définissons

$$\begin{aligned} \psi : [\rho_0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{M}^\Gamma(x, z) \\ \rho &\longmapsto (\lambda_\rho, \psi_\rho) \end{aligned}$$

et il nous reste (troisième et dernière partie de la démonstration du théorème 11.3.14 d'après le plan établi page 400), à établir les propriétés désirées de ψ .

11.4.c. Les propriétés de ψ . Comme dans le lemme 9.4.13, nous obtenons

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \bar{\lambda}_\rho = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma_\rho\|_{W^{1,p}} = 0.$$

La première égalité implique que $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \lambda_\rho = \lambda_\star$. En utilisant la deuxième, nous raisonnons comme aux §9.4 et 11.2.c pour montrer que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s - \rho, t) = u(s, t) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi_\rho(s + \rho, t) = v(s, t)$$

dans la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$. Il s'ensuit que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \psi(\rho) = [(\lambda_\star, u), \widehat{v}]$$

pour la convergence définie par le théorème 11.3.10.

Montrons maintenant que l'application ψ est (continue et) dérivable. Il s'agit de démontrer ces propriétés pour l'application $\rho \mapsto (\lambda_\rho, \gamma_\rho)$ et ceci se fait à l'aide du théorème des fonctions implicites, comme au §9.4. Il faut montrer que, pour ρ assez grand, l'opérateur $(d\overline{F}_\rho)_{(\overline{\lambda}_\rho, \gamma_\rho)}$ est inversible, ce qui se fait exactement comme dans la démonstration du lemme 9.4.14, en utilisant le lemme 11.4.5.

Montrons maintenant que ψ est un plongement. Nous aurons besoin du résultat que nous énonçons ici, analogue de la proposition 9.4.15 et du théorème 11.2.2 (3).

Proposition 11.4.6.

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial \rho} = 0.$$

Démonstration. Comme $\lambda_\rho = \lambda_\star + \overline{\lambda}_\rho$, la deuxième relation équivaut à $\partial \overline{\lambda}_\rho / \partial \rho = 0$. Notons

$$\tilde{F}(\rho, \lambda, Y) = \overline{F}_\rho(\lambda, Y)$$

de sorte que

$$\tilde{F}(\rho, \overline{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) = 0.$$

Dérivons cette identité par rapport à ρ pour obtenir

$$\frac{\partial \overline{F}_\rho}{\partial \rho}(\overline{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) + (d\overline{F}_\rho)_{(\overline{\lambda}_\rho, \gamma_\rho)} \left(\frac{\partial \overline{\lambda}_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho} \right) = 0.$$

Cette relation implique, comme dans la démonstration de la proposition 9.4.15,

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\partial \overline{\lambda}_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho} \right) \right\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}} &\leq k_1 \left\| (\overline{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) \right\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}} \left\| \left(\frac{\overline{\lambda}_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho} \right) \right\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}} \\ &\quad + k_2 \left\| \frac{\partial \overline{F}_\rho}{\partial \rho}(\overline{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) \right\|_{L^p} \end{aligned}$$

pour des constantes k_1 et k_2 positives et indépendantes de ρ . Nous utilisons :

Lemme 11.4.7. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ρ telle que, pour $\rho \geq \rho_0$, on ait*

$$\left\| \frac{\partial \overline{F}_\rho}{\partial \rho}(\overline{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) - \frac{\partial \overline{F}_\rho}{\partial \rho}(0, 0) \right\|_{L^p} \leq C \left\| (\overline{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) \right\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}}.$$

La démonstration de ce lemme se trouve bien sûr, comme ses semblables, au § 13.8.

En utilisant ce lemme 11.4.7 dans l'inégalité qui en précède l'énoncé, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho} \right) \right\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}} \left(1 - k_1 \|(\bar{\lambda}_\rho, \gamma_\rho)\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}} \right) \\ \leq k_2 C \|(\bar{\lambda}_\rho, \gamma_\rho)\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}} + \left\| \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho}(0, 0) \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Le dernier terme est

$$\left\| \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho}(0, 0) \right\|_{L^p} = \left\| \left(\frac{\partial \mathcal{F}_\rho^{\lambda_\star}}{\partial \rho}(w_\rho) \right)_{Z_i^\rho} \right\|_{L^p}$$

et il tend vers 0 lorsque ρ tend vers $+\infty$ exactement comme dans la démonstration de la proposition 9.4.15. Notre inégalité implique alors, en utilisant le fait que $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|(\bar{\lambda}_\rho, \gamma_\rho)\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}} = 0$, l'égalité

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho} \right) \right\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}} = 0.$$

Et ceci achève la démonstration de la proposition 11.4.6. $\square$

Pour terminer de démontrer les propriétés de ψ , il reste à montrer que c'est bien un plongement et, pour ce faire, il suffit de montrer que c'est une immersion (d'après un argument déjà utilisé au 11.2.c). Mais, si $\psi'_\rho = 0$, alors, comme dans le § 11.2.c, nous devons avoir

$$\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial s}$$

(puisque $\psi_\rho(s, t) = \varphi_\rho(s - \rho, t)$). La contradiction espérée suit par la méthode du § 9.5 (pour $\alpha_n = 1$), en utilisant la proposition 11.4.6.

Il reste à démontrer la dernière partie du théorème 11.3.14, l'« unicité », à savoir le fait qu'une suite $[\lambda_n, \ell_n]$ d'éléments de $\mathcal{M}^\Gamma(x, z)$ qui tend vers $[(\lambda_\star, u), \widehat{v}]$ a la propriété d'être contenue dans l'image de ψ pour n assez grand.

Pour ce faire, nous avons besoin des résultats analogues à ceux contenus dans les propositions 11.2.3 et 11.2.4 :

Proposition 11.4.8. *Il existe une suite réelle (ρ_n) tendant vers $+\infty$ et, pour tout u , un vecteur $Y_n \in w_{\rho_n}^\star TW$ tels que, pour tous $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$,*

$$\ell_n(s + \rho_n, t) = \exp_{w_{\rho_n}(s, t)} Y_n(s, t).$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{L^\infty} = 0$.

Proposition 11.4.9. *Le champ Y_n est dans $W^{1,p}(w_{\rho_n}^* TW)$ et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 0.$$

La démonstration de la proposition 11.4.8 est en tous points analogue à celle de la proposition 11.2.3. Elle utilise le fait que ℓ_n est dans l'espace de solutions $\mathcal{M}^{\Gamma_{\lambda_n}}(x, z)$ pour une homotopie $\Gamma_{\lambda_n} = (H_{s,t}^{\lambda_n}, J_s^{\lambda_n})$ qui est stationnaire pour $s \leq -R$ et pour $s \geq R$, ainsi que la convergence de ℓ_n vers $(u, \widehat{v})$ (au sens du théorème 11.1.10), cette dernière découlant de la convergence de $[\lambda_n, \ell_n]$ vers $[\lambda_*, (u, \widehat{v})]$.

La démonstration de la proposition 11.4.9 se fait comme celle de la proposition 11.2.4, à ceci près que la formule de Taylor utilisée dans la démonstration (page 473) s'écrit dans ce nouveau contexte

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_*}}(Y_n) = \widetilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_*}}(0) + (d\widetilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_*}})_0(Y_n) + \mathcal{N}(Y_n).$$

Le membre de gauche ne s'annule pas puisque

$$\ell_n = \exp_{w_{\rho_n}}(Y_n) \in \mathcal{M}^{\Gamma_{\lambda_n}}(x, z)$$

(autrement dit nous avons l'égalité $\widetilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_n}}(Y_n) = 0$, pour λ_n et pas λ_*). Pour compléter la preuve, il faudra majorer comme suit :

Lemme 11.4.10. *Il existe des constantes positives C et k , indépendantes de n , telles que*

$$\|\widetilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_*}}(Y_n)\|_{L^p} \leq C |\lambda_n - \lambda_*| \|Y_n\|_{W^{1,p}} + k |\lambda_n - \lambda_*|.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_*}}(Y_n)\|_{L^p} &= \|\widetilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_*}}(Y_n) - \widetilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_n}}(Y_n)\|_{L^p} \\ &\leq |\lambda_n - \lambda_*| \left\| \sup_{\lambda} \frac{\partial \widetilde{\mathcal{F}}}{\partial \lambda}(\lambda, Y_n) \right\|_{L^p} \\ &= |\lambda_n - \lambda_*| \left\| \sup_{\lambda} \widetilde{V}_{\rho_n}(\lambda, Y_n) \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Puis, en appliquant le lemme 13.8.1,

$$\left\| \sup_{\lambda} \widetilde{V}_{\rho_n}(\lambda, Y_n) \right\|_{L^p} \leq C \|Y_n\|_{W^{1,p}} + \left\| \sup_{\lambda} \widetilde{V}_{\rho_n}(\lambda, 0) \right\|_{L^p}.$$

Comme, par définition,

$$\widetilde{V}_{\rho_n}(\lambda, 0) = \frac{\partial J}{\partial \lambda}(\lambda, s + \rho_n) \frac{\partial w_{\rho_n}}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, s + \rho_n, t),$$

$\widetilde{V}_{\rho_n}(\lambda, 0)$ est borné en norme infinie. Son support est $[-R - \rho_n, R - \rho_n] \times S^1$.

Il s'ensuit que

$$\|\widetilde{V}_{\rho_n}(\lambda, 0)\|_{L^p} \leq k.$$

Et le lemme est démontré. $\square$

À l'aide de ce lemme et de l'analogue du lemme 13.7.1 pour $\tilde{\mathcal{F}}^{\Gamma_{\lambda_*}}$, la proposition 11.4.9 se démontre comme au §11.2, en utilisant le fait que $\lim \lambda_n = \lambda_*$.

La fin de la démonstration de la propriété d'unicité se fait en appliquant les lemmes 9.6.16 et 9.6.17 à l'opérateur

$$\overline{F}_\rho : \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

et en procédant exactement comme au §11.2.c.

La démonstration du théorème 11.3.14 est ainsi terminée. $\square$

Ainsi que celle de la proposition 11.2.8. $\square$

11.5. Fin de la preuve de l'invariance de l'homologie de Floer : démonstration de la proposition 11.2.9

Soient $\Gamma' = (H', J')$ et $\Gamma'' = (H'', J'')$ deux homotopies régulières joignant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) pour la première et (H^b, J^b) à (H^c, J^c) pour la deuxième. Comme dans les sections précédentes de ce chapitre, ces homotopies sont choisies stationnaires pour $|s| \geq R$, où $R > 0$ est une constante qui n'est pas fixée une fois pour toutes (elle pourra augmenter au cours de la démonstration).

La concaténation de Γ' et Γ'' définit une homotopie $\Gamma_\rho = (H_\rho, J_\rho)$ par les formules

$$H_\rho(s, t, p) = \begin{cases} H'(s + \rho, t, p) & \text{si } s \leq 0 \\ H''(s - \rho, t, p) & \text{si } s \geq 0 \end{cases}$$

$$J_\rho(s, p) = \begin{cases} J'(s + \rho, p) & \text{si } s \leq 0 \\ J''(s - \rho, p) & \text{si } s \geq 0. \end{cases}$$

L'homotopie Γ_ρ est définie pour ρ assez grand ($\rho > R$) et elle joint (H^a, J^a) à (H^c, J^c) . Elle est stationnaire pour $|s| \geq R + \rho$. Remarquons qu'*a priori*, elle pourrait ne pas être régulière. Nous démontrons :

Lemme 11.5.1. *Après une petite perturbation de Γ' et Γ'' (parmi les homotopies régulières), on pourra supposer que Γ_ρ est régulière pour des valeurs arbitrairement grandes de ρ .*

Il existe donc une suite ρ_n tendant vers l'infini et telle que Γ_{ρ_n} est régulière pour tout n .

Pour ces valeurs de ρ , on pourra définir le morphisme de complexes

$$\Phi^{\Gamma_\rho} : CF_\star(H^a, J^a) \longrightarrow CF_\star(H^c, J^c)$$

du §11.1.

Notons que, par la proposition 11.2.8, les perturbations de Γ' , Γ'' du lemme 11.5.1 définissent les mêmes morphismes que $\Phi^{\Gamma'}$ et $\Phi^{\Gamma''}$ respectivement au niveau de l'homologie. Nous garderons donc la même notation Γ' , Γ'' pour ces homotopies.

La proposition 11.2.9 est évidemment une conséquence de :

Proposition 11.5.2. *Il existe ρ tel que Γ_ρ soit régulière et tel que les morphismes de complexes $\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'}$ et Φ^{Γ_ρ} coïncident.*

Démonstration du lemme 11.5.1. Considérons l'espace $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$ défini au § 11.1.b. Notons $\mathcal{C}_{\varepsilon,0}^\infty$ le sous-espace formé des fonctions

$$h : \mathbf{R} \times S^1 \times W \longrightarrow \mathbf{R}$$

telles que $h(s, t, p) = 0$ pour $|s| < \delta$, δ étant un nombre positif quelconque. Fixons un ρ_1 assez grand pour que Γ_{ρ_1} soit définie. À une fonction $h \in \mathcal{C}_{\varepsilon,0}^\infty$ sont associées deux fonctions h' et $h'' \in \mathcal{C}_\varepsilon^\infty$, définies par les formules

$$h'(s, t, p) = \begin{cases} h(s - \rho_1, t, p) & \text{si } s \leq \rho_1 \\ 0 & \text{si } s \geq \rho_1 \end{cases}$$

$$h''(s, t, p) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -\rho_1 \\ h(s + \rho_1, t, p) & \text{si } s \geq -\rho_1 \end{cases}$$

de sorte que l'homotopie Γ_{ρ_1} définie par $(H' + h', J')$ et $(H'' + h'', J'')$ est exactement $(H_{\rho_1} + h, J_{\rho_1})$. Ce qui fait que, pour rendre Γ_{ρ_1} régulière, il suffit de refaire la démonstration de la transversalité du § 11.1.b pour l'espace de perturbations (plus petit) qu'est $\mathcal{C}_{\varepsilon,0}^\infty$. La seule petite modification apparaît dans la démonstration du lemme (analogue à) 11.1.9. Si le champ Z n'est pas nul, alors il existe un point $(s_0, t_0) \in (\mathbf{R} - \{0\}) \times S^1$ tel que $Z(s_0, t_0) \neq 0$. Le reste de la démonstration est identique.

On peut ensuite refaire cette démonstration pour un $\rho_2 > \rho_1$, en choisissant des perturbations h' et h'' assez petites pour que Γ_{ρ_1} reste régulière, alors Γ_{ρ_1} et Γ_{ρ_2} seront régulières. De façon analogue, on construit ainsi une suite ρ_n tendant vers l'infini et telle que Γ_{ρ_n} soit régulière pour tout n . $\square$

Démonstration de la proposition 11.5.2. Soit $x \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^a})$. On a, avec les notations du § 11.1.c,

$$\begin{aligned} \Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'}(x) &= \Phi^{\Gamma''} \left(\sum_{\substack{y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b}) \\ \mu(y) = \mu(x)}} n^{\Gamma'}(x, y) \cdot y \right) \\ &= \sum_{\substack{z \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^c}) \\ \mu(z) = \mu(x)}} \sum_{\substack{y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b}) \\ \mu(y) = \mu(x)}} n^{\Gamma'}(x, y) n^{\Gamma''}(y, z) \cdot z. \end{aligned}$$

Ici, comme au § 11.1, $n^{\Gamma'}(x, y)$ et $n^{\Gamma''}(y, z)$ sont les nombres (modulo 2) d'éléments dans $\mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y)$, $\mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z)$ respectivement. Il est bien clair que la proposition 11.5.2 découle de la suivante. $\square$

Proposition 11.5.3. *Soient $x \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^a})$ et $z \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^c})$ tels que $\mu(x) = \mu(z)$. Pour tout ρ assez grand, les ensembles*

$$\bigcup_{\substack{y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b}) \\ \mu(y) = \mu(x)}} \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y) \times \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{\Gamma_\rho}(x, z)$$

sont en bijection.

Nous allons donc maintenant démontrer la proposition 11.5.3. Voici les idées de la démonstration. Elle revient (et ce n'est pas surprenant) à

- (1) définir, pour ρ assez grand, une application

$$\chi_\rho : \bigcup_{\substack{y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b}) \\ \mu(y) = \mu(x)}} \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y) \times \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z) \longrightarrow \mathcal{M}^{\Gamma_\rho}(x, z),$$

- (2) montrer qu'elle est injective pour ρ assez grand,
- (3) montrer qu'elle est surjective pour ρ assez grand.

Pour définir $\chi_\rho(u, v)$ pour un couple $(u, v) \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y) \times \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z)$, on utilise un procédé de recollement, comme aux §§ 9.4 et 11.3.d : à partir d'un pré-recollement $w_\rho = u \#_\rho v$, on fabrique une solution $\varphi(\rho) \in \mathcal{M}^{\Gamma_\rho}$ par la méthode de Newton-Picard.

Comme pour les autres solutions de Floer obtenues par cette méthode, on obtiendra que φ_ρ tend vers (u, v) (au sens de la convergence vers les orbites brisées) quand ρ tend vers l'infini. Voir le § 11.1.c.

Pour démontrer l'injectivité de φ , nous procédons par réduction à l'absurde. S'il n'est pas vrai que χ_ρ est injective à partir d'une certaine valeur de ρ , il existe une suite ρ_n tendant vers l'infini et des couples $(u_n, v_n) \neq (u'_n, v'_n)$ tels que $\chi_{\rho_n}(u_n, v_n) = \chi_{\rho_n}(u'_n, v'_n)$. Comme les suites (u_n, v_n) prennent leurs valeurs dans un ensemble fini, en en extrayant si nécessaire des sous-suites, on peut supposer qu'elles sont constantes, disons égales à (u, v) et (u', v') . En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité

$$\chi_{\rho_n}(u, v) = \chi_{\rho_n}(u', v'),$$

on trouve que $(u, v) = (u', v')$, une contradiction.

Pour la surjectivité de χ_ρ , le raisonnement est du même type. Si, pour une suite ρ_n tendant vers l'infini, il existe ℓ_n qui n'est pas dans l'image de χ_{ρ_n} , on montre d'abord que $\lim \ell_n = (u, v)$ pour un certain couple $(u, v) \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y) \times \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z)$ ($y \in \text{Crit} \mathcal{A}_{H^b}$, $\mu(y) = \mu(x)$). Puis on applique une

propriété d'unicité du recollement (comme celle du §9.6) pour montrer que $\ell_n \in \text{Im } \chi_n$ pour n grand et aboutir à une contradiction.

Voici maintenant les détails de cette démonstration.

11.5.a. Définition de χ . Soit $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$ tel que $\mu(y) = \mu(x)$. Considérons un couple $(u, v) \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y) \times \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z)$. Le pré-recollement w_ρ de u et v est défini par la même formule qu'au §9.3. Comme $w_\rho(s, t) = u(s + \rho, t)$ pour $s \leq -1$ et $w_\rho(s, t) = v(s - \rho, t)$ pour $s \geq 1$, la définition de $\Gamma_\rho = (H_\rho, J_\rho)$ implique que

$$\left(\frac{\partial w_\rho}{\partial s} + J_\rho \frac{\partial w_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{w_\rho} H_\rho \right)(s, t) = 0 \quad \text{pour } |s| \geq 1.$$

Cette expression tend vers 0 lorsque ρ tend vers $+\infty$ en norme $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ (et dont aussi en norme L^p). En effet,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} w_\rho(s, t) = y(t) \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (H_\rho, J_\rho) = (H^b, J^b)$$

(en norme $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ dans les deux cas).

La solution $\varphi(\rho) \in \mathcal{M}^{\Gamma_\rho}(x, z)$ sera obtenue à partir de la solution approchée w_ρ par une formule du type

$$\varphi(\rho) = \exp_{w_\rho}(\gamma_\rho).$$

C'est donc un zéro de

$$Y \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial s} + J_\rho \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H_\rho \right)(\exp_{w_\rho} Y).$$

À l'aide de repères (Z_i^ρ) construits (à la source et au but de $\mathcal{F}_\rho$) exactement comme au §9.4, on peut considérer $\mathcal{F}_\rho$ comme une application

$$\mathcal{F}_\rho : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

L'opérateur linéarisé $L_\rho = (d\mathcal{F}_\rho)_0$ est de la forme

$$Y \mapsto \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S_\rho \cdot Y,$$

où S_ρ est une application de $\mathbf{R} \times S^1$ dans $M_{2n}(\mathbf{R})$. C'est un opérateur de Fredholm d'indice 0 puisque $\mu(x) = \mu(z)$.

L'analogie de la proposition 11.2.1, qui se démontre de façon identique, implique alors que L_ρ est bijective, avec un inverse

$$G_\rho : L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

dont la norme est bornée par une constante indépendante de ρ . Les conditions d'application de la méthode de Newton-Picard (lemme 9.4.4) sont réunies; l'estimation analogue à celle contenue dans le lemme 9.4.8, qui permet de vérifier l'hypothèse (2) de 9.4.4, se démontre elle aussi de façon identique.

On obtient ainsi un $\gamma_\rho \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ tel que

$$\varphi(\rho) = \exp_{w_\rho} \gamma_\rho \in \mathcal{M}^{\Gamma_\rho}(x, z).$$

On peut donc définir $\chi_\rho(u, v) = \varphi(\rho)$. Et l'on obtient, comme dans le lemme 9.4.13,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma_\rho\|_{W^{1,p}} = 0.$$

Ce qui implique, exactement comme au §9.4 :

Proposition 11.5.4. *L'élément $\varphi(\rho)$ vérifie*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi(\rho)(s - \rho, t) = u(s, t), \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \varphi(\rho)(s + \rho, t) = v(s, t)$$

dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$. □

11.5.b. Injectivité de χ . Supposons que χ ne soit pas injective, c'est-à-dire qu'il existe des ρ arbitrairement grands pour lesquels χ_ρ n'est pas injective. Soient donc trois suites $\rho_n, (u_n, v_n)$, avec

$$(u_n, v_n) \text{ et } (u'_n, v'_n) \in \bigcup_{\substack{y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H^b}) \\ \mu(y) = \mu(x)}} \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y) \times \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = +\infty, \quad (u_n, v_n) \neq (u'_n, v'_n), \quad \chi_{\rho_n}(u_n, v_n) = \chi_{\rho_n}(u'_n, v'_n).$$

Les suites (u_n, v_n) et (u'_n, v'_n) prennent leurs valeurs dans un ensemble fini, on peut donc supposer, quitte à en extraire des sous-suites, qu'elles sont constantes, égales disons à (u, v) , respectivement (u', v') , avec

$$(u, v) \neq (u', v') \quad \text{et} \quad \chi_{\rho_n}(u, v) = \chi_{\rho_n}(u', v').$$

En utilisant la proposition 11.5.4, on obtient

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\chi_{\rho_n}(u, v))(s - \rho_n, t) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\chi_{\rho_n}(u', v'))(s - \rho_n, t) \\ &= u'(s, t) \end{aligned}$$

et de même $v(s, t) = v'(s, t)$. D'où l'injectivité de χ_ρ .

11.5.c. La surjectivité de χ . Supposons (toujours en raisonnant par l'absurde) que, pour des valeurs arbitrairement grandes de ρ , χ_ρ ne soit pas surjective. Considérons une suite (ρ_n) tendant vers l'infini et une suite d'éléments $\ell_n \in \mathcal{M}^{\Gamma_{\rho_n}}(x, z)$ telle que $\ell_n \notin \text{Im}(\chi_{\rho_n})$ (pour tout n). Nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 11.5.5. *Il existe $y \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$, avec $\mu(y) = \mu(x)$ et*

$$(u, v) \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y) \times \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z)$$

tels que, à extraction près d'une sous-suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s - \rho_n, t) = u(s, t) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \rho_n, t) = v(s, t)$$

pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$.

Pour la démonstration, nous avons besoin du résultat :

Proposition 11.5.6.

(1) *Soit (s_n) une suite de nombres réels. Alors la suite $\ell_n(s + s_n, t)$ admet une sous-suite convergente dans la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$.*

(2) *Soit ℓ la limite d'une telle sous-suite. Il existe une constante $s_\star$ telle que $\ell(s + s_\star, t)$ soit solution de l'équation de Floer correspondant à l'un des couples (H^a, J^a) , (H', J') , (H^b, J^b) , (H'', J'') , (H^c, J^c) .*

Démonstration de la proposition 11.5.6. Démontrons d'abord le point (2), en supposant le point (1) démontré. L'application $(s, t) \mapsto \ell_n(s + s_n, t)$ est solution de l'équation de Floer correspondant au couple

$$(H_n, J_n) = (H_{\rho_n}(s + s_n, t, p), J_{\rho_n}(s + s_n, p)).$$

Rappelons que, par définition, H_n et J_n sont donnés par :

$$H_n(s, t, p) = \begin{cases} H'(s + \rho_n + s_n, t, p) & \text{si } s \leq -s_n \\ H''(s - \rho_n + s_n, t, p) & \text{si } s \geq -s_n \end{cases}$$

$$J_n(s, p) = \begin{cases} J'(s + \rho_n + s_n, p) & \text{si } s \leq -s_n \\ J''(s - \rho_n + s_n, p) & \text{si } s \geq -s_n. \end{cases}$$

Analysons les différentes limites possibles (pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$) de (H_n, J_n) en fonction du comportement de la suite (s_n) .

Dans la cas particulier où $s_n = -\rho_n$, il est évident que (H_n, J_n) tend vers (H', J') . De même, lorsque $s_n = \rho_n$, (H_n, J_n) tend vers (H'', J'') . La limite ℓ sera donc une solution de l'équation de Floer correspondant à $\Gamma' = (H', J')$ dans le premier cas et à $\Gamma'' = (H'', J'')$ dans le deuxième.

Comme l'énoncé de (2) permet d'ajouter une suite convergente à (s_n) , il reste à analyser les cas où les suites $(s_n \pm \rho_n)$ sont divergentes :

– si $\lim(s_n + \rho_n) = -\infty$, c'est-à-dire si $s_n \ll -\rho_n$, on obtient facilement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n, J_n) = (H^a, J^a),$$

– si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n + \rho_n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - \rho_n) = -\infty$ (autrement dit si $-\rho_n \ll s_n \ll \rho_n$, en analysant séparément les cas où (s_n) tend vers $-\infty$, est convergente ou tend vers $+\infty$, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n, J_n) = (H^b, J^b),$$

– si $\lim (s_n - \rho_n) = +\infty$, c'est-à-dire si $s_n \gg \rho_n$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n, J_n) = (H^c, J^c).$$

Nous avons ainsi démontré le point (2), passons maintenant au point (1). On reproduit tout d'abord la démonstration de la proposition 6.6.2 (borne sur le gradient dans la démonstration du théorème de compacité) pour démontrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall \rho, \forall \ell \in \mathcal{M}^{\Gamma_\rho}(x, z), \forall (s, t) \in \mathbf{R} \times S^1, \quad \|\text{grad}_{(s,t)} \ell\| \leq A$$

(ici, $\|\cdot\|$ désigne n'importe quelle norme sur TW — elles sont toutes équivalentes puisque W est compacte — par exemple celle venant de $\mathbf{R}^m$).

Si une telle constante n'existait pas, on obtiendrait, comme dans la démonstration de la proposition 6.6.2, une courbe J -holomorphe v , ce qui conduirait à une contradiction comme dans le lemme 6.6.4. La structure J dont il est question ici est la limite (pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$) d'une suite J_{ρ_n} , elle est donc, soit égale à $J_{\rho_\star}$ pour un $\rho_\star > 0$ (et dans ce cas dépend de s), soit égale à J^b . L'inégalité ci-dessus est donc satisfaite par ℓ_n pour tout n et également par les éléments de la suite $(\ell_n(s + s_n, t))$. Ces derniers forment une famille continue, ce qui permet d'appliquer le théorème d'Ascoli et de trouver une sous-suite qui converge pour la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ vers une limite ℓ .

Le point (2) montre alors qu'il existe une constante $s_\star \in \mathbf{R}$ telle que $\ell(s + s_\star)$ soit solution, au sens faible, d'une des équations de Floer énumérées dans l'énoncé de la proposition. La régularité elliptique (le lemme 12.1.1) implique alors que ℓ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que la convergence de $\ell_n(s + s_n, t)$ vers ℓ a bien lieu au sens $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$.

La démonstration de la proposition 11.5.6 est ainsi terminée. $\square$

Pour finir de démontrer la proposition 11.5.5, nous utiliserons un argument de convergence vers une orbite brisée analogue à celui qui nous a déjà servi au §9.1.c. Plus précisément, une démonstration analogue à celle du théorème 9.1.7 donne l'existence de suites (s_n^k) pour $0 \leq k \leq m$, telles que — à extraction près d'une sous-suite — pour tout k , la suite $\ell_n(s + s_n^k, t)$ converge vers une limite $\ell \in \mathcal{C}^\infty(x_k, x_{k+1})$ où $x_0 = x$ et $x_{m+1} = z$. L'énoncé (2) de la proposition 11.5.6 montre que, quitte à changer les suites $(s_n^k)_n$ en leur ajoutant des constantes, les limites ℓ^k sont des

solutions des équations de Floer correspondant à un des couples (H^a, J^a) , (H', J') , (H^b, J^b) , (H'', J'') , (H^c, J^c) . Les lacets x_k sont donc des points critiques de $\mathcal{A}_{H^a}$, $\mathcal{A}_{H^b}$ ou $\mathcal{A}_{H^c}$.

D'autre part, s'il existe une limite ℓ_k qui est une solution non constante en s de l'équation de Floer associée à (H^a, J^a) , (H^b, J^b) ou (H^c, J^c) , on déduit que $\mu(x_k) - \mu(x_{k+1}) \geq 1$ (comme dans le corollaire 11.1.11) et donc que $\mu(x) - \mu(z) \geq 1$, contrairement à l'hypothèse faite ($\mu(x) = \mu(z)$).

Remarque 11.5.7. Il faut remarquer ici que l'on ne peut pas écarter d'éventuelles solutions de l'équation de Floer qui seraient constantes par rapport à s , puisqu'on ne peut pas exclure le cas où l'une des homotopies Γ' , Γ'' ou Γ_ρ est triviale.

Il se pourrait aussi qu'il y ait une égalité entre des couples (H^a, J^a) , (H^b, J^b) , (H^c, J^c) (sans que l'homotopie joignant deux couples identiques soit nécessairement triviale). Cela force à considérer des cas d'égalité entre x , y et z .

Revenons à notre démonstration. Supposons que, parmi les limites $\ell^1, \dots, \ell^m$, il y en ait une, disons ℓ^k , qui ne soit pas constante en s . D'après la démonstration du point (2) de la proposition 11.5.6, on peut supposer (quitte à ajouter une constante à la suite $(s_n^k)_n$) que ℓ^k est solution de l'équation de Floer associée à Γ' ou Γ'' , et que $s_n^k = -\rho_n$ ou $s_n^k = \rho_n$. D'autre part, la démonstration du théorème 9.1.7 donne des suites s_n^k qui ont la propriété

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^{k+1} - s_n^k = +\infty.$$

Il y a donc au plus deux limites ℓ^k comme ci-dessus, une pour $s_n^k = -\rho_n$, l'autre pour $s_n^k = \rho_n$: en effet, de telles suites devraient (d'après l'énoncé (2) de la proposition 11.5.6) différer de $-\rho_n$ ou de ρ_n par des suites bornées (rappelons qu'il n'existe pas de ℓ^k non-constante en s , solution de Floer associée à (H^a, J^a) , (H^b, J^b) ou (H^c, J^c)).

Donc la trajectoire brisée vers laquelle converge la suite ℓ_n est composée de solutions de l'équation de Floer constantes en s et d'au plus une trajectoire associée à Γ' (pour la suite $s_n = -\rho_n$) d'une associée à Γ'' (pour $s_n = \rho_n$). Toujours grâce à la proposition 11.5.6, si

$$u = \lim_{s \rightarrow +\infty} \ell_n(s - \rho_n, t) \quad \text{et} \quad v = \lim_{s \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \rho_n, t),$$

alors

$$u \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x', y') \quad \text{et} \quad v \in \mathcal{M}^{\Gamma''}(y'', z'')$$

pour

$$x \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}, \quad y', y'' \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}, \quad z'' \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^c}.$$

Nous voulons montrer que $x' = x$, $y' = y''$ et $z'' = z$.

Si, dans la trajectoire brisée qui est la limite de ℓ_n , il y a deux trajectoires $\ell' \in \mathcal{C}^\infty(x, y)$ et $\ell'' \in \mathcal{C}^\infty(y, z)$, non constantes en s , alors, d'après ce qui précède, $\ell' = u$ et $\ell'' = v$, donc

$$u \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y) \quad \text{et} \quad v \in \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z),$$

ce qui finit la démonstration (comme il ne peut y avoir plus de deux trajectoires non constantes en s , le point d'arrivée de ℓ' coïncide avec le point de départ de ℓ'').

Supposons maintenant qu'il n'y ait qu'une trajectoire de Floer non constante $\ell \in \mathcal{C}^\infty(x, z)$ dans la limite de ℓ_n . Cette trajectoire ℓ est donc égale à u ou à v . Supposons, sans restreindre la généralité, que $\ell = u$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s - \rho_n, t) = u \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, z).$$

Avec les notations de la démonstration du théorème 9.1.7 sur les trajectoires brisées, il existe $s^* \in \mathbf{R}$ tel que le lacet $u(s, \cdot) \in B(z, \varepsilon)$ pour $s > s^*$ et par conséquent le lacet $\ell_n(s^* - \rho_n, \cdot)$ est lui aussi dans la boule $B(z, \varepsilon)$ pour n assez grand.

La démonstration du théorème 9.1.7 implique alors que $\ell_n(s, \cdot) \in B(z, \varepsilon)$ pour tout $s > s^* - \rho_n$. Autrement, il y aurait une autre trajectoire non constante dans la limite (construite comme dans cette démonstration). Cela implique que, pour $v(s, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \rho_n, t)$, $v \in \mathcal{M}^{\Gamma''}(z, z)$ (en fait, cette trajectoire est constante égale à z si l'on choisit ε assez petit). Ceci termine la démonstration de la proposition 11.5.5 dans ce cas aussi.

Remarque 11.5.8. La difficulté vient ici du fait que la seule définition de la convergence vers une trajectoire brisée, telle que donnée dans l'énoncé du théorème 9.1.7, ne garantit pas ici une limite unique⁽²⁾. Il faut donc ici faire appel à la démonstration de ce théorème pour construire la limite $(\ell^1, \dots, \ell^m)$ considérée ici.

Enfin, si toutes les trajectoires dans la limite de ℓ_n sont constantes, dans $\mathcal{C}^\infty(x, z)$ (en particulier, alors, $x = z$), la démonstration du théorème 9.1.7 dit que $\ell_n(s) \in B(x, \varepsilon)$ pour tout s . En particulier,

$$u(s, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s - \rho_n, t) \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, z)$$

$$\text{et} \quad v(s, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \rho_n, t) \in \mathcal{M}^{\Gamma''}(x, z).$$

Ici on pourrait aussi montrer que u est constante égale à x et v aussi, en choisissant ε assez petit pour que toutes les trajectoires non constantes en s de $\mathcal{M}^{\Gamma'}(x, x)$ et $\mathcal{M}^{\Gamma''}(x, x)$ quittent $B(x, \varepsilon)$.

La démonstration de la proposition 11.5.5 est terminée. $\square$

⁽²⁾ Contrairement au cas traité par le théorème 9.1.7.

Nous avons maintenant une suite $\ell_n \notin \text{Im}(\chi_{\rho_n})$ et telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s - \rho_n, t) = u(s, t) \in \mathcal{M}^{\Gamma'}(x, y)$$

et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(s + \rho_n, t) = v(s, t) \in \mathcal{M}^{\Gamma''}(y, z).$$

Pour obtenir une contradiction, montrons :

Proposition 11.5.9. *Pour n assez grand, $\ell_n = \chi_{\rho_n}(u, v)$.*

La démonstration suit le schéma de celle de l'unicité du recollement (dans le théorème 11.1.16). Nous montrons un analogue de la proposition 11.2.3 :

Proposition 11.5.10. *Pour n assez grand, il existe $Y_n \in w_{\rho_n}^* TW$ tel que*

$$\ell_n = \exp_{w_{\rho_n}} Y_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{\infty} = 0.$$

Puis nous montrons, comme dans la proposition 11.2.4 :

Proposition 11.5.11. *Le champ Y_n est dans $W^{1,p}(w_{\rho_n}^* TW)$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 0$.*

Enfin, nous terminons la démonstration en utilisant la partie unicité de la méthode de Newton-Picard (lemme 9.4.4).

Démonstration de la proposition 11.5.10. Commençons par un lemme :

Lemme 11.5.12. *La suite $(\ell_n(s, t))_n$ converge vers $y(t)$ dans la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^{\infty}$.*

Démonstration. Remarquons que, pour $s \in [-\rho_n + R, \rho_n - R]$, on a

$$(H_{\rho_n}, J_{\rho_n}) = (H^b, J^b).$$

Donc, la restriction de ℓ_n à $[-\rho_n + R, \rho_n - R] \times S^1$ est une solution de l'équation de Floer associée à (H^b, J^b) . En particulier, la fonction

$$s \longmapsto \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s))$$

est décroissante sur cet intervalle.

Notons a la limite (d'une sous-suite convergente) de ℓ_n , dont l'existence est assurée par l'assertion (1) de la proposition 11.5.6. La démonstration de l'assertion (2) de cette même proposition implique que

$$a \in \mathcal{M}^{(H^b, J^b)}(y', y'') \quad \text{pour des } y', y'' \in \text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}.$$

Fixons $s > R$ et $\sigma < -R$. Pour n assez grand, on a $\sigma + \rho_n > s$. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{H^b}(a(s)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s)) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(\sigma + \rho_n)) \\ &= \mathcal{A}_{H^b}(v(\sigma)). \end{aligned}$$

En faisant tendre s vers $+\infty$ et σ vers $-\infty$, on trouve

$$\mathcal{A}_{H^b}(y'') \geq \mathcal{A}_{H^b}(y).$$

De même

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{H^b}(a(\sigma)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(\sigma)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{H^b}(\ell_n(s - \rho_n)) \\ &= \mathcal{A}_{H^b}(u(s)). \end{aligned}$$

On fait de nouveau tendre s vers $+\infty$ et σ vers $-\infty$ et on trouve

$$\mathcal{A}_{H^b}(y') \leq \mathcal{A}_{H^b}(y).$$

Mais $\mathcal{A}_{H^b}(y') \geq \mathcal{A}_{H^b}(y'')$, de sorte que

$$\mathcal{A}_{H^b}(y') = \mathcal{A}_{H^b}(y'') = \mathcal{A}_{H^b}(y),$$

donc a est constante en s (et plus précisément $a(s) = y$) puisque les valeurs critiques de $\mathcal{A}_{H^b}$ ont été supposées distinctes. $\square$

Supposons que les solutions u et v ne soient pas constantes en s . Choisissons des boules $B(x, \delta)$, $B(y, \delta)$ et $B(z, \delta)$ dans l'espace des lacets $\mathcal{L}W$, qui satisfont aux propriétés du lemme 9.6.11. Quitte à diminuer δ si nécessaire, on peut également supposer que les lacets $u(0)$ et $v(0)$ ne sont contenus dans aucune de ces boules. Elles ne contiennent pas d'autres lacets de $\text{Crit } \mathcal{A}_{H^a}$, $\text{Crit } \mathcal{A}_{H^b}$ et $\text{Crit } \mathcal{A}_{H^c}$ que x , y et z respectivement.

Grâce au lemme que nous venons de démontrer, nous savons que $\ell(0) \in B(y, \delta)$ pour n assez grand. Comme dans la démonstration de la proposition 9.6.3, définissons

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sup \{s > 0 \mid \ell_n([-s, 0]) \subset B(y, \delta)\} \\ \tau_n &= \sup \{s > 0 \mid \ell_n([0, s]) \subset B(y, \delta)\} \\ \sigma'_n &= \inf \{s > 0 \mid \ell_n(]-\infty, -s]) \subset B(x, \delta)\} \\ \tau'_n &= \inf \{s > 0 \mid \ell_n([s, +\infty[) \subset B(z, \delta)\}. \end{aligned}$$

Comme $\lim \ell_n(-\rho_n) = u(0)$ et $\lim \ell_n(\rho_n) = v(0)$, on déduit que

$$-\sigma'_n < -\rho_n < -\sigma_n \quad \text{et} \quad \tau_n < \rho_n < \tau'_n.$$

La construction de ces suites implique également que

$$\ell_n(\sigma_n), \ell_n(\tau_n) \in \partial B(y, \delta), \quad \ell_n(\sigma'_n) \in \partial B(x, \delta), \quad \ell_n(\tau'_n) \in \partial B(z, \delta).$$

D'où l'on déduit :

Lemme 11.5.13. *Les suites $(\rho_n - \sigma_n)$, $(\rho_n - \sigma'_n)$, $(\rho_n - \tau_n)$ et $(\rho_n - \tau'_n)$ sont bornées.*

Démonstration. Supposons que $(\sigma'_n - \rho_n)$ tende vers $+\infty$. Alors, par la proposition 11.5.6, la suite $\ell_n(s - \sigma'_n)$ converge vers ℓ , solution de l'équation de Floer associée à (H^a, J^a) (voir au besoin la démonstration du point (2) de 11.5.6). Par ailleurs, la définition de σ'_n implique que $\ell(s) \in B(x, \delta)$ pour tous les s négatifs, ce qui entraîne que

$$\ell \in \mathcal{M}^{(H^a, J^a)}(x, y') \quad \text{pour un } y \in \text{Crit } A_{H^a}.$$

Comme $\ell(0) \in \partial B(x, \delta)$, on sait que $y' \neq x$. Mais ce n'est pas possible, puisque nous avons démontré (lorsque nous démontrions la proposition 11.5.5) que la trajectoire brisée vers laquelle tend ℓ_n ne peut pas contenir de trajectoires non constantes de l'équation de Floer associée à (H^a, J^a) .

Supposons maintenant que $\sigma_n - \rho_n$ tende vers $-\infty$. Toujours en utilisant la proposition 11.5.6, la suite $(\ell_n(s - \sigma_n))$ converge vers une limite ℓ solution de l'équation de Floer associée à (H^b, J^b) . Nous avons

$$\ell(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(\sigma_n) \in \partial B(y, \delta).$$

Par ailleurs σ_n tend vers $+\infty$ (sinon, si σ_n est bornée, comme ℓ_n converge vers y dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$, $\ell_n(\sigma_n)$ ne peut pas appartenir à $\partial B(y, \delta)$).

Soit $s > 0$. Pour n assez grand, on a $s - \sigma_n \in]-\sigma_n, 0]$, donc $\ell_n(s - \sigma_n) \in B(y, \delta)$, d'où $\ell(s) \in B(y, \delta)$. On en déduit que ℓ est une solution non constante de l'équation de Floer associée à (H^b, J^b) . Elle apparaît dans la trajectoire brisée qui est la limite de ℓ_n (cette trajectoire commencerait par u, ℓ). Cela est impossible, comme précédemment.

On procède de manière analogue pour démontrer les assertions sur τ_n et τ'_n . $\square$

Soit $A > 0$ et tel que toutes les suites de l'énoncé précédent prennent leurs valeurs dans $[-A, A]$ et tel que

$$u(s) \in B(x, \delta) \text{ pour } s < -A, \quad u(s) \in B(y, \delta) \text{ pour } s > A,$$

$$v(s) \in B(y, \delta) \text{ pour } s < -A \quad \text{et} \quad v(s) \in B(z, \delta) \text{ pour } s > A.$$

Comme dans la démonstration de la proposition 9.6.3, on découpe $\mathbf{R}$ en plusieurs intervalles et on définit $Y_n(s)$ pour s dans chacun des intervalles :

$$(1) \text{ Si } s < -\rho_n - A < -\sigma'_n, \text{ alors } \ell_n(s) \in B(x, \delta),$$

$$w_{\rho_n}(s) = u(s + \rho_n) \in B(x, \delta)$$

et on utilise le lemme 9.6.11.

(2) Si $-\rho_n - A < s < -\rho_n + A$, on utilise le fait que $\ell_n(s - \rho_n)$ tend vers $u(s)$ uniformément sur $s \in [-A, A]$.

(3) Si $-\rho_n + A < s < \rho_n - A$, alors $-\sigma_n < s < \tau_n$, donc $\ell_n(s) \in B(y, \delta)$.
Puis

$$u(s + \rho_n) \quad \text{et} \quad v(s - \rho_n) \in B(y, \delta),$$

donc $w_{\rho_n}(s) \in B(y, \delta)$ (toujours par le lemme 9.6.11). On utilise ce lemme pour définir Y_n .

(4) Si $\rho_n - A < s < \rho_n + A$, on utilise le fait que $\ell_n(s + \rho_n)$ tend vers $v(s)$, uniformément sur $s \in [-A, A]$.

(5) Si $s > \rho_n + A > \tau'_n$, on a $\ell_n(s) \in B(z, \delta)$ et $w_{\rho_n}(s) = v(s - \rho_n) \in B(z, \delta)$ ce qui nous permet de définir Y_n en utilisant, toujours, le lemme 9.6.11.

Cela termine la preuve dans le cas où u et v ne sont pas constantes en s . Si l'une des deux solutions (ou toutes les deux) est (sont) constante(s), la preuve se simplifie. Supposons par exemple que v soit constante en s (en particulier, alors, $y = z$). La preuve du théorème 9.1.7, qui construit la trajectoire brisée limite de ℓ_n , implique alors que $\ell_n(s) \in B(z, \delta)$ pour tout $s > s^* - \rho_n$ (pour une certaine constante s^*). Le pré-recollement $w_{\rho_n}(s)$ a évidemment la même propriété, puisque, pour $s \geq -\rho_n + A$,

$$u(s + \rho_n) \in B(y, \delta) = B(z, \delta) \quad \text{et} \quad v(s - \rho_n) = y = z \in B(z, \delta).$$

Il suffira donc de définir Y_n pour les intervalles décrits dans (1) et (2) et cela se fait de façon analogue. $\square$

La démonstration de la proposition 11.5.11 se fait exactement comme celle de 11.2.4 au § 9.6.c. Le fait que

$$Y_n \in W^{1,p}(w_{\rho}^*TW)$$

résulte (de l'analogue) du lemme 9.6.13 (démontré de façon identique).

Pour montrer que $\lim \|Y_n\|_{W^{1,p}} = 0$, on fait une estimation, comme dans la preuve de la proposition 11.2.4, à l'aide (de l'analogue) du lemme 13.7.1. Notons que le lemme 9.6.14 est ici inutile (puisque $\mu(x) = \mu(y) = \mu(z)$, donc $W_n = 0$), l'estimation de la norme $W^{1,p}$ de Y_n est plus facile à obtenir. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition 11.5.9. Nous voulons démontrer que, pour n assez grand,

$$\ell_n = \chi_{\rho_n}(u, v),$$

autrement dit que

$$\exp_{w_{\rho_n}} Y_n = \exp_{w_{\rho_n}} \gamma_{\rho_n},$$

c'est-à-dire $Y_n = \gamma_{\rho_n}$. Nous savons que

$$\mathcal{F}_{\rho_n}(Y_n) = \mathcal{F}_{\rho_n}(\gamma_{\rho_n}) = 0$$

et que $L_{\rho_n} = (d\mathcal{F}_{\rho_n})_0$ est bijective comme nous l'avons vu au §11.5.a. Mais nous ne pouvons pas appliquer directement le théorème d'inversion locale puisque la taille du voisinage sur lequel $\mathcal{F}_{\rho_n}$ est bijective pourrait décroître lorsque n croît et Y_n pourrait n'être pas contenu dans ce voisinage. Nous utilisons le lemme d'unicité 9.6.16 qui affirme que la solution γ_{ρ_n} de $\mathcal{F}_{\rho_n}(Y) = 0$ obtenue par la méthode de Newton-Picard est la seule dans une boule $B(0, \varepsilon_0)$, la constante ε_0 ne dépendant pas de n .

Donc, comme la norme $W^{1,p}$ de Y_n tend vers 0, on a $Y_n = \gamma_{\rho_n}$ et la démonstration de la proposition 11.5.9 est terminée. $\square$

Nous obtenons donc la surjectivité de χ_ρ pour ρ assez grand, qui nous manquait pour finir la démonstration de la proposition 11.5.3. $\square$

Celle-ci implique, trivialement, la proposition 11.5.2 : le lemme 11.5.1 affirme que Γ_ρ est régulière pour des valeurs arbitrairement grandes de ρ et la proposition 11.5.3 implique que, à partir d'une certaine valeur de ρ ,

$$\Phi^{\Gamma_\rho} = \Phi^{\Gamma'} \circ \Phi^{\Gamma''}$$

si le membre de gauche est défini.

Enfin, la proposition 11.5.2 implique évidemment la proposition 11.2.9, qui était l'objectif de cette section. Les propositions 11.2.8 et 11.2.9 entraînent l'invariance de l'homologie de Floer par rapport au choix d'un couple régulier (H, J) .

11.6. Conclusion

Nous avons réalisé les objectifs du plan énoncé au §6.2 (page 146) et démontré la conjecture d'Arnold.

Il faut signaler que l'homologie de Floer et ses diverses parentes ont bien d'autres applications à la géométrie symplectique et de contact que cette conjecture. La deuxième partie de ce livre constitue, en fait, un point de départ pour les lecteurs intéressés par les aspects modernes de la topologie symplectique. Pour ceux qui voudraient poursuivre la route, voici quelques directions et références.

Tout d'abord, l'étude des sous-variétés lagrangiennes des variétés symplectiques, déjà entreprise par Floer dans [24], voir aussi les travaux de Oh [53, 54, 55], Seidel et Fukaya [28, 64, 65], et, plus près de nous, ceux de Damian [19] et Gadbled [29].

Puis, la généralisation de notre construction au cas des variétés symplectiques à bord *de type contact*. Dans ce cas, l'homologie de Floer n'est plus isomorphe à celle de Morse comme ici, mais prend en compte les caractéristiques fermées du bord. Ceci mène vers l'homologie symplectique développée

par Viterbo [71] (voir aussi l'article de Oancea [52], et celui de Cieliebak et Frauenfelder [17]).

Une autre branche va vers l'étude des variétés de contact. Une variante de la construction de Floer, pour les variétés symplectifiées des variétés de contact, donne une « homologie de contact », engendrée par les trajectoires périodiques des champs de Reeb de la variété. Cette théorie est due à Eliashberg, Givental et Hofer [22]. Voir également les travaux de Bourgeois [12].

Mais ce serait le sujet d'un autre livre.

CHAPITRE 12

LA RÉGULARITÉ ELLIPTIQUE DE L'OPÉRATEUR DE FLOER

12.1. La régularité elliptique : pourquoi et comment ?

Nous avons invoqué à plusieurs reprises, sous le nom de « régularité elliptique », la régularité des solutions de l'équation de Floer

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H_t(u) = 0.$$

Tout d'abord, au chapitre 6, nous en avons eu besoin pour montrer la compacité de l'espace $\mathcal{M}$ des solutions d'énergie finie (précisément, la proposition 6.5.3). L'énoncé utilisé est :

Lemme 12.1.1 (régularité elliptique). *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Toute suite (u_n) de solutions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation de Floer*

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H_t(u) = 0,$$

définies sur U et satisfaisant à

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|\text{grad } u_n\|_{L^\infty(U)} \leq M$$

(pour un certain M réel), a une sous-suite qui converge uniformément avec toutes ses dérivées sur tout compact de U vers une limite qui est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ensuite, dans la démonstration du théorème de transversalité 8.1.2, page 240, nous avons également fait appel à la régularité elliptique pour justifier le fait que les solutions de l'équation de Floer dans l'espace de type Sobolev $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que la topologie induite par celle de $\mathcal{P}^{1,p}$ sur cet espace de solutions est la même sur celle de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire la topologie $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ ($\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ est défini par 8.2.2).

Par la suite, l'argument de régularité elliptique est apparu dans les situations similaires que nous avons eu à envisager : au chapitre 9 pour prouver que les solutions $\mathcal{P}^{1,p}$ produites par le recollement sont de « vraies » solutions et convergent vers une trajectoire brisée dans la bonne topologie (lemme 9.4.17), puis au chapitre 11, où des énoncés de compacité, transversalité et recollement sont prouvés dans un cadre plus général, où la structure presque complexe J et le hamiltonien H dépendent de s et quelquefois d'un autre paramètre λ .

On voit donc que la régularité elliptique intervient dans toutes les étapes de la construction de l'homologie de Floer. C'est pourquoi nous allons donner des énoncés rigoureux et des démonstrations détaillées de ces propriétés dans ce qui suit. Nous avons utilisé principalement [45].

12.1.a. Énoncés de régularité elliptique (linéaire). Les énoncés de régularité elliptique auxquels il a été fait référence dans ce texte sont apparentés au théorème :

Théorème 12.1.2. *Soit $p > 1$ et soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Soit $f \in W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$ et soit $u \in L_{\text{loc}}^p(U)$ une solution faible de $\bar{\partial}u = f$. Alors $u \in W_{\text{loc}}^{k+1,p}(U)$. De plus, pour tout ouvert relativement compact V avec $\bar{V} \subset U$, il existe une constante $C = C(k, p, K, U)$ telle que*

$$\|u\|_{W^{k+1,p}(V)} \leq C \left(\|f\|_{W^{k,p}(U)} + \|u\|_{L^p(U)} \right).$$

Nous démontrons ce théorème au §12.3. Une de ses premières conséquences est l'estimation suivante, utilisée dans le chapitre 8, et qui est l'analogue, pour l'opérateur L , du théorème 12.1.2.

Théorème (lemme 8.7.2). *Soit $p > 1$, soit $S : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow \text{End}(\mathbf{R}^{2n})$ une application continue avec $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} S(s, t) = S^\pm(t)$ et soit enfin*

$$L : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

l'opérateur de Cauchy-Riemann perturbé

$$LY = \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S \cdot Y.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}), \quad \|Y\|_{W^{1,p}} \leq C (\|LY\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}).$$

Plus généralement, si Y et LY sont dans L^p , alors $Y \in W^{1,p}$ et l'égalité ci-dessus a lieu.

Nous le démontrons au §12.2. Nous utilisons aussi le théorème 12.1.2 pour obtenir un résultat de régularité pour le linéarisé de l'opérateur de

Floer (que nous avons utilisé dans les démonstrations du lemme 8.5.1 et la proposition 8.7.1).

Théorème 12.1.3 (régularité elliptique, version linéaire). *Soit L l'opérateur*

$$L = \frac{\partial}{\partial s} + J_0 \frac{\partial}{\partial t} + S, \quad \text{avec } S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \text{End}(\mathbf{R}^{2n})).$$

On suppose que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} S(s, t) = S_\pm(t) \text{ et } \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial S}{\partial s}(s, t) = 0.$$

Si $Y \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ est tel que $LY = 0$ au sens des distributions, alors Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Si $p > 2$, alors de plus $Y \in W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ pour tout $q > 1$.

Démonstration du théorème 12.1.3. Comme Y est dans L^p ,

$$\bar{\partial}Y = -SY \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

En utilisant le théorème 12.1.2, on trouve donc que $Y \in W_{\text{loc}}^{1,p}$, donc $SY \in W_{\text{loc}}^{1,p}$. Par le même théorème, on a donc $Y \in W_{\text{loc}}^{2,p}$ et, par récurrence, $Y \in W_{\text{loc}}^{k,p}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ (c'est un *bootstrapping* elliptique). En utilisant le théorème 16.4.9, on en déduit que Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème précédent (aussi connu sous le nom de lemme 8.7.2) nous donne le fait qu'elle est dans $W^{1,p}$.

Supposons maintenant que $p > 2$. En procédant ensuite comme dans ce qui précède, pour obtenir que $Y \in W^{1,q}(\mathbf{R} \times S^1)$ pour tout $q > 1$, il suffit de montrer que $Y \in L^q(\mathbf{R} \times S^1)$ pour tout $q > 1$. Comme Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, une propriété de décroissance exponentielle

$$\|Y(s, t)\| \leq e^{-\delta|s|} \quad \forall s, t \text{ pour une constante } \delta > 0$$

suffit. Or le théorème 8.9.1 nous garantit cette propriété dès que la fonction

$$s \mapsto \int_0^1 \|Y(s, t)\|^2 dt$$

ne tend pas vers l'infini pour $s \rightarrow \pm\infty$. Vérifions donc que notre Y satisfait à cette propriété. L'inégalité de Hölder donne

$$\int_0^1 \|Y(s, t)\|^2 dt \leq \left(\int_0^1 \|Y(s, t)\|^p dt \right)^{2/p}.$$

Donc, si $\int_0^1 \|Y(s, t)\|^2 dt$ tend vers l'infini, il en est de même de $\int_0^1 \|Y(s, t)\|^p dt$, ce qui est exclu par le fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \|Y(s, t)\|^p dt ds = \|Y\|_{L^p}^p < +\infty.$$

Le théorème est ainsi démontré. $\square$

12.1.b. Énoncés de régularité elliptique (non linéaire). Les propriétés de régularité elliptique « non linéaire » sont englobées dans l'énoncé qui suit :

Proposition 12.1.4. *Pour $p > 2$, une solution $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; W)$ de l'équation de Floer est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sur l'espace des solutions $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; W)$, les topologies $W_{\text{loc}}^{1,p}$ et $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ coïncident.*

La notation $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; W)$ apparaît ici pour la première fois ; nous en précisons la signification plus bas. Remarquons aussi que, contrairement aux énoncés précédents, la régularité elliptique non linéaire nécessite l'hypothèse $p > 2$. Voici quelques explications.

Pourquoi supposer $p > 2$? Dans tous les énoncés de régularité, il s'agit de démontrer qu'une solution faible (solution au sens des distributions) est une vraie solution de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans notre cas, par hypothèse, la solution est dans un espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)$. Comme nous l'avons expliqué au § 8.2, supposer $p > 2$ nous garantit, *via* le théorème de Rellich 16.4.6, que cette solution est *continue*. Du même coup, ceci nous permet de travailler en coordonnées locales.

La régularité d'une solution $u : \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow W$ se lit dans des cartes de W . Mais d'autres propriétés dont il est question ici, comme par exemple l'intégrabilité L^p (même sur des compacts) ne sont pas invariantes par changement de carte. En revanche, si u est dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ et si $\varphi : \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ est continue, alors, pour $p > 2$, $\varphi \circ u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. En effet, $\varphi \circ u$ est dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ du fait de la continuité de u , puis

$$\frac{\partial(\varphi \circ u)}{\partial s} = (d\varphi)_u \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

(et de même pour la dérivée par rapport à t) comme produit d'une fonction continue et d'une fonction L_{loc}^p . Par conséquent, nous pouvons définir l'espace $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; W)$ comme le sous-espace des fonctions continues qui sont représentées en coordonnées par des fonctions $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Une alternative équivalente est de plonger W dans $\mathbf{R}^m$ et de considérer les fonctions $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ qui prennent leurs valeurs dans W (la définition ne dépendra pas alors du plongement choisi).

Ce n'est pas la seule raison de supposer $p > 2$. L'ingrédient principal de la démonstration de tous ces énoncés de régularité est un argument de « bootstrapping elliptique » qui affirme que si une solution est dans $W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, alors elle est aussi dans $W_{\text{loc}}^{k+1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. La régularité de la solution est alors conséquence du théorème 16.4.9. Nous avons

vu cet argument énoncé dans le théorème 12.1.2 et appliqué dans la démonstration de la régularité elliptique linéaire (le théorème 12.1.3). Dans le cas *non linéaire* la condition $p > 2$ s'avère essentielle pour pouvoir l'établir. Il est énoncé dans le théorème 12.1.5 et démontré au § 12.4.c.

La démonstration du lemme 12.1.1 s'appuie sur la proposition 12.1.4 mais elle n'en est pas une conséquence immédiate. Ceci parce que l'application du théorème d'Ascoli fournit une limite pour la suite (u_n) qui est seulement continue. Pour démontrer que cette limite est dans $W_{\text{loc}}^{1,p}$ afin de pouvoir lui appliquer la proposition 12.1.4, il faut encore utiliser le fait que la suite des $\|\text{grad } u_n\|$ est uniformément bornée. Ce fait sera démontré au § 12.4.

La proposition 12.1.4 donne l'argument de régularité requis dans la démonstration, page 240, du théorème 8.1.2, et cela parce que, par définition, l'espace $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ est contenu dans $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; W)$ (voir la définition 8.2.2 de $\mathcal{P}^{1,p}$, des cartes y sont données explicitement). Il nous suffira donc de démontrer cette proposition.

La démonstration que nous donnerons s'appuie sur un énoncé semblable à celui du théorème 12.1.2. Pour commencer, en prenant un nombre fini de cartes dont les domaines recouvrent W , on peut se ramener au cas où $W = \mathbf{R}^{2n}$. L'application $u \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ est donc solution de

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H_t(u) = 0.$$

Ici, J et H sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et peuvent dépendre de s (comme au chapitre 11), sans que cela influe sur la démonstration. Posons

$$\tilde{J}(s, t) = J(u(s, t)) \quad \text{et} \quad h(s, t) = \text{grad } H_t(u(s, t)).$$

En utilisant la continuité de u , on voit facilement que

$$\tilde{J} \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \text{End}(\mathbf{R}^{2n})) \quad \text{et} \quad h \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Plus généralement et sans davantage de difficulté, on prouve que $\tilde{J}$ et h ont la même régularité que u : si $u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, alors

$$\tilde{J} \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \text{End}(\mathbf{R}^{2n})) \quad \text{et} \quad h \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

L'énoncé qu'il faudra démontrer est :

Théorème 12.1.5. *Soient $k \geq 0$, $p > 2$, $\tilde{J} \in W_{\text{loc}}^{\min(k,1),p}(\mathbf{R} \times S^1; \text{End}(\mathbf{R}^{2n}))$ vérifiant $\tilde{J}^2 = -\text{Id}$ et $h \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Si $u \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ est solution (au sens des distributions) de*

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial u}{\partial t} + h = 0,$$

alors $u \in W_{\text{loc}}^{k+1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$.

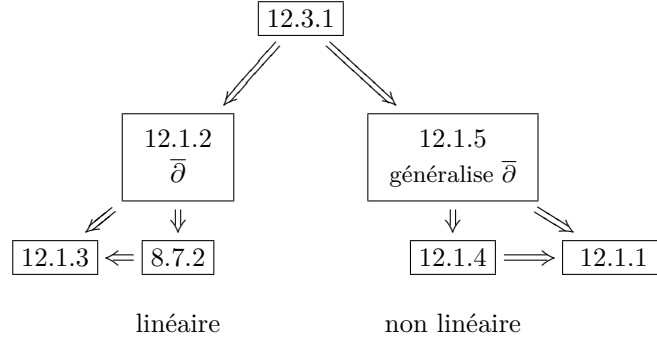
Soient $V \subset U \subset \mathbf{R} \times S^1$ deux ouverts relativement compacts et $c_0 > 0$ tels que

$$\|\tilde{J}\|_{W^{\min(k,1),p}(U)} \leq c_0.$$

Alors il existe une constante C (dépendant de U , V , c_0 , p et k) telle que, pour tout $\ell \in \{0, \dots, \max(k-1, 0)\}$, on ait

$$\|u\|_{W^{\ell+1,p}(V)} \leq C \left(\|h\|_{W^{\ell,p}(U)} + \|u\|_{W^{\ell,p}(U)} \right).$$

12.1.c. Un fil d'Ariane. Les six énoncés précédents constituent un nouveau dédale. Pour aider les lecteurs à s'en sortir, nous proposons un nouveau plan.



- Nous avons démontré que 12.1.2 et 8.7.2 $\Rightarrow$ 12.1.3.
- Au § 12.2, nous démontrerons que 12.1.2 $\Rightarrow$ 8.7.2.
- Au § 12.3, nous démontrerons que 16.5.8 $\Rightarrow$ 12.3.1 $\Rightarrow$ 12.1.2.
- Au § 12.4, nous démontrerons que 12.3.1 $\Rightarrow$ 12.1.5 $\Rightarrow$ 12.1.4 et que 12.1.5 et 12.1.4 $\Rightarrow$ 12.1.1.

12.2. Démonstration du lemme 8.7.2

Soit $K \subset \mathbf{R} \times S^1$ un compact et soit $U \supset K$ un ouvert. Alors, d'après 12.1.2, il existe une constante $C_1(K, U)$ telle que

$$\|Y\|_{W^{1,p}(K)} \leq C_1 \left(\|\bar{\partial}Y\|_{L^p(U)} + \|Y\|_{L^p(U)} \right).$$

Comme

$$\|\bar{\partial}Y\|_{L^p(U)} \leq \|LY\|_{L^p(U)} + \|SY\|_{L^p(U)},$$

on en déduit

$$\|Y\|_{W^{1,p}(K)} \leq C_2 \left(\|LY\|_{L^p(U)} + \|Y\|_{L^p(U)} \right).$$

Supposons maintenant que $S(s, t) = S(t)$ et montrons l'inégalité annoncée dans ce cas. Nous avons, d'après ce qui précède

$$\|Y\|_{W^{1,p}([0,1] \times S^1)} \leq C_3 \left(\|LY\|_{L^p([-1,2] \times S^1)} + \|Y\|_{L^p([-1,2] \times S^1)} \right)$$

pour une certaine constante $C_3 > 0$. Comme S ne dépend pas de s , l'opérateur L est invariant par translations en s , au sens où

$$L(Y(s + s_0, t)) = (LY)(s + s_0, t).$$

On en déduit, comme dans la démonstration de la proposition 8.7.3 (page 262) que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$\|Y\|_{W^{1,p}([k,k+1] \times S^1)} \leq C_3 \left(\|LY\|_{L^p([k-1,k+2] \times S^1)} + \|Y\|_{L^p([k-1,k+2] \times S^1)} \right).$$

En appliquant l'inégalité $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, on obtient

$$\|Y\|_{W^{1,p}([k,k+1] \times S^1)}^p \leq 2^p C_3^p \left(\|LY\|_{L^p([k-1,k+2] \times S^1)}^p + \|Y\|_{L^p([k-1,k+2] \times S^1)}^p \right).$$

On somme ensuite sur tous les entiers k et on trouve

$$\begin{aligned} \|Y\|_{W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)}^p &\leq C_4 \left(\|LY\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)}^p + \|Y\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)}^p \right) \\ &\leq C_4 \left(\|LY\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)} + \|Y\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)} \right)^p \end{aligned}$$

et donc l'égalité espérée dans le cas où S ne dépend pas de s . Revenons maintenant au cas général. Appelons $D^\pm$ les opérateurs de Cauchy-Riemann perturbés associés respectivement à $S^\pm(t)$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $M > 0$ est assez grand,

$$\|S(s, t) - S^+(t)\| < \varepsilon \quad \text{pour } s > M \text{ et } t \in S^1$$

$$\text{et} \quad \|S(s, t) - S^-(t)\| < \varepsilon \quad \text{pour } s < -M \text{ et } t \in S^1.$$

Par conséquent, sur $W^{1,p}([M + \infty[\times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on a $\|L - D^+\|^{\text{op}} < \varepsilon$.

Soit $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)$, à support dans $\{s > M\}$. On a (d'après ce que nous venons de faire pour S indépendante de s) :

$$\begin{aligned} \|Y\|_{W^{1,p}} &\leq C_5 \left(\|D^+Y\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p} \right) \\ &= C_5 \left(\|D^+Y\|_{L^p([M, +\infty[\times S^1)} + \|Y\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)} \right) \\ &\leq C_5 \left(\|LY\|_{L^p([M, +\infty[\times S^1)} + \varepsilon \|Y\|_{W^{1,p}([M, +\infty[\times S^1)} + \|Y\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1)} \right) \\ &= C_5 \left(\|LY\|_{L^p} + \varepsilon \|Y\|_{W^{1,p}} + \|Y\|_{L^p} \right). \end{aligned}$$

Pour ε assez petit ($\varepsilon \leq 1/2C_5$), l'inégalité de l'énoncé est satisfaite par Y et, de manière analogue, c'est aussi le cas si le support de Y est dans $\{s < -M\}$.

Supposons maintenant que Y soit à support dans $\{|s| > M\}$. On le décompose comme une somme $Y = Y^+ + Y^-$, de deux termes $Y^\pm$ à support

dans $\{s > M\}$ et Y^- à support dans $\{s < -M\}$. Bien sûr,

$$\|Y^\pm\|_{L^p} \leq \|Y\|_{L^p} \quad \text{et} \quad \|LY^\pm\|_{L^p} \leq \|LY\|_{L^p},$$

donc on a

$$\begin{aligned} \|Y\|_{W^{1,p}} &\leq \|Y^+\|_{W^{1,p}} + \|Y^-\|_{W^{1,p}} \\ &\leq C_6 (\|LY^+\|_{L^p} + \|LY^-\|_{L^p} + \|Y^+\|_{L^p} + \|Y^-\|_{L^p}) \\ &\leq 2C_6 (\|LY\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}). \end{aligned}$$

Considérons ensuite le cas d'un Y à support dans $\{-M-1 \leq s \leq M+1\}$. L'argument utilisé au début de la preuve donne une constante C (dépendant de M) telle que

$$\begin{aligned} \|Y\|_{W^{1,p}} &= \|Y\|_{W^{1,p}([-M-1, M+1] \times S^1)} \\ &\leq C_7 (\|LY\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}). \end{aligned}$$

Utilisons pour conclure une fonction plateau $\beta : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ qui s'annule pour $|s| \leq M+1$ et qui vaut 1 pour $|s| \leq M$. Écrivons $Y = \beta Y + (1 - \beta)Y$, de sorte que les deux morceaux, βY et $(1 - \beta)Y$ satisfont l'inégalité de l'énoncé. Remarquons que

$$\begin{aligned} \|L(\beta Y)\|_{L^p} &= \|\beta(s)LY + \beta'(s)Y\|_{L^p} \\ &\leq \|LY\|_{L^p} + K \|Y\|_{L^p} \end{aligned}$$

et de même pour $L((1 - \beta)Y)$, avec $K = \sup_{s \in \mathbf{R}} |\beta'(s)|$. Mais alors

$$\begin{aligned} \|Y\|_{W^{1,p}} &\leq \|\beta Y\|_{W^{1,p}} + \|(1 - \beta)Y\|_{W^{1,p}} \\ &\leq 2C_7 (\|LY\|_{L^p} + K \|Y\|_{L^p}) \\ &\leq C (\|LY\|_{L^p} + \|Y\|_{L^p}) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

12.3. Démonstration du théorème 12.1.2

Nous démontrons le théorème par récurrence sur k . Pour $k = 0$, on a

$$\bar{\partial}u = f, \quad \text{avec } u, f \in L^p_{\text{loc}}.$$

En appliquant l'opérateur ∂ , on obtient (à un facteur 4 près)

$$\Delta u = \partial f.$$

Cela nous permet de ramener le problème au cas où u est une fonction à valeurs réelles et est solution de

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial s}g + \frac{\partial}{\partial t}h$$

avec g et h dans $L^p_{\text{loc}}(U)$ (et les dérivées sont entendues au sens des distributions). Nous montrons un peu plus généralement :

Proposition 12.3.1. *Si $u \in L^p_{\text{loc}}(U)$ est une fonction à valeurs réelles et vérifie*

$$\Delta u = f + \frac{\partial}{\partial s}g + \frac{\partial}{\partial t}h$$

au sens des distributions, pour f, g et $h \in L^p_{\text{loc}}(U)$, alors $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ et pour tout ouvert V relativement compact tel que $\bar{V} \subset U$, il existe une constante $C = C(p, V, U) > 0$ telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}(V)} \leq C(\|f\|_{L^p(U)} + \|g\|_{L^p(U)} + \|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{L^p(U)}).$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas de l'équation $\Delta u = 0$. Alors u est harmonique et vérifie l'égalité de la moyenne (proposition 16.5.2). En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (lemme 16.5.3) et donc est dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$. Soit V un ouvert comme dans l'énoncé. En utilisant les notations de la démonstration du lemme 16.5.3, on a $u = \psi \star u$ où

$$\psi = \chi_r \star \chi_r \star \chi_r$$

est de classe $\mathcal{C}^1_0$ et l'égalité a lieu sur U_{3r} , dont nous supposons qu'il contient $\bar{V}$ (il suffit que r soit assez petit). On en déduit que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial s} u \right\|_{L^p(V)} &= \left\| \frac{\partial}{\partial s} \psi \star u \right\|_{L^p(V)} \\ &\leq \sup_{z \in V} \left\| \frac{\partial}{\partial s} \psi \right\| \cdot \|u\|_{L^p(V)} \\ &= \|u\|_{L^p(V)} \end{aligned}$$

et une estimation analogue pour $\partial u / \partial t$. On obtient donc

$$\|u\|_{W^{1,p}(V)} \leq C(V, U) \|u\|_{L^p(V)} \leq C(V, U) \|u\|_{L^p(U)}.$$

Passons maintenant au cas général. Pour pouvoir définir les convolutions, nous utilisons une fonction $\beta \in \mathcal{C}^\infty_0(U)$ qui vaut 1 sur V . Posons

$$v = K \star \beta f + K_1 \star \beta g + K_2 \star \beta h,$$

où K est la solution fondamentale du laplacien (voir le § 16.5) et K_1, K_2 sont ses dérivées partielles :

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|, \quad K_1(s, t) = \frac{s}{2\pi(s^2 + t^2)}, \quad K_2(s, t) = \frac{t}{2\pi(s^2 + t^2)}.$$

Soit (g_i) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty_0(U)$ qui tend vers βg dans $L^p(U)$. En utilisant l'inégalité de Calderón-Zygmund (ici le théorème 16.5.8), on trouve que la suite des $\nabla(K_1 \star g_i) = \nabla K_1 \star g_i$ est une suite de Cauchy

dans L^p , et donc que $(\nabla(K_1 \star g_i))$ converge vers $(\nabla K_1 \star (\beta g))$, qui est dans $L^p(U)$. De plus

$$\begin{aligned} \|\nabla(K_1 \star (\beta g))\|_{L^p(U)} &\leq C_1 \|\beta g\|_{L^p(U)} \\ &\leq C_2 \|g\|_{L^p(\text{Supp } \beta)}. \end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\|\nabla(K_2 \star (\beta h))\|_{L^p(U)} \leq C_3 \|h\|_{L^p(\text{Supp } \beta)}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \|\nabla(K \star (\beta f))\|_{L^p(V)} &= \|\nabla K \star (\beta f)\|_{L^p(V)} \\ &\leq \|K_1 \star (\beta f)\|_{L^p(V)} + \|K_2 \star (\beta f)\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young (note page 265), on en déduit

$$\begin{aligned} \|\nabla(K \star (\beta f))\|_{L^p(V)} &\leq \|K_1\|_{L^1(V-\text{Supp } \beta)} \|\beta f\|_{L^p(\text{Supp } \beta)} \\ &\quad + \|K_2\|_{L^2(V-\text{Supp } \beta)} \|\beta f\|_{L^p(\text{Supp } \beta)} \\ &\leq C_4 \|f\|_{L^p(\text{Supp } \beta)}. \end{aligned}$$

En regroupant ces inégalités, on trouve

$$\|\nabla v\|_{L^p(V)} \leq C_5 (\|f\|_{L^p(U)} + \|g\|_{L^p(U)} + \|h\|_{L^p(U)}),$$

puis, avec l'inégalité de Poincaré (ici 16.4.3),

$$\|v\|_{W^{1,p}(V)} \leq C_6 (\|f\|_{L^p(U)} + \|g\|_{L^p(U)} + \|h\|_{L^p(U)}).$$

Nous avons ensuite les égalités, en tant que distributions :

$$\begin{aligned} \Delta v &= \Delta K \star (\beta f) + \Delta K_1 \star (\beta g) + \Delta K_2 \star (\beta h) \\ &= \delta \star (\beta f) + \frac{\partial}{\partial s} \delta \star (\beta g) + \frac{\partial}{\partial t} \delta \star (\beta h) \\ &= \beta f + \frac{\partial(\beta g)}{\partial s} + \frac{\partial(\beta g)}{\partial t}. \end{aligned}$$

En particulier, on a donc $\Delta(u - v) = 0$ sur V . En utilisant la majoration obtenue pour la norme $W^{1,p}$ de u (appliquée à $u - v$) et celle pour la norme de v , on trouve

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(V)} &\leq \|u - v\|_{W^{1,p}(V)} + \|v\|_{W^{1,p}(V)} \\ &\leq C (\|f\|_{L^p(U)} + \|g\|_{L^p(U)} + \|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{L^p(U)}), \end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

De sorte que nous savons maintenant que, toute $u \in L^p_{\text{loc}}(U)$, solution de $\bar{\partial}u = f$ (pour $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$) est dans $W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$. Et plus précisément, il existe

une constante C (ne dépendant que de U , p et de l'ouvert relativement compact V tel que $\overline{V} \subset U$) avec

$$\|u\|_{W^{1,p}(V)} \leq C(\|f\|_{L^p(U)} + \|u\|_{L^p(U)}).$$

Nous pouvons continuer la démonstration (par récurrence sur k) du théorème 12.1.2. Supposons-le donc démontré pour k et démontrons-le pour $k+1$.

Si $u, f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$, alors pour un multi-indice α de longueur k , on a

$$\bar{\partial}\partial^\alpha u = \partial^\alpha \bar{\partial}u = \partial^\alpha f, \quad \text{avec } \partial^\alpha u \text{ et } \partial^\alpha f \in L_{\text{loc}}^p(U).$$

D'où il suit que $\partial^\alpha u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$, c'est-à-dire $u \in W_{\text{loc}}^{k+1,p}(U)$. Si V est un ouvert relativement compact tel que $\overline{V} \subset U$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k+1,p}(V)} &= \|u\|_{L^p(V)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{W^{k,p}(V)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{W^{k,p}(V)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(V)} + C_1 \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|_{W^{k,p}(U)} + C_2 \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\leq C(\|u\|_{L^p(U)} + \|f\|_{W^{k+1,p}(U)}) \end{aligned}$$

en utilisant les deux faits que

$$\bar{\partial} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s} \quad \text{et} \quad \bar{\partial} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

ainsi que l'hypothèse de récurrence. Et ceci termine la démonstration du théorème 12.1.2. $\square$

12.4. Régularité elliptique de l'opérateur de Floer (non linéaire), démonstrations

12.4.a. Comment déduire la proposition 12.1.4... du théorème 12.1.5 ? Supposons-le démontré. Si $u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ pour un $k \geq 1$, alors ce théorème implique que $u \in W_{\text{loc}}^{k+1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, puisque $\tilde{J}$ et h ont la régularité de u . Alors $u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ pour tout k , et u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en utilisant le fait que

$$\bigcap W_{\text{loc}}^{k,p} \subset \mathcal{C}^\infty$$

comme nous l'apprend le théorème de Rellich (ici 16.4.9).

Pour démontrer la deuxième assertion de la proposition 12.1.4, on montre d'abord :

Corollaire 12.4.1. Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ une solution de l'équation de Floer

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial u}{\partial t} + h = 0$$

(avec $\tilde{J} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \text{End}(\mathbf{R}^{2n}))$, $\tilde{J}^2 = -\text{Id}$ et $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$). Soient $V \subset U \subset \mathbf{R} \times S^1$ deux ouverts relativement compacts, soient $p > 2$, $k \geq 1$ et $c_0 > 0$ tels que

$$\|\tilde{J}\|_{W^{k,p}(U)} \leq c_0.$$

Alors il existe une constante c (dépendant de V , U , c_0 , k et p) telle que

$$\|u\|_{W^{k+1,p}(V)} \leq c(\|h\|_{W^{k,p}(U)} + \|u\|_{W^{k,p}(U)}).$$

Il s'agit de l'inégalité du théorème 12.1.5, pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Démonstration du corollaire 12.4.1. Les hypothèses du théorème 12.1.5 étant satisfaites pour tout k , nous avons l'inégalité désirée. $\square$

Supposons maintenant que (u_n) soit une suite convergeant vers u dans $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, chacune des u_n de même que u étant une solution de l'équation de Floer de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après ce qui précède. Notons $\tilde{J}_n(s, t) = J(u_n(s, t))$ et $h_n(s, t) = \text{grad } H_t(u_n(s, t))$, de sorte que (par définition de $\tilde{J}$ et h), la suite $(\tilde{J}_n)$ converge vers $\tilde{J}$ et (h_n) vers h , dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$, donc ces convergences ont lieu aussi dans L_{loc}^p .

Supposons démontré le fait que la suite (u_n) converge vers u dans $W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Alors $(\tilde{J}_n)$ converge vers $\tilde{J}$ et (h_n) vers h dans $W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, c'est une conséquence immédiate du fait que la convergence $W_{\text{loc}}^{1,p}$ implique la convergence $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$ pour $p > 2$.

Nous voulons montrer que (u_n) converge vers u également dans $W_{\text{loc}}^{k+1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Soient $V \subset U \subset \mathbf{R} \times S^1$ des ouverts relativement compacts. Des équations

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial u}{\partial t} + h = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_n}{\partial s} + \tilde{J}_n \frac{\partial u_n}{\partial t} + h_n = 0$$

on déduit que

$$\frac{\partial(u_n - u)}{\partial s} + \tilde{J}_n \frac{\partial(u_n - u)}{\partial t} + h_n - h + (\tilde{J} - \tilde{J}_n) \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Comme $\tilde{J}_n$ tend vers $\tilde{J}$ dans $W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, il existe $c_0 > 0$ tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad \|\tilde{J}_n\|_{W^{k,p}(U)} \leq c_0.$$

D'après le corollaire 12.4.1, il existe une constante $c > 0$ indépendante de n telle que

$$\begin{aligned} & \|u_n - u\|_{W^{k+1,p}(V)} \\ & \leq c \left(\|h_n - h\|_{W^{k,p}(U)} + \|u_n - u\|_{W^{k,p}(U)} + \left\| (\tilde{J}_n - \tilde{J}) \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{W^{k,p}(U)} \right). \end{aligned}$$

Comme $\tilde{J}_n$ tend vers $\tilde{J}$ et h_n tend vers h dans $W^{k,p}(\bar{U})$ et u est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que u_n tend vers u dans $W^{k+1,p}(V)$. Par récurrence, u_n tend

donc vers u dans $W_{\text{loc}}^{k,p}$ pour tout k , donc aussi dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$ (toujours d'après le théorème de Rellich 16.4.9).

12.4.b. Comment déduire le lemme 12.1.1 du théorème 12.1.5 et de la proposition 12.1.4. Compte tenu de la proposition 12.1.4, il suffit de montrer que (une sous-suite de) (u_n) admet une limite dans la topologie $W_{\text{loc}}^{1,p}$. Nous savons, grâce au théorème d'Ascoli, qu'il existe une sous-suite, encore notée (u_n) qui converge vers une limite u dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$. Il suffit de démontrer :

Lemme 12.4.2. *Pour tout V ouvert relativement compact de U , la suite (u_n) est de Cauchy pour la topologie $W_{\text{loc}}^{1,p}(V)$.*

Démonstration. Nous voulons appliquer l'égalité du théorème 12.1.5 à $u_n - u_m$ pour $\ell = 0$. L'énoncé étant local, on peut supposer que chacune des u_m est (définie sur V et) à valeurs dans l'espace numérique $\mathbf{R}^{2n}$. Montrons que les hypothèses de 12.1.5 sont satisfaites. On a, pour $m, n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_n - u_m)}{\partial s} + J(u_n) \frac{\partial(u_n - u_m)}{\partial t} \\ = (J(u_m) - J(u_n)) \frac{\partial u_m}{\partial t} + \text{grad } H_t(u_m) - \text{grad } H_t(u_n). \end{aligned}$$

Notons $\tilde{J} = J(u_n)$ et

$$h = (J(u_m) - J(u_n)) \frac{\partial u_m}{\partial t} + \text{grad } H_t(u_m) - \text{grad } H_t(u_n).$$

Vérifions les hypothèses de 12.1.5 pour $k = 0$. Tout d'abord, u_n et J sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc $\tilde{J} \in W^{1,p}(V)$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial J(u_n)}{\partial s} \right\|_{L^p(V)} &= \left\| dJ(u_n) \cdot \frac{\partial u_n}{\partial s} \right\|_{L^p(V)} \\ &\leq \sup_{w \in W} \|(dJ)_w\| \cdot \left\| \frac{\partial u_n}{\partial s} \right\|_{L^p(V)} \\ &\leq \sup_{w \in W} \|(dJ)_w\| \cdot M \cdot (\text{aire}(V))^{1/p}, \end{aligned}$$

une borne indépendante de n . La même majoration est valable pour $\|\partial J(u_n)/\partial t\|_{L^p(V)}$ et

$$\|J(u_n)\|_{L^p(V)} \leq \sup_{w \in W} \|J_w\| \cdot (\text{aire}(V))^{1/p}.$$

On trouve donc que $\|\tilde{J}\|_{W^{1,p}(V)} \leq c_0$. Puis, h est continue, donc est dans $L^p(V)$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 12.1.5 pour $k = 1$ et

$\ell = 0$: soit $V' \supset V$ un ouvert relativement compact dans U . L'inégalité de 12.1.5 s'écrit :

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq C \left(\|u_n - u_m\|_{L^p(V')} + \|h\|_{L^p(V')} \right).$$

Majorons le deuxième terme du membre de droite :

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^p(V')} &\leq \left\| (J(u_n) - J(u_m)) \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^p(V')} + \\ &\quad + \|\text{grad } H_t(u_m) - \text{grad } H_t(u_n)\|_{L^p(V')} \\ &\leq \sup_{w \in W} \|(dJ)_w\| \cdot \|u_n - u_m\|_{L^p(V')} \cdot M + \\ &\quad + \sup_{W \times S^1} \|d(\text{grad } H)\| \cdot \|u_n - u_m\|_{L^p(V')} \\ &\leq K \cdot \|u_n - u_m\|_{L^p(V')}. \end{aligned}$$

Or, la suite est convergente dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0$, donc convergente dans $L^p(V')$ et par conséquent elle y est de Cauchy. Cela implique qu'elle est également de Cauchy dans $W^{1,p}$, ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

Ainsi nous avons démontré le lemme de régularité 12.1.1, modulo le théorème 12.1.5 (*via* la proposition 12.1.4). Il reste à démontrer le théorème 12.1.5, ce que nous faisons maintenant.

12.4.c. Démonstration du théorème 12.1.5. Lorsque $\tilde{J}$ est (constante égale à) la structure complexe standard J_0 , on retrouve l'énoncé du théorème 12.1.2. Dans le cas général, la démonstration est plus compliquée et la condition $p > 2$ est essentielle (noter que $p > 1$ suffisait pour démontrer 12.1.2).

Étape 1, le cas $k = 0$. Nous démontrons d'abord le théorème pour $k = 0$ (et $\ell = 0$). En suivant la stratégie de démonstration du théorème 12.1.2, on aboutit vite à une difficulté : en appliquant l'opérateur $\partial/\partial s - \tilde{J}\partial/\partial t$ à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial u}{\partial t} + h = 0,$$

on trouve

$$\Delta u + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} u - \tilde{J} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} u + \frac{\partial h}{\partial s} - \tilde{J} \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

On ne peut pas appliquer la proposition 12.3.1 puisque, comme produit de fonctions L_{loc}^p ,

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{J} \cdot u \in L_{\text{loc}}^{p/2}$$

(seulement !) d'après l'inégalité de Hölder. Pour pouvoir quand même appliquer cette méthode, nous commençons par modifier l'énoncé du théorème 12.1.5 en :

Lemme 12.4.3. Soient U et V deux ouverts relativement compacts de $\mathbf{R} \times S^1$ avec $\overline{V} \subset U$ et soient $p, q, r \in \mathbf{R}^+$ tels que

$$p > 2, \quad r > 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Supposons que u soit solution (au sens des distributions) de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t} = f$$

(avec J structure presque complexe dans $W^{1,p}(U; \text{End}(\mathbf{R}^{2n}))$ telle que $\|J\|_{W^{1,p}(U)} \leq c_0$, $f \in L^r_{\text{loc}}(U; \mathbf{R}^{2n})$). Alors on a

- (1) Si $u \in L^q_{\text{loc}}(U; \mathbf{R}^{2n})$, alors $u \in W^{1,r}_{\text{loc}}(U; \mathbf{R}^{2n})$,
- (2) Il existe une constante $c > 0$, dépendant de c_0 , U et V , telle que

$$\|u\|_{W^{1,r}(V)} \leq c(\|f\|_{L^r(U)} + \|u\|_{L^q(U)}).$$

Remarques 12.4.4.

(1) Si $r < 2$, la relation entre p, q et r implique que $q < 2r/(2-r)$. Dans ce cas, le théorème 16.4.10 dit que $W^{1,r}_{\text{loc}} \subset L^q_{\text{loc}}$.

- (2) Dans l'énoncé du lemme 12.4.3, p et q peuvent prendre la valeur $+\infty$:
- si $p = +\infty$, $r = q < +\infty$,
 - si $q = +\infty$, $r = p < +\infty$.

Démonstration du lemme 12.4.3. En appliquant $\partial/\partial s - J\partial/\partial t$ à l'équation de l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{\partial J}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + J \frac{\partial J}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} - J \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial J}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial J}{\partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} - J \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial J}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial J}{\partial t} \left(f - \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{\partial f}{\partial s} - J \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

(en utilisant le fait que $J^2 = -\text{Id}$ et celui que u est solution). Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{\partial J}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t}(Jf) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial J}{\partial s} \cdot u \right) + \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial s} \cdot u + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial J}{\partial t} u \right) - \frac{\partial^2 J}{\partial s \partial t} \cdot u + \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t}(Jf) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial J}{\partial t} \cdot u + f \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial J}{\partial s} \cdot u - Jf \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et la continuité de J , on obtient que

$$\frac{\partial J}{\partial t} \cdot u + f \quad \text{et} \quad -\frac{\partial J}{\partial s} \cdot u - Jf \in L^r_{\text{loc}}(U)$$

(ceci s'appliquant aussi aux cas où p ou q est infini). Nous sommes donc dans les hypothèses de la proposition 12.3.1, ce qui nous autorise à appliquer ses conclusions, obtenant une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,r}(V)} &\leq c_1 \left(\left\| \frac{\partial J}{\partial t} \cdot u \right\|_{L^r(U)} + \|f\|_{L^r(U)} + \left\| \frac{\partial J}{\partial s} \cdot u \right\|_{L^r(U)} + \|Jf\|_{L^r(U)} \right) \\ &\leq \left(\|J\|_{W^{1,p}(U)} \|u\|_{L^q(U)} + \|f\|_{L^r(U)} \right. \\ &\quad \left. + \|J\|_{W^{1,p}(U)} \|u\|_{L^q(U)} + \|J\|_{L^\infty(U)} \|f\|_{L^r(U)} \right) \\ &\leq c_1 (2c_0 \|u\|_{L^q(U)} + (1 + kc_0) \|f\|_{L^r(U)}) \end{aligned}$$

(où nous avons utilisé la continuité de l'inclusion $W^{1,p}(U) \subset L^\infty(U)$). On en déduit l'existence d'une constante c (indépendante de u et de J) telle que

$$\|u\|_{W^{1,r}(V)} \leq c (\|f\|_{L^r(U)} + \|u\|_{L^q(U)}),$$

ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

Revenons donc à la démonstration du cas $k = 0$ du théorème 12.1.5.

Montrons d'abord que $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)$. L'application directe du lemme 12.4.3 donne seulement $u \in W^{1,p/2}(\mathbf{R} \times S^1)$. Pour obtenir la régularité désirée, il faudrait pouvoir appliquer ce lemme au cas où $q = \infty$, c'est-à-dire avec l'hypothèse $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R} \times S^1)$, ce qui est vrai si $u \in W_{\text{loc}}^{1,r}(\mathbf{R} \times S^1)$ pour un $r > 2$. Le nombre $r = p/2$ ne vérifie pas cette inégalité, mais un argument de bootstrapping permet d'augmenter la régularité de u et la valeur de r .

Supposons démontré que $u \in W_{\text{loc}}^{1,r}(\mathbf{R} \times S^1)$ pour un certain $r \in]1, 2[$. En utilisant l'injection de Sobolev du théorème 16.4.10, on en déduit que $u \in L_{\text{loc}}^q(\mathbf{R} \times S^1)$ pour $q = 2r/(2-r)$. Ensuite, en appliquant le lemme 12.4.3, on obtient que $u \in W_{\text{loc}}^{1,r'}(\mathbf{R} \times S^1)$ pour

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad \text{c'est-à-dire } r' = \frac{pq}{p+q} = \frac{2pr}{2p+2r-pr}$$

(h est dans L_{loc}^p et en particulier dans $L_{\text{loc}}^{r'}$ pour $1 < r' \leq p$). On voit que, si $p > 2$, on a $r' > r$. La condition $p > 2$ est donc essentielle pour pouvoir améliorer la régularité de u . Considérons donc la suite (r_m) avec

$$r_0 \in]1, 2[, \quad r_0 \leq \frac{p}{2}, \quad \text{et} \quad r_{m+1} = \frac{2pr_m}{2p+2r_m-pr_m},$$

de sorte que, si $r_m < 2$, alors $r_{m+1} > r_m$ et $u \in W^{1,r_{m+1}}(\mathbf{R} \times S^1)$. Si $r_m \in]1, 2[$ pour tout m , alors r_m , suite croissante, converge vers une limite $\ell \in]1, 2[$... ce que la relation de récurrence interdit, toujours parce que $p > 2$.

Donc, pour un certain m , on a $r_m < 2 \leq r_{m+1}$ et donc $u \in W_{\text{loc}}^{1,r}(\mathbf{R} \times S^1)$ pour tout r tel que $1 < r \leq 2$. D'autre part,

$$r' - 2 = \frac{2pr}{2p + 2r - pr} - 2 = \frac{4[(p-1)(r-1) - 1]}{2p + 2r - pr}$$

est strictement positif lorsque $r \in]1, 2]$ est suffisamment proche de 2. Il s'ensuit que

$$u \in W_{\text{loc}}^{1,r'}(\mathbf{R} \times S^1) \subset L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbf{R} \times S^1) \quad \text{et donc que } u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)$$

en appliquant le lemme 12.4.3.

Montrons maintenant l'inégalité

$$\|u\|_{W^{1,p}(V)} \leq c(\|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{L^p(U)}).$$

Pour montrer que $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1)$, nous avons appliqué successivement le lemme 12.4.3 pour des triplets

$$(p, q_0, r_0), (p, q_1, r_1), \dots, (p, q_m, r_m), (p, q_{m+1}, r_{m+1}), (p, +\infty, p)$$

satisfaisant aux propriétés :

– les r_m croissent et plus précisément

$$1 < r_0 < r_1 < \dots < r_m < 2 < r_{m+1} < p,$$

– de plus $q_0 = p$, et $q_i = 2r_{i-1}/(2 - r_{i-1})$ pour tout $i \geq 1$.

Chaque application du lemme 12.4.3 fournit une inégalité entre les normes $W^{1,r}$, L^r et L^q . Pour écrire ces inégalités, choisissons des ouverts relativement compacts $(V_i)_{i=0,\dots,m}$ tels que

$$V \subset V_{m+1} \subset V_m \subset \dots \subset V_0 \subset U.$$

La dernière application du lemme 12.4.3, pour le triplet $(p, +\infty, p)$, donne

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(V)} &\leq k_1(\|h\|_{L^p(V_{m+1})} + \|u\|_{L^{\infty}(V_{m+1})}) \\ &\leq k_2(\|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{W^{1,r_{m+1}}(V_{m+1})}) \end{aligned}$$

avec l'inclusion continue

$$W^{1,r_{m+1}}(V_{m+1}) \hookrightarrow L^{\infty}(V_{m+1}), \quad \text{puisque } r_{m+1} > 2.$$

Ensuite, pour $i \in \{1, \dots, m+1\}$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,r_i}(V_i)} &\leq c_i(\|h\|_{L^{r_i}(V_{i-1})} + \|u\|_{L^{q_i}(V_{i-1})}) \\ &\leq C_i(\|h\|_{L^p(V_{i-1})} + \|u\|_{W^{1,r_{i-1}}(V_{i-1})}) \end{aligned}$$

avec les inclusions continues

$$L^p(V_{i-1}) \subset L^{r_i}(V_{i-1}) \quad \text{pour } r_i < p \text{ et } \bar{V}_{i-1} \text{ compact}$$

$$\text{et } W^{1,r_{i-1}}(V_{i-1}) \subset L^{q_i}(V_{i-1}) \quad \text{pour } q_i = \frac{2r_{i-1}}{2 - r_{i-1}} \text{ et } \bar{V}_{i-1} \text{ compact.}$$

Donc, pour tout $i = 1, \dots, m+1$, on a

$$\|u\|_{W^{1,r_i}(V_i)} \leq C_i(\|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{W^{1,r_{i-1}}(V_{i-1})}).$$

En mettant toutes ces inégalités ensemble, on trouve

$$\|u\|_{W^{1,r_{m+1}}(V_{m+1})} \leq k_3(\|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{W^{1,r_0}(V_0)}),$$

ce qui, avec l'égalité

$$\|u\|_{W^{1,p}(V)} \leq k_2(\|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{W^{1,r_{m+1}}(V_{m+1})})$$

obtenue ci-dessus, donne

$$\|u\|_{W^{1,p}(V)} \leq k_4(\|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{W^{1,r_0}(V_0)}).$$

Enfin, la première application du lemme 12.4.3 pour $(p, q_0, r_0) = (p, p, r_0)$ donne

$$\|u\|_{W^{1,r_0}(V_0)} \leq c_0(\|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{L^p(U)}),$$

ce qui, avec l'inégalité précédente, implique

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} \leq c(\|h\|_{L^p(U)} + \|u\|_{L^p(U)}),$$

ce que nous voulions démontrer.

Étape 2, le cas $k = 1$. Montrons que $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbf{R} \times S^1)$. Notons pour simplifier $v = \partial u / \partial s$ (et $w = \partial u / \partial t$). Alors v est solution de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial v}{\partial t} + g = 0$$

où l'on a posé

$$g(s, t) = \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial s}(s, t) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t).$$

La situation est différente de celle considérée page 440 puisque le g apparaissant ici est seulement dans $L_{\text{loc}}^{p/2}(\mathbf{R} \times S^1)$ (toujours Hölder) et plus dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R} \times S^1)$. Nous pouvons appliquer le lemme 12.4.3 pour le triplet (p, q_0, r_0) avec $q_0 = p$ et $r_0 \in]1, 2[$, $r_0 = p/2$ comme dans la démonstration précédente et de conclure que $v \in W_{\text{loc}}^{1,r_0}(\mathbf{R} \times S^1)$. De manière analogue, on pourra démontrer que $w \in W_{\text{loc}}^{1,r_0}(\mathbf{R} \times S^1)$. En poursuivant comme ci-dessus, on obtient

$$v, w \in L_{\text{loc}}^{q_1}(\mathbf{R} \times S^1) \quad \text{pour } q_1 = \frac{2r_0}{2 - r_0}$$

(c'est l'injection de Sobolev). Donc, par Hölder,

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{\text{loc}}^{r_1}(\mathbf{R} \times S^1), \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r_1}.$$

Par conséquent, $g \in L_{\text{loc}}^{r_1}$. On peut alors appliquer de nouveau le lemme 12.4.3 au triplet (p, q_1, r_1) et obtenir que v et w sont dans $W^{1,r_1}(\mathbf{R} \times S^1)$.

Nous pouvons donc appliquer successivement le lemme 12.4.3 comme ci-dessus, puisque chaque application améliore l'intégrabilité de g (le r pour lequel $g \in L^r$). Finalement, nous obtenons que

$$v = \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial u}{\partial t} \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1),$$

autrement dit que $u \in W^{2,p}(\mathbf{R} \times S^1)$, ce que nous voulions démontrer. La deuxième étape, le cas où $k = 1$, est donc terminée.

Étape 3, la récurrence sur k . Supposons donc le théorème 12.1.5 démontré pour k et démontrons-le pour $k + 1$. Considérons

$$\tilde{J} \in W_{\text{loc}}^{k+1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \text{End}(\mathbf{R}^{2n})), \quad \text{avec} \quad \tilde{J}^2 = -\text{Id}, \quad \tilde{h} \in W_{\text{loc}}^{1,k+1}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Soit $u \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ une solution faible de

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial u}{\partial t} + h = 0.$$

Par l'hypothèse de récurrence, $u \in W_{\text{loc}}^{k+1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Nous voulons montrer que $u \in W^{k+2,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, nommons ses dérivées comme ci-dessus,

$$v = \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Nous avons vu que v satisfait à

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial s} = 0.$$

Pour pouvoir lui appliquer l'hypothèse de récurrence, il nous faut savoir que

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1).$$

Nous obtiendrons ceci à partir d'un résultat plus général :

Lemme 12.4.5. *Soient $p > 2$ et $k \geq 1$. Si f et $g \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$, alors $fg \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$ et, pour tout ouvert relativement compact V , il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\|fg\|_{W^{k,p}(V)} \leq K \|f\|_{W^{k,p}(V)} \|g\|_{W^{k,p}(V)}.$$

Démonstration. C'est au fond une conséquence de la règle de Leibniz. Soit V un ouvert relativement compact. On procède par récurrence. Soit donc $k = 1$

pour commencer. On utilise l'injection continue $W^{1,p}(V) \subset L^\infty(V)$. On a

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^p(V)} &\leq \|f\|_{L^p(V)} \|g\|_{L^\infty(V)} \\
&\leq K_1 \|f\|_{L^p(V)} \|g\|_{W^{1,p}(V)} \\
&\leq K_1 \|f\|_{W^{1,p}(V)} \|g\|_{W^{1,p}(V)}, \\
\left\| \frac{\partial(fg)}{\partial s} \right\|_{L^p(V)} &\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial s} g \right\|_{L^p(V)} + \left\| f \frac{\partial g}{\partial s} \right\|_{L^p(V)} \\
&\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|_{L^p(V)} \|g\|_{L^\infty(V)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial s} \right\|_{L^p(V)} \|f\|_{L^\infty(V)} \\
&\leq K_2 \|f\|_{W^{1,p}(V)} \|g\|_{W^{1,p}(V)},
\end{aligned}$$

une inégalité analogue étant vraie pour la dérivée de fg par rapport à t . Le cas $k = 1$ est ainsi démontré. Supposons l'énoncé vrai pour k . Nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial(fg)}{\partial s} \right\|_{W^{k,p}(V)} &\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial s} g \right\|_{W^{k,p}(V)} + \left\| f \frac{\partial g}{\partial s} \right\|_{W^{k,p}(V)} \\
&\leq K_3 \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|_{W^{k,p}(V)} \|g\|_{W^{k,p}(V)} + K_4 \|f\|_{W^{k,p}(V)} \left\| \frac{\partial g}{\partial s} \right\|_{W^{k,p}(V)} \\
&\leq K \|f\|_{W^{k+1,p}(V)} \|g\|_{W^{k+1,p}(V)}
\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. L'inégalité analogue est vraie pour la dérivée par rapport à t . Donc

$$\|fg\|_{W^{k+1,p}(V)} \leq K \|f\|_{W^{k+1,p}(V)} \|g\|_{W^{k+1,p}(V)}$$

et le lemme est démontré. $\square$

Grâce à ce lemme, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence et obtenir que

$$v = \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial u}{\partial t} \in W_{\text{loc}}^{k+1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}),$$

donc $u \in W_{\text{loc}}^{k+2,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$.

Il reste à démontrer l'inégalité sur les normes. Soient U et V des ouverts relativement compacts avec $\bar{V} \subset U$ et soit $\ell \in \{0, \dots, k\}$. Pour $\ell = 0$, l'inégalité désirée a été démontrée ci-dessus. Pour $\ell \geq 1$, appliquons l'hypothèse de récurrence à v (et de même à w) pour $\ell - 1$, obtenant

$$\|v\|_{W^{\ell,p}(V)} \leq c \left(\left\| \frac{\partial h}{\partial s} \right\|_{W^{\ell-1,p}(U)} + \left\| \frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{W^{\ell-1,p}(U)} + \|v\|_{W^{\ell-1,p}(U)} \right).$$

Pour $\ell \geq 2$, on déduit de cette inégalité, en appliquant le lemme 12.4.5

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{\ell,p}(V)} &\leq c \left(\|h\|_{W^{\ell,p}(U)} + K \left\| \frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} \right\|_{W^{\ell-1,p}(U)} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{W^{\ell-1,p}(U)} \right. \\ &\quad \left. + \|v\|_{W^{\ell-1,p}(U)} \right) \\ &\leq (\|h\|_{W^{\ell,p}(U)} + K c_0 \|u\|_{W^{\ell,p}(U)} + \|u\|_{W^{\ell,p}(U)}). \end{aligned}$$

Pour $\ell = 1$, on utilise que $\tilde{J} \in W^{k+1,p}(V)$ avec $k \geq \ell = 1$ pour déduire que $\partial \tilde{J} / \partial s \in W^{1,p}$ et donc

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(U)} &\leq \left\| \frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} \right\|_{L^\infty(U)} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(U)} \\ &\leq K \left\| \frac{\partial \tilde{J}}{\partial s} \right\|_{W^{1,p}(U)} \|u\|_{W^{1,p}(U)} \\ &\leq K \|\tilde{J}\|_{W^{2,p}(U)} \|u\|_{W^{1,p}(U)} \\ &\leq K c_0 \|u\|_{W^{1,p}(U)} \end{aligned}$$

puisque $\|\tilde{J}\|_{W^{k+1,p}(U)} \leq c_0$. Par conséquent, on obtient aussi

$$\|v\|_{W^{1,p}(V)} \leq c(\|h\|_{W^{1,p}(U)} + K c_0 \|u\|_{W^{1,p}(U)} + \|u\|_{W^{1,p}(U)}).$$

On a donc démontré, pour tout $\ell = 0, \dots, k$ (et pour w comme pour v) une majoration de la forme

$$\|v\|_{W^{\ell,p}(V)} \leq c(\|h\|_{W^{\ell,p}(U)} + \|u\|_{W^{\ell,p}(U)}).$$

En écrivant

$$\|u\|_{W^{\ell+1,p}(V)} \leq \|u\|_{W^{\ell,p}(V)} + \|v\|_{W^{\ell,p}(V)} + \|w\|_{W^{\ell,p}(V)}$$

et en utilisant toutes ces majorations, on démontre l'inégalité voulue, terminant ainsi la démonstration du théorème 12.1.5.

CHAPITRE 13

LES LEMMES SUR LA DÉRIVÉE SECONDE DE L'OPÉRATEUR DE FLOER ET AUTRES TECHNICITÉS

Dans ce chapitre, nous démontrons un certain nombre de résultats techniques utilisés dans ce texte. Si tous ces détails font ici l'objet d'une description précise, c'est qu'ils ne manqueront pas d'éclairer certains passages complexes, mais essentiels, de chapitres précédents⁽¹⁾.

13.1. Versions de l'opérateur de Floer

Pour ce chapitre technique, nous ferons une distinction dans les notations entre l'opérateur

$$\mathcal{F}_\rho : T_{w_\rho} \mathcal{P}^{1,p}(x, z) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; TW)$$

défini par

$$\mathcal{F}_\rho(X) = \mathcal{F}(\exp_{w_\rho}(X)) = \left(\frac{\partial}{\partial s} + J \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H \right) (\exp_{w_\rho}(X))$$

et le même opérateur, écrit dans les trivialisations, que nous noterons

$$F_\rho : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Nous utiliserons aussi l'opérateur (non linéaire) défini au § 9.4 pour $\rho \geq \rho_0$ et

$$F : [\rho_0, +\infty[\times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

est défini par $F(\rho, Y) = F_\rho(Y)$. Rappelons que F_ρ est l'opérateur $\mathcal{F}_\rho$, après trivialisations.

La source de $\mathcal{F}_\rho$ est formée des champs de vecteurs tangents à W le long de w_ρ qui sont dans $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, via la composition

$$\mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow TW \hookrightarrow T_W \mathbf{R}^m \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbf{R}^m.$$

⁽¹⁾D'après [46, Chap. LXIII].

Ainsi $\mathcal{F}_\rho(X)$ est un champ de vecteurs tangents à W le long de $\exp_{w_\rho}(X)$, qui est dans $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ via l'application ci-dessus. Pour définir F_ρ , on utilise les trivialisations décrites au § 9.4 (et schématisées sur la figure 5 du chapitre 9), pour vérifier qu'elle est bien définie, il suffit d'appliquer le lemme 8.2.4 pour affirmer que

- si $y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, alors $\sum y_i Z_i^\rho \in T_{w_\rho} \mathcal{P}^{1,p}(x, z)$ et
- si $Y \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; TW)$, alors $(g(Y, Z_j^{\rho,x}))_j \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$.

13.2. Les deux lemmes sur dF

Nous voulons démontrer les deux lemmes :

Lemme (lemme 9.4.8). *Soit $r_0 > 0$. Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $\rho \geq \rho_0$ et pour tout $Z \in \overline{B}(0, r_0) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on ait*

$$\|(dF_\rho)_Z - (dF_\rho)_0\|^{\text{op}} \leq K \|Z\|_{W^{1,p}}.$$

Lemme (lemme 9.4.16). *Soit $r_0 > 0$. Il existe une constante $M > 0$ (indépendante de ρ) telle que pour tout $\rho \geq \rho_0$ et tout $Z \in \overline{B}(0, r_0) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, on ait*

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, Z) - \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, 0) \right\|_{L^p} \leq M \|Z\|_{W^{1,p}}.$$

Remarque 13.2.1. Dans l'énoncé du lemme 9.4.8, $\|\cdot\|^{\text{op}}$ désigne la norme opératorielle. Une assertion qui implique les deux lemmes est que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et que la norme opératorielle $\|d^2 F\|^{\text{op}}$ est bornée sur $[\rho_0, +\infty[\times \overline{B}(0, r_0)$.

Nous commençons par quelques résultats élémentaires que nous utiliserons dans la démonstration. Il y a d'abord le lemme 8.2.4 (celui qui affirme que le produit d'une fonction $W^{1,p}$ par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ bornée est une fonction $W^{1,p}$). De même nature est le premier des deux lemmes qui suivent.

Lemme 13.2.2. *Soit $p > 2$ et soient f et g deux éléments de $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$. Il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\|fg\|_{L^p} \leq K \|f\|_{L^p} \|g\|_{W^{1,p}}.$$

Démonstration. Le fait que p soit supérieur à 2 permet d'utiliser l'injection continue

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R})$$

qui est telle que $\|h\|_\infty \leq K \|h\|_{W^{1,p}}$ pour une certaine constante $K > 0$. On en déduit

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbf{R} \times S^1} |fg|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\int_{\mathbf{R} \times S^1} |f|^p \|g\|_\infty^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|g\|_\infty \|f\|_{L^p} \leq K \|f\|_{L^p} \|g\|_{W^{1,p}}. \end{aligned} \quad \square$$

Lemme 13.2.3. Soient W une variété compacte et

$$A : W \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^m, \quad B : W \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

deux applications $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que, pour tous $p \in W$ et $X \in \mathbf{R}^m$, $A(p, X, \cdot)$ est linéaire et $B(p, X, \cdot, \cdot)$ bilinéaire. Pour tout $r_1 > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $p \in W$ et $X \in \overline{B}(0, r_1) \subset \mathbf{R}^m$, on ait

- (1) pour tout $v \in \mathbf{R}^m$, $\|A(p, X, v)\| \leq C \|v\|$;
- (2) pour tous $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^m$,

$$\|A(p, X, v_2) - A(p, 0, v_1)\| \leq C (\|X\| \|v_1\| + \|v_2 - v_1\|) ;$$

- (3) pour tous $v, Y \in \mathbf{R}^m$, $\|B(p, X, v, Y)\| \leq C \|v\| \|Y\|$;
- (4) pour tous $v, Y_1, Y_2 \in \mathbf{R}^m$,

$$\|B(p, X, v, Y_2) - B(p, 0, v, Y_1)\| \leq C (\|X\| \|v\| \|Y_1\| + \|v\| \|Y_2 - Y_1\|) .$$

Démonstration. Elle est directe et élémentaire.

- (1) On considère A comme une application

$$A : W \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^m).$$

Comme elle est continue, l'image du compact $W \times \overline{B}(0, r_1)$ est compacte, donc bornée pour la norme opératorielle, ce qui démontre la première inégalité.

- (2) Grâce au fait que A est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\|A(p, X) - A(p, 0)\|^{\text{op}} \leq \sup_{t \in [0,1]} \|(dA)_{p,tX}\| \|X\| \leq C \|X\| .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|A(p, X, v_2) - A(p, 0, v_1)\| &\leq \|A(p, X, v_2 - v_1)\| + \|A(p, X, v_1) - A(p, 0, v_1)\| \\ &\leq C \|v_2 - v_1\| + \|A(p, X) - A(p, 0)\|^{\text{op}} \|v_1\| \\ &\text{on a utilisé le point (1)} \\ &\leq C \|v_2 - v_1\| + C \|X\| \|v_1\| . \end{aligned}$$

- (3) On considère B comme une application de $W \times \mathbf{R}^m$ dans les applications bilinéaires sur $\mathbf{R}^m$ et on procède comme au (1).

(4) On écrit

$$\begin{aligned} & \|B(p, X, v, Y_2) - B(p, 0, v, Y_1)\| \\ & \leq \|B(p, X, v, Y_2 - Y_1)\| + \|B(p, X, v, Y_1) - B(p, 0, v, Y_1)\| \end{aligned}$$

et on procède comme au (2). $\square$

13.3. L'opérateur $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$

Nous voulons construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) & \xrightarrow{\tilde{F}_\rho} & L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \\ i_\rho \downarrow & & \uparrow p_\rho \\ W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) & \xrightarrow{(\text{Id}, \tilde{\mathcal{F}}_\rho)} & W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \times L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \end{array}$$

c'est-à-dire écrire, dans un but de simplification des calculs,

$$F_\rho(y) = p_\rho(i_\rho(y), \tilde{\mathcal{F}}_\rho(i_\rho(y)))$$

pour certaines applications à définir i_ρ , p_ρ , $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$.

Commençons par définir i_ρ , par

$$i_\rho(y) = \sum_{i=1}^{2n} y_i Z_i^\rho.$$

C'est un opérateur linéaire, dont il est aisé d'évaluer la norme :

$$\begin{aligned} \|i_\rho(y)\|_{W^{1,p}} &= \left\| \sum y_i Z_i^\rho \right\|_{W^{1,p}} \leq \sum \|y_i Z_i^\rho\|_{W^{1,p}} \\ &\leq \sum \|y_i\|_{W^{1,p}} \|Z_i^\rho\|_{\mathcal{C}^1} \quad (\text{on a appliqué le lemme 8.2.4}) \\ &\leq \sup_i \|Z_i^\rho\|_{\mathcal{C}^1} \sum \|y_i\|_{W^{1,p}} \leq 2n \sup_i \|Z_i^\rho\|_{\mathcal{C}^1} \|y\|_{W^{1,p}} \\ &= M \|y\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

puisque en effet le choix de Z_i^ρ fait que $\sup_i \|Z_i^\rho\| < \infty$:

- sur $[-1, 1] \times S^1$, par compacité,
- sur $\{|s| \geq 1\} \times S^1$, la norme $\mathcal{C}^1$ de Z_i^ρ est majorée par la plus grande des deux normes $\|Z_i^u\|_{\mathcal{C}^1}$ et $\|Z_i^v\|_{\mathcal{C}^1}$.

Remarquons que ce dernier majorant (pour $|s| \geq 1$) est indépendant de ρ . On peut aussi utiliser un majorant indépendant de ρ sur $s \in [-1, 1]$ car Z_i^ρ est défini et lisse sur le compact $[\rho_0, +\infty) \times [-1, 1] \times S^1$.

Finalement, on a bien défini un opérateur i_ρ , linéaire continu de norme opératorielle bornée par une constante C_1 indépendante de ρ .

Définissons maintenant $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$. En considérant TW comme un sous-fibré de $T_W \mathbf{R}^m$, on voit $T_{w_\rho} \mathcal{P}^{1,p}(x, z)$ comme un sous-espace de $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$. Nous allons définir l'opérateur $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$ comme un prolongement de $\mathcal{F}_\rho$ à l'espace $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$. Rappelons que nous utilisons les notations énumérées au début du chapitre 8. La variété symplectique W est donc munie d'une structure presque complexe J compatible avec la forme symplectique ω et de la métrique g que ces deux structures définissent. Comme toujours, W est plongée dans un espace $\mathbf{R}^m$ (pour m assez grand) et $T_W \mathbf{R}^m$ la restriction de $T\mathbf{R}^m$ à W , isomorphe au fibré trivial $W \times \mathbf{R}^m$. Nous avons prolongé le produit scalaire défini sur TW par la métrique g en un produit scalaire $\tilde{g}$ sur $T_W \mathbf{R}^m$. L'application exponentielle est une application $\mathcal{C}^\infty$

$$\exp : TW \longrightarrow W$$

qui vérifie (voir au besoin le § 14.5)

$$\begin{cases} \exp(p, 0) = \exp_p(0) = p \\ (d\exp_p)_0 : T_0(T_p W) \cong T_p W \rightarrow W \text{ est l'identité.} \end{cases}$$

Notons

$$\pi_p : \mathbf{R}^m = T_p \mathbf{R}^m \longrightarrow T_p W$$

la projection orthogonale et définissons l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{\exp} : W \times \mathbf{R}^m &\longrightarrow W \\ (p, X) &\longmapsto \exp_p(\pi_p(X)). \end{aligned}$$

C'est une application $\mathcal{C}^\infty$ qui prolonge l'exponentielle (définie sur TW) au fibré $T_W \mathbf{R}^m$. Prolongeons également la structure presque complexe J : $TW \rightarrow TW$ en $\tilde{J} : T_W \mathbf{R}^m \rightarrow T_W \mathbf{R}^m$ par

$$\tilde{J}_p(X) = J_p(\pi_p(X)).$$

On peut enfin définir $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$:

$$\tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) = \left(\frac{\partial}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H_t \right) \widetilde{\exp}(w_\rho, X) = \tilde{\mathcal{F}} \circ \widetilde{\exp}(w_\rho, X).$$

Il est clair que $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$ est un prolongement de $\mathcal{F}_\rho$. Il est vrai aussi, même si c'est un peu moins clair, que $\tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, et donc que

$$\mathcal{F}_\rho(X) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; TW).$$

C'est ce qu'affirme le lemme :

Lemme 13.3.1. *Si $X \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, alors $\tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$.*

Démonstration. On a

$$\tilde{\mathcal{F}}_\rho(0) = \mathcal{F}_\rho(0) = \mathcal{F}(w_\rho) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$$

puisque $\mathcal{F}(w_\rho)(s, t)$ est identiquement nulle pour $|s| \geq 1$ (w_ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et coïncide avec u ou v qui sont des solutions de l'équation de Floer). Il suffit donc de montrer que

$$\tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) - \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m).$$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) &= \frac{\partial}{\partial s} \widetilde{\exp}(w_\rho, X) + \tilde{J}_{\widetilde{\exp}(w_\rho, X)} \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\exp}(w_\rho, X) + \text{grad } H_t(\widetilde{\exp}(w_\rho, X)) \\ &= D_1 \widetilde{\exp}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right) + D_2 \widetilde{\exp}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right) \\ &\quad + \tilde{J}_{\widetilde{\exp}(w_\rho, X)} \cdot \left(D_1 \widetilde{\exp}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) + D_2 \widetilde{\exp}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) \right) \\ &\quad + \text{grad } H_t(\widetilde{\exp}(w_\rho, X)). \end{aligned}$$

Comme $X \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ a été choisi continu, on a aussi

$$X \in L^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m),$$

donc il existe $r_1 > 0$ tel que $\|X(s, t)\| \leq r_1$ pour tous $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$. Fixons un couple (s, t) et appliquons le lemme 13.2.3 (et plus précisément son point (3)) successivement lorsque $A(p, X)(\cdot)$ est l'une des applications

- d'abord $D_1 \widetilde{\exp}(p, X)(\cdot)$,
- puis $D_2 \widetilde{\exp}(p, X)(\cdot)$,
- puis encore $\tilde{J}_{\widetilde{\exp}(p, X)} D_1 \widetilde{\exp}(p, X)(\cdot)$,
- et enfin $\tilde{J}_{\widetilde{\exp}(p, X)} D_2 \widetilde{\exp}(p, X)(\cdot)$ (avec ici $p = w_\rho(s, t)$ et $X = X(s, t)$).

Toujours en application du lemme 13.2.3, on a aussi

$$\begin{aligned} &\|\text{grad } H_t \widetilde{\exp}(p, X) - \text{grad } H_t \widetilde{\exp}(p, 0)\| \\ &\leq \sup_{r \in [0, 1]} \|d_{rX} \text{grad } H_t \circ \widetilde{\exp}\| \|X\| \leq C \|X\|. \end{aligned}$$

On obtient finalement, en calculant en (s, t) fixé

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) - \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0)\| &\leq C \left(\|X\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\| \right. \\ &\quad \left. + \|X\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| + \|X\| \right) \\ &\leq k \left(\|X(s, t)\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial s}(s, t) \right\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t}(s, t) \right\| \right) \end{aligned}$$

puisque les normes de $\partial w_\rho / \partial s$ et $\partial w_\rho / \partial t$ sont uniformément bornées (ceci grâce à la décroissance exponentielle de u et v). On a finalement

$$\|\tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) - \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0)\|_{L^p} \leq 3k \|X\|_{W^{1,p}} < +\infty \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m). \quad \square$$

Remarque 13.3.2. Le fait, annoncé au § 8.2.d, que $\mathcal{F}(\exp_w X)$ est bien dans L^p , est ainsi vérifié. Notons que, dans le contexte du chapitre 8, w ne provient pas du recollement de deux solutions, donc la preuve proposée ci-dessus du fait que $\mathcal{F}(\exp_w(0)) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ n'est pas valable. Elle est conséquence du fait que $w \in \mathcal{C}_\infty^\infty(x, y)$ (voir le § 8.2.c), autrement dit, de la décroissance exponentielle de

$$\frac{\partial w}{\partial s} \text{ et } \frac{\partial w}{\partial t} - X_H(w),$$

qui entraîne immédiatement que $\mathcal{F}(\exp_w(0)) = \mathcal{F}(w) \in L^p$.

Pour achever la construction du diagramme commutatif annoncé, il reste à définir l'application p_ρ . Rappelons que la j -ème composante de $F_\rho(y)$ est définie à l'aide du transport parallèle par

$$(F_\rho(y))_j = g(\mathcal{F}_\rho(Y), Z_j^{\rho, Y})$$

où $Y = \sum_{i=1}^{2n} y_i Z_i^\rho$ et $Z_j^{\rho, Y}$ est le résultat du transport parallèle de Z_j^ρ le long du chemin géodésique $r \mapsto \exp_{w_\rho}(rY)$. On peut considérer ce transport parallèle comme une application

$$\mathcal{T} : TW \oplus TW \longrightarrow TW$$

qui, à $p \in W$, $Y, Z \in T_p W$, associe $\mathcal{T}_p(Y, Z)$, le transport parallèle de Z le long de $r \mapsto \exp_p(rY)$. Comme on l'a fait ci-dessus pour la métrique g , on prolonge $\mathcal{T}$ en

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{T}} : W \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R}^m \\ (p, Y, Z) &\longmapsto \mathcal{T}_p(\pi_p(Y), \pi_p(Z)). \end{aligned}$$

On en déduit une application

$$\begin{aligned} P : W \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (p, X, Y, Z) &\longmapsto \widetilde{g}_p(\widetilde{\mathcal{T}}(X, Z), Y) \end{aligned}$$

qui est linéaire en Y et Z et qui, pour $X = 0$ est simplement

$$P(p, 0, Z, Y) = \widetilde{g}_p(Z, Y).$$

Nous pouvons enfin définir

$$p_\rho : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \times L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

par (pour $j = 1, \dots, 2n$)

$$(p_\rho(X, Y))_j = P(w_\rho, X, Z_j^\rho, Y) = \widetilde{g}_{w_\rho}(\widetilde{\mathcal{T}}(X, Z_j^\rho), Y).$$

Par construction des Z_j^ρ , on a

$$\sup_{s,t} \|Z_j^\rho(s, t)\| < +\infty.$$

Comme X est dans $W^{1,p}$, on a $\sup_{s,t} \|X(s,t)\| < +\infty$. Enfin, comme $\tilde{\mathcal{T}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en application des lemmes 8.2.4 et 13.2.3, on a

$$\|p_\rho(X,Y)\| \leq C \|Z\| \cdot \|Y\|_{L^p}$$

et donc

$$p_\rho(X,Y) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}).$$

Enfin on a clairement $F_\rho(y) = p_\rho(i_\rho(y), \tilde{\mathcal{F}}_\rho(i_\rho(y)))$, comme on le souhaitait.

13.4. Démonstration des deux lemmes : le premier

Démontrons enfin les deux lemmes en vue.

Démonstration du lemme 9.4.8. Pour appliquer la formule précédente, on a besoin d'un résultat qui permette d'affirmer que la propriété énoncée dans l'énoncé 9.4.8 est stable par composition des opérateurs. C'est ce que fait le lemme suivant, dans lequel φ et ψ désignent des applications entre espaces de Banach, pas forcément linéaires mais différentiables (nous désignerons souvent ce genre d'objet par le mot « opérateur »).

Lemme 13.4.1. *Soient G , H et K des espaces de Banach, $\varphi : G \rightarrow H$ et $\psi : H \rightarrow K$ des applications différentiables. On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ et $k_i > 0$ (pour $i = 1, \dots, 4$) tels que*

- (1) *pour tout $Z \in \overline{B}(0, r_0) \subset G$, $\|(d\varphi)_Z - (d\varphi)_0\|^{\text{op}} \leq k_1 \|Z\|$,*
- (2) *$\|(d\varphi)_0\|^{\text{op}} \leq k_2$,*
- (3) *pour tout $Z \in \overline{B}(0, r_0) \subset G$,*

$$\|(d\psi)_{\varphi(Z)} - (d\psi)_{\varphi(0)}^{\text{op}}\| \leq k_3 \|\varphi(Z) - \varphi(0)\|,$$

- (4) *$\|(d\psi)_{\varphi(0)}\|^{\text{op}} \leq k_4$.*

Alors il existe $k > 0$ dépendant uniquement des k_i et de r_0 , tel que l'on ait, pour tout $Z \in \overline{B}(0, r_0)$,

$$\|(d\psi)_Z \circ \varphi - (d\psi)_0 \circ \varphi\|^{\text{op}} \leq k \|Z\|.$$

Nous allons appliquer ce lemme à des opérateurs φ et ψ qui dépendent du paramètre ρ , c'est pourquoi nous avons fait figurer les conditions sur les normes opératoriels des différentielles de ces opérateurs dans les hypothèses : on voudra obtenir une constante k qui ne dépend pas de ρ .

Démonstration. Soit $v \in G$. On a

$$\begin{aligned}
\|(d(\psi\varphi))_Z(v) - (d(\psi\varphi))_0(v)\| &= \|(d\psi)_{\varphi(Z)}((d\varphi)_Z(v)) - (d\psi)_{\varphi(0)}((d\varphi)_0(v))\| \\
&\leq \|(d\psi)_{\varphi(Z)}((d\varphi)_Z(v)) - (d\psi)_{\varphi(0)}((d\varphi)_Z(v))\| \\
&\quad + \|(d\psi)_{\varphi(0)}((d\varphi)_Z(v)) - (d\varphi)_0(v)\| \\
&\leq k_3 \|\varphi(Z) - \varphi(0)\| \|(d\varphi)_Z(v)\| + \|(d\psi)_{\varphi(0)}\| \|(d\varphi)_Z(v) - (d\varphi)_0(v)\| \\
&\leq k_3 \sup_{r \in [0,1]} \|(d\varphi)_{rZ}\| \|Z\| \|(d\varphi)_Z(v)\| \|v\| + k_4 k_1 \|Z\| \|v\|.
\end{aligned}$$

Pour tout $r \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\|(d\varphi)_{rZ}\| &\leq \|(d\varphi)_{rZ} - (d\varphi)_0\| + \|(d\varphi)_0\| \\
&\leq k_1 r \|Z\| + k_2 \leq k_1 \|Z\| + k_2.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\|(d\psi \circ \varphi)_Z(v) - (d\psi \circ \varphi)_0(v)\| &\leq k_3(k_1 \|Z\| + k_2)^2 \|Z\| \|v\| + k_4 k_1 \|Z\| \|v\| \\
&\leq (k_3(k_1 r_0 + k_2)^2 + k_4 k_1) \|Z\| \|v\|,
\end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

Pour achever la démonstration du lemme 9.4.8, il suffira d'appliquer ce lemme,

- d'abord à $\varphi = i_\rho$, $\psi = \text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho$,
- puis à $\varphi = (\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho)i_\rho$, $\psi = p_\rho \dots$

à condition de vérifier que ces opérateurs φ , ψ satisfont aux hypothèses requises (pour des constantes indépendantes de ρ). Montrons donc que c'est en effet le cas.

- Pour $\varphi = i_\rho$. Cette application est linéaire, donc égale à sa dérivée, $(di_\rho)_Z = i_\rho$, et donc aussi $(di_\rho)_Z - (di_\rho)_0 = 0$, donc l'hypothèse (1) est satisfaite. Nous avons vu aussi que $\|i_\rho\|^{\text{op}} \leq C_1$ pour une constante C_1 indépendante de ρ , donc (2) est vérifiée.

- Pour $\psi = \text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho$. Comme $\varphi(0) = i_\rho(0) = 0$, il suffira de vérifier que pour tout $X \in i_\rho(\overline{B}(0, r_0)) \subset B(0, C_1 r_0)$, on a

$$\|(d\psi)_X - (d\psi)_0\|^{\text{op}} \leq k_3 \|X\| \quad \text{et} \quad \|(d\psi)_X\|^{\text{op}} \leq k_4$$

(pour des constantes k_3 et k_4 indépendantes de ρ). On a aussi

$$\|(d(\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho))_X - (d(\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho))_0\|^{\text{op}} = \|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_X - (d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0\|$$

et encore

$$\|(d(\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho))_0\|^{\text{op}} \leq 1 + \|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0\|^{\text{op}}.$$

Il suffit donc de vérifier que les hypothèses (3) et (4) sont satisfaites par $\psi = \tilde{\mathcal{F}}_\rho$. Rappelons donc que

$$\tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) = \left(\frac{\partial}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H_t \right) \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) = \tilde{\mathcal{F}}(\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X))$$

et donc que

$$(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_X(v) = (d\tilde{\mathcal{F}})_{\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)}(D_2\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)(v)).$$

Le calcul de $(d\tilde{\mathcal{F}})_u$ (pour $u = \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)$) est identique à celui effectué au § 8.4 et donne

$$(d\tilde{\mathcal{F}})_u(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + D_1 \tilde{J}_{(u, \partial u / \partial t)}(Y) + \tilde{J}\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + (d \text{grad } H)_u(Y)$$

(rappelons que $\tilde{J}$ est le prolongement de J à $W \times \mathbf{R}^m$ défini plus haut, linéaire donc par rapport à la deuxième variable). La dérivée $(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_X(v)$ est donc somme de quatre termes

$$\begin{aligned} (d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_X(v) &= \frac{\partial}{\partial s}(D_2\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)(v)) && \text{terme}_1 \\ &+ D_1 \tilde{J}_{(\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X), \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X))}(D_2\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)(v)) && \text{terme}_2 \\ &+ \tilde{J}\left(\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X), \frac{\partial}{\partial t}(D_2\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)(v))\right) && \text{terme}_3 \\ &+ (d \text{grad } H_t)_{(\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X))}(D_2\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)(v)). && \text{terme}_4 \end{aligned}$$

Réécrivons chacun de ces quatre termes en développant les termes contenant des $\partial/\partial s$ et $\partial/\partial t$. Pour éclaircir les notations, écrivons $\tilde{J}_p(\cdot)$ pour $\tilde{J}(p, \cdot)$ et $D_1 \tilde{J}_p(\cdot, \cdot)$ pour $D_1 \tilde{J}_{(p, \cdot)}(\cdot)$ (ainsi les applications sont linéaires en chacun de leurs arguments $\cdot$). Les quatre termes sont alors

$$\begin{aligned} \text{terme}_1 &= D_1 D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial s}, v \right) + D_2 D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial X}{\partial s}, v \right) \\ &\quad + D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right), \\ \text{terme}_2 &= D_1 \tilde{J}_{\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)} \left(D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)(v), D_1 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) \right) \\ &\quad + D_1 \tilde{J}_{\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)} \left(D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)(v), D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) \right), \\ \text{terme}_3 &= \tilde{J}_{\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)} \left(D_1 D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t}, v \right) \right. \\ &\quad \left. + D_2 D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial X}{\partial t}, v \right) \right) + \tilde{J}_{\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)} \left(D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \right), \\ \text{terme}_4 &= (d \text{grad } H_t)_{\widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)}(D_2 \widetilde{\text{exp}}(w_\rho, X)(v)). \end{aligned}$$

Malgré la longueur de cette formule, les conditions (3) et (4) se vérifient assez simplement. On fixe $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$ et on applique le lemme 13.2.3 à

des applications linéaire $A(p, X, \cdot)$ ou bilinéaire $B(p, X, \cdot, \cdot)$ pour $p = w_\rho(s, t)$ et $X = X(s, t)$. Les applications A et B sont celles qui apparaissent dans les termes de la formule ci-dessus, à savoir

- les applications linéaires
 - $D_2 \widetilde{\text{exp}}_{(p, X)}(\cdot)$, d'abord,
 - $\widetilde{J}_{\text{exp}(p, X)}(D_2 \widetilde{\text{exp}}_{(p, X)}(\cdot))$, ensuite,
 - et $(d \text{grad } H_t)_{\text{exp}(p, X)}(D_2 \widetilde{\text{exp}}_{(p, X)}(\cdot))$ enfin ;
- les applications bilinéaires
 - $D_i D_2 \widetilde{\text{exp}}_{(p, X)}(\cdot, \cdot)$,
 - ainsi que $D_1 \widetilde{J}_{\text{exp}(p, X)}(D_2 \widetilde{\text{exp}}_{(p, X)}(\cdot), D_i \widetilde{\text{exp}}_{(p, X)}(\cdot))$
 - et $\widetilde{J}_{\text{exp}(p, X)}(D_i D_2 \widetilde{\text{exp}}_{(p, X)}(\cdot, \cdot))$ (pour $i = 1, 2$).

On leur applique le lemme 13.2.3 afin d'évaluer la norme euclidienne $\|((d\widetilde{\mathcal{F}}_\rho)_X(v) - (d\widetilde{\mathcal{F}}_\rho)_0(v))(s, t)\|$ (à (s, t) fixé). Comme

$$X \in B(0, C_1 r_0) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m),$$

on a, pour tous $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$,

$$\|X(s, t)\| \leq \|X\|_{L^\infty} \leq k \|X\|_{W^{1,p}} \leq k C_1 r_0 = r_1,$$

ce qui fait que l'on peut utiliser le lemme 13.2.3 et que *les constantes obtenues grâce à ce lemme ne dépendront pas de (s, t)* (ce qui permet, dans ce qui suit, d'omettre (s, t) des notations). On obtient donc

$$\begin{aligned} & \| (d\widetilde{\mathcal{F}}_\rho)_X(v) - (d\widetilde{\mathcal{F}}_\rho)_0(v) \| \\ & \leq C \left(\|X\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\| \|v\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\| \|v\| + \|X\| \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\| \right) \quad \text{terme}_1 \\ & + C \left(\|X\| \|v\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right\| + \|v\| \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| \right) \quad \text{terme}_2 \\ & + C \left(\|X\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right\| \|v\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| \|v\| + \|X\| \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\| \right) \quad \text{terme}_3 \\ & + C \|X\| \|v\|. \quad \text{terme}_4 \end{aligned}$$

Mais les normes des dérivées partielles de w_ρ par rapport à s et t sont uniformément bornées par rapport à (s, t) et par rapport à ρ , comme nous l'avons remarqué. Donc il existe une constante (que nous appellerons toujours C) telle que l'on ait, pour tous $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$ et $\rho \geq \rho_0$,

$$\begin{aligned} \| (d\widetilde{\mathcal{F}}_\rho)_X(v) - (d\widetilde{\mathcal{F}}_\rho)_0(v) \| & \leq C \left(\|X\| \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\| + \|X\| \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\| \right) \\ & + C \left(\|X\| \|v\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\| \|v\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| \|v\| \right). \end{aligned}$$

On fait maintenant varier (s, t) et on applique la norme les normes L^p . En appliquant le lemme 13.2.2, on trouve

$$\begin{aligned}
\|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_X(v) - (d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0(v)\|_{L^p} &\leq C \left(\|X\| \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\| + \|X\| \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\| \right)_{L^p} \\
&\quad + C \left(\|X\| \|v\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\| \|v\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| \|v\| \right)_{L^p} \\
&\leq Ck \|v\|_{W^{1,p}} \left(\|X\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\|_{L^p} \right) \\
&\quad + Ck \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^p} \right) \|X\|_{W^{1,p}} \\
&\leq 5Ck \|X\|_{W^{1,p}} \|v\|_{W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $X \in \overline{B}(0, C_1 r_0) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$,

$$\|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_X - (d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0\|^{\text{op}} \leq 5Ck \|X\|_{W^{1,p}}$$

c'est-à-dire, enfin, l'hypothèse (3) du lemme 13.4.1. Mais il faut encore s'assurer que l'hypothèse (4) du même lemme est satisfaite, c'est-à-dire que $\|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0\|^{\text{op}} \leq k_4$ pour un $k_4 > 0$ indépendant de ρ . En recopiant la formule à quatre termes ci-dessus en y faisant $X = 0$, on obtient (pour (s, t) fixé)

$$\begin{aligned}
\|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0(v)\| &= \|(d\tilde{\mathcal{F}})_{w_\rho}(v)\| \\
&= \left\| \frac{\partial v}{\partial s} + D_1 \tilde{J}_{w_\rho} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t}, v \right) + \tilde{J}_{w_\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + (d \text{grad } H_t)_{w_\rho}(v) \right\| \\
&\leq \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\| + C \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right\| \|v\| + C \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\| + C \|v\|
\end{aligned}$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de ρ . Toujours en utilisant le fait que les dérivées partielles de w_ρ sont uniformément bornées en (s, t) et en ρ , on trouve une autre constante (toujours notée) C telle que

$$\|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0(v)\| \leq C \left(\|v\| + \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\| + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\| \right),$$

ce qui implique, en prenant les normes L^p des deux membres, que

$$\|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0(v)\|_{L^p} \leq 3C \|v\|_{W^{1,p}}$$

et donc que

$$\|(d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0\|^{\text{op}} \leq 3C,$$

ce qui est bien la condition (4) du lemme 13.4.1. Après ces vérifications longues, on peut donc appliquer ce lemme à $\varphi = i_\rho$ et $\psi = \text{Id } \tilde{\mathcal{F}}_\rho$.

– On peut aussi l'appliquer à $\varphi = (\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho) \circ i_\rho$: l'hypothèse (1) est le résultat de l'application du même lemme 13.4.1 à $\varphi = i_\rho$ et $\psi = (\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho)$. Enfin, on a

$$\|(d\varphi)_0\|^{\text{op}} \leq \|(d(\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho))_0\|^{\text{op}} \|(di_\rho)_0\|^{\text{op}} \leq k_2$$

compte tenu des vérifications que nous venons d'effectuer.

– Il reste à vérifier que les hypothèses sont satisfaites aussi pour $\psi = p_\rho$, l'application

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \times L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$$

définie par

$$(p_\rho(X, Y))_i = P(w_\rho, X, Z_i^\rho, Y) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

(P est l'application bilinéaire en les deux dernières composantes qui a été définie plus haut). Pour vérifier l'hypothèse (3), il suffit de démontrer le lemme :

Lemme 13.4.2. *Pour tous $X \in \overline{B}(0, C_1 r_0) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, $Y \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, on a*

$$\|(dp_\rho)_{(X,Y)} - (dp_\rho)_0\|^{\text{op}} \leq k_3 \|(X, Y) - \varphi(0)\|$$

pour une constante $k_3 > 0$ indépendante de ρ .

Démonstration. Il suffira bien entendu d'établir cette estimation pour chacune des composantes p_ρ^i de p_ρ . Rappelons que $\varphi(0) = (0, \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0)) = (0, \mathcal{F}(w_\rho))$ et posons

$$Y_0^\rho = \mathcal{F}(w_\rho) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \cap \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m).$$

Pour $(v, w) \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \times L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, on a

$$(dp_\rho^i)_{(X,Y)}(v, w) = (D_2 P)_{(w_\rho, X, Z_\rho^i, Y)} v + P(w_\rho, X, Z_\rho^i, w).$$

Fixons $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$. En ce point, on a

$$\begin{aligned} & \|(dp_\rho^i)_{(X,Y)}(v, w) - (dp_\rho^i)_{(0,Y_0^\rho)}(v, w)\| \\ & \leq \|(D_2 P)_{(w_\rho, X, Z_\rho^i, Y)} v - (D_2 P)_{(w_\rho, 0, Z_\rho^i, Y_0^\rho)} v\| \\ & \quad + \|P(w_\rho, X, Z_\rho^i, w) - P(w_\rho, 0, Z_\rho^i, w)\|. \end{aligned}$$

On applique le lemme 13.2.3 à l'application bilinéaire $P_{(p,X)}(\cdot, \cdot)$ et l'analogue (que nous n'avons pas eu le courage d'écrire) de ce lemme à l'application trilinéaire $(D_2 P)_{(p,X,\cdot,\cdot)}(\cdot)$ (ici, $p = w_\rho(s, t)$ et $X = X(s, t)$). On a comme ci-dessus

$$\|X(s, t)\| \leq r_1 \quad \text{pour tous } (s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$$

donc le lemme 13.2.3 s'applique et fournit une constante $C > 0$ indépendante de (s, t) . On obtient

$$\begin{aligned} & \|(dp_\rho^i)_{(X,Y)}(v, w) - (dp_\rho^i)_{(0,Y_0^\rho)}(v, w)\| \\ & \leq C (\|Z_\rho^i\| \|Y - Y_0^\rho\| \|v\| + \|X\| \|Z_\rho^i\| \|Y_0^\rho\| \|v\| + \|X\| \|Z_\rho^i\| \|w\|). \end{aligned}$$

Par construction, $\|Z_\rho^i\|$ est uniformément bornée (par rapport à ρ , s et t). Aussi, $\|Y_0^\rho\|$ est uniformément bornée (puisque $Y_0^\rho(s, t) = 0$ pour $|s| \geq 1$ et

$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} Y_0^\rho(s, t) = 0$ sur $[-1, 1]$. On trouve ainsi une constante positive (toujours notée C) telle que

$$\begin{aligned} & \| (dp_\rho^i)_{(X, Y)}(v, w) - (dp_\rho^i)_{(0, Y_0^\rho)}(v, w) \| \\ & \leq C (\|Y - Y_0^\rho\| \|v\| + \|X\| \|v\| + \|X\| \|w\|). \end{aligned}$$

On fait ensuite varier (s, t) , on prend les normes L^p des deux membres et on majore le membre de droite en utilisant le lemme 13.2.2, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \| (dp_\rho^i)_{(X, Y)}(v, w) - (dp_\rho^i)_{(0, Y_0^\rho)}(v, w) \|_{L^p} \\ & \leq Ck (\|Y - Y_0^\rho\|_{L^p} \|v\|_{W^{1,p}} + \|X\|_{W^{1,p}} \|v\|_{L^p} + \|X\|_{W^{1,p}} \|w\|_{L^p}) \\ & \leq Ck (\|X\|_{W^{1,p}} + \|Y - Y_0^\rho\|_{L^p}) (\|v\|_{W^{1,p}} + \|w\|_{L^p}) \\ & = Ck \|(X, Y) - (0, Y_0^\rho)\|_{W^{1,p} \times L^p} \|(v, w)\|_{W^{1,p} \times L^p}. \quad \square \end{aligned}$$

L'hypothèse (3) est donc satisfaite, vérifions qu'il en est de même de (4). Pour (s, t) fixé, on a

$$\begin{aligned} & \| (dp_\rho^i)_{(0, Y_0^\rho)}(v, w) \| = \| (D_2 P)_{(w_\rho, 0, Z_i^\rho, Y_0^\rho)}(v) + P(w_\rho, 0, Z_i^\rho, w) \| \\ & \leq C (\|Z_i^\rho\| \|Y_0^\rho\| \|v\| + \|Z_i^\rho\| \|w\|). \end{aligned}$$

Comme les normes de Z_i^ρ et de Y_0^ρ sont uniformément bornées, on obtient

$$\| (dp_\rho^i)_{(0, Y_0^\rho)}(v, w) \| \leq C (\|v\| + \|w\|),$$

inégalité à laquelle on applique la norme L^p pour obtenir

$$\| (dp_\rho^i)_{(0, Y_0^\rho)}(v, w) \|_{L^p} \leq C (\|v\|_{L^p} + \|w\|_{L^p}) \leq C \|(v, w)\|_{W^{1,p} \times L^p}.$$

Donc la condition (4) est remplie.

On peut donc, enfin, appliquer le lemme 13.4.1, qui donne,

$$\text{pour } \|y\|_{W^{1,p}} \leq r_0, \text{ on a } \|(dF_\rho)_y - (dF_\rho)_0\|^{\text{op}} \leq k \|y\|_{W^{1,p}}.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 9.4.8. $\square$

13.5. Démonstration des deux lemmes : le deuxième

Démonstration du lemme 9.4.16. Le schéma de cette démonstration est le même que celui de la démonstration du lemme 9.4.8 : on démontre un lemme abstrait dont on montre ensuite que l'on peut l'appliquer à la composée $F_\rho = p_\rho \circ (\text{Id}, \tilde{\mathcal{F}}_\rho) \circ i_\rho$. Voici le lemme abstrait.

Lemme 13.5.1. Soient G, H et K des espaces de Banach et soient

$$\varphi_\rho : G \longrightarrow H, \quad \psi_\rho : H \longrightarrow K$$

des opérateurs (non linéaires) de classe $\mathcal{C}^1$, différentiables en $\rho \geq \rho_0$. On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ et des constantes $k_i > 0$ (pour $i = 1, \dots, 7$) indépendantes de ρ tels que, pour tout $z \in \overline{B}(0, r_0) \subset G$,

(1) les conditions du lemme 13.4.1 sont vérifiées par φ et ψ (avec les constantes $k_1, \dots, k_4$),

$$(2) \left\| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) - \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(0) \right\| \leq k_5 \|z\|,$$

$$(3) \left\| \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \rho}(\varphi_\rho(z)) - \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \rho}(\varphi_\rho(0)) \right\| \leq k_6 \|\varphi_\rho(z) - \varphi_\rho(0)\|,$$

$$(4) \left\| \frac{\varphi_\rho}{\partial \rho}(0) \right\| \leq k_7.$$

Alors il existe $M > 0$ indépendant de ρ tel que, pour tout $z \in \overline{B}(0, r_0)$, on a

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \rho}(\psi_\rho \circ \varphi_\rho)(z) - \frac{\partial}{\partial \rho}(\psi_\rho \circ \varphi_\rho)(0) \right\| \leq M \|z\|.$$

Et voici sa démonstration.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial \rho}(\psi_\rho \circ \varphi_\rho)(z) - \frac{\partial}{\partial \rho}(\psi_\rho \circ \varphi_\rho)(0) \right\| \\ & \leq \left\| \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \rho}(\varphi_\rho(z)) - \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \rho}(\varphi_\rho(0)) \right\| \\ & \quad + \left\| (d\psi_\rho)_{\varphi_\rho(z)} \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) \right) - (d\psi_\rho)_{\varphi_\rho(0)} \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) \right) \right\| \\ & \leq k_6 \|\varphi_\rho(z) - \varphi_\rho(0)\| \\ & \quad + \left\| (d\psi_\rho)_{\varphi_\rho(z)} \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) \right) - (d\psi_\rho)_{\varphi_\rho(0)} \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) \right) \right\| \\ & \quad + \left\| (d\psi_\rho)_{\varphi_\rho(0)} \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) - \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(0) \right) \right\| \\ & \leq k_6 \|\varphi_\rho(z) - \varphi_\rho(0)\| \\ & \quad + k_3 \|\varphi_\rho(z) - \varphi_\rho(0)\| \left\| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) \right\| + k_4 \left\| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) - \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(0) \right\| \\ & \leq k_6 \|\varphi_\rho(z) - \varphi_\rho(0)\| \\ & \quad + k_3 \|\varphi_\rho(z) - \varphi_\rho(0)\| \left(\left\| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(z) - \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(0) \right\| + \left\| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(0) \right\| \right) + k_4 k_5 \|z\| \\ & \leq \|\varphi_\rho(z) - \varphi_\rho(0)\| (k_6 + k_3 k_5 \|z\| + k_7) + k_4 k_5 \|z\|. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \|\varphi_\rho(z) - \varphi_\rho(0)\| & \leq \sup_{t \in [0,1]} \|(d\varphi_\rho)_{tz}\| \|z\| \\ & \leq \sup_{t \in [0,1]} (\|(d\varphi_\rho)_{tz} - (d\varphi_\rho)_0\| + \|(d\varphi_\rho)_0\|) \|z\| \\ & \leq (k_1 \|z\| + k_2) \|z\| \\ & \leq (k_1 r_0 + k_2) \|z\|. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 13.5.1. $\square$

Nous allons l'appliquer à

- $\varphi = i_\rho$ et $\psi = \text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho$,
- $\varphi = \text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho$ et $\psi = p_\rho$.

Vérifions donc que, dans les deux cas, les opérateurs satisfont aux hypothèses du lemme 13.5.1.

- La condition (1) a déjà été vérifiée pour les besoins du lemme 9.4.8.
- Vérifions les conditions (2) et (4) pour $\varphi_\rho = i_\rho$. Nous avons $i_\rho(Y) = \sum y_i Z_i^\rho$, donc

$$\frac{\partial i_\rho}{\partial \rho}(Y) = \sum_{i=1}^{2n} y_i \frac{\partial Z_i^\rho}{\partial \rho}, \quad \text{en particulier } \frac{\partial i_\rho}{\partial \rho}(0) = 0.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial i_\rho}{\partial \rho}(Y) - \frac{\partial i_\rho}{\partial \rho}(0) \right\|_{W^{1,p}} &= \left\| \sum_{i=1}^{2n} y_i \frac{\partial Z_i^\rho}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} \leq \sum_{i=1}^{2n} \left\| y_i \frac{\partial Z_i^\rho}{\partial \rho} \right\|_{W^{1,p}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{2n} \|y_i\|_{W^{1,p}} \left\| \frac{\partial Z_i^\rho}{\partial \rho} \right\|_{C^1} \end{aligned}$$

(toujours grâce au lemme 8.2.4). Maintenant le choix de $Z_i^\rho(s, t)$ (voir page 297) fait qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ρ telle que, pour tout $i = 1, \dots, 2n$,

$$\left\| \frac{\partial Z_i}{\partial \rho} \right\|_{C^1} \leq C.$$

On obtient donc

$$\left\| \frac{\partial i_\rho}{\partial \rho}(Y) - \frac{\partial i_\rho}{\partial \rho}(0) \right\|_{W^{1,p}} \leq C \sum_{i=1}^{2n} \|y_i\|_{W^{1,p}} \leq 2n C \|Y\|_{W^{1,p}}.$$

La condition (4) est satisfaite puisque $\partial i_\rho / \partial \rho(0) = 0$.

- Vérifions maintenant la condition (3) pour $\psi_\rho = \text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho$. Remarquons que, pour $\varphi_\rho = i_\rho$, on a $\varphi_\rho(0) = 0$ et

$$\|\varphi_\rho(z)\| \leq \|i_\rho\| \|z\| \leq C_1 r_0.$$

Il suffira alors de démontrer que pour tout $X \in B(0, C_1 r_0)$,

$$\left\| \frac{\partial(\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho)}{\partial \rho}(X) - \frac{\partial(\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho)}{\partial \rho}(0) \right\|_{L^p} \leq k_6 \|X\|_{W^{1,p}},$$

c'est-à-dire

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\rho}{\partial \rho}(X) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\rho}{\partial \rho}(0) \right\|_{L^p} \leq k_6 \|X\|_{W^{1,p}}.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) &= \left(\frac{\partial}{\partial s} + \tilde{J} \frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } H_t \right) \left(\widetilde{\exp}_{w_\rho}(X) \right) \\ &= D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right) + D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right) \\ &\quad + \tilde{J}_{\widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)}} \left(D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) + D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) \right) \\ &\quad + \text{grad } H_t(\widetilde{\exp}(w_\rho, X)).\end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) &= D_1 D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right) + D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial s} \right) \\ &\quad + D_1 D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial X}{\partial s} \right) \\ &\quad + D_1 \tilde{J}_{\widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)}} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}, D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) \right) \\ &\quad + D_1 \tilde{J}_{\widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)}} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}, D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) \right) \\ &\quad + \tilde{J}_{\widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)}} \left[D_1 D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. + D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial t} \right) + D_1 D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial X}{\partial t} \right) \right] \\ &\quad + (d \text{ grad } H_t)_{\widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)}} \left(D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) \right).\end{aligned}$$

Nous fixons $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$ et nous appliquons le lemme 13.2.3 à toutes les applications linéaires $A_{(p, X)}(\cdot)$ et bilinéaires $B_{(p, X)}(\cdot, \cdot)$ qui apparaissent dans cette formule. Ici $p = w_\rho(s, t)$ et $X = X(s, t)$ et l'on a $\|X(s, t)\|_{\mathcal{C}^0} \leq r_1$, ce qui permet d'utiliser le lemme 13.2.3. Au point (s, t) et pour la norme euclidienne de $\mathbf{R}^m$, on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}&\left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0) \right\| \\ &\leq C \left(\|X\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\| + \|X\| \left\| \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial s} \right\| + \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\| \right. \\ &\quad \left. + \|X\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| + \|X\| \left\| \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial t} \right\| + \|X\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| \right).\end{aligned}$$

Comme toutes les dérivées de w_ρ sont uniformément bornées par une constante $k > 0$, on obtient encore

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0) \right\| &\leq C \left(2k^2 \|X\| + 3k \|X\| + k \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\| + k \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| \right) \\ &\leq C_1 \left(\|X\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| \right). \end{aligned}$$

On fait varier (s, t) et on prend les normes L^p , on trouve

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\mathcal{F}}_\rho(X) - \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0) \right\|_{L^p} &\leq C_1 \left(\|X\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\|_{L^p} \right) \\ &\leq 3C_1 \|X\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

– Vérifions les hypothèses pour $\varphi_\rho = (\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}_\rho) \circ i_\rho$. La condition (2) est vérifiée par application du lemme 13.5.1 à la situation étudiée ci-dessus. Pour l'hypothèse (4), comme on a

$$\varphi_\rho(Y) = (i_\rho(Y), \tilde{\mathcal{F}}_\rho i_\rho(Y)),$$

on a pour la dérivée

$$\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(0) = \left(\frac{\partial i_\rho}{\partial \rho}(0), \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\rho}{\partial \rho}(0) + (d\tilde{\mathcal{F}}_\rho)_0 \left(\frac{\partial i_\rho}{\partial \rho}(0) \right) \right) = \left(0, \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\rho}{\partial \rho}(0) \right).$$

Puis

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\rho}{\partial \rho}(0) \right\|_{L^p} &= \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial s} + \tilde{J}_{w_\rho} \frac{\partial w_\rho}{\partial t} + \text{grad } H_t(w_\rho) \right) \right\|_{L^p} \\ &= \left\| \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial s} + D_1 \tilde{J}_{w_\rho} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}, \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) + \tilde{J}_{w_\rho} \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial t} + (d \text{grad } H_t)_{w_\rho} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) \right\|_{L^p} \\ &\leq C \left(\left\| \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial s} \right\|_{L^p} + \left\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right\| \right\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial t} \right\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\|_{L^p} \right). \end{aligned}$$

Or toutes les dérivées de w_ρ sont uniformément bornées en norme L^p : elles le sont sur $[-1, 1] \times S^1$ (puisque elles le sont en $\mathcal{C}^\infty$), pour $|s| \geq 1$, on utilise le fait que $w_\rho(s, t) = u(s + \rho, t)$ (ou $v(s - \rho, t)$) et la décroissance exponentielle de u et de v , ce qui implique que leurs dérivées sont L^p . On a donc

$$\left\| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho}(0) \right\| \leq k$$

où $k > 0$ est indépendante de ρ .

– Vérification de la condition (3) pour $\psi_\rho = P_\rho$. Nous avons

$$\varphi_\rho(0) = (0, \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0)).$$

Notons $Y_0 = \tilde{\mathcal{F}}_\rho(0)$ et calculons les dérivées (par rapport à ρ) des $p_\rho^i(X, Y)$ pour $i = 1, \dots, 2n$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_\rho^i(X, Y)}{\partial \rho} &= \frac{\partial P}{\partial \rho}(w_\rho, X, Z_i^\rho, Y) \\ &= (D_1 P)_{(w_\rho, X, Z_i^\rho, Y)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) + P \left(w_\rho, X, \frac{\partial Z_i^\rho}{\partial \rho}, Y \right). \end{aligned}$$

Fixons $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$ et appliquons le lemme 13.2.3 à l'application bilinéaire $P_{(p, X)}(\cdot, \cdot)$ et à l'application trilinéaire $D_1 P_{(p, X, \cdot, \cdot)}(\cdot)$ (pour $p = w_\rho(s, t)$ et $X = X(s, t)$). On obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial p_\rho^i}{\partial \rho}(X, Y) - \frac{\partial p_\rho^i}{\partial \rho}(0, Y_0) \right\| &\leq C \left(\|X\| \|Z_i^\rho\| \|Y_0\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| + \|Z_i^\rho\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| \|Y - Y_0\| \right. \\ &\quad \left. + \|X\| \left\| \frac{\partial Z_i^\rho}{\partial \rho} \right\| \|Y_0\| + \left\| \frac{\partial Z_i^\rho}{\partial \rho} \right\| \|Y - Y_0\| \right). \end{aligned}$$

Comme $\|Z_i^\rho\|$, $\|\partial Z_i^\rho / \partial \rho\|$, $\|\partial w_\rho / \partial \rho\|$ ainsi que $\|Y_0\| = \|\mathcal{F}_{w_\rho}\|$ sont uniformément bornées par une constante k (indépendante de ρ , s et t), on en déduit

$$\left\| \frac{\partial p_\rho^i}{\partial \rho}(X, Y) - \frac{\partial p_\rho^i}{\partial \rho}(0, Y_0) \right\| \leq 2kC (\|X\| + \|Y - Y_0\|)$$

et, en prenant les normes L^p ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial p_\rho^i}{\partial \rho}(X, Y) - \frac{\partial p_\rho^i}{\partial \rho}(0, Y_0) \right\| &\leq 2kC (\|X\|_{L^p} + \|Y - Y_0\|_{L^p}) \\ &\leq 2kC (\|X\|_{W^{1,p}} + \|Y - Y_0\|_{L^p}). \end{aligned}$$

Chaque composante p_ρ^i de p_ρ satisfait à la condition (3) donc p_ρ la satisfait aussi.

On a donc vérifié toutes les hypothèses, de sorte que le lemme 13.5.1 s'applique pour achever la démonstration du lemme 9.4.16. $\square$

13.6. Encore un lemme technique

Nous démontrons ici un des lemmes techniques⁽²⁾ utilisés plus haut (pour démontrer que $\hat{\psi}$ est immersive) :

Lemme (lemme 9.5.1). *La suite (α_n) est bornée et l'on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right)_{\rho_n} \right\|_{L^p} = 0.$$

⁽²⁾Celui-ci est plus significatif que ses prédécesseurs.

Démonstration du lemme 9.5.1. Montrons d'abord que la suite (α_n) est bornée. Posons

$$A_n = \left\| \left(D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) + D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right) \right)_{\rho=\rho_n} \right\|_{L^p}$$

$$B_n = \left\| \left(D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right) + D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \right)_{\rho=\rho_n} \right\|_{L^p}$$

de sorte qu'on a $|\alpha_n| = A_n/B_n$. Montrons que A_n est majoré et que B_n est minoré par une constante strictement positive. Fixons $r_0 > 0$. On a

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma\|_{W^{1,p}} = 0, \text{ donc } \|\gamma(\rho_n)\|_{W^{1,p}} \leq r_0$$

pour n assez grand et donc, en utilisant encore une fois l'injection continue

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \hookrightarrow L^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$$

on a

$$\sup_{(s,t) \in \mathbf{R} \times S^1} \|\gamma(s,t)\| \leq Kr_0.$$

Pour (s,t) fixés et $\rho = \rho_n$ on peut alors appliquer le lemme 13.2.3 aux applications linéaires $D_i \widetilde{\exp}_{(p,X)}(\cdot)$ pour $i = 1, 2$, $p = w_{\rho_n}(s,t)$ et $X = \gamma(\rho_n)(s,t)$. Il suit que, pour la norme euclidienne, en (s,t) et $\rho = \rho_n$, on a

$$\left\| D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) \right\| \leq C \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\|$$

et

$$\left\| D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) \right\| \leq C \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|.$$

En prenant les normes L^p , on a donc

$$A_n \leq C \left(\left\| \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_n} \right\|_{L^p} + \left\| \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_n} \right\|_{L^p} \right).$$

Rappelons que

$$w_\rho(s,t) \begin{cases} = u(s+\rho, t) & \text{pour } s \leq -1 \\ \text{tend vers } y(t) & \text{pour } s \in [-1, 1] \text{ et } \rho \rightarrow +\infty \\ = v(s-\rho, t) & \text{pour } s \geq 1, \end{cases}$$

donc

$$\left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\|_{L^p} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|_{L^p} + 1$$

pour ρ assez grand et en particulier, cette norme est bornée uniformément par rapport à ρ . On a aussi

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\| = 0$$

par la proposition 9.4.15, d'où le fait que la suite A_n est bornée. Passons maintenant à B_n . En $\rho = \rho_n$, on a

$$\begin{aligned} B_n &\geq \left\| D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\|_{L^p} - \left\| D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|_{L^p} \\ &\geq \left\| D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, 0)} \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\|_{L^p} - \left\| D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial w_\rho}{\partial s} - D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, 0)} \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\|_{L^p} \\ &\quad - C \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|_{L^p} \end{aligned}$$

(grâce à l'analogie de la minoration de $D_2 \widetilde{\exp}$ ci-dessus pour le troisième terme). Fixons $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$ et (toujours) $\rho = \rho_n$. On a, par le lemme 13.2.3,

$$\begin{aligned} \left\| D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial w_\rho}{\partial s} - D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, 0)} \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\| &\leq C \|\gamma(\rho)\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\| \\ &\leq Ck \|\gamma(\rho)\| \quad \text{puisque } \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\|_{\mathcal{C}^0} \leq k. \end{aligned}$$

En utilisant que $D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, 0)} = \text{Id}$, on trouve

$$B_n \geq \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\|_{L^p} - Ck \|\gamma(\rho)\|_{L^p} - C \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|_{L^p}.$$

Comme

$$\frac{\partial w_\rho}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho, t) \quad \text{pour } s \geq -1,$$

on a

$$\left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\|_{L^p} \geq \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{L^p([- \infty, \rho-1] \times S^1)} \geq C_0 > 0$$

et (par le lemme 9.4.13)

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma(\rho)\|_{L^p} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|_{L^p} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma\|_{W^{1,p}} = 0.$$

Donc il existe une constante C_1 telle que $B_n \geq C_1$ pour tout n et il s'ensuit que la suite (α_n) est bornée.

On a ensuite

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\exp_{w_\rho} \gamma_\rho(s, t) \right)_{\rho_n} = \alpha_n \frac{\partial}{\partial s} \left(\exp_{w_\rho} \gamma_\rho(s, t) \right)_{\rho_n},$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\widetilde{\exp}_{w_\rho} \gamma_\rho(s, t) \right)_{\rho_n} = \alpha_n \frac{\partial}{\partial s} \left(\widetilde{\exp}_{w_\rho} \gamma_\rho(s, t) \right)_{\rho_n},$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left(D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} + D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right)_{\rho_n} \\ = \alpha_n \left(D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial w_\rho}{\partial s} + D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right)_{\rho_n}. \end{aligned}$$

Les estimations utilisées ci-dessus montrent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right\|_{L^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|_{L^p} = 0.$$

Comme la suite α_n est bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \left(D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) \right)_{\rho_n} \right\|_{L^p} = 0.$$

Fixons encore une fois $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$. À l'aide du lemme 13.2.3, on trouve, pour la norme euclidienne, en (s, t) et $\rho = \rho_n$,

$$\begin{aligned} \left\| D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) - D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, 0)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) \right\| \\ \leq C \|\gamma(\rho)\| \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\| \\ \leq Ck \|\gamma(\rho)\| \end{aligned}$$

puisque

$$\left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right\|_{\mathbb{C}^0}, \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right\|_{\mathbb{C}^0} \text{ et } \alpha_n \text{ sont bornées.}$$

En passant aux normes L^p et en utilisant le fait que $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\gamma\|_{L^p} = 0$, on déduit que la norme L^p (toujours pour $\rho = \rho_n$) de

$$D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \gamma(\rho))} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) - D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, 0)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right)$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et donc, comme on a vu que la norme du premier terme tendait vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, 0)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} \right) \right\|_{L^p} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \alpha_n \frac{\partial w_\rho}{\partial s} \right)_{\rho_n} \right\|_{L^p} = 0,$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

13.7. Deux autres lemmes techniques

Nous démontrons ici deux lemmes⁽³⁾ utilisés dans la démonstration de l'unicité du recollement. Voici le premier :

Lemme (lemme 9.6.14).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_n\|_{W^{1,p}} = 0.$$

⁽³⁾Eux aussi significatifs, bien que techniques.

Démonstration. Nous avons

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} \|\chi_n\|^2 ds dt = \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle \chi_n, \chi_n \rangle ds dt = \int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle \zeta_n, \chi_n \rangle ds dt.$$

En appliquant, par exemple, le lemme 8.2.4, on trouve une constante $M > 0$ telle que

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} \langle \zeta_n, \chi_n \rangle ds dt \leq M \|\zeta_n\|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R} \times S^1} \|\chi_n\| ds dt.$$

Comme $Y_n = i(\zeta_n)$, $(\zeta_n)_j = \langle Y_n, Z_j \rangle$ et compte tenu de la proposition 9.6.3, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\zeta_n\|_{L^\infty} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On déduit de ce qui précède qu'il existe N_ε tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\int_{\mathbf{R} \times S^1} \|\chi_n\|^2 ds dt \leq M\varepsilon \int_{\mathbf{R} \times S^1} \|\chi_n\| ds dt.$$

Écrivons χ_n dans la base « canonique » de W_n

$$\chi_n = \alpha_n \left(\frac{\partial u}{\partial s} \#_{w_n} 0 \right) + \beta_n \left(0 \#_{w_n} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad \text{avec } \alpha_n, \beta_n \in \mathbf{R}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R} \times S^1} \|\chi_n\| ds dt &= \int_{]-\infty, -1] \times S^1} \|\chi_n\| ds dt \\ &\quad + \int_{[-1, 1] \times S^1} \|\chi_n\| ds dt + \int_{[1, +\infty[\times S^1} \|\chi_n\| ds dt \\ &= \int_{]-\infty, -1] \times S^1} |\alpha_n| \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) \right\| ds dt \\ &\quad + \int_{[-1, 1] \times S^1} \|\chi_n\| ds dt + \int_{[1, +\infty[\times S^1} |\beta_n| \left\| \frac{\partial v}{\partial s}(s - \nu(\rho_n), t) \right\| ds dt. \end{aligned}$$

Nous allons majorer chacun de ces trois termes. Pour alléger l'écriture et raccourcir les formules, posons

$$M_n = \sqrt{\int_{]-\infty, -1] \times S^1} |\alpha_n|^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) \right\|^2 ds dt}.$$

Nous avons évidemment

$$M_n \leq \|\chi_n\|_{L^2}.$$

$$\begin{aligned}
& \int_{]-\infty, -1] \times S^1} |\alpha_n| \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) \right\| ds dt \\
&= M_n \frac{\int_{]-\infty, -1] \times S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) \right\| ds dt}{\sqrt{\int_{]-\infty, -1] \times S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) \right\|^2 ds dt}} \\
&= M_n \frac{\int_{]-\infty, -1+\rho_n] \times S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \right\| ds dt}{\sqrt{\int_{]-\infty, -1+\rho_n] \times S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \right\|^2 ds dt}}.
\end{aligned}$$

Ensuite, le numérateur de la fraction se majore

$$\int_{]-\infty, -1+\rho_n] \times S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \right\| ds dt \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{L^1(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})}$$

et son dénominateur se minore

$$\sqrt{\int_{]-\infty, -1+\rho_n] \times S^1} \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \right\|^2 ds dt} \geq \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{L^2(]-\infty, 0] \times S^1; \mathbf{R}^{2n})}.$$

Posons

$$K_1 = \frac{\left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{L^1(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})}}{\left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{L^2(]-\infty, 0] \times S^1; \mathbf{R}^{2n})}},$$

de sorte que nous avons

$$\int_{]-\infty, -1] \times S^1} |\alpha_n| \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) \right\| ds dt \leq K_1 \|\chi_n\|_{L^2}.$$

Comme K_1 , toutes les constantes $K_i > 0$ qui vont intervenir dans ce qui suit sont indépendantes de n . Nous avons de la même manière

$$\int_{[1, +\infty[\times S^1} |\beta_n| \left\| \frac{\partial v}{\partial s}(s - \nu(\rho_n), t) \right\| ds dt \leq K_2 \|\chi_n\|_{L^2(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})}.$$

Le terme central se majore simplement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{[-1, 1] \times S^1} \|\chi_n\| ds dt \leq K_3 \|\chi_n\|_{L^2([-1, 1] \times S^1; \mathbf{R}^{2n})} \leq K_3 \|\chi_n\|_{L^2(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})}.$$

Nous avons ainsi obtenu

$$\|\chi_n\|_{L^1} \leq K_4 \|\chi_n\|_{L^2},$$

de sorte que, pour $n \geq N_\varepsilon$, nous avons

$$\|\chi_n\|_{L^2}^2 \leq MK_4 \varepsilon \|\chi_n\|_{L^2}, \text{ donc } \|\chi_n\|_{L^2} \leq MK_4 \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_n\|_{L^2} = 0 \text{ et enfin } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_n\|_{L^1} = 0.$$

En revenant à la décomposition de χ_n , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]-\infty, 1] \times S^1} |\alpha_n| \left\| \frac{\partial u}{\partial s}(s + \rho_n, t) \right\| = 0,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ et de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$. Par conséquent,

$$\|\chi_n\|_{W^{1,p}} \leq |\alpha_n| \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \#_{w_n} 0 \right\|_{W^{1,p}} + |\beta_n| \left\| 0 \#_{w_n} \frac{\partial v}{\partial s} \right\|_{W^{1,p}}$$

tend vers 0 puisque les normes $W^{1,p}$ des deux vecteurs de la base de W_n utilisée sont évidemment bornées (uniformément par rapport à n). Ce qui termine la démonstration du lemme 9.6.14. $\square$

Le deuxième lemme (utilisé dans la démonstration de l'unicité du recollement) que nous voulons démontrer ici est :

Lemme (lemme 9.6.15). *Il existe des constantes positives K_1 et K_2 telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$\|Y_n\|_{W^{1,p}} \leq K_1 \frac{\|\chi_n\|_{W^{1,p}} + \|Y_n\|_{L^\infty} + \|\tilde{\mathcal{F}}(0)\|_{L^p}}{1 - K_2 \|Y_n\|_{L^\infty}}.$$

Nous utilisons bien sûr ici les notations définies autour de l'énoncé 9.6.15. Rappelons que $\zeta_n \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ est décomposé en $\chi_n + \omega_n$ où χ_n est de la forme $\alpha \#_{w_n} \beta$ ($\alpha \in \text{Ker } L^u$, $\beta \in \text{Ker } L^v$) et ω_n est orthogonal aux vecteurs de cette forme (voir page 331).

Démonstration. Les constantes C_i qui interviennent dans ce qui suit sont indépendantes de n . Nous avons

$$\begin{aligned} \|Y_n\|_{W^{1,p}} &= \|i(\zeta_n)\|_{W^{1,p}} \leq C_1 \|\zeta_n\|_{W^{1,p}} = C_1 \|\chi_n + \omega_n\|_{W^{1,p}} \\ &\leq C_1 (\|\chi_n\|_{W^{1,p}} + \|\omega_n\|_{W^{1,p}}) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\|i\|$ est bornée (indépendamment de n), ce que nous avons démontré page 450. Appliquons la proposition 9.4.7 à $\omega_n \in W_n^\perp$. On trouve

$$\begin{aligned} \|Y_n\|_{W^{1,p}} &\leq C_1 (\|\chi_n\|_{W^{1,p}} + \|\omega_n\|_{W^{1,p}}) \\ &\leq C_1 \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_2 \|L(\omega_n)\|_{L^p} \\ &= C_1 \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_2 \|L(\zeta_n - \chi_n)\|_{L^p} \\ &\leq C_1 \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_2 \|L(\zeta_n)\|_{L^p} + C_2 \|L(\chi_n)\|_{L^p}. \end{aligned}$$

La norme de l'opérateur linéaire L est majorée par une constante indépendante de n . En effet, $L = (dF)_0$ pour $F = p \circ (\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}) \circ i$. Pour les opérateurs qui interviennent dans cette composition, nous avons vérifié les hypothèses

(2) et (4) du lemme 13.5.1, exactement ce dont nous avons besoin pour conclure que la norme de la différentielle de la composée $\|(dF)_0\|$ est uniformément bornée. Il faut toutefois préciser que ces résultats ont été obtenus pour le pré-recollement w_ρ et pas pour un pré-recollement de la forme $w_{\nu,\rho}$. Les lecteurs pourront vérifier que tous les arguments sont en tout point similaires dans ce cas un peu plus général.

Revenons à l'estimation que nous venons d'obtenir pour la norme de Y_n . De ce qui précède, on déduit

$$\begin{aligned}\|Y_n\|_{W^{1,p}} &\leq C_1 \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_2 \|L(\zeta_n)\|_{L^p} + C_3 \|\chi_n\|_{W^{1,p}} \\ &= (C_1 + C_3) \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_2 \|L(\zeta_n)\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Grâce au lemme 9.6.14, nous savons que le premier terme tend vers 0. Il reste à majorer la norme L^p de $L(\zeta_n)$. Nous avons

$$\begin{aligned}L(\zeta_n) &= (dF)_0(\zeta_n) = (d(p \circ (\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}}) \circ i))_0(\zeta_n) \\ &= (d(p \circ (\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}})))_0 i(\zeta_n) \\ &= (d(p \circ (\text{Id} \times \tilde{\mathcal{F}})))_0(Y_n) \\ &= (D_1 p)_{(0, \tilde{\mathcal{F}}(0))}(Y_n) + (D_2 p)_{(0, \tilde{\mathcal{F}}(0))}(d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n).\end{aligned}$$

L'application $p = p_\rho$ (ici dépendant de n),

$$p : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \times L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$$

est définie par la formule

$$p((X, Y))_i(s, t) = P(w_n(s, t), X(s, t), Z_i(s, t), Y(s, t))$$

où l'application

$$P : W \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^{2n}$$

est linéaire en sa dernière variable. Nous avons démontré (dans la démonstration du lemme 9.4.16) que, pour tous $v, w \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, on a

$$\|(D_1 p)_{(0, \tilde{\mathcal{F}}(0))}(v)\|_{L^p} \leq C_4 \|v\|_{L^p} \quad \text{et} \quad \|(D_2 p)_{(0, \tilde{\mathcal{F}}(0))}(w)\|_{L^p} \leq C_5 \|w\|_{L^p}.$$

Il est possible d'améliorer légèrement la première estimation, en remarquant que $\tilde{\mathcal{F}}(0) = \mathcal{F}(w_n)$ s'annule pour s en dehors de $[-1, 1]$ (puisque là, w_n est une trajectoire de Floer). Comme p est linéaire en sa deuxième variable, on en déduit que, pour tout $v \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$,

$$\forall (s, t) \in (\mathbf{R} - [-1, 1]) \times S^1, \quad (D_1 p)_{(0, \tilde{\mathcal{F}}(0))} v(s, t) = 0.$$

L'argument utilisé dans la démonstration du lemme 9.4.16 donne alors

$$\|(D_1 p)_{(0, \tilde{\mathcal{F}}(0))} v\|_{L^p} \leq C_4 \|v\|_{L^p([-1, 1] \times S^1; \mathbf{R}^m)}.$$

En utilisant ces remarques, on majore $\|L(\zeta_n)\|_{L^p}$:

$$\begin{aligned} \|L(\zeta_n)\|_{L^p} &\leq \|(D_1 p)_{(0, \tilde{\mathcal{F}}(0))}(Y_n)\|_{L^p} + \|(D_2 p)_{(0, \tilde{\mathcal{F}}(0))}(d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n)\|_{L^p} \\ &\leq C_4 \|Y_n\|_{L^p([-1,1] \times S^1; \mathbf{R}^m)} + C_5 \|(d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n)\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)} \\ &\leq C_6 \|Y_n\|_{L^\infty([-1,1] \times S^1; \mathbf{R}^m)} + C_5 \|(d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n)\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)} \\ &\leq C_6 \|Y_n\|_{L^\infty(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)} + C_5 \|(d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n)\|_{L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)}. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 par la proposition 9.6.3. Nous majorons maintenant le second terme. Rappelons que $\tilde{\ell}_n = \exp_{w_n} Y_n$, de sorte que $\tilde{\mathcal{F}}(Y_n) = \mathcal{F}(\ell_n) = 0$ puisque ℓ_n est une trajectoire de Floer. Écrivons une formule *alla* Taylor pour $\tilde{\mathcal{F}}$, similaire à celle que nous avons écrite pour F pour lui appliquer la méthode de Newton-Picard (lemme 9.4.4). Nous avons

$$\tilde{\mathcal{F}}(Y) = \tilde{\mathcal{F}}(0) + (d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y) + \mathcal{N}(Y)$$

où $\mathcal{N} : W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \rightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$ vérifie

$$\mathcal{N}(0) = 0, \quad \text{et} \quad (d\mathcal{N})_Z = (d\tilde{\mathcal{F}})_Z - (d\tilde{\mathcal{F}})_0.$$

Appliqué en $Y = Y_n$, cela donne

$$0 = \tilde{\mathcal{F}}(0) + (d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n) + \mathcal{N}(Y_n).$$

C'est que nous utilisons pour majorer le second terme dans l'inégalité ci-dessus. Encore un lemme :

Lemme 13.7.1. *Il existe des constantes $C_7 > 0$ et $r_1 > 0$ telles que, pour tout $Y \in W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$, si $\|Y\|_{L^\infty} \leq r_1$, alors*

$$\|\mathcal{N}(Y)\|_{L^p} \leq C_7 \|Y\|_{L^\infty} \|Y\|_{W^{1,p}}.$$

Admettons-le provisoirement. On a alors

$$\|(d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n)\|_{L^p} = \|\tilde{\mathcal{F}}(0) + \mathcal{N}(Y_n)\|_{L^p} \leq \|\tilde{\mathcal{F}}(0)\|_{L^p} + \|\mathcal{N}(Y_n)\|_{L^p}.$$

Comme $\|Y_n\|_{L^\infty}$ tend vers 0, on peut appliquer le lemme pour n assez grand. On trouve

$$\|(d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n)\|_{L^p} \leq \|\tilde{\mathcal{F}}(0)\|_{L^p} + C_7 \|Y_n\|_{L^\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}}.$$

En mettant ensemble les majorations de la norme $W^{1,p}$ de Y_n , de la norme L^p de $L(\zeta_n)$ et celle que nous venons d'obtenir, nous obtenons, pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \|Y_n\|_{W^{1,p}} &\leq (C_1 + C_3) \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_2 \|L(\zeta_n)\|_{L^p} \\ &\leq (C_1 + C_3) \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_8 \|Y_n\|_{L^\infty} + C_9 \|(d\tilde{\mathcal{F}})_0(Y_n)\|_{L^p} \\ &\leq (C_1 + C_3) \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_8 \|Y_n\|_{L^\infty} \\ &\quad + C_9 \|\tilde{\mathcal{F}}(0)\|_{L^p} + C_{10} \|Y_n\|_{L^\infty} \|Y_n\|_{W^{1,p}}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|Y_n\|_{W^{1,p}} \leq \frac{(C_1 + C_3) \|\chi_n\|_{W^{1,p}} + C_8 \|Y_n\|_{L^\infty} + C_9 \|\tilde{\mathcal{F}}(0)\|_{L^p}}{1 - C_{10} \|Y_n\|_{L^\infty}}. \quad \square$$

Il reste à démontrer le lemme 13.7.1.

Démonstration du lemme 13.7.1. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(Y)\|_{L^p} &= \|\mathcal{N}(Y) - \mathcal{N}(0)\|_{L^p} = \left\| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathcal{N}(\sigma Y) d\sigma \right\|_{L^p} \\ &= \left\| \int_0^1 (d\mathcal{N})_{\sigma Y}(Y) d\sigma \right\|_{L^p} \\ &\leq \left\| \int_0^1 \|(d\mathcal{N})_{\sigma Y}(Y)\| d\sigma \right\|_{L^p} \\ &= \left\| \int_0^1 \|((d\tilde{\mathcal{F}})_{\sigma Y} - (d\tilde{\mathcal{F}})_0)Y\| d\sigma \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Fixons $(s, t) \in \mathbf{R} \times S^1$. Lorsque nous avons vérifié l'hypothèse (3) du lemme 13.5.1 (page 464), nous avons obtenu des estimations de la norme euclidienne $\|((d\tilde{\mathcal{F}})_X - (d\tilde{\mathcal{F}})_0)(v)(s, t)\|$. Ces estimations sont valables pour $\|X(s, t)\| \leq r_1$ pour un certain $r_1 > 0$. Reprenons ces estimations, en faisant au préalable la remarque qu'elles restent valides pour $w_n = w_{\nu, \rho_n}$, même si elles ont été obtenues pour $w_\rho = w_{\text{Id}, \rho}$. Nous avons donc démontré que, pour $\|X(s, t)\| < r_1$, il existe un $K > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|((d\tilde{\mathcal{F}})_X - (d\tilde{\mathcal{F}})_0)v(s, t)\| &\leq K \|X(s, t)\| \|v(s, t)\| \\ &\quad + \left\| \frac{\partial X}{\partial s}(s, t) \right\| \|v(s, t)\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t}(s, t) \right\| \|v(s, t)\| \\ &\quad + \|X(s, t)\| \left\| \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) \right\| + \|X(s, t)\| \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) \right\|. \end{aligned}$$

On remplace X par σY et v par Y , pour trouver, pour une constante C_7 indépendante de n et pour $\|Y\|_{L^\infty} < r_1$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(Y)\|_{L^p} &\leq \left\| \int_0^1 C_7 \sigma \left(\|Y(s, t)\|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|Y(s, t)\| \left\| \frac{\partial Y}{\partial s}(s, t) \right\| + \|Y(s, t)\| \left\| \frac{\partial Y}{\partial t}(s, t) \right\| \right) d\sigma \right\|_{L^p} \\ &\leq C_7 \left\| \|Y(s, t)\| \left(\|Y(s, t)\| + \left\| \frac{\partial Y}{\partial s}(s, t) \right\| + \left\| \frac{\partial Y}{\partial t}(s, t) \right\| \right) \right\|_{L^p} \\ &\leq C_7 \|Y\|_{L^\infty} \left\| \left(\|Y\| + \left\| \frac{\partial Y}{\partial s} \right\| + \left\| \frac{\partial Y}{\partial t} \right\| \right) \right\|_{L^p} \\ &\leq C_7 \|Y\|_{L^\infty} \|Y\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

et le lemme 13.7.1 est démontré. $\square$

13.8. Variantes à paramètre(s) des lemmes sur la dérivée seconde

Nous donnons dans ce paragraphe les démonstrations des différentes versions à paramètre(s) des lemmes sur la dérivée seconde de l'opérateur de Floer utilisés plus haut.

Pour la démonstration du théorème 11.2.2, nous avons eu besoin d'une variante du lemme 9.4.16 sur la dérivée seconde de l'opérateur de Floer : il fallait tenir compte du fait que H et J dépendent du paramètre ρ utilisé pour le recollement. C'est ce que nous faisons ici.

Pour vérifier les hypothèses du lemme 13.5.1, nous avons démontré qu'il existait une constante C_1 telle que pour tous s, t tels que $\|X(s, t)\| \leq r_1$ et pour tout ρ ,

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\rho}{\partial \rho}(X) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\rho}{\partial \rho}(0) \right\| \leq C_1 \left(\|X\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial s} \right\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| \right).$$

La formule calculant la dérivée $\partial \tilde{\mathcal{F}}_\rho(X)$ contient deux nouveaux termes, dus à la dépendance en ρ de J et H , ce sont

$$P(X) = \frac{\partial J}{\partial \rho}(s + \rho) \left(D_1 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) + D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, X)} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) \right)$$

$$\text{et } Q(X) = \text{grad} \frac{\partial H_{s+\rho, t}}{\partial \rho} (\widetilde{\exp}(w_\rho, X)).$$

Le lemme 13.2.3 donne sans mal

$$\|P(X) - P(0)\| \leq C \left(\|X\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial t} \right\| \right).$$

Ensuite, pour tout (s, t) ,

$$(w_\rho(s, t), \sigma X(s, t)) \in W \times \overline{B}(0, r) \text{ (un compact)}$$

et

$$\frac{\partial H_{s+\rho}}{\partial \rho} = 0 \quad \text{pour } |s + \rho| \geq R,$$

donc

$$\left\| \left(d \text{grad} \frac{\partial H_{s+\rho, t}}{\partial \rho} \right)_{\widetilde{\exp}(p, X)} \right\| \text{ est bornée}$$

sur le compact $[-R, R] \times S^1 \times W \times \overline{B}(0, r)$, de sorte que finalement

$$\begin{aligned} \|Q(X) - Q(0)\| &\leq \sup_{\sigma \in [0, 1]} \left\| \left(d \text{grad} \frac{\partial H_{s+\rho, t}}{\partial \rho} \right)_{\widetilde{\exp}(w_\rho, \sigma X)} \cdot D_2 \widetilde{\exp}_{(w_\rho, \sigma X)} \right\| \\ &\leq C \|X\|, \end{aligned}$$

ce qui permet de trouver l'estimation voulue et de terminer la démonstration.

Nous démontrons aussi ici la variante du lemme 9.4.8 dont nous avons eu besoin au § 11.4.b, c'est-à-dire l'énoncé :

Lemme (lemme 11.4.5). *Soit $r_0 > 0$. Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $\rho \geq \rho_0$ et pour tous $(\lambda, Z) \in \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ (avec $\|Z\| \leq r_0$), on ait*

$$\|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)}\|^{\text{op}} \leq K(\|Z\|_{W^{1,p}} + |\lambda|).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)}\|^{\text{op}} &\leq \|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)}\|^{\text{op}} \\ &\quad + \|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)} - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)}\|^{\text{op}} \end{aligned}$$

et nous analysons séparément les deux termes du membre de droite. Commençons par le premier. Soit $(a, Y) \in \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. Nous avons

$$\begin{aligned} (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)}(a, Y) &= (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)}(0, Y) + (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)}(a, 0) \\ &= (dF_\rho^{\Gamma_{\lambda+\lambda_*}})_Z(Y) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\lambda} \left(\mathcal{F}_\rho^{\Gamma_{\lambda+\lambda_*+a\sigma}}(\exp_{w_\rho}(Z)) \right)_{(Z_i^{\rho,Z})} \\ &= (dF_\rho^{\Gamma_{\lambda+\lambda_*}})_Z(Y) + a \left(\frac{\partial J}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho) \frac{\partial(\exp_{w_\rho} Z)}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \text{grad}_{\exp_{w_\rho}(Z)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho, t) \right)_{(Z_i^{\rho,Z})} \end{aligned}$$

(expressions dans lesquelles $(Z_i^{\rho,Z})$ désigne le repère orthonormé au point $\exp_{w_\rho(s,t)} Z(s, t)$, obtenu en transportant parallèlement le repère $(Z_i^\rho(s, t))$ le long de la courbe $r \mapsto \exp_{w_\rho(s,t)}(rZ(s, t))$).

Nous utilisons la notation

$$d\bar{F}_\rho(\lambda, Z)(a, 0) = a(V_\rho(\lambda + \lambda_*, Z))_{(Z_i^{\rho,Z})}$$

et nous remarquons que $V_\rho(\lambda_*, 0)$ est le champ V_ρ qui apparaît dans la formule calculant $L_\rho^\Gamma(a, 0)$.

Pour majorer $\|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)}\|^{\text{op}}$, écrivons

$$\begin{aligned} &\|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)}(a, Y) - (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)}(a, Y)\|_{L^p} \\ &\leq \left\| (dF_\rho^{\Gamma_{\lambda+\lambda_*}})_Z(Y) - (dF_\rho^{\Gamma_{\lambda+\lambda_*}})_0(Y) \right\|_{L^p} \\ &\quad + |a| \left\| (V_\rho(\lambda + \lambda_*, Z))_{(Z_i^{\rho,Z})} - (V_\rho(\lambda + \lambda_*, 0))_{(Z_i^{\rho,Z})} \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Pour majorer le premier terme de cette somme, nous utilisons le lemme 9.4.8 ou plus exactement son analogue pour le couple (H, J) défini par l'homotopie $\Gamma_{\lambda+\lambda_*}$. Nous avons déjà évoqué la possibilité de cette analogie dans la

démonstration du théorème 11.2.2. Nous avons

$$\left\| (dF_{\rho}^{\Gamma_{\lambda+\lambda_*}})_Z(Y) - (dF_{\rho}^{\Gamma_{\lambda+\lambda_*}})_0(Y) \right\|_{L^p} \leq k_1 \|Z\|_{W^{1,p}} \|Y\|_{W^{1,p}}$$

pour une constante $k_1 > 0$ indépendante de ρ . Pour majorer le terme restant, considérons $V_{\rho}(\lambda + \lambda_*, \bullet)$ comme une application

$$W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \longrightarrow L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m),$$

et écrivons (avec les notations du chapitre 11)

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\rho}(\lambda + \lambda_*, Z) &= \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho) \frac{\partial(\exp_{w_{\rho}} Z)}{\partial t} \\ &\quad + \text{grad}_{\widetilde{\exp_{w_{\rho}}(Z)}} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho, t) \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho) \left(D_1 \widetilde{\exp_{(w_{\rho}, Z)}} \left(\frac{\partial w_{\rho}}{\partial t} \right) + D_2 \widetilde{\exp_{(w_{\rho}, Z)}} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right) \right) \\ &\quad + \text{grad}_{\widetilde{\exp_{(w_{\rho}, Z)}}} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho, t). \end{aligned}$$

Nous utilisons le résultat :

Lemme 13.8.1. *Soit $r_0 > 0$. Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $\rho \geq \rho_0$ et pour tout $Z \in \overline{B}(0, r_0) \subset W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m)$, on ait*

$$\left\| \tilde{V}_{\rho}(\lambda + \lambda_*, Z) - \tilde{V}_{\rho}(\lambda + \lambda_*, 0) \right\|_{L^p} \leq K \|Z\|_{W^{1,p}}.$$

Démonstration. Écrivons

$$\begin{aligned} &\left\| \tilde{V}_{\rho}(\lambda + \lambda_*, Z) - \tilde{V}_{\rho}(\lambda + \lambda_*, 0) \right\|_{L^p} \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho) \left[D_1 \widetilde{\exp_{(w_{\rho}, Z)}} \left(\frac{\partial w_{\rho}}{\partial t} \right) + D_2 \widetilde{\exp_{(w_{\rho}, Z)}} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D_1 \widetilde{\exp_{(w_{\rho}, 0)}} \left(\frac{\partial w_{\rho}}{\partial t} \right) \right] \right\|_{L^p} \\ &+ \left\| \text{grad}_{\widetilde{\exp_{(w_{\rho}, Z)}}} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho, t) - \text{grad}_{\widetilde{\exp_{(w_{\rho}, 0)}}} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho, t) \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

L'application

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda} : [0, 1] \times \mathbf{R} \longrightarrow \text{End}(TW)$$

est à support compact. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\text{pour tous } (\lambda, s) \in [0, 1] \times \mathbf{R}, \quad \left\| \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda}(\lambda, s) \right\|^{\text{op}} \leq C.$$

Le premier terme du membre de droite de notre inégalité se majore donc par

$$C \left\| D_1 \widetilde{\exp_{(w_{\rho}, Z)}} \left(\frac{\partial w_{\rho}}{\partial t} \right) + D_2 \widetilde{\exp_{(w_{\rho}, Z)}} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right) - D_1 \widetilde{\exp_{(w_{\rho}, 0)}} \left(\frac{\partial w_{\rho}}{\partial t} \right) \right\|_{L^p}.$$

Les lemmes 13.2.3 et 13.2.2 s'appliquent, à

$$A(p, X, V) = D_1 \widetilde{\exp}_{(p, X)} V \quad \text{et} \quad A(p, X, V) = D_2 \widetilde{\exp}_{(p, X)} V,$$

pour majorer cette expression (avec le même raisonnement qu'au § 13.5), par $K \|Z\|_{W^{1,p}}$.

Pour majorer le deuxième terme (celui avec les gradients), remarquons que la majoration $W^{1,p}$ de Z , $\|Z\|_{W^{1,p}} \leq r_0$, implique que Z est borné, $\|Z\|_{L^\infty} \leq r_1$ (pour un certain $r_1 > 0$). Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] \times \mathbf{R} \times S^1 \times W \times \overline{B}(0, r_1) &\longrightarrow \mathbf{R}^m \\ (\lambda, s, t, p, X) &\longmapsto \text{grad}_{\widetilde{\exp}_{(p, X)}} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda, s, t). \end{aligned}$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $\|d\varphi\|^{\text{op}} \leq C$. D'où il suit que, pour la norme euclidienne,

$$\|\varphi(\lambda + \lambda_\star, s + \rho, t, w_\rho(s, t), Z) - \varphi(\lambda + \lambda_\star, s + \rho, t, w_\rho(s, t), 0)\| \leq C \|Z\|.$$

En appliquant la norme L^p , nous déduisons que le deuxième terme du membre de droite de notre inégalité est majoré comme souhaité

$$\begin{aligned} \left\| \text{grad}_{\widetilde{\exp}_{(w_\rho, Z)}} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_\star, s + \rho, t) - \text{grad}_{\widetilde{\exp}_{(w_\rho, 0)}} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_\star, s + \rho, t) \right\|_{L^p} \\ \leq C \|Z\|_{L^p} \leq C \|Z\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 13.8.1. $\square$

Mais celle du lemme 11.4.5 n'est pas finie. Nous utilisons, comme au chapitre 13, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) & \xrightarrow{z \mapsto V_\rho(\lambda + \lambda_\star, Z)} & L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n}) \\ i_\rho \downarrow & & \uparrow p_\rho \\ W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) & \xrightarrow{(\text{Id}, \widetilde{V}_\rho)} & W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \times L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^m) \end{array}$$

Notons $\varphi = i_\rho$, $\psi = (\text{Id}, \widetilde{V}_\rho)$, $\chi = p_\rho$. Pour terminer d'établir la majoration souhaitée, nous énonçons le lemme :

Lemme 13.8.2. *Il existe une constante $k_2 > 0$ (indépendante de ρ) telle que, pour $\|Z\|_{W^{1,p}} \leq r_0$, on ait*

$$\|\chi\psi\varphi(Z) - \chi\psi\varphi(0)\|_{L^p} \leq k_2 \|Z\|_{W^{1,p}}.$$

Et nous le démontrons.

Démonstration. L'application φ est linéaire, sa norme est bornée uniformément par rapport à ρ , donc

$$\|\varphi(Z)\|_{W^{1,p}} \leq Cr_0.$$

Grâce au lemme précédent (lemme 13.8.1), il existe $K > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|\psi\varphi(Z) - \psi\varphi(0)\|_{W^{1,p} \times L^p} &= \|\varphi(Z) - \varphi(0)\|_{W^{1,p}} + \|\tilde{V}_\rho(Z) - \tilde{V}_\rho(0)\|_{L^p} \\ &\leq C \|Z\|_{W^{1,p}} + K \|Z\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Posons ensuite $a = \psi(\varphi(Z))$ et $b = \psi(\varphi(0))$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\chi(a) - \chi(b)\|_{L^p} &\leq \sup_{r \in [0,1]} \|(d\chi)_{ra+(1-r)b}\|^{\text{op}} \|a - b\|_{L^p} \\ &\leq \sup_{r \in [0,1]} \|(d\chi)_{ra+(1-r)b}\|^{\text{op}} (C + K) \|Z\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Ici $b = \psi(\varphi(0)) = \psi(0) = (0, \tilde{V}_\rho(0))$ et nous savons que

$$\tilde{V}_\rho(s, t) = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho) \cdot D_1 \widetilde{\text{exp}}_{(w_\rho, Z)} \frac{\partial w_\rho}{\partial t}.$$

Pour (λ, s, t) fixé, la norme euclidienne de ce vecteur est uniformément bornée par une constante indépendante de ρ , qui est précisément

$$\sup_{(\lambda, s) \in [0,1] \times \mathbf{R}} \left\| \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda} \right\| \sup_{\substack{p \in W \\ \|Z\| \leq r_0}} \|D_1 \widetilde{\text{exp}}_{(p, Z)}\| \sup_{(s, t) \in S^1 \times \mathbf{R}} \left\| \frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right\|.$$

Nous procédons comme dans la démonstration du lemme 13.4.1, avec ici $\tilde{V}_\rho$ jouant le rôle de Y_0^ρ , et obtenons

$$\begin{aligned} \|(d\chi)_{ra+(1-r)b} - (d\chi)_b\|^{\text{op}} &\leq k_3 r \|ra + (1-r)b - b\|_{L^p} \\ &= k_3 r \|a - b\|_{L^p} \\ &\leq k_3 (C + K) \|Z\|_{W^{1,p}} \\ &\leq k_3 (C + K) r_0. \end{aligned}$$

Avec notre estimation de $\|\psi\varphi(Z) - \psi\varphi(0)\|$, nous en déduisons que

$$\|\chi\psi\varphi(Z) - \chi\psi\varphi(0)\|_{L^p} \leq k_3 (C + K)^2 r_0 \|Z\|_{W^{1,p}}$$

et le lemme 13.8.2 est démontré. $\square$

Nous continuons donc à démontrer l'estimation du lemme 11.4.5. Grâce au lemme précédent (lemme 13.8.2), nous avons

$$\begin{aligned} \|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda, Z)}(a, Y) - (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda, 0)}(a, Y)\|_{L^p} &\leq k_1 \|Z\|_{W^{1,p}} \|Y\|_{W^{1,p}} + |a| k_2 \|Z\|_{W^{1,p}} \\ &= (k_1 + k_2)(|a| + \|Y\|_{W^{1,p}}) \|Z\|_{W^{1,p}}, \end{aligned}$$

donc

$$\|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)}\|^{\text{op}} \leq (k_1 + k_2) \|Z\|_{W^{1,p}}.$$

Nous avons donc majoré le premier terme du membre de droite de l'inégalité

$$\begin{aligned} \|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)}\|^{\text{op}} &\leq \|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)}\|^{\text{op}} \\ &\quad + \|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)} - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)}\|^{\text{op}}, \end{aligned}$$

et nous devons encore majorer le deuxième terme. Écrivons, pour $(a, Y) \in \mathbf{R} \times W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$,

$$(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)}(a, Y) = (dF_\rho^{\Gamma^{\lambda+\lambda_*}})_0(Y) + a(V_\rho(\lambda + \lambda_*, 0))_{(Z_i^p)}$$

où, rappelons-le,

$$V_\rho(\lambda + \lambda_*, 0) = \frac{\partial J}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho) \frac{\partial w_\rho}{\partial t} + \text{grad}_{w_\rho} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_*, s + \rho, t).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|(d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)}(a, Y) - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)}(a, Y)\|_{L^p} \\ \leq \|(dF_\rho^{\Gamma^{\lambda+\lambda_*}})_0(Y) - (dF_\rho^{\Gamma^{\lambda_*}})_0(Y)\|_{L^p} \\ + |a| \|(V_\rho(\lambda + \lambda_*, 0))_{(Z_i^p)} - (V_\rho(\lambda_*, 0))_{(Z_i^p)}\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Comme dans le § 11.2.b (et sur le modèle de la proposition 8.4.6)

$$(dF_\rho^{\Gamma^{\lambda+\lambda_*}})_0(Y) = L_\rho^{\Gamma^\lambda}(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + S(\lambda)Y$$

où

$$S : [0, 1] \times \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow M_{2n}(\mathbf{R})$$

est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc

$$\begin{aligned} \|(dF_\rho^{\Gamma^{\lambda+\lambda_*}})_0(Y) - (dF_\rho^{\Gamma^{\lambda_*}})_0(Y)\|_{L^p} &= \|S(\lambda)(Y) - S(0)(Y)\|_{L^p} \\ &\leq k_4 |\lambda| \|Y\|_{L^p} \\ &\leq k_4 |\lambda| \|Y\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

avec $k_4 = \sup_{\lambda \in [0,1]} \partial S / \partial \lambda$. Puis,

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(V_\rho(\lambda + \lambda_\star), 0 - V_\rho(\lambda_\star, 0) \right) \right\|_{Z_i^\rho} \Big|_{L^p} \\
& \leq \left\| \left(\frac{\partial J}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_\star, s + \rho) - \frac{\partial J}{\partial \lambda}(\lambda_\star, s + \rho) \right) \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) \right\|_{Z_i^\rho} \Big|_{L^p} \\
& \quad + \left\| \left(\text{grad}_{w_\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda_\star, s + \rho, t) - \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\lambda_\star, s + \rho, t) \right) \right) \right\|_{Z_i^\rho} \Big|_{L^p} \\
& \leq \left(\sup_{\substack{\lambda \in [0,1] \\ s \in \mathbf{R}}} \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda^2}(\lambda, s) \right) |\lambda| \left\| \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial t} \right) \right\|_{Z_i^\rho} \Big|_{L^p} \\
& \quad + |\lambda| \sup_{\substack{\lambda \in [0,1] \\ (s,t) \in \mathbf{R} \times S^1}} \left\| \left(\text{grad}_{w_\rho} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2}(\lambda, s, t) \right) \right\|_{Z_i^\rho} \Big|_{L^p} \leq k_5 |\lambda|.
\end{aligned}$$

Nous arrivons donc à

$$\left\| (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)}(a, Y) - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)}(a, Y) \right\|_{L^p} \leq k_4 |\lambda| \|Y\|_{W^{1,p}} + k_5 |a| |\lambda|,$$

ce qui montre que

$$\left\| (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)} - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)} \right\|^{\text{op}} \leq k_6 |\lambda|.$$

Combinons cette inégalité avec

$$\left\| (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,0)} \right\|^{\text{op}} \leq (k_1 + k_2) \|Z\|_{W^{1,p}}$$

obtenue ci-dessus, pour trouver finalement

$$\begin{aligned}
\left\| (d\bar{F}_\rho)_{(\lambda,Z)} - (d\bar{F}_\rho)_{(0,0)} \right\|^{\text{op}} & \leq (k_1 + k_2) \|Z\|_{W^{1,p}} + k_6 |\lambda| \\
& \leq k(\|Z\|_{W^{1,p}} + |\lambda|)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer pour terminer enfin la démonstration du lemme 11.4.5. $\square$

Au § 11.2.c, pour établir les propriétés désirées de ψ , nous avons utilisé l'énoncé suivant, qu'il est temps de démontrer ici.

Lemme (lemme 11.4.7). *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ρ telle que, pour $\rho \geq \rho_0$, on ait*

$$\left\| \frac{\partial \bar{F}_\rho}{\partial \rho}(\bar{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) - \frac{\partial \bar{F}_\rho}{\partial \rho}(0, 0) \right\|_{L^p} \leq C \|(\bar{\lambda}_\rho, \gamma_\rho)\|_{\mathbf{R} \times W^{1,p}}.$$

Démonstration. Le lemme 9.4.16 s'applique aux opérateurs F^{Γ_λ} pour $\lambda \in [0, 1]$ (voir la démonstration du théorème 11.2.2). Donc, pour $Z \in \bar{B}(0, r_0)$, nous avons

$$\left\| \frac{\partial F^{\Gamma_\lambda}}{\partial \rho}(\rho, Z) - \frac{\partial F^{\Gamma_\lambda}}{\partial \rho}(\rho, 0) \right\|_{L^p} \leq M \|Z\|_{W^{1,p}}$$

pour une constante $M > 0$ qui ne dépend ni de ρ (ni de λ puisque $\lambda \in [0, 1]$). En particulier, comme $\bar{F}_\rho(\lambda, Z) = F_\rho^{\Gamma^{\lambda+\lambda^*}}(Z)$, nous avons

$$\left\| \frac{\partial \bar{F}_\rho}{\partial \rho}(\bar{\lambda}_\rho, \gamma_\rho) - \frac{\partial \bar{F}_\rho}{\partial \rho}(\bar{\lambda}_\rho, 0) \right\|_{L^p} \leq M \|\gamma_\rho\|_{W^{1,p}}.$$

Pour finir la démonstration du lemme, il suffit de démontrer l'existence d'une constante $C \geq 0$ indépendante de ρ telle que

$$\left\| \frac{\partial \bar{F}_\rho}{\partial \rho}(\bar{\lambda}_\rho, 0) - \frac{\partial \bar{F}_\rho}{\partial \rho}(0, 0) \right\|_{L^p} \leq C |\bar{\lambda}_\rho|.$$

Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ quelconque, nous avons

$$\begin{aligned} \bar{F}_\rho(\lambda, 0) &= \left(\mathcal{F}_\rho^{\Gamma^{\lambda+\lambda^*}}(w_\rho) \right)_{Z_i^\rho} \\ &= \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial s} + J_{s+\rho}^{\lambda+\lambda^*}(w_\rho) \frac{\partial w_\rho}{\partial t} + \text{grad } H_{s+\rho, t}^{\lambda+\lambda^*}(w_\rho) \right)_{Z_i^\rho}. \end{aligned}$$

Notons $\chi(\rho, \lambda) = \bar{F}_\rho(\lambda, 0) \in L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$. La fonction (de (s, t)) $\partial\chi/\partial\lambda(\rho, \lambda)$ est à support compact. En effet, les dérivées par rapport à λ de $J_{s+\rho}^{\lambda+\lambda^*}$ et $\text{grad } H_{s+\rho, t}^{\lambda+\lambda^*}$ s'annulent lorsque $|s + \rho| \geq R$, puisque les isotopies Γ_λ sont constantes pour $|s| \geq R$. Ainsi, $\partial^2\chi/\partial\rho\partial\lambda$ est-elle également à support compact comme fonction de (s, t) . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial\chi}{\partial\rho}(\rho, \lambda) - \frac{\partial\chi}{\partial\rho}(\rho, 0) \right\|_{L^p} &\leq |\lambda| \cdot \left\| \sup_\lambda \frac{\partial^2\chi}{\partial\rho\partial\lambda} \right\|_{L^p} \\ &= |\lambda| \cdot \left\| \sup_\lambda \frac{\partial^2\chi}{\partial\rho\partial\lambda} \right\|_{L^p([-R-\rho, R-\rho] \times S^1; \mathbf{R}^{2n})} \\ &\leq K |\lambda| \cdot \sup_{\substack{\lambda \in \mathbf{R} \\ \rho \geq \rho_0}} \left\| \frac{\partial^2\chi}{\partial\rho\partial\lambda}(s, t) \right\| \\ &\quad (s, t) \in [-R-\rho, R-\rho] \times S^1 \end{aligned}$$

(la norme figurant dans le dernier terme est la norme euclidienne de $\mathbf{R}^{2n}$). Comme $\partial w_\rho/\partial t$, Z_i^ρ et leurs dérivées par rapport à ρ sont bornées en norme par des constantes indépendantes de ρ . Il en est de même des dérivées par rapport à ρ et λ de $J_{s+\rho}^{\lambda+\lambda^*}$ et de $\text{grad } H_{s+\rho, t}^{\lambda+\lambda^*}$. Il suit que $\partial^2\chi/\partial\rho\partial\lambda$ est bornée (en norme euclidienne) pour $(\lambda, \rho, s, t) \in \mathbf{R} \times [\rho_0, +\infty[\times \mathbf{R} \times S^1$, ce qui achève la démonstration du lemme 11.4.7. $\square$

EXERCICES DE LA DEUXIÈME PARTIE

Exercices sur le chapitre 5

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Si F est une partie de E , on note F° le sous-espace vectoriel orthogonal pour la forme symplectique, formé de tous les vecteurs x tels que $\omega(x, y) = 0$ pour tout $y \in F$.

Si F est un sous-espace de E , montrer que

$$\dim F + \dim F^\circ = \dim E.$$

On dit que F est *isotrope* si la forme ω est nulle sur F , c'est-à-dire si $F \subset F^\circ$. Que peut-on dire de la dimension de F ? On dit que F est *lagrangien* si F est isotrope et $\dim F = n$.

Soit F un sous-espace « co-isotrope » (c'est-à-dire dont l'orthogonal est isotrope). Montrer que ω induit une forme symplectique sur l'espace vectoriel quotient F/F° . Soit L un sous-espace lagrangien de E tel que $L + F = E$. Montrer que la composition

$$L \cap F \subset F \longrightarrow F/F^\circ$$

est l'injection d'un sous-espace lagrangien.

Exercice 2. Soit V une variété et soit η une 1-forme sur V . On peut considérer η comme une section

$$\eta : V \longrightarrow T^*V$$

du fibré cotangent. Si λ désigne la forme de Liouville sur T^*V , quelle est la forme $\eta^*\lambda$ sur V ?

Exercice 3 (sous-variétés lagrangiennes). Si (W, ω) est une variété symplectique de dimension $2n$, on dit qu'une sous-variété $j : L \subset W$ est *lagrangienne* si $\dim L = n$ et si $j^*\omega = 0$.

(1) Montrer que, dans une surface symplectique, toutes les courbes sont lagrangiennes.

(2) Montrer que, si L_1 est lagrangienne dans W_1 et L_2 est lagrangienne dans W_2 , $L_1 \times L_2$ est lagrangienne dans $W_1 \times W_2$. Construire un tore T^n lagrangien dans $\mathbf{R}^{2n}$. Montrer que toute variété symplectique contient des tores lagrangiens.

(3) Soit η une 1-forme sur une variété V . On considère η comme une section de T^*V (comme dans l'exercice 2 (page 483)). Montrer que l'image de η est une sous-variété lagrangienne si et seulement si la forme η est fermée.

(4) Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété compacte V . En vertu de ce qui précède, la 1-forme df définit une sous-variété lagrangienne de T^*V . Montrer que celle-ci rencontre la section nulle.

(5) On considère la variété produit $W \times W$, munie de la forme symplectique $\omega \oplus (-\omega)$. Montrer que la diagonale est une sous-variété lagrangienne. Soit φ un difféomorphisme de W dans elle-même. À quelle condition sur φ le graphe de φ est-il une sous-variété lagrangienne de $W \times W$?

Exercice 4. Soit w une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la sphère S^2 dans le cotangent T^*V d'une variété V . Montrer que

$$\int_{S^2} w^*\omega = 0.$$

Exercice 5. Soit ω une forme symplectique sur une surface compacte Σ . Montrer que Σ est orientée, puis que

$$\int_{\Sigma} \omega \neq 0.$$

On considère l'inclusion $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ induite par l'inclusion $\mathbf{C}^2 \subset \mathbf{C}^{n+1}$. Montrer que c'est une sous-variété symplectique. En déduire qu'il existe une application de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$w : S^2 \longrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$$

telle que, si ω désigne maintenant la forme symplectique de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$,

$$\int_{S^2} w^*\omega \neq 0.$$

Exercice 6. Soit φ^1 un difféomorphisme hamiltonien de W . Montrer que le graphe de φ^1 est transverse à la diagonale de $W \times W$ en (x, x) si et seulement si la trajectoire de x est non dégénérée.

Exercice 7 (le groupe des difféomorphismes hamiltoniens). Dans cet exercice on considère une variété compacte W munie d'une forme symplectique ω . On appelle $\text{Ham}(W)$ l'ensemble des difféomorphismes de W qui sont le temps 1 d'un flot hamiltonien.

(1) On suppose que le hamiltonien H_t engendre l'isotopie φ_t et que le hamiltonien K_t engendre ψ_t . Soit

$$G_t = H_t + K_t \circ \varphi_t^{-1}.$$

Montrer que

$$X_{G_t}(x) = X_{H_t}(x) + (T_{\varphi_t^{-1}(x)}\varphi_t)(X_{K_t} \circ \varphi_t^{-1}(x)).$$

En déduire que $\varphi_t \circ \psi_t$ est l'isotopie hamiltonienne engendrée par le hamiltonien⁽⁴⁾ $H_t + K_t \circ \varphi_t^{-1}$.

(2) Quelle est l'isotopie hamiltonienne engendrée par $-H_t \circ \varphi_t$?

(3) Montrer que l'ensemble $\text{Ham}(W)$ est un sous-groupe du groupe des difféomorphismes symplectiques de W .

(4) Soit Φ un difféomorphisme symplectique de W . Quelle est l'isotopie hamiltonienne engendrée par le hamiltonien $H_t \circ \Phi$? Montrer que le sous-groupe $\text{Ham}(W)$ est distingué (normal) dans le groupe de tous les difféomorphismes symplectiques de W .

Exercice 8. Soit x un point critique non dégénéré d'un hamiltonien autonome H sur $\mathbf{R}^{2n}$. On appelle φ^t le flot de X_H . Exprimer X_H dans les coordonnées (p_i, q_i) . Montrer que la matrice jacobienne de φ^t vérifie

$$\frac{d}{dt} (\text{Jac}_x \varphi^t) = (J_0 \text{Hess}_x(H)) \cdot \text{Jac}_x \varphi^t$$

et donc que

$$\text{Jac}_x \varphi^t = e^{tJ_0 \text{Hess}_x(H)}.$$

Soit x un point critique d'un hamiltonien autonome H sur une variété symplectique W . Montrer que, si x est non dégénéré comme orbite périodique, alors il est non dégénéré comme point critique de H .

Exercice 9 (oscillateur harmonique). On considère, sur la variété symplectique $\mathbf{R}^{2n}$, le hamiltonien

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum \alpha_i (p_i^2 + q_i^2)$$

où les α_i sont des nombres réels positifs, disons $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ pour fixer les idées.

⁽⁴⁾Ainsi, même si H et K sont autonomes, l'isotopie hamiltonienne composée ne vient pas (en général) d'un hamiltonien autonome. Une question subsidiaire : quand est-ce le cas ?

- (1) Écrire le système hamiltonien correspondant et le résoudre.
- (2) On suppose que tous les α_i/α_j sont irrationnels. Montrer que le système possède exactement n familles de solutions périodiques, chacune contenue dans un plan. On fixe une solution contenue dans le plan d'équations $(q_j = p_j = 0)_{j \neq i}$. Quels sont les multiplicateurs de Floquet de cette solution ? Est-elle non dégénérée ?
- (3) On suppose que tous les α_i sont égaux. Que peut-on dire des solutions périodiques ?

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme symplectique ω et d'une structure presque complexe J calibrée par ω ; on note $\perp$ l'orthogonalité pour le produit scalaire $\omega(\cdot, J\cdot)$. Montrer qu'un sous-espace L est lagrangien si et seulement si $L^\perp = JL$.

Exercice 11. Soit (W, ω) une variété symplectique et soit J une structure presque complexe calibrée par ω . Soit $V \subset W$ une sous-variété complexe, c'est-à-dire stable par J ,

$$\forall x \in V, \quad J_x(T_x V) \subset T_x V.$$

Vérifier que ω définit une forme non dégénérée sur V .

Exercice 12 (complexe, mais pas symplectique). On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{C}^2 &\longrightarrow \mathbf{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (2z_1, 2z_2) \end{aligned}$$

et le quotient $\mathcal{H}$ (« surface de Hopf ») de $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ sous l'action de $\mathbf{Z}$ par

$$n \cdot (z_1, z_2) = f^n(z_1, z_2).$$

Montrer que le quotient est une variété complexe (c'est-à-dire avec des changements de cartes analytiques complexes) difféomorphe à $S^3 \times S^1$. De sorte que son deuxième groupe de cohomologie de de Rham est nul. En déduire que $\mathcal{H}$ ne possède aucune structure symplectique⁽⁵⁾.

Exercice 13 (octaves de Cayley et structures presque complexes). Rappelons que l'algèbre des *octaves de Cayley* est un espace vectoriel réel $\mathbf{O}$ de dimension 8, muni d'une base notée

$$(1, i, j, k, \ell, \ell i, \ell j, \ell k)$$

et de la multiplication (distributive à droite et à gauche sur l'addition) définie par

$$i^2 = j^2 = k^2 = \ell^2 = ijk = jki = kij = -1, \quad i\ell = -\ell i, \text{ etc.}$$

⁽⁵⁾On trouvera dans [15] des exemples de variétés symplectiques mais non complexes.

On pourra vérifier que cette multiplication n'est ni commutative, ni associative (car $(ij)\ell = -i(j\ell)$), mais qu'elle satisfait quand même $(ab)b = a(bb)$ pour tous a et b .

On considère l'espace euclidien $\mathbf{R}^7$ des octaves imaginaires, c'est-à-dire le sous-espace engendré par $(i, j, k, \ell i, \ell j, \ell k)$. Soit $V \subset \mathbf{R}^7$ une sous-variété orientée de dimension 6. Pour tout point x de V , on appelle $n(x)$ le vecteur normal unitaire (défini par les orientations de V et de $\mathbf{R}^7$ et on définit

$$J_x : T_x V \longrightarrow \mathbf{R}^7$$

par $J_x(u) = n(x) \cdot u$ (multiplication au sens des octaves). Montrer que J_x est à valeurs dans $T_x V$ et que les endomorphismes J_x définissent une structure presque complexe J sur V . Ainsi, toutes les hypersurfaces de $\mathbf{R}^7$ sont presque complexes⁽⁶⁾.

Exercice 14. On écrit les matrices à $2n$ lignes et $2n$ colonnes par blocs

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}, \quad X, Y, Z, T \in M_n(\mathbf{R}).$$

À quelles conditions sur les matrices X, Y, Z et T la matrice A est-elle dans le groupe $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R})$?

Exercice 15. Soit S une matrice symétrique réelle. Montrer que

$$\exp(JS) \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R}).$$

Réciproquement, on suppose que la matrice S est telle que

$$\forall t, \quad \exp(tJS) \in \mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R}),$$

que peut-on dire de S ?

Exercice 16. Utiliser le corollaire 5.6.7 pour démontrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut 1.

Exercice 17 (symplectification d'une variété de contact). Soit V une variété munie d'une 1-forme α non singulière (c'est-à-dire telle que $\alpha_x \neq 0$ pour tout $x \in V$) et telle que

$$\forall x \in V, \quad (d\alpha)_x|_{\mathrm{Ker} \alpha_x} \text{ est une forme bilinéaire non dégénérée.}$$

On dit que α est une *forme de contact* sur V . Ainsi la dimension de V est impaire, on la note $2n + 1$.

(1) Montrer que $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n}$ est une forme volume sur V .

⁽⁶⁾Remplacer $\mathbf{O}$ par $\mathbf{H}$ et 7 par 3 serait une façon analogue (mais en l'occurrence compliquée) de montrer que toute surface orientée plongée dans $\mathbf{R}^3$ possède une structure presque complexe.

(2) Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X sur V tel que

$$i_X \alpha \equiv 1 \quad \text{et} \quad i_X(d\alpha) = 0$$

(on dit que X est le *champ de Reeb* de α).

(3) On considère $W = V \times \mathbf{R}$, munie de la 2-forme ω définie par

$$\omega_{(x,\sigma)} = d(e^\sigma \alpha).$$

Montrer que (W, ω) est une variété symplectique (dite *symplectifiée* de la variété de contact (V, α)).

(4) Déterminer le champ hamiltonien de la fonction $H(x, \sigma) = \sigma$.

Exemple. Soient $V = S^{2n+1}$ la sphère unité de $\mathbf{C}^{n+1}$ (avec coordonnées $(q_1 + ip_1, \dots, q_{n+1} + ip_{n+1})$) et la 1-forme

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum (p_i dq_i - q_i dp_i).$$

Montrer que α est une forme de contact. Déterminer $\text{Ker } \alpha$ et le champ de Reeb X de α . Montrer que la symplectifiée de (S^{2n+1}, α) est symplectomorphe à $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ muni de sa forme symplectique standard.

Exercice 18. On dit qu'une fonction H sur une variété symplectique est un hamiltonien *périodique*⁽⁷⁾ s'il existe une opération du cercle

$$S^1 \times W \longrightarrow W$$

telle que

$$\frac{d}{dt} (\exp(2i\pi t) \cdot x) |_{t=0} = X_H(x)$$

pour tout $x \in W$.

(1) Montrer qu'alors les points fixes de l'opération du cercle sont les points critiques de H .

(2) Montrer que toutes les orbites (périodiques) de H sont dégénérées.

Exercice 19. On fait opérer le cercle $\mathbf{S}^1$ sur l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par

$$u \cdot [z_0, \dots, z_n] = [u^{m_0} z_0, \dots, u^{m_n} z_n], \quad m_i \in \mathbf{Z}.$$

Montrer que la fonction

$$H([z_0, \dots, z_n]) = \frac{1}{2} \frac{\sum m_i |z_i|^2}{\sum |z_i|^2}$$

est un hamiltonien périodique associé à cette opération.

À quelle condition (sur les m_i) ce hamiltonien est-il une fonction de Morse? Quels sont alors les indices de ses points critiques?

⁽⁷⁾Pour cette notion, les résultats de base et un peu plus, voir par exemple [5].

Exercice 20. On reprend la quadrique Q de l'exercice 8 page 18. On considère les fonctions g et h , restrictions à Q des fonctions définies sur $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ par

$$g([z]) = \frac{\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_0)}{\sum |z_i|^2} \quad \text{et} \quad h([z]) = \frac{\operatorname{Im}(z_3 \bar{z}_2)}{\sum |z_i|^2}.$$

Montrer que g et h sont des hamiltoniens périodiques sur Q .

Comme dans l'exercice 8, on fixe des réels λ et μ tels que $0 < \lambda < \mu$ et on considère la fonction f , restriction à Q de

$$f([z]) = \frac{\lambda \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_0) + \mu \operatorname{Im}(z_3 \bar{z}_2)}{\sum |z_i|^2}.$$

Exprimer le champ de vecteurs hamiltonien X_f à l'aide de ceux de g et h . En déduire les points critiques de f . Quels sont leurs indices (cette question se traite ici sans calcul en utilisant les exercices 18 et 21) ?

Exercice 21 (difficile). On considère un hamiltonien périodique H sur une variété symplectique compacte W . Soit x un point critique de H .

(1) En utilisant une version équivariante du théorème de Darboux, montrer qu'il existe une structure presque complexe et des coordonnées locales au voisinage de x telles que

– l'opération de S^1 , linéarisée sur l'espace vectoriel complexe $T_x W$, est de la forme

$$t \cdot (z_1, \dots, z_n) = (t^{\alpha_1} z_1, \dots, t^{\alpha_n} z_n),$$

– le hamiltonien s'écrit

$$H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i (x_i^2 + y_i^2).$$

(2) On suppose que le point critique x est *isolé*. Montrer qu'il est non dégénéré et d'indice pair.

(3) Montrer qu'une variété symplectique connexe munie d'un hamiltonien périodique dont les points critiques sont isolés est simplement connexe.

(4) Montrer qu'un hamiltonien périodique sur une variété symplectique compacte et connexe qui n'a que des points critiques isolés a un unique minimum local et un unique maximum local.

Exercices sur le chapitre 6

Exercice 22. Vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (p, q) &\longmapsto (p, q + 1/2) \end{aligned}$$

passer au quotient en un difféomorphisme φ du tore $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ qui préserve la forme symplectique ($\varphi^*\omega = \omega$) mais qui n'a aucun point fixe. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs X sur T^2 tel que

$$\varphi = \varphi_X^1$$

mais que X n'est pas un champ hamiltonien.

Exercice 23. Soit W une variété symplectique munie d'une opération du cercle qui préserve la forme symplectique. On suppose que W est simplement connexe. Montrer que l'opération est associée à un hamiltonien périodique $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ (au sens de l'exercice 18 page 488). Soit $\zeta \in S^1$ et soit φ le difféomorphisme défini par $\varphi(x) = \zeta \cdot x$. Montrer que φ est un difféomorphisme hamiltonien et qu'il a au moins $\sum \dim HM_i(W; \mathbf{Z}/2)$ points fixes.

Exercice 24. Soit $x \in \mathcal{L}W$, et soit u une courbe dans $\mathcal{L}W$ passant par x , c'est-à-dire une application

$$u : \mathbf{R} \times S^1 \longrightarrow W$$

avec $u(0, t) = x(t)$. Soit Y le vecteur tangent à $\mathcal{L}W$ défini par u . Si $f : \mathcal{L}W \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction, on pose

$$Y(x) \cdot f = \frac{\partial}{\partial s} f \circ u(s, t)|_{s=0}.$$

Montrer que cette formule définit bien quelque chose et que ce quelque chose est une dérivation sur les fonctions.

Exercice 25. On considère sur le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ la forme symplectique $\omega = dy \wedge dx$. Soient H et K les fonctions définies de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par

$$H(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x), \quad K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi y).$$

Montrer que H et K définissent des hamiltoniens (autonomes) sur $\mathbf{T}^2$ et déterminer les champs de vecteurs hamiltoniens X_H et X_K associés.

Déterminer les flots φ_t de X_H et ψ_t de X_K ainsi que les orbites périodiques de période 1 de X_H et de X_K . Les hamiltoniens H et K sont-ils non dégénérés ?

Calculer la composée $\sigma_t = \psi_t \circ \varphi_t$. Déterminer le hamiltonien F_t engendrant l'isotopie hamiltonienne σ_t (voir l'exercice 7 page 485). Déterminer les orbites périodiques de période 1 de X_{F_t} et préciser lesquelles sont contractiles. Montrer que F_t est non dégénéré.

Exercice 26. On considère, sur l'espace $\mathcal{L}W$, la forme d'action

$$(\alpha_H)_x(Y) = \int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_t(x(t)), Y(t)) dt.$$

Soit $x_0 \in \mathcal{L}W$ un lacet fixé. On fixe un prolongement u_0 de x_0 au disque D^2 . Montrer que x_0 possède un voisinage U dans $\mathcal{L}W$ tel que tout lacet $x \in U$ possède un prolongement u_x au disque D^2 , de sorte que

$$\mathcal{A}_H(x) = - \int_D u_x^* \omega + \int_0^1 H_t(x(t)) dt$$

définisse une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur U . En déduire que la forme α_H est fermée.

Exercice 27. Soit α une forme fermée sur une variété V et soit X un champ de pseudo-gradients adapté à α . On définit l'énergie d'une trajectoire γ du champ X par

$$E(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\alpha(\dot{\gamma}(s)) ds.$$

Montrer que, si l'énergie de γ est finie, alors γ joint deux zéros de α .

Exercice 28 (naturalité de l'équation de Floer). Soit $u : \mathbf{R} \times S^1$ une solution de l'équation de Floer

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } H_t(u) = 0.$$

On donne un hamiltonien K_t dépendant du temps avec $K_{t+1} = K_t$ et le flot de difféomorphismes symplectiques ψ^t qu'il engendre. Montrer que l'application $\tilde{u}$ définie par

$$\tilde{u}(s, t) = (\psi^t)^{-1}(u(s, t))$$

satisfait à

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + \tilde{J}(\tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \text{grad } \tilde{H}_t(\tilde{u}) = 0$$

pour des structures presque complexes $\tilde{J}$ et un hamiltonien $\tilde{H}_t$ que l'on déterminera.

Exercice 29. Soit V une variété compacte munie d'une métrique riemannienne et soit f une fonction de Morse sur V . On considère la fonctionnelle

$$\gamma \mapsto E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \left(\left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\|^2 + \left\| \text{grad}_{\gamma(s)} f \right\|^2 \right) ds.$$

Soient a et b deux points critiques de f et soit $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow V$ telle que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma(s) = a, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = b.$$

Montrer que

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \left\| \frac{d\gamma}{ds} + \text{grad}_{\gamma(s)} f \right\|^2 ds + f(a) - f(b).$$

Quels sont les extrema de E sur les courbes γ joignant a à b ?

Exercice 30. Montrer que l'ensemble des points critiques de $\mathcal{A}_H$ (sans hypothèse de non-dégénérescence) est compact (c'est une conséquence du théorème d'Ascoli).

Exercice 31 (singularités « apparentes » — difficile). Soit (W, ω) une variété symplectique compacte et soit J une structure presque complexe calibrée par ω . Soit $u : \mathbf{C} \rightarrow W$ une courbe J -holomorphe, c'est-à-dire, en coordonnée $s + it \in \mathbf{C}$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Montrer que, si u est d'énergie finie, elle se prolonge en une application J -holomorphe

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow W.$$

Exercice 32. On considère l'application $z \mapsto z^n$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. On appelle $A(r)$ l'aire de l'image du disque de centre 0 et de rayon r , $\ell(r)$ la longueur de sa circonférence. Calculer $A(r)$ et $\ell(r)$. L'inégalité

$$\ell(r^2) \leq 2\pi r A'(r)$$

obtenue dans la démonstration de la proposition 6.6.2 peut-elle être améliorée ?

Exercice 33. On considère la courbe complexe C_1 d'équation

$$y^2 = 4x^3 - x - 1$$

et l'application

$$u_\alpha : C_1 \longrightarrow \mathbf{C}^2$$

définie par $(x, y) \mapsto (\alpha^2 x, \alpha^3 y)$. On complète la courbe C_1 en une courbe de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et on prolonge u_α en une application

$$u_\alpha : C_1 \longrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C}).$$

Étudier la limite de u_α quand α tend vers 0 (figure 1).

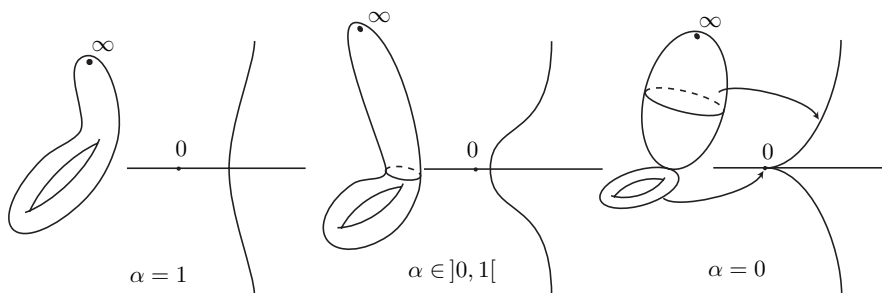


FIGURE 1

Exercice 34 (formes à périodes entières). Soit α une 1-forme fermée sur une variété V . On suppose que α est « à périodes entières⁽⁸⁾ », c'est-à-dire, avec les notations du § 6.7.a, que l'image de φ_α est contenue dans $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. Montrer que la formule

$$f(x) = \int_{x_0}^x \alpha$$

définit une application $f : V \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et que

$$f^* d\theta = 2\pi\alpha.$$

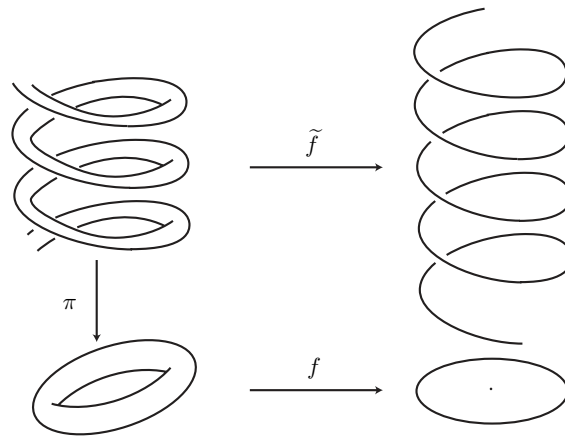


FIGURE 2

Montrer que le revêtement d'intégration $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est le revêtement tiré en arrière dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbf{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \exp \\ V & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}/\mathbf{Z} \end{array}$$

ou dans la figure 2 et qu'il est cyclique. On considère maintenant la forme d'action α_H (comme au § 6.7.b) sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Vérifier que l'on a toujours

$$\int_{S^2} w^* \omega \in \mathbf{Z}.$$

⁽⁸⁾C'est dire que la classe de cohomologie de de Rham de α est contenue dans l'image de $H^1(V; \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(V; \mathbf{R})$.

En déduire qu'il existe un revêtement infini cyclique de $\mathcal{L}\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ sur lequel α_H a une primitive $\tilde{f}_H$.

Exercices sur le chapitre 7

Exercice 35. Qu'implique la relation ${}^tAJA = J$ pour le déterminant d'une matrice symplectique A ?

Pour montrer que ce déterminant vaut $+1$, on peut procéder comme au § 5.6.d. Une autre méthode consiste à montrer que le groupe symplectique est engendré par les applications

$$x \mapsto x + \lambda\omega(x, a)a$$

(transvections symplectiques). C'est ce que l'on demande de faire dans cet exercice.

Exercice 36. Soit T une transvection symplectique (exercice 35 page 494). Calculer $\rho(T)$. L'application ρ vérifie-t-elle

$$\rho(AB) = \rho(A)\rho(B) ?$$

Exercice 37 (groupe fondamental de $U(n)$). Le groupe $SU(n)$ opère sur la sphère unité $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$, de sorte que le stabilisateur du dernier vecteur de la base canonique s'identifie à $SU(n-1)$. En déduire que $SU(n)$ est simplement connexe.

Montrer que l'application

$$U(n) \xrightarrow{\det} S^1$$

induit un isomorphisme des groupes fondamentaux.

Exercice 38. On considère la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 + 4\pi^2 t^2 & 2\pi t \\ 2\pi t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

Vérifier que le chemin $t \mapsto A(t)$ est dans $\mathcal{S}$ et calculer son indice de Maslov.

Même question (c'est plus délicat) avec la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 - 4\pi^2 t^2 & -2\pi t \\ 2\pi t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

Exercice 39. Dans $\mathbf{R}^4$ muni des coordonnées (q_1, q_2, p_1, p_2) , de la forme symplectique $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$, et de la structure complexe $J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$, on considère la forme quadratique

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (q_2 p_1 - q_1 p_2)$$

et la matrice symétrique associée

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & \text{Id} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$A = \exp(tJS) = \begin{pmatrix} \exp(t\alpha) & t \exp(t\alpha) \\ 0 & \exp(t\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & t \cos t - t \sin t \\ \sin t & \cos t & t \sin t & t \cos t \\ 0 & \cos t - \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

que c'est une matrice symplectique de valeurs propres (doubles) $e^{\pm it}$, qu'elle n'est pas diagonalisable (pour $t \neq 0$), et qu'elle est dans $\text{Sp}(2n)^+$ (pour $t \neq 0$).

On calcule maintenant $\rho(A)$ (pour $t \in]0, \pi[$:

(1) Montrer que $m_0 = 0$ et que $\rho(A) = (e^{it})^\sigma$, où σ est la signature de Q sur le sous-espace caractéristique E correspondant à la valeur propre e^{it} .

(2) Montrer que $X = (1, -i, 0, 0) \in E$ et que $\text{Im } \omega(\bar{X}, X) = 0$. En déduire que $\sigma = 0$ et que $\rho(A) = 1$.

Exercice 40 (grassmannienne des lagrangiens). On considère l'espace Λ_n des sous-espaces vectoriels lagrangiens de $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$. Montrer que le groupe $\text{U}(n)$ opère transitivement sur Λ_n et que le stabilisateur de

$$\mathbf{R}^n = \{X \in \mathbf{C}^n \mid \text{Im}(X) = 0\}$$

est isomorphe au groupe orthogonal $\text{O}(n)$. En déduire que Λ_n est une variété compacte et connexe de dimension $n(n+1)/2$.

Montrer que l'application

$$\det^2 : \text{U}(n) \longrightarrow S^1$$

définit une application continue de Λ_n dans S^1 et que celle-ci induit un isomorphisme des groupes fondamentaux.

Exercice 41 (classe de Maslov d'une immersion lagrangienne). Soit $f : L \rightarrow \mathbf{R}^n$ une immersion d'une variété de dimension n dans $\mathbf{R}^{2n}$. On suppose que f est *lagrangienne*, c'est-à-dire que $f^*\omega = 0$ ou encore que $T_x f(T_x L)$ est, pour tout x dans L , un sous-espace lagrangien de $\mathbf{R}^{2n}$.

Ainsi, associer à tout point l'espace tangent en ce point définit une application « de Gauß » $\gamma(f) : L \rightarrow \Lambda_n$. La composition

$$\gamma(f)_* : \pi_1(L) \longrightarrow \pi_1(\Lambda_n) = \mathbf{Z}$$

associe donc à tout lacet dans L un entier, sa classe de Maslov. Quelles sont les classes de Maslov des immersions (lagrangiennes) de S^1 dans $\mathbf{R}^2$ définies par les dessins de la figure 3 ? Montrer que la classe de Maslov d'un cercle plongé est ± 2 (utiliser le théorème des « tangentes tournantes », voir [7]).

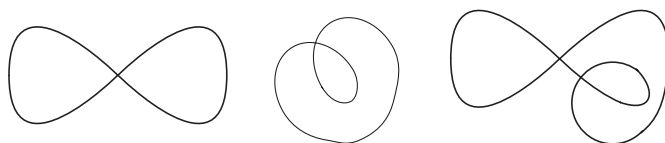


FIGURE 3

Exercice 42 (indice de Maslov relatif). Soit W une variété munie d'une forme symplectique ω et soit

$$j : L \hookrightarrow W$$

un plongement lagrangien (voir l'exercice 41 page 495). À tout disque

$$u : D^2 \longrightarrow W$$

à bord dans L , c'est-à-dire tel que $u(\partial D^2) \subset j(L)$, on peut associer un entier $\mu_L(u)$ comme suit : on trivialise u^*TW par une trivialisation symplectique

$$\Phi : u^*TW \longrightarrow D^2 \times \mathbf{R}^{2n},$$

la classe du lacet

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow \Lambda_n \\ z &\longmapsto \Phi(T_{u(z)}L) \end{aligned}$$

dans $\pi_1(\Lambda_n) \equiv \mathbf{Z}$ est l'entier $\mu_L(u)$ en question. Vérifier que cet entier ne dépend pas du choix de la trivialisation Φ .

Soit v un autre disque dans W à bord dans L . On suppose que u et v sont homotopes relativement à L , c'est-à-dire qu'il existe une homotopie

$$h : D^2 \times [0, 1] \longrightarrow W$$

telle que

$$\begin{cases} h(\cdot, 0) = u \\ h(\cdot, 1) = v \\ h(z, t) \in L \quad \text{si } z \in S^1. \end{cases}$$

Montrer qu'alors $\mu_L(u) = \mu_L(v)$. Ainsi, μ_L définit une application du groupe $\pi_2(W, L)$ des classes d'homotopie relatives dans $\mathbf{Z}$. Montrer que cette application est un homomorphisme de groupes.

On suppose désormais que $\pi_2(W) = 0$. Montrer qu'alors $\mu_L(u)$ ne dépend que de la restriction de u au bord et donc qu'elle définit un homomorphisme de groupes $\pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z}$.

Exercice 43. Soit P un polynôme à coefficients complexes et soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de P de multiplicité m . Commençons par rappeler une démonstration du théorème de Rouché.

(1) Soit γ le cercle $\gamma(t) = \alpha + \varepsilon e^{2i\pi t}$ ($t \in [0, 1]$). Montrer que, si ε est assez petit pour qu'il n'y ait pas d'autre racine de P que α dans le disque fermé B_ε de bord γ , on a

$$m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz.$$

(2) Posons $\delta = \sup_{z \in \text{Im } \gamma} |P(z)|$. Soit Q un polynôme tel que

$$\sup_{z \in B_\varepsilon} |P(z) - Q(z)| < \delta.$$

Vérifier que Q n'a pas de racine sur le cercle γ . Montrer que l'image de γ par h est contenue dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1. En déduire que

$$\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 0.$$

(3) Montrer que Q a exactement m racines (comptées avec multiplicités) dans le disque B_ε . C'est le théorème de Rouché.

En déduire une démonstration de la proposition 7.3.6.

Exercices sur le chapitre 8

Exercice 44. Montrer que le noyau de l'opérateur Γ considéré dans la proposition 8.1.4 n'est pas de dimension finie.

Exercice 45 (une autre démonstration du théorème 8.6.11). Soit $\Sigma : \mathbf{R} \rightarrow \text{End}(\mathbf{R}^{2n})$ une application continue telle que

$$\Sigma(s) = \pi \text{Id} \text{ pour } s < -s_0 \text{ et } \Sigma(s) = 3\pi \text{Id} \text{ pour } s > s_0.$$

Montrer que l'opérateur F défini par

$$F(Y) = \frac{\partial Y}{\partial s} + J_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + \sigma \cdot Y$$

est un opérateur de Fredholm de $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$ dans $L^p(\mathbf{R} \times S^1; \mathbf{R}^{2n})$.

Montrer que

$$\dim \text{Ker } F = 2n \# \{\ell \in \mathbf{Z}^* \mid 1 < 2\ell < 3\} = 2n,$$

puis que $\dim \operatorname{Ker} F^* = 0$ et que F est surjectif.

Exercices sur le chapitre 10

Exercice 46. On considère l'opérateur

$$L_0 : W^{1,2}(\mathbf{R}; \mathbf{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}^N)$$

$$Y \longmapsto \frac{dY}{ds} + A_0(s)$$

où $A_0(s)$ est une matrice diagonale (pour tout s) et constante pour $|s|$ assez grand, de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_{m^+} & 0 \\ 0 & -\operatorname{Id}_{n^+} \end{pmatrix} \text{ pour } s \geq M \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_{m^-} & 0 \\ 0 & -\operatorname{Id}_{n^-} \end{pmatrix} \text{ pour } s \leq -M.$$

(1) Vérifier que L_0 est de Fredholm. Déterminer son indice en fonction des $m^\pm$ et $n^\pm$.

(2) En s'inspirant des méthodes du § 8.8, en déduire une autre démonstration de la proposition 10.2.8.

Exercices sur le chapitre 11

Exercice 47. On reprend ici les notations et les résultats de l'exercice 25 page 490, où l'on a déterminé les solutions contractiles et périodiques de période 1 d'un hamiltonien F_t sur le tore $\mathbf{T}^2$. On demande de calculer les indices de ces trajectoires (un calcul essentiellement demandé dans l'exercice 38 (page 494)) et de déterminer le complexe de Floer pour ce hamiltonien (supposé régulier).

**APPENDICES : CE QU'IL FAUT
SAVOIR POUR LIRE CE LIVRE**

CHAPITRE 14

UN PEU DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Dans ce chapitre, nous énumérons, plus ou moins rapidement selon les cas, les différents objets et outils de géométrie utilisés dans ces notes.

14.1. Les variétés et les sous-variétés

Voir [38], [41], [40], [68] et [57] pour les notions de base présentées dans ce paragraphe.

14.1.a. Variétés. Une variété est un espace qui ressemble beaucoup, localement, à $\mathbf{R}^n$. Soyons plus précis. Une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Un couple, (U, φ) , où U est un tel ouvert et φ un homéomorphisme, est une carte. Ici une variété est en tout cas paracompacte (et en particulier séparable).

On demande aussi que V soit une réunion dénombrable de compacts et une réunion dénombrable d'ouverts de cartes (mais dans ce cours, nous utiliserons surtout des variétés compactes, pour lesquelles ces propriétés sont automatiquement vérifiées).

L'ensemble des cartes d'une variété est un atlas. Deux cartes (U, φ) et (U', φ') sont dites compatibles si la composition

$$\varphi(U \cap U') \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap U' \xrightarrow{\varphi'} \varphi'(U \cap U'),$$

une application d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans un autre, est un difféomorphisme (de classe $\mathcal{C}^\infty$). Si la variété V possède un atlas dont toutes les cartes sont compatibles entre elles, on dit que c'est une variété différentielle (ou lisse, ou de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Exemples. La sphère S^n , les espaces projectifs $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ et $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, le tore $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ sont des variétés (lisses).

Avec cette définition, une variété de dimension 0 est un ensemble dénombrable discret.

On définit, à travers les cartes et la notion *ad hoc* sur les ouverts de $\mathbf{R}^n$, la notion d'application $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété dans une autre : si U et V sont contenus dans des ouverts de cartes respectivement de la variété M et de la variété N , la fonction $f : U \rightarrow V$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (pour $0 \leq k \leq \infty$) si la composition

$$\varphi(U) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

est de classe $\mathcal{C}^k$. Être de classe $\mathcal{C}^k$ est une propriété locale, bien définie par cette condition.

14.1.b. Caractérisation des sous-variétés. Parmi les variétés, il y a les sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ est un sous-espace V qui ressemble beaucoup, localement, à un sous-espace vectoriel, au sens où chacun de ses points a , dans $\mathbf{R}^n$, un voisinage ouvert U difféomorphe à un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ par un difféomorphisme φ tel que $\varphi(U \cap V) = \varphi(U) \cap \mathbf{R}^d$. L'entier d est la dimension de la sous-variété V .

Théorème 14.1.1. *Soit $V \subset \mathbf{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *V est une sous-variété de dimension d de $\mathbf{R}^n$;*
- (2) *tout point x de V possède un voisinage ouvert U dans $\mathbf{R}^n$ tel qu'il existe une submersion $g : U \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ avec $U \cap V = g^{-1}(0)$;*
- (3) *tout point x de V possède un voisinage ouvert U dans $\mathbf{R}^n$ tel qu'il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathbf{R}^d$ et une immersion $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ qui est un homéomorphisme de Ω sur $U \cap V$.*

Autrement dit, une sous-variété peut être décrite localement par des équations (le nombre d'équations est la codimension), ou par un paramétrage (le nombre de paramètres est la dimension). Toutes ces propriétés étant des applications du théorème des fonctions implicites et/ou d'inversion locale.

Un excellent et indispensable exercice est, étant donnée une partie de $\mathbf{R}^n$ (ou d'une autre variété) soupçonnée d'être une sous-variété, de décider lequel de ces critères est le mieux adapté à prouver sa culpabilité.

La définition d'une sous-variété d'une variété est analogue.

Bien entendu (c'est contenu dans la définition), les sous-variétés sont des variétés. Par exemple, un « niveau » d'une fonction numérique f (image inverse d'un nombre réel α) relève de la propriété (2). C'est une sous-variété quand f est une submersion le long de $f^{-1}(\alpha)$.

Si les sous-variétés sont des variétés, la réciproque est vraie : les variétés peuvent être considérées comme des sous-variétés, comme nous le rappelons maintenant.

14.1.c. Partitions de l'unité, théorème de plongement.

Partitions de l'unité. Il s'agit d'un outil essentiel, qui autorise à démontrer bien des résultats en se concentrant sur leurs aspects locaux. Soit V une variété compacte⁽¹⁾ de dimension n et soit $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ un atlas fini de V . On montre qu'il existe un recouvrement de V par des ouverts Ω_i tels que $\overline{\Omega_i} \subset U_i$ et des fonctions h_i à support dans U_i et valant 1 sur Ω_i .

On en déduit, en posant

$$p_i = \frac{h_i}{\sum h_i},$$

qu'il existe, pour tout recouvrement de V par un nombre fini d'ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, une famille $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$ de fonctions

$$p_i : V \longrightarrow [0, +\infty[$$

telles que

$$\text{Supp}(p_i) \subset \Omega_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N p_i \equiv 1.$$

Plongement d'une variété compacte dans un espace numérique. Soit V une variété compacte de dimension n et soit $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ un atlas fini de V . On utilise les fonctions h_i ci-dessus pour construire une application F , définie par

$$F = (h_1\varphi_1, \dots, h_N\varphi_N, h_1, \dots, h_N) : V \longrightarrow (\mathbf{R}^n)^N \times \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{(n+1)N}.$$

On vérifie que F est une immersion injective (et donc un plongement). C'est le théorème suivant.

Théorème 14.1.2 (théorème de plongement de Whitney). *Soit V une variété compacte. Alors il existe un plongement de V comme sous-variété dans un espace euclidien $\mathbf{R}^N$.* $\square$

Par un argument de position générale semblable à ceux semblable à ceux que nous rappellerons plus bas, on peut démontrer que la dimension de l'espace euclidien peut être descendue jusqu'à $2 \dim V + 1$.

Remarque. Ce résultat appartient à la géométrie différentielle réelle ; il n'a pas d'analogue en géométrie analytique complexe : à cause du théorème de

⁽¹⁾paracompacte suffit...

Liouville, aucune variété analytique compacte n'est une sous-variété analytique de $\mathbf{C}^N$.

14.1.d. Bords. Une variété à bord est un espace topologique V dont tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert du demi-espace $(x_n \leq 0)$ de l'espace $\mathbf{R}^n$. Les points qui n'ont pas de voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ sont les points du bord. Le bord, noté ∂V , est une sous-variété de dimension $n - 1$. On démontre (voir le § 14.4) que le bord a un voisinage de la forme $\partial V \times [0, \varepsilon[$.

14.1.e. Vecteurs tangents, applications tangentes. Rappelons que l'on peut définir un vecteur tangent en x à la variété V comme une classe d'équivalence de courbes passant par x dessinées sur V ,

$$c :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow V \quad \text{telle que } c(0) = x,$$

sous la relation d'équivalence qui identifie c_1 et c_2 si, pour une carte φ centrée en x ,

$$(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0).$$

L'ensemble des vecteurs tangents en x est un espace vectoriel, noté $T_x V$. Ceci permet de définir l'application tangente

$$T_x f : T_x V \longrightarrow T_{f(x)} W$$

à une application $f : V \rightarrow W$, tout simplement en associant, à la classe de la courbe c , celle de la courbe $f \circ c$.

Et de considérer un vecteur tangent comme une dérivation sur les fonctions, c'est-à-dire comme une application linéaire X définie sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x et vérifiant

$$X(fg) = f(x)X(g) + g(x)X(f).$$

En associant, pour tout x , au vecteur $X \in T_x V$ et à la fonction $f : V \rightarrow \mathbf{R}$, le nombre $X(f)(x) = T_x f(X) \in \mathbf{R}$, on définit la fonction $X(f)$.

Remarque 14.1.3. On note souvent $(df)_x$ au lieu de $T_x f$, en particulier quand f est une fonction numérique. Nous le ferons aussi.

Il est instructif de décrire l'espace tangent à une sous-variété *via* chacune des caractérisations (on trouve notamment $T_x(f^{-1}(0)) = \text{Ker } T_x f$ pour f submersive).

14.1.f. Champs de vecteurs. On définit aussi le *fibré tangent*⁽²⁾ en mettant la topologie et la structure de variété *ad hoc* sur la réunion disjointe des espaces tangents en les points de la variété.

Les champs de vecteurs en sont des sections⁽³⁾ $\mathcal{C}^\infty$, c'est une façon de dire qu'un champ de vecteurs est la donnée, en chaque point, d'un vecteur tangent et que celui-ci dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$ du point considéré. En général, on notera les champs de vecteurs par des grandes lettres latines, comme X , et X_x désignera la valeur du champ X au point x .

Si X est un champ de vecteurs et f une fonction, on note $X \cdot f$ la fonction dérivée de f le long de X , c'est-à-dire définie par

$$(X \cdot f)(x) = X_x \cdot f = T_x f(X_x).$$

Toutes les dérivations proviennent de champs de vecteurs.

Crochet. La composée de deux dérivations n'est pas une dérivation, toutefois,

$$f \longmapsto X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$$

en est une, on note $[X, Y]$ le champ de vecteurs correspondant.

Un champ de vecteurs peut aussi être considéré comme une équation différentielle sur la variété. Voir le § 14.4.

14.1.g. Formes différentielles. Une forme différentielle de degré p sur une variété V (aussi dite p -forme) est une section du fibré $\Lambda^p T^*V$, en termes moins pédants la donnée, pour chaque $x \in V$, d'une forme extérieure de degré p sur l'espace tangent $T_x V$, dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ de x . En coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ sur V , ceci s'écrit

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

écriture dans laquelle les $\alpha_{i_1, \dots, i_p}$ sont des fonctions et $dx_1, \dots, dx_n$ désigne la base canonique de $(\mathbf{R}^n)^*$.

Une application $f : V \rightarrow W$ transforme les formes différentielles sur W en formes différentielles sur V par

$$(f^* \alpha)_x(X_1, \dots, X_p) = \alpha_{f(x)}(T_x f(X_1), \dots, T_x f(X_p)).$$

L'opération la plus importante sur les formes est la différentiation extérieure, elle transforme une forme de degré p en une forme de degré $p+1$, en coordonnées

$$(d\alpha) = \sum d\alpha_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

(où $d\alpha_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1}$ est la différentielle de la fonction $\alpha_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1}$).

⁽²⁾ Et de même, le fibré cotangent, en utilisant les duals des espaces tangents.

⁽³⁾ Une section d'un fibré $\pi : E \rightarrow V$ est une application $s : V \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s = \text{Id}_V$.

Elle vérifie $d \circ d = 0$. On parle de formes fermées ($d\alpha = 0$) et de formes exactes ($\alpha = d\beta$). Les formes exactes sont fermées mais la réciproque est fautive en général, ce qui est à l'origine de la cohomologie de de Rham.

Nous aurons surtout besoin de : 1-formes et 2-formes, différentielle extérieure, formes fermées, formes exactes, de la notion de forme-volume, et de la formule de Stokes. Voir [38, Chap. V] et [68, Chap. VII].

14.1.h. Questions d'orientation. On dit qu'une variété est orientable si elle possède un atlas d'orientation (dont tous les changements de cartes préservent l'orientation). Une variété qui possède une forme volume est orientable (la démonstration est directe). La réciproque est vraie, on construit une forme volume grâce à une partition de l'unité (voir [38, Chap. V] si la variété est compacte et plus généralement [30, p. 46]).

Le bord d'une variété orientée a une orientation naturelle.

Exemple. Si $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ est une submersion, alors la sous-variété $f^{-1}(0)$ est orientable. Pour le montrer, on peut utiliser le gradient de la fonction, un champ de vecteurs normal à la sous-variété.

14.2. Points critiques, valeurs critiques et théorème de Sard

Voir par exemple [33] pour ce paragraphe.

14.2.a. Points critiques. Un point x de la variété M est *critique* pour l'application

$$f : M \longrightarrow N$$

à valeurs dans la variété N si l'application linéaire $T_x f$ n'est pas de rang maximal.

- soit $\dim M \leq \dim N$ et f n'est pas immersive en x ;
- soit $\dim M \geq \dim N$ et f n'est pas submersive en x .

Appelons m et n respectivement et alphabétiquement les dimensions de M et N . Dans le cas où $m \leq n$, la condition est que $\dim \text{Ker } T_x f > 0$; dans le cas $m \geq n$, c'est $\text{rg } T_x f < n$. On résume tout ça en disant que x est critique si le corang de f en x est strictement positif, avec la définition *ad hoc* du corang, c'est-à-dire $\inf(m, n) - \text{rg } T_x f$.

Exemple (exemple fondamental). Quand $N = \mathbf{R}$, cas des fonctions numériques, $n = 1$ et un point x est critique si et seulement si $T_x f \equiv 0$.

14.2.b. Le théorème de Sard. Une valeur critique de l'application f est un point de la variété but N qui est l'image d'un point critique. Les autres points de N sont des *valeurs régulières*. Il faut remarquer en particulier qu'une valeur régulière n'est pas nécessairement une valeur. Et qu'il peut y avoir des points non critiques dont l'image est une valeur critique.

Le théorème de Sard affirme que, sous certaines hypothèses, presque toutes les valeurs d'une application différentiable sont régulières (remarquons que la notion d'ensemble négligeable et donc, de « presque tout » est bien définie sur une variété). On a précisément :

Théorème 14.2.1 (théorème de Sard). *Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors, les valeurs critiques de f forment un ensemble de mesure nulle dans N .*

Remarque 14.2.2. Quand la dimension m de M est strictement inférieure à celle, n , de N , alors $f(M)$ lui-même est de mesure nulle dans N (une application pas complètement triviale du fait que le sous-espace $\mathbf{R}^m$ est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^n$). Par exemple, dans ce cas, une application différentiable de M dans N n'est jamais surjective. Le théorème est donc intéressant (et plus difficile à démontrer) surtout quand $m \geq n$.

Voir par exemple [33, p. 34 sqq] pour une démonstration.

14.2.c. Niveaux réguliers d'une fonction, sous-niveaux. Si $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction et si α en est une valeur régulière, alors, en application du théorème sur les submersions, nous l'avons dit, le *niveau* $f^{-1}(\alpha)$ est une sous-variété de codimension 1 de V . Le *sous-niveau* $V^\alpha = f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est, lui, une variété à bord de bord $f^{-1}(\alpha)$.

Soit $f : (V, \partial V) \rightarrow W$ est une application $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété à bord dans la variété W , on suppose que le point w de W est une valeur régulière pour f et pour $f|_{\partial V}$. Alors $f^{-1}(w)$ est une sous-variété de V , à bord

$$\partial f^{-1}(w) = (f|_{\partial V})^{-1}(w).$$

14.3. Transversalité

Cette notion, due à Thom au début des années 1950, est essentielle en géométrie. Il s'agit de la position relative de deux sous-variétés.

14.3.a. Première notion de transversalité. L'histoire commence par (encore) une application du théorème des fonctions implicites :

Théorème 14.3.1. *Soient M et N deux sous-variétés de la variété P . Soit u un point de $M \cap N$ tel que*

$$T_u M + T_u N = T_u P.$$

Alors, au voisinage de u , $M \cap N$ est une sous-variété de P , sa codimension est la somme des codimensions de M et de N et son espace tangent en u est

$$T_u(M \cap N) = T_u M \cap T_u N.$$

Ici tout est supposé de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais la classe $\mathcal{C}^1$ suffit.

Démonstration. L'assertion est locale au voisinage de u . Supposons donc que $P = \mathbf{R}^p$. Appelons m la codimension de M et n celle de N , de sorte que, toujours au voisinage de u , nous pouvons aussi supposer que $M = f^{-1}(0)$, $N = g^{-1}(0)$ pour des submersions f et g . La condition de position générale sur les espaces tangents s'écrit alors

$$\dim(\text{Ker } T_u f + \text{Ker } T_u g) = p.$$

Considérons donc l'application $F = (f, g) : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$, qui vérifie $F^{-1}(0) = M \cap N$ et dont le noyau de la différentielle en u est

$$\text{Ker } T_u F = \text{Ker } T_u f \cap \text{Ker } T_u g,$$

un sous-espace dont la dimension est donc

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } T_u F &= \dim \text{Ker } T_u f + \dim \text{Ker } T_u g - \dim(\text{Ker } T_u f + \text{Ker } T_u g) \\ &= p - m + p - n - p = p - (m + n). \end{aligned}$$

De sorte que $T_u F$ est surjective et donc que F est une submersion au voisinage de u et donc $M \cap N$ est une sous-variété. La démonstration donne aussi son espace tangent, le noyau de $T_u F$, c'est-à-dire l'intersection des espaces tangents, et sa codimension, la somme des codimensions. $\square$

Exemple 14.3.2. L'exemple d'une surface M et d'un plan N dans $P = \mathbf{R}^3$ est déjà instructif. Les deux sous-variétés sont de codimension 1, donc l'hypothèse de « position générale » est simplement qu'elles ne sont pas tangentes. Une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ et son espace tangent (affine) ne sont jamais transverses.

On dit que les deux sous-variétés M et N de P sont *transverses* au point $u \in P$ si

$$\begin{cases} \text{soit } u \notin M \cap N, \\ \text{soit } u \in M \cap N \quad \text{et } T_u M + T_u N = T_u P. \end{cases}$$

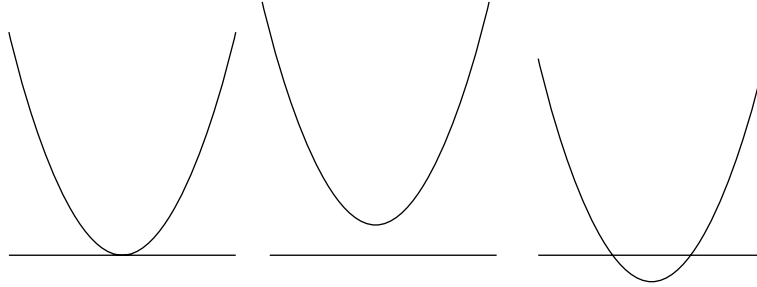


FIGURE 1

On dit qu'elles sont *transverses*, notation $M \pitchfork N$, si elles sont transverses en tout point.

La figure 1 montre deux sous-variétés de $\mathbf{R}^2$ qui ne sont pas transverses... et le fait qu'après une minuscule déformation, elles le sont devenues.

Remarque 14.3.3. Cette propriété est tout à fait générale : la transversalité est une notion *générique*, une petite déformation permet toujours de l'assurer. C'est aussi une notion *stable*, une petite déformation de deux sous-variétés transverses préserve cette transversalité. Pour démontrer la première assertion, on peut utiliser le théorème de Sard, M et N étant décrites comme dans la démonstration ci-dessus par les submersions f et g , presque toutes les valeurs sont régulières pour F , donc $f^{-1}(\varepsilon)$ et $g^{-1}(\eta)$ sont transverses pour presque tous les (ε, η) proches de $(0, 0)$.

Remarque 14.3.4. Pour deux sous-variétés dont la somme des dimensions est strictement plus petite que celle de la variété ambiante (par exemple deux courbes dans $\mathbf{R}^3$), la transversalité signifie l'absence d'intersection.

Plus généralement, si $f : M \rightarrow N$ est une application différentiable et si $P \subset N$ est une sous-variété, on dit que f est *transverse* à P (en u) si

$$\begin{cases} \text{soit } u \notin f(M) \cap P, \\ \text{soit } u = f(x) \in f(M) \cap P \quad \text{et } T_x f(T_x M) + T_u P = T_u N. \end{cases}$$

On note de même $f \pitchfork P$.

Proposition 14.3.5. Si f est transverse à P (en tout point) et si $f^{-1}(P)$ n'est pas vide, $f^{-1}(P)$ est une sous-variété de M . $\square$

Remarque 14.3.6. Si $N \subset P$ est une sous-variété (co-orientable) orientable de la variété orientable P et si $f : M \rightarrow P$ est transverse à N , alors $f^{-1}(N)$ est (co-orientable) orientable dans la variété orientable M . Le cas traité dans l'exemple 14.1.h est celui où la sous-variété N est le point 0 et $P = \mathbf{R}$.

Une application directe du théorème de Sard est le premier résultat de transversalité :

Théorème 14.3.7. *Soient M , N et S trois variétés et soit P une sous-variété de N . Supposons que*

$$F : M \times S \longrightarrow N$$

soit une application transverse à P . Alors, pour presque tout $s \in S$, $F_s : M \rightarrow N$ est transverse à P .

Ici on considère la variété S comme un espace de paramètres.

Démonstration. En application de la proposition précédente, $F^{-1}(P)$ est une sous-variété Q de $M \times S$. La projection

$$\pi : Q \subset M \times S \longrightarrow S$$

est une application différentiable dont le théorème de Sard affirme que presque tout $s \in S$ est une valeur régulière de π . Il est facile de vérifier que les valeurs régulières de π sont exactement les s pour lesquels l'application F_s est transverse à P . $\square$

Remarque 14.3.8. Plus l'espace de paramètres S est grand, plus une application $M \times S \rightarrow N$ a de chances d'être transverse à la sous-variété P . C'est ce qui explique la grande utilité de ce résultat.

14.3.b. Topologie $\mathcal{C}^k$. Pour énoncer les théorèmes de transversalité, qui disent que, suffisamment près d'une application donnée, il y a une application transverse à une sous-variété donnée, ou encore que l'on peut « perturber » (sous-entendu « légèrement ») une application pour la rendre transverse à une sous-variété, il est nécessaire de définir une notion de proximité, c'est-à-dire une (en fait plusieurs) topologie sur l'espace des applications de la variété M dans la variété N .

Commençons par le cas où les deux variétés sont des ouverts d'espaces numériques. La topologie $\mathcal{C}^\infty$ (resp. $\mathcal{C}^k$) est celle de la convergence uniforme sur les compacts de la fonction et de toutes ses dérivées (resp. d'ordre $\leq k$).

Remarque 14.3.9. Cette topologie est métrisable : on utilise les pseudo-distances

$$d_K^r(f, g) = \sup_{x \in K} |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|$$

et on fait parcourir à K une famille dénombrable de compacts recouvrant l'espace de départ.

Dans le cas général de deux variétés M et N , on définit la topologie $\mathcal{C}^k$ (où k est éventuellement infini) en en donnant une base de voisinages. Les voisinages en question d'une fonction f sont indexés par les (K, V, ε) tels que

- $\varepsilon > 0$,
- K est un compact contenu dans un ouvert de carte de M ,
- V est un ouvert de carte de N et l'on a
- $f(K) \subset V$.

On pose

$$\mathcal{U}_{K,V,\varepsilon}^k(f) = \{g \in \mathcal{C}^k(M, N) \mid g(K) \subset V \text{ et } d_K^r < \varepsilon \text{ pour } |r| \leq k\}.$$

Cette topologie est métrisable puisque, comme toutes les variétés de ce cours, M a été supposée séparable. On appellera d_∞ une distance définissant la topologie $\mathcal{C}^\infty$.

14.3.c. Théorèmes de transversalité.

Théorème 14.3.10 (transversalité locale). *Soient M et N deux variétés et soit P une sous-variété propre de N . Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable et soit a un point de M . Alors il existe un voisinage compact K de a dans M et un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de f dans $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ tels que*

$$\{g \in \mathcal{U} \mid g \pitchfork P \text{ en tout point de } K\}$$

est un ouvert dense dans $\mathcal{U}$.

Théorème 14.3.11 (transversalité). *Soit K un compact de M . L'ensemble des applications de M dans N transverses à la sous-variété P de N le long de K est un ouvert dense dans $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.*

Corollaire 14.3.12. *L'ensemble des applications $f : M \rightarrow N$ transverses à la sous-variété P de N est dense dans $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ (et c'est un ouvert dense si M est compacte).*

Esquisse d'une démonstration du théorème 14.3.10. Si $f(a) \notin P$, soit K un voisinage compact de a tel que $f(K) \cap P = \emptyset$ et soit $\mathcal{U}$ l'ouvert

$$\mathcal{U} = \{g \in \mathcal{C}^\infty(M, N) \mid g(K) \cap P = \emptyset\}.$$

Ils ont la propriété voulue grâce à la propriété de P .

Si $f(a) \in P$, considérons un ouvert de carte V pour la sous-variété $P \subset N$ au voisinage de $f(a)$: nous pouvons supposer que $V = \mathbf{R}^n$ et $V \cap P = \mathbf{R}^p \times \{0\} \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q = \mathbf{R}^n$, avec $f(a) = 0$. Soit U un voisinage de a

dans M tel que $f(\overline{U}) \subset V$ et soit K un voisinage compact de a contenu dans U . Posons enfin

$$\mathcal{U} = \{g \in \mathcal{C}^\infty(M, N) \mid g(\overline{U}) \subset V\}$$

et montrons que ce K et cet $\mathcal{U}$ conviennent.

Soit α une fonction en cloche à support dans U qui vaut identiquement 1 sur K . Définissons une application $G : M \times (\{0\} \times \mathbf{R}^q) \rightarrow N$ par

$$G(x, v) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \notin U \\ g(x) + \alpha(v)v & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Évidemment, G est transverse à $\mathbf{R}^p \times \{0\}$, ce qui donne la densité voulue par le théorème 14.3.7.

Le fait que les applications transverses à P le long de K forment un ouvert est conséquence du fait que les matrices de rang maximum forment un ouvert de l'espace des matrices. $\square$

Démonstration du théorème 14.3.11. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Pour tout $a \in K$, soient K_a et $\mathcal{U}_a$ un compact et un ouvert comme ceux dont le théorème 14.3.10 affirme l'existence... en affirmant également que

$$\mathcal{U}'_a = \{g \in \mathcal{U}_a \mid f \pitchfork P \text{ le long de } K_a\}$$

est un ouvert dense de $\mathcal{U}_a$. Comme K est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini N des K_{a_i} et on pose

$$\mathcal{U}' = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{U}'_{a_i}.$$

C'est un ouvert dense (comme intersection finie d'ouverts denses). Si $g \in \mathcal{U}'$, alors f est transverse à P le long de la réunion des K_{a_i} donc de K . $\square$

Il arrive que l'on ait (et il arrivera que nous ayons) besoin d'une propriété de transversalité un peu différente : on ne veut pas considérer toutes les fonctions de M dans N mais seulement celles ayant une propriété spécifique au problème considéré et qui ne soit pas une propriété ouverte, satisfaisant une contrainte.

Suivant [40], disons qu'une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^\infty(M, N)$ est *localement transverse* sur P si, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, pour tout $a \in M$, il existe un voisinage K de a dans M et un voisinage $\mathcal{V}$ de f dans $\mathcal{F}$ tels que, pour tout $g \in \mathcal{V}$, il existe un voisinage U de 0 dans un espace $\mathbf{R}^q$ et une famille

$$G : M \times U \longrightarrow N$$

telle que

$$- G_0 = g,$$

- $\forall t \in U, G_t \in \mathcal{F}$,
- G est transverse à P sur $K \times U$.

Cette définition s'adapte à la plupart des contraintes, qui en général ne définissent pas des ouverts, elle sert par exemple à montrer les théorèmes d'immersion et de plongement de Whitney. Un autre avantage est que la démonstration du théorème de transversalité donne, sans changement, le résultat de « transversalité sous contrainte » :

Théorème 14.3.13. *Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^\infty(M, N)$ est localement transversale sur la sous-variété $P \subset N$, alors, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont transverses à P le long de K est un ouvert dense de $\mathcal{F}$. $\square$*

14.4. Champs de vecteurs comme équations différentielles

14.4.a. Flots. Un champ de vecteurs peut être considéré comme une équation différentielle

$$c'(t) = X_{c(t)}$$

dont on note φ_X^t la solution passant par x en $t = 0$. Elle n'est définie, en principe que pour t proche de 0. Mais dans ce cas, on a

$$\varphi_X^t(\varphi_X^{t'}(x)) = \varphi_X^{t+t'}(x)$$

d'où l'on déduit sans mal que φ_X^t est un difféomorphisme, l'identité pour $t = 0$.

Un résultat très important, et que nous utiliserons en permanence, est le fait que, sur une variété compacte, le flot est défini pour tout t .

Théorème 14.4.1. *Le flot d'un champ de vecteurs sur une variété compacte V est défini sur $\mathbf{R} \times V$.*

Il en est bien entendu de même pour un champ de vecteurs à support compact sur une variété quelconque. Voir par exemple [48, p. 10] pour une démonstration.

Voisinage collier du bord. Le bord ∂V d'une variété V possède un voisinage « collier⁽⁴⁾ », c'est-à-dire un voisinage de la forme $\partial V \times [0, \varepsilon[$, que l'on peut obtenir en intégrant un champ de vecteurs : on choisit un champ de vecteurs défini au voisinage du bord et qui n'est pas tangent au bord (ce qu'il est facile de faire en utilisant une partition de l'unité) et on l'intègre.

⁽⁴⁾Nous en avons fait usage au § 4.7.

14.4.b. Dérivée de Lie, formule des Cartan. La dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$ prolonge la dérivation des fonctions (0-formes). Elle est définie par

$$\mathcal{L}_X \alpha = \left(\frac{d}{dt} (\varphi^t)^* \alpha \right)_{t=0}$$

(et transforme donc une p -forme en une autre p -forme).

La formule des Cartan relie dérivée de Lie et différentielle extérieure. Elle fait aussi intervenir le produit intérieur d'une forme par un champ de vecteurs

$$(i_X \alpha)_x (Y_1, \dots, Y_p) = \alpha_x (X, Y_1, \dots, Y_p)$$

(une opération qui transforme une p -forme en une $p-1$ -forme). Elle affirme que

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d.$$

Voir toujours [38, Chap. V].

14.4.c. Linéarisation le long d'une solution. Considérons un champ de vecteurs X sur une variété V , c'est-à-dire l'équation différentielle

$$\dot{x} = X(x)$$

(nous utilisons la notation $\dot{x} = dx/dt$).

Traditionnellement, on pense à l'équation linéarisée comme à celle décrivant les solutions « infinitésimalement proches » d'une solution donnée. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des solutions proches, écrivons, dans une carte

$$y(t) = x(t) + Y(t),$$

obtenant, à l'ordre 1,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = X(y(t)) - X(x(t)) = (dX)_{x(t)}(Y(t)).$$

Cette équation différentielle *linéaire* en Y est l'équation linéarisée. Décrivons-la de façon plus intrinsèque.

Considérons une solution $x(t)$ de notre équation différentielle et un champ de vecteurs tangents à V le long de x . Par exemple, $X = d/dt$ est une telle solution.

Lemme 14.4.2. *La dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$ définit un opérateur D sur les sections locales de x^*TV , qui vérifie, pour toute fonction f définie le long de x ,*

$$D(fY) = \dot{f}Y + fDY.$$

Démonstration. Définissons DY en

- prolongeant Y en $\tilde{Y}$ sur un voisinage de x (ou d'un point de x , tout est local)
- calculant $\mathcal{L}_X \tilde{Y}$ ($= [\tilde{Y}, X]$)
- restreignant ce champ de vecteurs à x .

Vérifions que le résultat ne dépend pas du choix du prolongement $\tilde{Y}$ de Y en constatant que, si Z est un champ identiquement nul en restriction à la solution x , alors $\mathcal{L}_X Z$ est nul en restriction à x (X ne dérive que dans la direction de x). C'est ce qu'affirme le lemme 14.4.3 ci-dessous.

La « linéarité » par rapport aux fonctions est conséquence immédiate de l'identité

$$\mathcal{L}_X(fY) = (X \cdot f)Y + f\mathcal{L}_X Y. \quad \square$$

Lemme 14.4.3. *Si Z est un champ de vecteurs sur V défini au voisinage de x et identiquement nul sur x , alors $\mathcal{L}_X Z$ est nul en tout point de x .*

Démonstration. La définition de $\mathcal{L}_X Z$ utilise le flot φ^t de X :

$$\mathcal{L}_X Z = \frac{d}{dt}((\varphi^{-t})_* Z)|_{t=0}.$$

En tout point de x , le vecteur $Z(x(t))$ est nul, donc aussi $(\varphi^t)_* Z(x)$, identiquement. Donc $\mathcal{L}_X Z$ est nul en tout point de la trajectoire x . $\square$

On appelle *équation linéarisée* l'équation linéaire $DY = 0$. On remarquera qu'évidemment, X lui-même est une solution de l'équation aux variations. On a :

Lemme 14.4.4. *Les solutions Y de l'équation linéarisée le long de x sont les champs vecteurs $Y(t)$ définis le long de x et tels que*

$$Y(t) = (T_{x(0)}\varphi^t)(Y(0)).$$

En effet, si $Y(t)$ est défini par cette formule,

$$Y(0) = (T_{x(0)}\varphi^t)^{-1}Y(t) = (T_{x(t)}\varphi^{-t})Y(t)$$

ne dépend pas de t , de sorte que la formule définit bien une solution de l'équation linéaire ; elle vaut $Y(0)$ pour $t = 0$ et est seule à le faire. $\square$

14.4.c.1. En coordonnées. Pour pouvoir calculer en coordonnées, écrivons cette équation sous forme matricielle. Si $(e_1(t), \dots, e_m(t))$ est une base de sections locales du fibré TV le long de x , un champ de vecteurs Y le long de x s'écrit $Y(t) = \sum y_i(t)e_i(t)$ et

$$\begin{aligned} DY &= \sum_{i=1}^m (\dot{y}_i e_i + y_i D e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\dot{y}_i e_i + y_i \sum_{j=1}^m a_{i,j} e_j \right) = \sum_{i=1}^m \left(\dot{y}_i + \sum_{k=1}^m a_{k,i} y_k \right) e_i \end{aligned}$$

ce qui donne, en écrivant y pour le vecteur colonne des y_i et en appelant $A(t)$ la matrice des $A(t)_{i,j} = a_{j,i}(t)$:

$$\dot{y} + A(t)y = 0.$$

Encore plus localement, supposons que V soit un ouvert de $\mathbf{R}^m$, de sorte que le champ de vecteurs X peut être considéré comme une application

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbf{R}^m \\ x &\longmapsto X(x). \end{aligned}$$

Utilisons comme base $(e_1(t), \dots, e_m(t))$ la base canonique $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m)$ de $\mathbf{C}^m$ restreinte à la trajectoire. Ainsi

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = -\frac{\partial X}{\partial x_i} \quad \text{de sorte que } A(t) = -(dX)_{x(t)}.$$

L'équation aux variations est la *linéarisée* $\dot{y} = (dX)_{x(t)}y$ de l'équation différentielle originelle. On retrouve l'équation linéarisée « à la Poincaré » évoquée ci-dessus.

14.4.d. Le cas d'un champ de vecteurs dépendant du temps. Dans ce texte, nous aurons à considérer des champs de vecteurs « dépendant du temps », c'est-à-dire des systèmes différentiels

$$\dot{x} = X_t(x(t))$$

où $(t, x) \mapsto X_t(x)$ est un champ de vecteurs qui dépend du paramètre supplémentaire t , le temps. La situation semble un peu différente de celle considérée jusqu'ici, mais s'y ramène en considérant le champ de vecteurs sur $\mathbf{R} \times V$

$$\tilde{X}(u, x) = \frac{d}{du} + X_u(x) \in T_{(u, x)}(\mathbf{R} \times V).$$

Les trajectoires de $\tilde{X}$ sont les solutions $\tilde{x}(t) = (u(t), x(t)) \in \mathbf{R} \times V$ de

$$\dot{u}(t) = 1, \quad \dot{x}(t) = X_{u(t)}(x(t)),$$

parmi lesquelles, les $t \mapsto (t, x(t))$ où x est solution de $\dot{x} = X_t(x)$, notre équation originelle. Le flot de $\tilde{X}$ est

$$\tilde{\varphi}^t(u, x) = (u + t, \varphi^t(x)),$$

où φ^t désigne le flot de X_t , solution de

$$\varphi^0 = \text{Id} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \varphi^t = X_t \circ \varphi^t.$$

La linéarisation de l'équation différentielle le long d'une telle solution s'applique à des sections de $\tilde{x}^*T(\mathbf{R} \times V)$, c'est-à-dire à des vecteurs

$$t \longmapsto (y(t), Y(t))$$

vérifiant

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial X_t / \partial t & (dX_t)_{x(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont donc de la forme (y, Y) où y est constante et Y satisfait à

$$\frac{dY}{dt} = y \frac{\partial X_t}{\partial t} + (dX_t)_{x(t)} Y.$$

Ce qui, en particulier, pour $y = 0$, est

$$\frac{dY}{dt} = (dX_t)_{x(t)} Y,$$

où nous retrouvons la forme ci-dessus. Les résultats s'appliquent donc, en particulier le lemme 14.4.4, qui donne

$$(y(t), Y(t)) = T_{\tilde{x}(0)} \tilde{\varphi}^t(y(0), Y(0)) = (y(0), T_{x(t)} \varphi^t(Y(0))).$$

Pour $y(0) = 0$, nous voyons que Y est solution de

$$\frac{dY}{dt} = (dX_t)_{x(t)} Y \text{ si et seulement si } Y(t) = T_{x(t)} \varphi^t(Y(0)).$$

14.5. Métriques riemanniennes, exponentielle

Une *métrique riemannienne* sur une variété est une section du fibré des formes bilinéaires sur l'espace tangent à cette variété qui soit, en chaque point, un produit scalaire sur l'espace tangent en ce point.

Par exemple, si V est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^n$ induit un produit scalaire sur les espaces vectoriels $T_x V$ et une métrique riemannienne sur V .

À l'aide d'une partition de l'unité, on peut munir toute variété qui en possède une, en particulier toute variété compacte, d'une *métrique riemannienne*.

Une métrique riemannienne g définit une dérivation des champs de vecteurs par un champ de vecteurs, la *dérivation covariante* dite *connexion de Levi-Civita*, unique $(X, Y) \mapsto D_X Y$ à satisfaire à

$$\begin{aligned} D_{fX} Y &= f D_X Y \quad \text{et} \quad D_X (fY) = (X \cdot f)Y + f D_X Y \\ D_X Y - D_Y X &= [X, Y] \\ X \cdot g(Y, Z) &= g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z). \end{aligned}$$

Voir [30, § II B].

Sur une variété riemannienne, on a ainsi une notion de géodésique. Une géodésique est une solution $t \mapsto \gamma(t)$ de l'équation différentielle

$$D_{\dot{\gamma}} \gamma = 0.$$

Étant donné un point $x \in V$ et un vecteur $Y \in T_x V$, il existe une unique géodésique passant par x avec vecteur tangent Y en x ,

$$\gamma_Y(t) \quad \text{avec} \quad \gamma_Y(0) = x \text{ et } \dot{\gamma}_Y(0) = Y.$$

Les géodésiques sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 2. On suppose que V est complète, c'est-à-dire que $\gamma_Y(t)$ est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$. On définit alors

$$\begin{aligned}\exp_x : T_x V &\longrightarrow V \\ Y &\longmapsto \gamma_Y(1).\end{aligned}$$

On démontre que $\exp_x$ est un difféomorphisme local et que

$$T_0 \exp_x : T_x V \longrightarrow T_x V$$

n'est autre que l'identité. Voir [30, §II C].

Comme V est munie d'une métrique riemannienne, on peut considérer, pour tout R , le sous-espace

$$\{(x, Y) \in TV \mid \|Y\| < R\} \subset TV.$$

On qualifie ce type d'espace de « fibré en disques » : la fibre en $x \in V$ est le disque de rayon R de l'espace euclidien $T_x V$.

Lorsque la variété V est compacte, il existe un réel positif r tel que l'exponentielle définisse un difféomorphisme

$$(x, Y) \longmapsto (x, \exp_x Y)$$

du fibré en disques de rayon r

$$\{(x, Y) \in TV \mid \|Y\| < r\}$$

sur son image dans $V \times V$. Un tel r est appelé rayon d'injectivité.

À une métrique riemannienne et à sa connexion de Levi-Civita est associée une notion de « transport parallèle ». Étant donné un vecteur X tangent en x à V , on définit son transport parallèle le long d'une courbe $t \mapsto \gamma(t)$ d'origine $x = \gamma(0)$ ainsi : $X(t) \in T_{\gamma(t)} V$ est l'unique section « parallèle », c'est-à-dire à dérivée covariante nulle, de $\gamma^* TV$, satisfaisant à la condition initiale $X(0) = X$.

CHAPITRE 15

UN PEU DE TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

Dans un ouvrage consacré à l'homologie (de Morse, de Floer), nous utilisons forcément un peu d'algèbre homologique (formule de Künneth, suites exactes longues). Mais nous avons eu besoin aussi d'un minimum de topologie algébrique (groupes d'homotopie, première classe de Chern...). Nous dressons un inventaire de tout ceci dans ce chapitre.

15.1. Un peu d'algèbre homologique

Rappelons (voir par exemple [20]) qu'un *complexe* est une suite $C_\bullet$ de modules munis d'applications linéaires

$$\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1}$$

telles que $\partial \circ \partial = 0$.

15.1.a. La formule de Künneth sur $\mathbf{Z}/2$. Dans ce paragraphe, $C_\bullet$ et $D_\bullet$ sont des complexes d'espaces vectoriels⁽¹⁾ sur $\mathbf{Z}/2$. Leur produit tensoriel est le complexe défini par

$$(C \otimes D)_k = \bigoplus_{i+j=k} C_i \otimes D_j$$

avec la différentielle

$$\partial_k^{C \otimes D}(c \otimes d) = ((\partial_i^C c) \otimes d, c \otimes (\partial_j^D d)) \in C_{i-1} \otimes D_j \oplus C_i \otimes D_{j-1} \subset (C \otimes D)_{k-1}$$

pour $c \otimes d \in C_i \otimes D_j \subset (C \otimes D)_k$.

Nous allons montrer :

⁽¹⁾Le résultat est vrai sur n'importe quel corps. Mais pas sur un anneau. Et en particulier pas pour l'homologie entière. Voir la remarque 15.1.2 et [20].

Proposition 15.1.1. *L'homologie du complexe produit tensoriel est le produit tensoriel des homologies*

$$H_*(C_\bullet \otimes D_\bullet) = H_*(C_\bullet) \otimes H_*(D_\bullet).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que

- $C \otimes 0 = 0$;
- $H_*(C_\bullet \oplus C'_\bullet) = H_*(C_\bullet) \oplus H_*(C'_\bullet)$;
- $(C \oplus C') \otimes D = C \otimes D \oplus C' \otimes D$;
- si la proposition est vraie pour $C_\bullet$ et $D_\bullet$ et aussi pour $C'_\bullet$ et $D_\bullet$, alors elle est vraie pour $(C \oplus C')_\bullet$ et $D_\bullet$.

On montre donc la proposition par récurrence sur la longueur $\ell(D_\bullet)$ du deuxième complexe, où, naturellement,

$$\ell(D_\bullet) = \# \{j \mid D_j \neq 0\}.$$

Il n'y a rien à démontrer pour $\ell(D_\bullet) = 1$. Considérons le cas d'un complexe de longueur 2. Si les deux espaces vectoriels non nuls dans $D_\bullet$ n'ont pas des indices consécutifs, la propriété est claire par somme directe. Supposons donc que le complexe $D_\bullet$ est

$$0 \longrightarrow D_{j-1} \xrightarrow{\partial} D_{j-1} \longrightarrow 0.$$

Si $\partial = 0$, on a aussi le résultat par somme directe.

Supposons d'abord que ∂ est un isomorphisme. Dans ce cas, l'homologie du complexe $D_\bullet$ est nulle et nous voulons donc montrer que l'homologie de $(C \otimes D)_\bullet$ est nulle. Considérons donc un élément du noyau de

$$\partial_{i+j} : C_i \otimes D_j \oplus C_{i+1} \otimes D_{j-1} \longrightarrow C_{i-1} \otimes D_j \oplus C_i \otimes D_{j-1}$$

(les exposants indiquent les degrés) et montrons qu'il est dans l'image de

$$\partial_{i+j+1} : C_{i+1} \otimes D_j \longrightarrow C_i \otimes D_j.$$

On écrit donc

$$\partial \left(\sum_a x_a^i \otimes y_a^j, \sum_b z_b^{i+1} \otimes t_b^{j-1} \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_a (\partial x_a^i) \otimes y_a^j = 0$$

et

$$\sum_a x_a^i \otimes \partial y_a^j + \sum_b \partial z_b^{i+1} \otimes t_b^{j-1} = 0.$$

Avec notre hypothèse, ∂^D est un isomorphisme. Appliquons donc $\text{Id} \otimes \partial^{-1}$ à cette deuxième relation. On obtient

$$\sum_a x_a^i \otimes y_a^j = \sum_b \partial z_b^{i+1} \otimes \partial^{-1} t_b^{j-1}$$

(nous calculons modulo 2). Finalement,

$$\partial \left(\sum_b z_b^{i+1} \otimes \partial^{-1} t_b^{j-1}, 0 \right) = \left(\sum_a x_a^i \otimes y_a^j, \sum_b z_b^{i+1} \otimes t_b^{j-1} \right),$$

de sorte que notre élément du noyau de ∂_{i+j} est dans l'image de ∂_{i+j+1} .

Considérons maintenant le cas général d'un complexe $D_\bullet$ de longueur 2. Décomposons D_j et D_{j-1} comme sommes directes

$$D_j = \text{Ker}(\partial) \oplus D'_j \quad \text{et} \quad D_{j-1} = E'_{j-1} \oplus \text{Im}(\partial).$$

Ainsi $D_\bullet$ est somme directe des deux complexes

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\partial) \xrightarrow{0} E_{j-1} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow D'_j \xrightarrow{\cong} \text{Im}(\partial) \longrightarrow 0$$

et le résultat se déduit des études précédentes.

Finalement, supposons la proposition démontrée pour les complexes de longueur k et soit $D_\bullet$ un complexe de longueur $k+1$,

$$0 \longrightarrow D_{k+1} \xrightarrow{\partial} D_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \longrightarrow 0.$$

On décompose comme ci-dessus

$$D_{k+1} = \text{Ker}(\partial) \oplus D'_{k+1} \quad \text{et} \quad D_k = \text{Im}(\partial) \oplus E'_k.$$

Le complexe est alors sommes des trois complexes

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\partial) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow E'_k \longrightarrow D_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

et

$$0 \longrightarrow D'_{k+1} \xrightarrow{\cong} \text{Im}(\partial) \longrightarrow 0$$

tous de longueur inférieure à $k+1$. □

Remarque 15.1.2. C'est au moment de décomposer D_j ou D_{k+1} en somme directe du noyau de ∂ et d'un supplémentaire que l'on utilise vraiment le fait que nos complexes sont des complexes d'espaces vectoriels (et pas simplement de modules sur un anneau commutatif).

15.1.b. Suites exactes de complexes. Rappelons rapidement ici que, si $A_\bullet$, $B_\bullet$ et $C_\bullet$ sont des complexes, une suite exacte de morphismes de complexes

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \longrightarrow 0$$

induit, pour chaque k , une suite exacte

$$H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(B) \xrightarrow{j_*} H_k(C)$$

(vérification directe), mais que le morphisme induit par i (resp. par j) n'est en général pas injectif (resp. surjectif). Ce défaut d'exactitude est « mesuré » par une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccc} H_k(A) & \longrightarrow & H_k(B) & \longrightarrow & H_k(C) \\ & & & \nearrow \partial & \\ H_{k-1}(A) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

Contentons-nous ici d'indiquer comment le *connectant* ∂ est défini (toutes les vérifications restantes sont analogues et directes). Soit donc $[c] \in H_k(C)$, un élément représenté par un $c \in C_k$ avec $\partial_C(c) = 0$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ & & A_{k-1} & \xrightarrow{\partial_A} & A_{k-2} \\ & & \downarrow i & & \\ B_k & \xrightarrow{\partial_B} & B_{k-1} & & \\ \downarrow j & & \downarrow j & & \\ C_k & \xrightarrow{\partial_C} & C_{k-1} & & \\ \downarrow & & & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

donne $c = j(b)$, avec

$$j(\partial_B b) = \partial_C(j(b)) = \partial_C c = 0$$

donc $\partial_B(b) \in \text{Ker}(j)$, puis $\partial_B(b) = i(a)$ pour un certain $a \in A_{k-1}$. De plus, cet élément est un cycle : on a

$$i(\partial_A a) = \partial_B(i(a)) = \partial_B \partial_B(b) = 0$$

et i est injectif.

15.2. Classes de Chern

Deuxième groupe de cohomologie. Nous avons mentionné, bien qu'assez peu utilisé, la première classe de Chern d'un fibré vectoriel complexe. Celle-ci vit dans le groupe de cohomologie $H^2(W; \mathbf{Z})$, obtenu, par exemple, par le complexe de Morse comme dans la première partie de ce livre.

Première classe de Chern. Le plus économique pour la définir est de prendre la puissance extérieure maximale de ce fibré, obtenant ainsi un fibré en droites complexes. La première classe de Chern est alors la classes d'Euler de ce dernier :

$$c_1(E) = c_1(\Lambda^n E) = e(\Lambda^n(E)) \in H^2(W; \mathbf{Z})$$

si E est un fibré de rang n sur un espace W . Nous renvoyons à [50] pour ces notions.

Nous avons utilisé celle, $c_1(TW)$ du fibré tangent TW d'une variété symplectique, vu comme fibré vectoriel complexe, à l'aide d'une structure presque complexe calibrée par la forme symplectique. Remarquons que cette classe est bien définie, simplement parce que l'ensemble de ces structures presque complexes est contractile (et en particulier connexe) et que la classe de Chern c_1 vit dans l'espace discret $H^2(W; \mathbf{Z})$.

CHAPITRE 16

UN PEU D'ANALYSE

Nous rappelons d'abord l'énoncé du théorème d'Ascoli. Puis nous indiquons les bases de la théorie de Fredholm. Nous démontrons ensuite les lemmes de régularité elliptique, ainsi que les propriétés du $\bar{\partial}$ que nous avons eu l'occasion d'utiliser au long de ce texte.

16.1. Le théorème d'Ascoli

Rappelons l'énoncé de ce très utile théorème, qui caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues sur un espace compact et que nous utilisons dans plusieurs énoncés de compacité. Voir [14] pour cet énoncé et des références.

Théorème 16.1.1 (d'Ascoli). *Soient (E, d) un espace métrique compact et $\mathcal{F}$ une famille bornée de fonctions continues $f : E \rightarrow \mathbf{R}$, uniformément équi-continue sur E , c'est-à-dire telles que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{F}, \quad d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans l'espace des fonctions continues sur E .

Autrement dit, de toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$, on peut extraire une suite qui converge uniformément sur E (vers une fonction continue).

Remarque 16.1.2. Dans tous les cas où nous avons appliqué ce théorème dans ce texte, la famille de fonctions considérée était équicontinue parce qu'« équilipschitzienne ».

16.2. Théorie de Fredholm

Conformément à l'habitude et pour simplifier, nous appellerons dans ce chapitre⁽¹⁾ *opérateur* d'un espace vectoriel normé dans un autre, une application linéaire *continue* (ce qui se dit parfois en anglais *bounded linear map*).

16.2.a. Opérateurs à indice. On dit qu'un opérateur L d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est à *indice* si $\text{Ker } L$ est un sous-espace de dimension finie et $\text{Im } L$ est un sous-espace de codimension finie (ou $\text{Coker } L$ est un espace de dimension finie). L'*indice* de l'opérateur est alors

$$\text{Ind}(L) = \dim \text{Ker } L - \dim \text{Coker } L.$$

Exemples 16.2.1.

(1) Par exemple, un opérateur bijectif est un opérateur à indice, d'indice nul.

(2) Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toute application linéaire $L : E \rightarrow E$ est d'indice nul... puisque cette assertion est équivalente à

$$\dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L = \dim E.$$

Remarque 16.2.2. Si $L : E \rightarrow F$ est un opérateur à indice, alors $\text{Ind}(L)$ est la caractéristique d'Euler du complexe

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{L} F \longrightarrow 0$$

puisque dans ce cas simple, cette caractéristique d'Euler est

$$\chi = \dim(\text{Ker } L / \{0\}) - \dim(F / \text{Im}(L)).$$

La théorie des opérateurs à indice est très bien expliquée dans l'exposé de Grisvard [35], que nous avons pillé ici sans vergogne, en espérant que ce pillage nous sera pardonné par la publicité qu'il procurera (nous n'en doutons pas) à cet article méconnu. Voici une première liste de propriétés qui se vérifient toutes directement.

Proposition 16.2.3. Soient $L_0 : E_0 \rightarrow F_0$, $L_1 : E_1 \rightarrow F_1$, $L : E \rightarrow F$, $L' : F \rightarrow G$ des opérateurs à indice. Alors on a

(1) $L_0 \oplus L_1$ est un opérateur à indice et

$$\text{Ind}(L_0 \oplus L_1) = \text{Ind}(L_0) + \text{Ind}(L_1),$$

⁽¹⁾Dans le reste du livre, il nous arrive d'appeler « opérateurs » des applications différentiables (pas nécessairement linéaires) et de considérer des opérateurs non continus. En principe, ce dont il s'agit est toujours précisé.

- (2) si H est un espace vectoriel de dimension finie m , $L \otimes \text{Id}_H$ est un opérateur à indice, d'indice $\text{Ind}(L \otimes \text{Id}_H) = m \text{Ind}(L)$,
 (3) $L' \circ L$ est un opérateur à indice et $\text{Ind}(L' \circ L) = \text{Ind}(L') + \text{Ind}(L)$.

Démonstration. La première assertion est claire et la deuxième en est une conséquence, en choisissant une base de H et écrivant

$$E \otimes H \cong E \oplus \cdots \oplus E \quad \text{et} \quad L \otimes \text{Id}_H = L \oplus \cdots \oplus L.$$

En application de la remarque 16.2.2, on aurait aussi pu considérer, pour démontrer la première assertion, la suite exacte courte de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{L_0} & F_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E_0 \oplus E_1 & \xrightarrow{L_0 \oplus L_1} & F_0 \oplus F_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{L_1} & F_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

et appliquer l'additivité de la caractéristique d'Euler⁽²⁾. Ce qui introduit l'argument élégant que Grisvard utilise pour démontrer la troisième assertion, que nous reproduisons ici. On considère cette fois le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{L} & F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow (\text{Id}_E, L) & & \downarrow (L', \text{Id}_F) & & \\ 0 & \longrightarrow & E \oplus F & \xrightarrow{L' \circ L \oplus \text{Id}_F} & G \oplus F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow L - \text{Id}_F & & \downarrow \text{Id}_G - L' & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{L'} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

⁽²⁾Celle-ci est conséquence de l'existence d'une suite exacte longue associée à une suite exacte courte de complexes, voir le § 15.1.b.

dont les flèches verticales forment une suite exacte courte de complexes. On en déduit que

$$\operatorname{Ind}(L) + \operatorname{Ind}(L') = \operatorname{Ind}(L' \circ L \oplus \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Ind}(L' \circ L) + \operatorname{Ind}(\operatorname{Id}_F) = \operatorname{Ind}(L' \circ L). \quad \square$$

Les opérateurs à indice en ce sens sont bien ceux que nous avons appelés opérateurs à indice au chapitre 8, puisqu'on a en effet :

Proposition 16.2.4. *Soit $L : E \rightarrow F$ un opérateur dont l'image est de codimension finie. Alors son image est fermée.*

Démonstration. Appelons G un supplémentaire (algébrique) de $\operatorname{Im} L$ dans F et considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} E \oplus G &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto L(x) + y. \end{aligned}$$

Comme G est de dimension finie, elle est continue. De plus, elle est surjective. D'après le théorème de Banach, l'image du sous-espace fermé $E \times \{0\}$ est un sous-espace fermé. $\square$

16.2.b. Les propriétés de base.

Proposition 16.2.5. *Soit $L : E \rightarrow F$ un opérateur entre deux espaces de Banach. Pour que L soit un opérateur à indice, il faut et il suffit qu'il existe un opérateur $L' : F \rightarrow E$ tel que $L \circ L' - \operatorname{Id}_F$ et $L \circ L' - \operatorname{Id}_E$ soient de rang fini. Lorsque c'est le cas, L' est aussi un opérateur à indice et*

$$\operatorname{Ind}(L') = -\operatorname{Ind}(L).$$

Cet indice s'appelle aussi l'indice de Fredholm de l'opérateur.

Démonstration. Supposons pour commencer que L soit un opérateur à indice. On choisit un supplémentaire E_0 de $\operatorname{Ker} L$ dans E , de sorte que la restriction L_0 de L à E_0 est un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im}(L)$. On considère l'inverse L_0^{-1} de L_0 . On choisit aussi une projection $p : F \rightarrow \operatorname{Im}(L)$, que l'on choisit continue, et on pose

$$L' = L_0^{-1} \circ p.$$

Ainsi L' est continu. On a $\operatorname{Im}(L' \circ L - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(L)$ et $\operatorname{Im}(L \circ L' - \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Ker} p$, qui sont tous les deux de dimension finie. On a

$$L \circ L' \circ L = L \quad \text{et} \quad L' \circ L \circ L' = L'.$$

Réciproquement, si L' a les deux propriétés, montrons que L et L' sont des opérateurs à indice. Posons $A = L \circ L' - \text{Id}_E$ et $B = L' \circ L - \text{Id}_F$. On a

$$\text{Ker}(L) \subset \text{Ker}(L' \circ L) \subset \text{Ker}(B)$$

(ce noyau est donc de dimension finie) et

$$\text{Im}(L) \supset \text{Im}(L \circ L') = \text{Im}(\text{Id}_E + A).$$

Si $G = \text{Ker}(A)$, E/G est isomorphe à $\text{Im}(A)$ donc de dimension finie. Donc G est de codimension finie. Mais $\text{Id}_E + A$ vaut Id_E sur $\text{Ker}(A)$, donc $\text{Im}(\text{Id}_E + A) \supset G$, de sorte que cette image est bien de codimension finie.

Ainsi L (et L' aussi) a un indice. La formule pour l'indice résulte de la formule d'additivité dans la proposition 16.2.3 et de la proposition qui suit, qui va impliquer que l'indice de $\text{Id}_E + A$ est nul. $\square$

Proposition 16.2.6. *Si $u : E \rightarrow E$ est un opérateur de rang fini,*

$$\text{Ind}(\text{Id}_E + u) = 0.$$

Si $L : E \rightarrow F$ est un opérateur à indice et si $u : E \rightarrow F$ est un opérateur de rang fini, alors $L + u$ a un indice qui est

$$\text{Ind}(L + u) = \text{Ind}(L).$$

Démonstration. La première assertion est un calcul de dimensions, que l'on peut traiter par caractéristique d'Euler. On pose $G = \text{Im}(u)$. C'est un sous-espace de dimension finie de E et il est stable par $\text{Id}_E + u$. Le diagramme de suites exactes de complexes est :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\text{Id}_G + u} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\text{Id}_E + u} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E/G & \xrightarrow{\text{Id}_{E/G}} & E/G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

(les flèches verticales sont inclusion et projection). L'indice est alors la somme

$$\text{Ind}(\text{Id}_E + u) = \text{Ind}(\text{Id}_G + u) + \text{Ind}(\text{Id}_{E/G}),$$

le premier est nul parce que G est de dimension finie, le deuxième parce que l'indice de l'identité est toujours nul.

Comme on a ainsi fini de démontrer la proposition 16.2.5, rien ne nous empêche de l'appliquer pour prouver la deuxième assertion. On utilise donc un L' comme dans son énoncé. Alors $(L + u) \circ L' - \text{Id}_E$ est lui aussi de rang fini, donc

$$\text{Ind}(L + u) + \text{Ind}(L') = 0 \text{ et donc } \text{Ind}(L + u) = \text{Ind}(L). \quad \square$$

Proposition 16.2.7. *Si $K : E \rightarrow E$ est un opérateur compact d'un espace de Banach, alors $\text{Id}_E + K$ est un opérateur à indice.*

Démonstration. On considère $L = \text{Id}_E + K : E \rightarrow E$. D'abord, $\text{Id}_E|_{\text{Ker}(L)} = -K|_{\text{Ker}(L)}$, donc $\text{Id}_E|_{\text{Ker}(L)}$ est un opérateur compact, ce qui veut dire que la boule unité de $\text{Ker}(L)$ est compacte et donc que $\text{Ker}(L)$ est de dimension finie.

Montrons maintenant que l'image de L est fermée. On choisit un supplémentaire E_0 de $\text{Ker}(L)$ dans E et on montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E_0, \quad \|x\| \leq C \|L(x)\|.$$

En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une suite (x_k) d'éléments de norme 1 dans E_0 telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k + K(x_k)) = 0.$$

Comme K est compact, on pourrait alors extraire une suite telle que $(K(x_k))$ soit convergente. Mais alors, (x_k) aussi convergerait. La limite x devrait avoir les propriétés suivantes :

$$\|x\| = 1, \quad x \in E_0 \cap \text{Ker}(L),$$

ce qui est absurde.

Donc on a l'inégalité voulue, qui implique que l'image de L est fermée : si (x_k) est une suite dans E telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} L(x_k) = y,$$

alors la suite (x_k) est de Cauchy et donc convergente vers un vecteur de E dont l'image est y .

Enfin, on considère les transposées $E' \rightarrow E'$ (ici E' désigne le dual de E , muni de la topologie faible⁽³⁾). L'opérateur tK est compact donc le même argument que pour $\text{Ker}(L)$ donne le fait que $\text{Ker}({}^tL)$ est de dimension finie. Avec le fait que $\text{Im}(L)$ est fermée, ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

⁽³⁾On a toujours que $\text{Ker } {}^tL$ est l'annulateur de $\text{Im}(L)$; on n'a pas toujours que $\text{Im}(L)$ est l'annulateur de $\text{Ker } {}^tL$, mais cette dernière propriété est vraie si $\text{Im}(L)$ est fermée.

De ces propositions, on déduit les trois résultats essentiels pour la théorie des opérateurs de Fredholm.

Théorème 16.2.8. *Soit $L : E \rightarrow F$ un opérateur entre espaces de Banach. Pour que L soit un opérateur à indice, il faut et il suffit qu'il existe $L' : F \rightarrow E$, tel que*

$$L \circ L' - \text{Id}_F \quad \text{et} \quad L' \circ L - \text{Id}_E$$

soient des opérateurs compacts.

Démonstration. Les opérateurs de rang fini sont compacts, donc la proposition 16.2.5 donne le fait que la condition est nécessaire. Ensuite, on a

$$\text{Ker}(L) \subset \text{Ker}(L' \circ L) \quad \text{et} \quad \text{Im}(L) \supset \text{Im}(L \circ L')$$

donc le résultat est conséquence de la proposition précédente. $\square$

Théorème 16.2.9 (invariance de l'indice par petites perturbations). *Soit $L : E \rightarrow F$ un opérateur à indice entre deux espaces de Banach. Il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que, pour tout opérateur $u : E \rightarrow F$ de norme $\|u\| < \varepsilon$, $L + u$ soit un opérateur à indice, d'indice*

$$\text{Ind}(L + u) = \text{Ind}(L).$$

Démonstration. On utilise un opérateur L' comme donné par la proposition 16.2.5 et on pose

$$\varepsilon = \frac{1}{\|L'\|}.$$

Ainsi, pour $\|u\| < \varepsilon$, les opérateurs $\text{Id}_F + u \circ L'$ et $\text{Id}_E + L' \circ u$ sont inversibles. En particulier, leur indice est nul et l'on a

$$(L + u) \circ L' = L \circ L' + u \circ L' = \text{Id}_F + A + u \circ L'$$

pour un opérateur A de rang fini. Comme $\text{Id}_F + u \circ L'$ est inversible, $\text{Id}_F + A + u \circ L'$ a un indice nul (grâce à la proposition 16.2.6). Comme

$$\text{Im}((L + u) \circ L') \subset \text{Im}(L + u),$$

cette image est de codimension finie. On montre de même que $\text{Ker}(L + u)$ est de dimension finie. Enfin, on a d'une part

$$\text{Ind}(L + u) + \text{Ind}(L') = 0$$

et de l'autre

$$\text{Ind}(L) + \text{Ind}(L') = 0,$$

d'où l'on déduit que

$$\text{Ind}(L + u) = \text{Ind}(L). \quad \square$$

Théorème 16.2.10. Soit $L : E \rightarrow F$ un opérateur à indice entre deux espaces de Banach. Pour tout opérateur compact $K : E \rightarrow F$, l'opérateur $L + K$ admet un indice et

$$\text{Ind}(L + K) = \text{Ind}(L).$$

Démonstration. On utilise toujours l'opérateur L' de la proposition 16.2.5 ; les opérateurs

$$(L + K) \circ L' - \text{Id}_F \quad \text{et} \quad L' \circ (L + K) - \text{Id}_E$$

sont compacts, donc $L + K$ admet un indice (théorème 16.2.8). De même $L + tK$ pour tout $t \in [0, 1]$, et donc, grâce au théorème 16.2.9,

$$\text{Ind}(L + K) = \text{Ind}(L). \quad \square$$

Remarque 16.2.11. Le théorème 16.2.9 affirme que l'indice est une application continue sur l'ensemble des opérateurs à indice, qui est un ouvert dans l'espace des opérateurs de E dans F .

Remarque 16.2.12. L'opérateur $\text{Id}_E + K$, dont la proposition 16.2.7 affirme qu'il a un indice, est donc d'indice nul.

16.2.c. Un autre résultat utile. Pour démontrer que l'opérateur L linéarisé de l'équation de Floer est un opérateur de Fredholm, nous avons utilisé la proposition 8.7.4, que nous ré-énonçons ici :

Proposition (proposition 8.7.4). Soient E , F et G trois espaces de Banach. Soient $L : E \rightarrow F$ un opérateur et $K : E \rightarrow G$ un opérateur compact. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq C (\|L(x)\|_F + \|K(x)\|_G).$$

Alors le noyau de L est de dimension finie et son image est fermée.

Démonstration. La démonstration est inspirée de celle de la proposition 16.2.7. Montrons d'abord que $\text{Ker } L$ est un sous-espace de dimension finie de E . Pour cela, montrons que sa boule unité est compacte. Soit (x_k) une suite d'éléments de cette boule :

$$\|x_k\|_E \leq 1 \quad \text{et} \quad L(x_k) = 0.$$

L'hypothèse est

$$\|x_k\|_E \leq C \|K(x_k)\|.$$

L'image de la boule unité par K est compacte, donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(K(x_k))$ converge dans G . Ceci implique que la suite (x_k) est de Cauchy et donc, comme E est complet, qu'elle converge dans E et donc dans la boule unité. Ce qui en prouve la compacité.

Montrons maintenant que $\text{Im}(L)$ est un sous-espace fermé de F . Supposons que (x_k) soit une suite d'éléments de E telle que la suite $(L(x_k))$ converge vers un élément $y \in F$ et montrons que y est dans l'image de L .

– Si la suite (x_k) est bornée, l'inégalité donne

$$\|x_k\|_E \leq C (\|L(x_k)\|_F + \|K(x_k)\|_G)$$

avec $L(x_k) \rightarrow y$ dans F et $K(x_k)$ reste dans un compact de G . Donc (x_k) possède une sous-suite qui est de Cauchy et donc convergente. Sa limite x vérifie $y = L(x)$.

– Si la suite (x_k) n'est pas bornée, montrons que l'on aboutit à une contradiction. Elle possède une sous-suite avec

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty.$$

Comme $\text{Ker } L$ est un sous-espace de dimension finie, on peut lui trouver un supplémentaire⁽⁴⁾ E_0 et on peut supposer que $x_k \in E_0$ pour tout k . Soit

$$u_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_E} \in E_0.$$

Notre inégalité donne

$$\|u_k\|_E \leq C (\|L(u_k)\|_F + \|K(u_k)\|_G).$$

Encore une fois, la suite $(K(u_k))$ possède une sous-suite convergente, ici la suite $(L(u_k))$ converge vers 0, donc on peut supposer que la suite (u_k) est de Cauchy et donc qu'elle converge dans E_0 vers une limite

$$u \in \text{Ker } L \cap E_0 = \{0\},$$

donc $u = 0$ alors qu'elle devrait aussi avoir norme 1, la contradiction espérée.

□

16.2.d. Applications de Fredholm. Pour une application différentiable

$$\mathcal{F} : E \longrightarrow F$$

d'un espace de Banach dans un autre, on dit qu'elle est *de Fredholm* si elle possède en tout point une différentielle (continue)

$$T_x \mathcal{F} : E \longrightarrow F$$

qui est un opérateur à indice. Remarquons qu'alors l'indice de $T_x \mathcal{F}$ ne dépend pas de x (en vertu du théorème 16.2.9 et de la remarque 16.2.11). On le note donc $\text{Ind}(\mathcal{F})$.

⁽⁴⁾C'est une conséquence simple du théorème de Hahn-Banach.

Remarque. Comme nous l'avons signalé (page 213) nous utilisons « opérateur à indice », une terminologie claire, de façon concurrente et équivalente à « opérateur de Fredholm », une terminologie plus usitée aujourd'hui.

Le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach (voir [16]) permet de démontrer, comme en dimension finie :

Théorème 16.2.13. Soit $\mathcal{F} : E \rightarrow F$ une application de Fredholm et soit $y \in F$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{F}^{-1}(y), \quad T_x \mathcal{F} : E \longrightarrow F$$

est surjective. Alors $\mathcal{F}^{-1}(y)$ est une variété de dimension $\text{Ind}(\mathcal{F})$ et son espace tangent en x est $\text{Ker } T_x \mathcal{F}$.

16.3. Espaces de distributions, solutions faibles

16.3.a. Distributions. Nous rappelons rapidement les définitions de base de la théorie des distributions. Nous renvoyons les lecteurs à leur livre préféré. Pour notre part, nous avons utilisé [10].

Pour tout ouvert U de $\mathbf{R}^n$, on considère l'espace $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U . L'espace $\mathcal{D}'(U)$ des distributions sur U est un dual de $\mathcal{C}_0^\infty(U)$, précisément, c'est l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{C}_0^\infty(U)$, continues au sens où, pour tout compact $K \subset U$, il existe un entier p et une constante C tels que

$$\text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U) \text{ à support dans } K, \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq p}} \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x) \right|.$$

On dit qu'une suite u_n de distributions converge vers une forme linéaire u si l'on a

$$\text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle.$$

Ce n'est pas complètement une trivialité, mais la limite u est alors une distribution elle aussi.

On définit le support d'une distribution de façon évidente (comme le complémentaire du plus grand ouvert en restriction auquel la distribution est nulle) et on note $\mathcal{E}'(U)$ l'espace des distributions à support compact dans U .

Exemples.

(1) L'évaluation des fonctions en un point donné de U définit une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ qui est une distribution,

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a),$$

la masse de Dirac en a (on note $\delta = \delta_0$).

(2) Plus généralement, les combinaisons linéaires de dérivées partielles (comme $\bar{\partial}$, Δ), calculées en un point a , sont aussi des distributions.

(3) Si f est une fonction localement intégrable sur U , on peut définir, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f \varphi dx,$$

une forme linéaire qui est une distribution. Si deux fonctions localement intégrables f et g sont égales presque partout sur U , elles définissent la même forme linéaire. De plus, si la suite (f_n) converge vers f au sens de la norme L^1 sur les compacts de U , alors elle tend vers f au sens des distributions, de sorte que L_{loc}^1 est ainsi un sous-espace de $\mathcal{D}'(U)$. Il en est de même de L_{loc}^p (avec l'inégalité de Hölder).

16.3.b. Dérivées. On définit les dérivées d'une distribution u (en pensant à la formule d'intégration par parties et) par

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Il est facile de vérifier que la forme linéaire ainsi définie est bien une distribution. On peut donc itérer l'opération.

Par exemple, δ est la dérivée de la fonction H de Heaviside (celle qui vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x \geq 0$) : H est localement intégrable, donc une distribution et les règles de calcul donnent

$$\langle H', \varphi \rangle = - \int H(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

16.3.c. Convolution. En copiant la définition de la convolution de deux fonctions (disons, ici, u intégrable et φ de classe $\mathcal{C}^\infty$),

$$(u \star \varphi)(x) = \int \varphi(x-y) u(y) dy = \langle u(y), \varphi(x-y) \rangle,$$

on peut convoluer une distribution à support compact et une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact en définissant, pour $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et en chaque point x

$$(u \star \varphi)(x) = \langle u(y), \varphi(x-y) \rangle.$$

Nous renvoyons (par exemple) au cours [10] pour toutes les propriétés de la convolution et notamment pour celles qui suivent. La fonction $u \star \varphi$ ainsi définie est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, son support satisfait à

$$\text{Supp}(u \star \varphi) \subset \text{Supp } u + \text{Supp } \varphi,$$

et ses dérivées à

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (u \star \varphi) = u \star \left(\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right) = \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \star \varphi.$$

Si u est une distribution à support compact et φ, ψ deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à supports compacts, on a une propriété d'associativité

$$(u \star \varphi) \star \psi = u \star (\varphi \star \psi).$$

Plus généralement, on peut convoluer des distributions, par exemple deux fonctions de L^1_{loc} , dont les supports A et B sont « convolutifs », c'est-à-dire tels que

$$\forall R > 0, \exists \rho(R) > 0 \text{ tel que}$$

$$(x \in A, y \in B, \|x + y\| \leq R) \implies (\|x\| \leq \rho(R), \|y\| \leq \rho(R)).$$

C'est un produit commutatif (et associatif).

On pourra ainsi définir la convolution d'une distribution de $\mathcal{E}'(U)$ avec une fonction $\mathcal{C}^\infty$, ou d'une distribution quelconque avec une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, le résultat obtenu étant dans les deux cas une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Une autre remarque utile est le fait que la masse de Dirac en 0, δ , est une unité pour ce « produit »

$$\delta \star \varphi = \varphi$$

(c'est une conséquence de la définition de la convolution).

16.3.d. Solution fondamentale, solutions faibles. Soit L un opérateur différentiel. Si f est une fonction dans L^p_{loc} (ou plus généralement une distribution), on appelle *solution faible* de l'équation $Lu = f$ une solution dans l'espace des distributions. Si L est à coefficients constants, les propriétés de la convolution, ci-dessus, impliquent que $Lu = \delta \star Lu = L\delta \star u$, de sorte que l'équation s'écrit aussi $L\delta \star u = f$. On appelle *solution fondamentale* de l'équation $Lu = 0$, ou « solution fondamentale de L », une distribution E qui satisfait à

$$L\delta \star E = L(E) = \delta,$$

une écriture dans laquelle $L\delta$ est considéré comme une distribution.

C'est le cas, par exemple, grâce à la formule de Cauchy, pour la fonction $1/\pi z$ lorsque L est l'opérateur $\bar{\partial}$, comme nous le démontrerons au §16.5.

Formellement, on peut espérer, si E est une solution fondamentale de L , avoir pour toute fonction f ,

$$L\delta \star (E \star f) = (L\delta \star E) \star f = \delta \star f = f$$

et donc exprimer les solutions de $Lu = f$ par convolution avec une solution fondamentale. C'est bien le cas, et on a plus précisément :

Théorème 16.3.1 ([10, théorème 8.1.2]). *Si L est un opérateur différentiel à coefficients constants qui possède une solution fondamentale E et si f est*

une distribution à support compact, l'équation $Lu = f$ admet une unique solution faible à support compact $u = E \star f$.

Démonstration. L'argument ci-dessus montre que $u = E \star f$ est bien une solution. L'unicité de cette solution vient de ce qu'elle est à support compact : si u est une solution à support compact, les supports de u , L et E vérifient la condition de convolutivité et la propriété d'associativité qui s'en déduit donne

$$u = \delta \star u = (E \star (L\delta)) \star u = E \star ((L\delta) \star u) = E \star f. \quad \square$$

16.4. Espaces de Sobolev sur $\mathbf{R}^n$

Rappelons ici la définition des espaces de Sobolev. Ici U désigne un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On appelle $\mathcal{C}^\infty(\overline{U})$ l'espace des restrictions à $\overline{U}$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ et par $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur U .

L'espace de Sobolev $W^{s,p}(U)$ est une complétion de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur U dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s sont dans $L^p(U)$. Plus précisément, on définit la norme $\|\cdot\|_{s,p}$ d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur U par

$$\|u\|_{s,p} = \left(\int_U \sum_{|\alpha| \leq s} |\partial^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

L'espace de Sobolev $W^{s,p}(U)$ est le complété de $\mathcal{C}^\infty(\overline{U})$ pour cette norme et $W_0^{s,p}(U)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$.

En fait, ces espaces sont des espaces de distributions : les éléments de $W^{s,p}(U)$ sont les fonctions qui ont des « dérivées faibles », comme nous le montrons dans la proposition qui vient.

Proposition 16.4.1. *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dont la frontière est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $u \in L^p(U)$. Alors u est dans $W^{s,p}(U)$ si et seulement si, pour tout α avec $|\alpha| \leq s$, il existe une fonction $u_\alpha \in L^p(U)$ telle que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$,*

$$\int_U u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha(x) \varphi(x) dx.$$

Idée de démonstration de la proposition 16.4.1. Par un changement de coordonnées, on se ramène au cas où U est un demi-espace ($x_1 > 0$ pour fixer les idées). Nous laissons aux lecteurs le soin de vérifier que les éléments de $W^{s,p}$ ont bien des dérivées faibles.

Supposons que u ait effectivement des dérivées faibles u_α et montrons que $u \in W^{s,p}(U)$. Fixons une fonction β de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$, à support

contenu dans le disque unité et telle que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \beta(x) dx = 1$$

et définissons β_δ par

$$\beta_\delta(x) = \delta^{-n} \beta(\delta^{-1}x).$$

Fixons aussi une fonction γ , de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ qui vaut 1 sur la boule unité est identiquement nulle en dehors de la boule de rayon 2. Ainsi la fonction

$$u_\delta(x) = \gamma(\delta x) u(x_1 + \delta, x_2, \dots, x_n)$$

définie pour $x_1 > -\delta$ est à support compact et a des dérivées faibles jusqu'à l'ordre s , qui convergent, en norme L^p , vers les dérivées faibles de u . De plus, la convolution

$$\beta_\delta \star u_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \beta_\delta(x-y) u_\delta(y) dy$$

est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est converge (en norme $\|\cdot\|_{s,p}$) vers u . Donc u est bien dans $W^{s,p}$. $\square$

Ces dérivées faibles se comportent bien. En effet, même si ce n'est pas évident, on a le résultat espéré :

Proposition 16.4.2. *Soit U un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ et soit $u \in W^{1,p}(U)$ dont toutes les dérivées (faibles) d'ordre 1 sont identiquement nulles sur U . Alors u est localement constante. Si l'on suppose de plus que $u \in W_0^{1,p}(U)$, alors u est identiquement nulle.*

Démonstration. On suppose d'abord que U est un cube et que la valeur moyenne de u est nulle. La fonction u est alors limite (pour la norme de $W_0^{1,p}$) d'une suite (u_ν) de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à valeur moyenne nulle. Le lemme (de Poincaré) ci-dessous affirme alors que cette suite converge vers 0 pour la norme L^p . Donc u est nulle. On a ainsi démontré que u est constante sur chaque cube où ses dérivées (faibles d'ordre 1) sont nulles. On en déduit le résultat. $\square$

Le lemme de Poincaré utilisé dans cette démonstration est une inégalité :

Lemme 16.4.3 (inégalité de Poincaré). *Pour $p > 1$ et pour U ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, il existe une constante C (ne dépendant que de p et de U) telle que, pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(U)$ (à support compact dans U), on ait*

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C \|\text{grad } u\|_{L^p(U)}.$$

Si $U =]0, 1[^n$ est un cube, on a, pour tout $u \in W^{1,p}(U)$, de valeur moyenne nulle

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq n \|\text{grad } u\|_{L^p(U)}.$$

Démonstration. Par densité de $\mathcal{C}^\infty \cap W^{1,p}$ dans $W^{1,p}$, on peut supposer que u est lisse et à support compact dans U . Quitte à appliquer une transformation affine de $\mathbf{R}^n$, on peut aussi supposer que l'ouvert U est contenu dans le demi-espace $x_n > 0$ (et que $0 \in \partial U$). Comme U est borné, il a un diamètre fini, D et on a $0 \leq x_n \leq D$ sur U . On écrit

$$u(x) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt,$$

puis

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq \left[\int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \right| dt \right]^p \\ &\leq D^{p/q} \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \right|^p dt \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder (ici $1/p + 1/q = 1$ donc $p/q = p - 1$). On intègre ensuite les deux membres sur U ou, ce qui revient au même, sur $\mathbf{R}^{n-1} \times [0, D]$,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^p dx \leq D^{1+p/q} \int_U \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx$$

et finalement

$$\|u\|_{L^p} \leq D \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_{L^p},$$

d'où l'on déduit la première assertion. Pour la deuxième, on procède par récurrence sur n . On utilise la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{U}$ pour supposer que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur le cube fermé. L'initialisation de la récurrence se fait en remarquant (ce que nous avons déjà fait dans le lemme 10.4.1) qu'une fonction de valeur moyenne nulle sur $[0, 1]$ satisfait à

$$\int_0^1 |u(t)|^p dt \leq \int_0^1 |u'(t)|^p dt.$$

En effet, on a pour tous t, t_1 dans $[0, 1]$,

$$u(t_1) - u(t) = \int_t^{t_1} \frac{du}{d\tau} d\tau,$$

relation que l'on intègre par rapport à t sur $[0, 1]$ pour obtenir

$$u(t_1) = \int_0^1 \int_t^{t_1} \frac{u(\tau)}{d\tau} d\tau dt,$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u(t_1)|^p dt_1 &\leq \int_0^1 \int_0^1 \int_t^{t_1} \left| \frac{u(\tau)}{d\tau} \right|^p d\tau dt dt_1 \\ &\leq \int_0^1 |u'(\tau)|^p d\tau. \end{aligned}$$

On passe de n à $n + 1$ en considérant

$$v(t) = \int_{[0,1]^n} u(x_1, \dots, x_n, t) dx_1 \cdots dx_n,$$

une fonction sur $[0, 1]$ de valeur moyenne nulle, à laquelle on applique le cas $n = 1$ et l'inégalité de Hölder,

$$\int_0^1 |v(t)|^p dt \leq \int_0^1 |v'(t)|^p dt \leq \int_{[0,1]^{n+1}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} \right|^p dx.$$

À t fixé, on applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $u(x, t) - v(t)$,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} |u(x_1, \dots, x_n, t) - v(t)|^p dx_1 \cdots dx_n \\ \leq n^p \int_{[0,1]^n} |\text{grad}_{x_1, \dots, x_n} u(x_1, \dots, x_n, t)|^p dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

ce qu'on intègre ensuite par rapport à t , pour trouver

$$\|u - v\|_{L^p} \leq n \|\text{grad}_{x_1, \dots, x_n} u\|_{L^p}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p} &\leq \|u - v\|_{L^p} + \|v\|_{L^p} \\ &\leq n \|\text{grad}_{x_1, \dots, x_n} u\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} \right\|_{L^p} \\ &\leq (n + 1) \|\text{grad } u\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. $\square$

Les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont denses, au sens précis que voici :

Proposition 16.4.4 (voir [14, p. 162]). *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dont la frontière est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les restrictions à U des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbf{R}^n$ forment un sous-espace dense de $W^{1,p}(U)$.*

Relations entre espaces de Sobolev. Commençons par un exemple.

Exemple 16.4.5. Considérons, sur la boule unité $\|x\| < 1$ de $\mathbf{R}^n$, la fonction

$$u(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}.$$

Elle n'est pas continue en 0 si $\alpha > 0$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\alpha \frac{x_i}{\|x\|^{\alpha+2}}, \quad \text{donc} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq \alpha \|x\|^{-\alpha-1}.$$

Les puissances p -èmes de ces dérivées sont intégrables sur la boule unité si et seulement si $(\alpha + 1)p < n$. Donc, si α vérifie

$$0 < \alpha < \frac{n}{p} - 1,$$

la fonction u est dans $W^{1,p}$ sans être continue en 0. Un tel α ne peut exister que si $p < n$. Cet exemple est représentatif de la propriété exprimée dans le théorème suivant, qui est un cas particulier d'un théorème de Rellich.

Théorème 16.4.6 (Rellich, [14, p. 169]). *Soit U un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$. On suppose $p > n$. Alors $W^{1,p}(U; \mathbf{R}^m)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}^0(U; \mathbf{R}^m)$ et l'injection*

$$W^{1,p}(U; \mathbf{R}^m) \subset \mathcal{C}^0(U; \mathbf{R}^m)$$

est un opérateur compact.

Remarque 16.4.7. Notons en particulier que, sur $\mathbf{R}$, les éléments de $W^{1,2}$ sont des fonctions continues. Voir [14].

Le cas $p = n = 2$, cas de $\mathbf{R}^2$, qui est celui qui nous intéresse dans ce texte, est plus subtil, comme le montre l'exemple :

Exemple 16.4.8. Pour tout $\delta \in]0, 1[$, définissons une fonction continue u_δ sur $\mathbf{C}$ par

$$u_\delta(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq \delta \\ \frac{\log |z|}{\log \delta} & \text{si } \delta \leq |z| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |z| \geq 1. \end{cases}$$

Pour $\delta \leq |z| \leq 1$, on a

$$\|\text{grad } u_\delta(z)\| \leq \frac{1}{|\log \delta| |z|},$$

de sorte que

$$\int_{\mathbf{C}} \|\text{grad } u_\delta(z)\|^2 dz \leq \int_{\delta \leq |z| \leq 1} \frac{dz}{|\log \delta|^2 |z|^2} = \int_{\delta}^1 \frac{2\pi s ds}{|\log \delta|^2} = \frac{2\pi}{|\log \delta|}.$$

Ainsi la fonction u_δ est à la fois continue à support compact et élément de $W^{1,p}(\mathbf{C})$ (on pourrait même la rendre $\mathcal{C}^\infty$ en la convolant avec une fonction convenable) et elle vérifie $u_\delta(0) = 1$.

La suite (v_n) définie par $v_n = u_{1/n}$ est donc une suite de fonctions continues à support compact, éléments de $W^{1,2}(\mathbf{C})$, cette suite tend vers 0 pour la norme $W^{1,2}$ mais pas pour la norme L^∞ .

Les théorèmes qui suivent regroupent les estimées Sobolev et un énoncé de compacité appelé théorème de Rellich.

Théorème 16.4.9 (voir [14, p. 168]). Soit U un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ et soit p avec $1 < p < +\infty$.

Alors

- (1) si $p < n/k$, $W^{k,p}(U) \subset L^q(U)$ avec $q = np/(n - kp)$,
- (2) si $p = n/k$, $W^{k,p}(U) \subset L^q(U)$ pour tout $q \geq p$,
- (3) si $p > n/k$, $W^{k,p}(U) \subset L^\infty(U)$

et les inclusions sont continues. De plus, pour $u \in W^{k,p}(U)$, on a

$$|\alpha| \leq k \implies \left\| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^\infty(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

En particulier, on a, pour $m = [k - n/p]$, une injection continue

$$W^{k,p}(U) \subset \mathcal{C}^m(U).$$

L'énoncé suivant se concentre sur le cas où $k = 1$.

Théorème 16.4.10 (de Rellich-Kondrachov [14, p. 169]). Soit U un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$. On suppose $p < n$. Alors il existe une constante $C = C(p, U) > 0$ telle que, pour toute fonction u sur U ,

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \quad \text{pour tout } q \leq \frac{n}{n-p}.$$

De plus, pour $q < np/(n - p)$, l'injection

$$W^{1,p}(U; \mathbf{R}^m) \subset L^q(U; \mathbf{R}^m)$$

est un opérateur compact.

16.5. L'équation de Cauchy-Riemann

L'opérateur $\bar{\partial}$ joue un grand rôle dans la théorie de Floer, nous l'avons vu. Sur $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$, on considère les deux opérateurs

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Une fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ est holomorphe si et seulement si elle satisfait à l'équation de Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial}u = 0.$$

La fonction

$$N(z) = \frac{1}{\pi z}$$

(noyau de Cauchy) est une solution fondamentale de l'équation de Cauchy-Riemann au sens donné au § 16.3.d, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 16.5.1. Soient u et f des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbf{C})$. Alors, u est une solution faible de $\bar{\partial}u = f$ si et seulement si $u = N \star f$.

Autrement dit,

$$u(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w}.$$

Démonstration. Dans le cas où u est continue, la formule de Cauchy (une conséquence, par exemple, de la formule de Stokes, voir [34, p. 3]) donne, sur tout disque $D \subset \mathbf{C}$ et tout z dans D ,

$$u(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{u(w) dw}{w-z} + \frac{1}{2i\pi} \int_D \frac{\partial u}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}.$$

Si u est à support compact et D contient son support, la première intégrale est nulle. $\square$

C'est la propriété qui permet d'affirmer qu'une limite de solutions d'un « opérateur elliptique » est une solution $\mathcal{C}^\infty$. Pour une présentation générale au niveau d'un cours de maîtrise, voir [59, Chap. I]. Nous avons utilisé pour écrire cette partie [43, App. B], [45, App. B], [14] et [32]. Il est arrivé souvent que nous n'ayons pas trouvé très faciles ce que certains de ces auteurs qualifient d'*easy exercises*, aussi nous avons essayé d'éviter cette humiliation à nos lecteurs.

16.5.a. Le laplacien. Sur $\mathbf{R}^n$, le laplacien est l'opérateur

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Les fonctions $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U qui vérifient $\Delta u = 0$ sont les fonctions harmoniques. Rappelons, dans le cas $n = 2$, qui est celui qui nous intéresse ici, que les fonctions harmoniques sont les parties réelles des fonctions analytiques. Les fonctions harmoniques vérifient la propriété de la moyenne :

Proposition 16.5.2 (égalité de la moyenne). Soit u une fonction harmonique sur $U \subset \mathbf{R}^2$. On a

$$u(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} u(z) dz \quad \text{pour toute boule } B(x,r) \subset U.$$

Une fonction L^1_{loc} qui vérifie cette propriété (égalité de la moyenne) est nécessairement $\mathcal{C}^\infty$ comme nous le vérifions dans un lemme :

Lemme 16.5.3. Une fonction L^p_{loc} qui satisfait à l'égalité de la moyenne est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. L'idée est que le u qui constitue le membre de gauche est plus régulier que celui qui apparaît dans l'intégrale (un *bootstrapping*). Pour le démontrer, remarquons que l'égalité de la moyenne est aussi équivalente à

$$u = \chi_r \star u, \quad \text{avec } \chi_r = \frac{1}{\pi r^2} \chi_{B(0,r)},$$

cette égalité étant valable sur $U_r = \{x \in U \mid B(x, r) \subset U\}$. Ceci entraîne que

$$u = \underbrace{\chi_r \star \chi_r \star \cdots \star \chi_r}_{m \text{ fois}} \star u \quad \text{sur } U_{mr}.$$

Le résultat découle immédiatement de la régularité des convolutions (ci-dessus, § 16.3.c) si l'on sait que

$$\underbrace{\chi_r \star \chi_r \star \cdots \star \chi_r}_{m \text{ fois}} \in \mathcal{C}_0^{m-2}(\mathbf{R}^2),$$

ce que nous montrons maintenant par récurrence. D'abord,

$$\chi_r \star \chi_r(x) = \frac{1}{(\pi r^2)^2} \text{Aire}(B_r(0,0) \cap B_r(x)),$$

dont on vérifie sans mal que c'est une fonction continue à support compact, précisément

$$\chi_r \star \chi_r(x) = \frac{1}{(\pi r^2)^2} \left(2 \arccos \frac{\|x\|}{2r} - \frac{\|x\| \sqrt{4r^2 - \|x\|^2}}{2} \right)$$

(si $B_r(0) \cap B_r(x) \neq \emptyset$ et 0 sinon).

Puis, si $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbf{R}^2)$, alors $\chi_r \star f \in \mathcal{C}_0^{k+1}(\mathbf{R}^2)$. En effet, cette fonction est clairement à support compact. De plus, la convolée est de classe $\mathcal{C}_0^k$ et, si $|\alpha| = k$,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (\chi_r \star f) = \chi_r \star \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f$$

donc $\partial^\alpha / \partial x^\alpha f$ est continue. Appelons-la g et montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\begin{aligned} \pi r^2 (\chi_r \star g)(s, t) &= \int_{B_r} g(x, y) dx dy \\ &= \int_{s-r}^{s+r} \left(\int_{t-\sqrt{r^2-(x-s)^2}}^{t+\sqrt{r^2-(x-s)^2}} g(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

donc la fonction est dérivable en t et sa dérivée est continue. De même pour sa dérivée en s . $\square$

Le fait d'être de classe $\mathcal{C}^2$ n'est pas une hypothèse indispensable à l'harmonicité, comme l'exprime le lemme (souvent appelé « lemme de Weyl ») :

Lemme 16.5.4. *Toute solution faible $u \in L^p_{\text{loc}}(U)$ (pour $p \geq 1$) de $\Delta u = 0$ est harmonique.*

Démonstration. On utilise une famille de fonctions β_δ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui approchent la masse de Dirac en 0 (comme dans la démonstration de la proposition 16.4.1) : on choisit $\beta : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ positive et de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans la boule unité et telle que $\int_{\mathbf{R}^n} \beta(x) dx = 1$ et on pose $\beta_\delta = \delta^{-n} \beta(\delta^{-1}x)$. Le support de β_δ est contenu dans la boule de rayon δ et son intégrale sur $\mathbf{R}^n$ est égale à 1.

Soit $u \in L^p_{\text{loc}}(U)$. La fonction $u \star \beta_\delta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, son support est contenu dans $\{x \in U \mid B(x, \delta) \subset U\}$ et on a

$$\Delta(u \star \beta_\delta) = \beta_\delta \star \Delta u$$

(par définition des dérivées faibles), donc $u \star \beta_\delta$ est harmonique si u est une solution faible. En particulier, pour tout δ , $u \star \beta_\delta$ vérifie l'égalité de la moyenne.

Mais $u \star \beta_\delta$ converge vers u en norme L^p et presque partout sur les compacts de U quand δ tend vers 0. Donc la solution faible u vérifie, elle aussi, la propriété de la moyenne, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc harmonique d'après le lemme 16.5.3. $\square$

Les parties réelle et imaginaire d'une solution faible de l'équation de Cauchy-Riemann sont des solutions faibles de celles de Laplace. On en déduit :

Lemme 16.5.5. *Toute solution faible u de l'équation de Cauchy-Riemann qui est localement intégrable sur un ouvert U est holomorphe.*

Proposition 16.5.6 (inégalité de la moyenne). *Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U \subset \mathbf{R}^2$ et qui y vérifie $\Delta u \geq 0$. On a*

$$u(x) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x, r)} u(z) dz \quad \text{pour toute boule } B(x, r) \subset U.$$

Donnons une démonstration de cette inégalité (qui se transforme sans difficulté en une démonstration de l'inégalité) et qui est une application de la formule de Stokes.

Démonstration de l'inégalité (et de l'égalité) de la moyenne

Puisque $\Delta u \geq 0$, on a $\int_{B_\rho} \Delta u \geq 0$. Mais par le « théorème de la divergence » (la version *ad hoc* de la formule de Stokes),

$$\int_{B_\rho} \Delta u = \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Ensuite

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho e^{i\theta}) d\theta = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \int_{B_\rho} u \right) \quad \text{donc} \quad \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \int_{B_\rho} u \right) \geq 0$$

de sorte que la fonction $\rho \mapsto \frac{1}{\rho} \int_{B_\rho} u$ est croissante et que, pour $r \geq \rho$,

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho} u \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} u.$$

Lorsque ρ tend vers 0, le premier membre tend vers $u(0)$, on a donc

$$2\pi r u(0) \leq \int_{\partial B_r} u,$$

ce que l'on intègre de 0 à r pour obtenir

$$\pi r^2 u(0) \leq \int_{B_r} u,$$

qui est l'inégalité désirée. $\square$

Toujours dans le cas où $n = 2$, on considère la fonction (noyau de Poisson)

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|.$$

On vérifie facilement⁽⁵⁾ que K est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$ et que $\Delta K = \delta$ (au sens des distributions) donc K est une solution fondamentale de Δ (au sens du §16.3.d).

Remarquons que

$$\Delta = 4\partial\bar{\partial},$$

et d'ailleurs, les noyaux de Poisson et de Cauchy sont liés par

$$N(z) = 4\partial K.$$

On a $\Delta K = 0$ mais, attention, les dérivées secondes de K ne sont même pas intégrables sur les compacts. Toujours est-il que l'on a, comme conséquence du théorème 16.3.1 :

Proposition 16.5.7. *Soient u et f deux fonctions à support compact sur $\mathbf{R}^2$. On suppose que $u, f \in L^1(\mathbf{R}^2)$. Alors, la fonction u est une solution faible de $\Delta u = f$ si et seulement si $u = K \star f$.*

Appelons K_j ($j = 1, 2$) les dérivées partielles par rapport à x et y de la solution fondamentale K ,

$$K_1(z) = \frac{x}{2\pi|z|^2}, \quad K_2(z) = \frac{y}{2\pi|z|^2}.$$

⁽⁵⁾C'est un exercice, écrire K en coordonnées polaires.

Ce sont aussi des fonctions localement intégrables. De plus, au sens des distributions, on a

$$\Delta K_1 = \frac{\partial}{\partial s} \Delta K = \frac{\partial}{\partial s} \delta \quad \text{et} \quad \Delta K_2 = \frac{\partial}{\partial t} \delta.$$

Théorème 16.5.8 (inégalité de Calderón-Zygmund). *Pour tout p tel que $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C(p) > 0$ telle que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbf{R}^2$, on ait*

$$\|\text{grad}(K_j \star f)\|_{L^p} \leq C(p) \|\Delta u\|_{L^p}.$$

Nous renvoyons à [45] pour une démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. ARNOLD – « Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique », *C. R. Acad. Sci. Paris* **261** (1965), p. 3719–3722.
- [2] ———, « First steps in symplectic topology », *Russian Math. Surveys* **41** (1986), p. 1–21.
- [3] M. AUDIN – « Symplectic and almost complex manifolds », in *Holomorphic curves in symplectic geometry* [6], p. 41–74.
- [4] ———, *Topologie : Revêtements et groupe fondamental*, ULP, Strasbourg, 2004, Cours de Magistère 2^e année, disponible sur <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>.
- [5] ———, *Torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Math., Birkhäuser, 2004, Revised and enlarged edition.
- [6] M. AUDIN & J. LAFONTAINE (éds.) – *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math., vol. 117, Birkhäuser, 1994.
- [7] M. BERGER & B. GOSTIAUX – *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France, 1987, Réédition d'un ouvrage paru chez Armand Colin.
- [8] P. BIRAN – « Lagrangian barriers and symplectic embeddings », *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), p. 407–464.
- [9] J.-M. BISMUT & W. ZHANG – « An extension of a theorem by Cheeger and Müller », *Astérisque* (1992), no. 205, p. 235, With an appendix by François Laudenbach.
- [10] J.-M. BONY – *Cours d'analyse (Théorie des distributions et analyse de Fourier)*, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

- [11] R. BOTT – « Lectures on Morse theory, old and new », *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), p. 331–358.
- [12] F. BOURGEOIS – « A survey of contact homology », in *New perspectives and challenges in symplectic field theory*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, p. 45–71.
- [13] F. BOURGEOIS & A. OANCEA – « Fredholm theory and transversality for the parametrized and for the S^1 -invariant symplectic action », *Journal of the A.M.S.* (2010), à paraître.
- [14] H. BREZIS – *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.
- [15] A. CANNAS DA SILVA – *Lectures on symplectic geometry*, Lecture Notes in Math., Springer, 2001.
- [16] H. CARTAN – *Calcul différentiel*, Méthodes, Hermann, Paris, 1967.
- [17] K. CIELIEBAK & U.A. FRAUENFELDER – « A Floer homology for exact contact embeddings », *Pacific J. Math.* **239** (2009), p. 251–316.
- [18] C. CONLEY & E. ZEHNDER – « Morse-type index theory for flows and periodic solutions of Hamiltonian equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), p. 207–253.
- [19] M. DAMIAN – « Constraints on exact Lagrangians in cotangent bundles of manifolds fibered over the circle », *Comment. Math. Helv.* **84** (2009), p. 705–746.
- [20] A. DOLD – *Lectures on algebraic topology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1972 edition.
- [21] I. EKELAND – *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 19, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [22] Y. ELIASHBERG, A. GIVENTAL & H. HOFER – « Introduction to Symplectic Field Theory », *Geom. Funct. Anal.* (2000), p. 560–673, Special Volume, Part II.
- [23] A. FLOER – « A relative Morse index for the symplectic action », *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), p. 393–407.
- [24] ———, « Morse theory for Lagrangian intersections », *J. Differential Geom.* **28** (1988), p. 513–547.
- [25] ———, « Symplectic fixed points and holomorphic spheres », *Comm. Math. Phys.* **120** (1989), p. 575–611.

- [26] ———, « Witten's complex and infinite dimensional Morse theory », *J. Differential Geom.* **30** (1989), p. 207–221.
- [27] A. FLOER, H. HOFER & D. SALAMON – « Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action », *Duke Math. J.* **80** (1995), p. 251–292.
- [28] K. FUKAYA & P. SEIDEL – « Floer homology, A_∞ -categories and topological field theory », in *Geometry and physics (Aarhus, 1995)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 184, Dekker, New York, 1997, p. 9–32.
- [29] A. GADBLED – « Obstructions to the existence of monotone Lagrangian embeddings into cotangent bundles of manifolds fibered over the circle », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), p. 1135–1175.
- [30] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, Universitext, Springer, 1987.
- [31] I.M. GELFAND & V.B. LIDSKII – « On the structure of the regions of stability of linear canonical systems of differential equations with periodical coefficients », *Uspehi Mat. Nauk.* **10** (1955), p. 3–40, Amer. Math. Soc. Translations, Series 2, Volume 8, 1958.
- [32] D. GILBARG & N.S. TRUDINGER – *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition.
- [33] M. GOLUBITSKI & V. GUILLEMIN – *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Math., vol. 14, Springer, 1973.
- [34] P.A. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.
- [35] P. GRISVARD – « Opérateurs à indice — lemme de compacité », in *Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique*, Séminaire Henri Cartan, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris 5^e, 1964, disponible à http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A12_0.
- [36] M. GROMOV – « Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds », *Invent. Math.* **82** (1985), p. 307–347.
- [37] J. JOST – *Compact Riemann surfaces*, 3^e éd., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [38] J. LAFONTAINE – *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.

- [39] F. LATOUR – « Existence de 1-formes fermées non singulières dans une classe de cohomologie de de Rham », *Publ. Math. I.H.E.S.* **80** (1994), p. 135–194.
- [40] F. LAUDENBACH – *Topologie différentielle*, cours à l'École polytechnique, 1992.
- [41] ———, *Calcul différentiel et intégral*, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [42] ———, « Symplectic geometry and Floer homology », *Ensaos matemáticos*, vol. 7, Sociedade brasileira de matemática, 2004, p. 1–50.
- [43] D. McDUFF & D. SALAMON – *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [44] ———, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, New York, 1995.
- [45] ———, *J-holomorphic curves and symplectic topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 52, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [46] H. MELVILLE – *Moby-Dick*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris, 2006, Traduction de Philippe Jaworski.
- [47] J. MILNOR – *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton University Press, 1963, Notes by Siebenmann and Sondow.
- [48] ———, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.
- [49] ———, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.
- [50] J. MILNOR & J. STASHEFF – *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [51] J. MOSER – « On the volume elements on a manifold », *Trans. Amer. Math. Soc.* **120** (1965), p. 286–294.
- [52] A. OANCEA – « A survey of Floer homology for manifolds with contact type boundary or symplectic homology », *Ensaos matemáticos*, vol. 7, Sociedade brasileira de matemática, 2004, p. 51–91.
- [53] Y.-G. OH – « Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks. I », *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), p. 949–993.
- [54] ———, « Floer cohomology, spectral sequences and the Maslov class of Lagrangian embeddings », *Internat. Math. Res. Notices* **7** (1996), p. 305–346.

- [55] ———, « Symplectic topology as the geometry of action functional. I. Relative Floer theory on the cotangent bundle », *J. Differential Geom.* **46** (1997), p. 499–577.
- [56] P. PANSU – « Compactness », in *Holomorphic curves in symplectic geometry* [6], p. 233–249.
- [57] F. ROUVIÈRE – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, 2^e éd., Cassini, Paris, 2003.
- [58] W. RUDIN – *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.
- [59] C. SABBAB – *Théorie de Hodge*, notes de cours de DEA, 2000, disponible sur <http://www.math.polytechnique.fr/~sabbab>.
- [60] D. SALAMON – « Morse theory, the Conley index and Floer homology », *Bull. London Math. Soc.* **32** (1990), p. 113–140.
- [61] ———, « Lectures on Floer homology », in *Symplectic topology* (Y. Eliashberg & L. Traynor, éd.), I.A.S./Park City Math. Series, Amer. Math. Soc., 1999.
- [62] D. SALAMON & E. ZEHNDER – « Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index », *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), p. 1003–1063.
- [63] M. SCHWARZ – *Morse homology*, Birkhäuser, 1993.
- [64] P. SEIDEL – « Graded Lagrangian submanifolds », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), p. 103–149.
- [65] ———, « A long exact sequence for symplectic Floer cohomology », *Topology* **42** (2003), p. 1003–1063.
- [66] S. SMALE – « On gradient dynamical systems », *Ann. of Math.* **74** (1961), p. 199–206.
- [67] ———, « An infinite dimensional version of Sard's theorem », *Amer. J. of Math.* **87** (1965), p. 861–866.
- [68] M. SPIVAK – *Differential geometry*, Publish or Perish, 1975.
- [69] N. STEENROD – *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [70] F. TAKENS – « The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelman category », *Invent. Math.* **6** (1968), p. 197–244.
- [71] C. VITERBO – « Functors and computations in Floer homology with applications. I », *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), p. 985–1033.

INDEX DES NOTATIONS

- α , 20
 α_H (forme d'action), 176
 $\mathcal{A}_H$ (fonctionnelle d'action), 150
 β_k (nombre de Betti), 82
 $c_1(TW)$ (première classe de Chern), 523
 $c_k(f)$, 82
 $\mathcal{C}^k(\cdot, \cdot)$, 510
 $\mathcal{C}^\infty(\cdot, \cdot)$, 510
 $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty$, 158
 $\mathcal{C}_\infty^\infty(x, y)$, 216
 $\mathcal{C}_\varepsilon^\infty$, 213, 222
 C_k , 51, 287
 $C(u)$, 234
 $(C_\star(f), \partial_X)$ (complexe de Morse), 51
 $(C_\star(H), \partial)$ (complexe de Floer), 287
 $CM_\star(H, J)$ (complexe de Morse), 337
 $CF_\star(H, J)$ (complexe de Floer), 337
 Crit , 27
 $\chi(V)$ (caractéristique d'Euler de V), 82
 (d^2f) , 7
 ∂_X , 51
 $\bar{\partial}$, 226
 $\partial_- V$, 72
 $\partial_+ V$, 72
 d_∞ , 511
 (D_1f) , 20
 (D_2f) , 20
 $\widetilde{E}(u)$ (énergie du lacet u), 157
 $\exp$, 451
 $\mathcal{F}$ (application de Floer), 211
 $\mathcal{F}^\Gamma$, 364
 $\mathcal{F}_\rho$, 298
 Φ^Γ , 359
 $\text{grad}_x f$ (gradient de f en x), 21
 $\mathcal{H}$, 257
 $\mathcal{H}_{\text{rég}}$, 213
 (H^a, J^a) , 359
 $\text{Ham}(W)$, 485
 Hess (matrice hessienne), 131
 $HM_\star$ (homologie de Morse), 77
 $HM_\star(\cdot; \mathbf{Z})$, 77
 $HM_\star(\cdot; \mathbf{Z}/2)$, 77
 HM_k , 6
 $H_k(f, X)$, 51
 Ind (indice), 26
 $\mathcal{J}_n$ (structures complexes sur $\mathbf{R}^{2n}$), 134
 $\mathcal{J}_c(\omega)$ (structures presque complexes ca-
librées par ω), 135
 $(\mathcal{J} \times \mathcal{H})_{\text{rég}}$, 213
 λ (forme de Liouville), 125
 $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$, 36, 288
 $\mathcal{L}(a, b)$ (espace de trajectoires), 36
 $\mathcal{L}(x, y)$ (espace de trajectoires), 288
 $\overline{\mathcal{L}}(\cdot, \cdot)$, 55, 290
 $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ (espace de trajectoires brisées),
55
 $\overline{\mathcal{L}}(x, y)$ (espace de trajectoires brisées),
290
 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, 260
 $\mathcal{LW}$ (espace de lacets), 148
 $\widetilde{\mathcal{LW}}$, 177
 Λ_n (grassmannienne des lagrangiens),
495
 L_ρ , 300
 μ (indice de Maslov), 188
 $\mathcal{M}$, 340
 $\mathcal{M}(\cdot, \cdot)$, 36, 166

- $\mathcal{M}(a, b)$, 36
 $\mathcal{M}(x, y)$, 166
 $\mathcal{M}(H, J)$, 213
 $\mathcal{M}^\Gamma$, 360
 $n_X(a, b)$, 52
 $N_X(a, b)$, 65
 π_1 (groupe fondamental), 87
 π_2 (deuxième groupe d'homotopie), 148
 $P_V(t)$ (polynôme de Poincaré de V), 83
 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, 18
 $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, 100
 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, 18
 $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$, 214
 $R(u)$, 234
 S , 183
 S^2 , 3
 S^n , 53
 S_k , 192
 $\mathrm{Sp}(2n)$ (groupe symplectique), 138
 $\mathrm{Sp}(2n)^\star$, 183
 $\mathrm{Sp}(2n)^+$, 185
 $\mathrm{Sp}(2n)^-$, 185
 T^2 , 16
 T^*V (fibré cotangent de V), 17
 $\pitchfork$ (transverse à), 35
 w_ρ (pré-recollement), 294
 $W_\rho^\perp$, 301
 $W^{s,p}$, 537
 $W^{1,p}$, 537
 $W^{1,p}(\mathbf{R} \times S^1; W)$, 213
 $W^{1,p}(x^*TW)$, 177
 $\mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$, 55
 $W^s(\cdot)$ (variété stable), 25
 $W^u(\cdot)$ (variété instable), 25
 $\overline{W}^u(\cdot)$, 106
 X_H (champ hamiltonien de H), 128
 X_t (pour X_{H_t}), 130
 $\mathcal{X}_H$, 154
 $Y \#_\rho Z$, 295
 Z_i^ρ , 297
 $\mathcal{Z}(x, y, J)$, 213
 ω (forme symplectique), 123

INDEX TERMINOLOGIQUE

A

action
 fonctionnelle d', 150
 forme d', 176
additivité
 de l'indice de Maslov, 189
apparente
 singularité, 492
application
 de Floer, 219
Arnold
 conjecture d', 121, 143, 423
Arnold (Vladimir), ix, 143
Ascoli
 théorème d', 525
Ascoli (Giulio), 525
asphéricité symplectique, 148

B

Banach
 variété de, 177
Banach (Stefan), 177
base symplectique, 123
Betti
 nombres de, 83
Betti (Enrico), 83
bootstrapping, 161, 342, 544
 elliptique, 427, 428
Borsuk (Karol), 103
Borsuk-Ulam
 thorème de, 103
bouchon, 113
Bourgeois (Frédéric), 424
bouteille, 60, 113
brisées
 trajectoires de Floer, 290
 trajectoires de Morse, 55
Brouwer

 théorème de, 47, 99
Brouwer (Luitzen Egbertus Jan), 47
bulle, 168, 170, 171, 173, 492
Burgunder (Emily), x

C

calibrée
 structure presque complexe, 136
 variété presque complexe, 134
canonique
 forme, 125
caractéristique d'Euler, 5, 81, 82
Carleman (Torsten), 248
Carneiro (André), xi
Cartan
 formule de, 514
Cartan (Élie), 514
Cartan (Henri), 514
carte de Morse, 14, 23
Cauchy
 problème de, 158
Cauchy (Augustin Louis), 58, 155, 160
Cauchy-Lipschitz
 théorème de, 58
Cauchy-Riemann
 équation de, 155
 opérateur de, 226
Cauchy-Schwarz
 inégalité de, 160
cellulaire
 homologie, 104
champ
 de Morse-Smale, 78
 de vecteurs, 505
 comme équation différentielle, 513
 hamiltonien, 128
Chern
 classe de, 148

- Chern (Shiing-Shen), 148
 Cieliebak (Kai), 424
 classe
 de Chern, 148, 523
 de Maslov d'une lagrangienne, 496
 classification des variétés de dimension 1, 46
 classique
 hamiltonien, 128
 cobordisme, 72
 cohomologie de de Rham, 125, 486
 col, 14
 collier
 voisinage, 513
 compacité
 de l'espace des solutions de Floer, 158
 des espaces de trajectoires brisées, 56, 290
 complexe, 52, 519
 de Floer, 287, 337
 de Morse, 51, 65, 337
 structure, 132
 variété, 134
 condition de Smale, 35, 348
 conjecture d'Arnold, 121, 143, 423
 Conley (Charles), 145, 181, 185
 Conley-Zehnder
 indice de, 181
 connexion de Levi-Civita, 517, 518
 connexité et homologie, 84
 contact
 forme de, 487
 variété de, 487
 convolution, 535
 cotangent, 125
 fibré, 17
 comme variété symplectique, 125
 courbe J -holomorphe, 155
 critique
 point, 233, 506
 valeur, 507
 crochet, 505
- D**
 Darboux
 théorème de, 127
 Darboux (Gaston), 127
 décroissance exponentielle
 des solutions de Floer, 280
 des solutions de Morse, 342
 dédale, 430
 dérivée de Lie, 514
 de Rham (Georges), 125
- difféomorphisme
 hamiltonien, 485
 symplectique, 125
 distributions, 534
 Dodane (Olivier), x
 dualité de Poincaré, 80, 87
- E**
 égalité de la moyenne, 543
 Ekeland (Ivar), 168
 Eliashberg (Yasha), 145, 424
 énergie, 157
 équation-s
 aux variations, 515
 de Cauchy-Riemann, 155, 542
 de Floer, 155
 de Floer (linéarisation), 223
 de Hamilton, 128
 espace
 de Fréchet, 177
 de lacets, 148
 de Sobolev, 537
 de trajectoires, 36
 de trajectoires brisées, 55
 de trajectoires de Floer, 288
 projectif, 501
 projectif complexe, 18, 54, 126
 comme variété symplectique, 127
 Euler (Leonhardt), 5, 81, 82
 exacte
 forme, 19, 124, 157, 175, 506
 exponentielle, 517
- F**
 Fatou
 lemme de, 170
 Fatou (Pierre), 170
 fermée
 forme, 125, 157, 175, 506
 fibré
 cotangent, 17, 125
 comme variété symplectique, 125
 en disques, 518
 tangent, 505
 fil d'Ariane, 214, 430
 Floer
 équation de, 155
 complexe de, 287, 337
 homologie de, 146, 287, 359
 Floer (Andreas), 65, 121, 145, 146, 233
 flot, 513
 fonction
 de Morse, 7, 8
 de Morse-Bott, 48

hauteur, 16
 fonctionnelle
 d'action, 150
 fonctorialité de l'homologie de Morse,
 88
 forme
 à périodes entières, 494
 canonique, 125
 d'action, 176
 de contact, 487
 de Kähler, 134
 de Liouville, 125
 différentielle, 505
 exacte, 19, 124, 157, 175, 506
 fermée, 125, 157, 175, 506
 symplectique, 125
 symplectique canonique, 126
 volume, 124
 formule
 d'Euler, 83
 de Cauchy, 543
 de Künneth, 78, 519
 de Parseval, 145
 de Stokes, 253, 543
 des Cartan, 514
 Fréchet
 espace de, 177
 Fréchet (Maurice), 177
 Frauenfelder (Urs), 424
 Fredholm
 indice de, 528
 opérateur de, 533
 Fredholm (Erik Ivar), 526
 Fukaya (Kenji), 145, 423
G
 Gadbled (Agnès), xi, 423
 Gauß (Carl Friedrich), 134
 géodésique, 517
 Givental (Sacha), 424
 gradient, 21
 de la fonctionnelle d'action, 154
 pseudo, 22
 symplectique, 128
 grassmannienne des lagrangiens, 181,
 185, 495
 Grisvard (Pierre), 526
 Gromov (Mikhail), ix, 167
 groupe
 des difféomorphismes hamiltoniens,
 485
 symplectique, 138
 groupe fondamental

de Λ_n , 181, 495
 de $U(n)$, 181, 494
 de l'espace de lacets, 149
 et homologie, 87, 98

H

Hadamard (Jacques), 121
 Hamilton
 équations de, 128
 Hamilton (William Rowan), 128
 hamiltonien
 champ, 128
 classique, 128
 dépendant du temps, 130
 difféomorphisme, 485
 périodique, 488
 quadratique, 129
 harmonique
 oscillateur, 486
 hauteur, 16
 hessienne, 131
 Hofer (Helmut), 145, 233, 424
 homologie
 cellulaire, 104
 de Floer, 146, 287, 359
 de Morse, 77
 de Morse (fonctorialité de), 88
 et connexité, 84
 et groupe fondamental, 87, 98
 homologie de Mosre
 de l'espace projectif, 102
 Humilière (Vincent), xi

I

indice
 d'un opérateur, 213, 526, 528
 d'un point critique, 14
 de Conley-Zehnder, 181
 de Fredholm, 213, 528
 de l'opérateur de Floer, 271
 de Maslov, 181, 188
 relatif, 496
 inégalité-s
 de Cauchy-Schwarz, 160
 inégalité-s
 de Calderón-Zygmund, 547
 de Hölder, 263
 de la moyenne, 545
 de Morse, 6, 82
 de Poincaré, 538
 de Young, 265
 injective quelque part, 241
 instable
 variété, 25

invariance
 de l'homologie de Floer, 359
 de l'indice par perturbations, 531
 homotopique, 88

J

J -holomorphe (courbe), 155

K

Kähler (Erich), 134
 Künneth (Hermann), 78
 kählérienne
 variété, 134
 Künneth
 formule de, 78
 Kupka (Ivan), 38

L

Labrousse (Clémence), xi
 lagrangien-ne
 sous-espace, 483
 sous-variété, 484
 laplacien, 543
 Latour (François), 64, 104, 176
 Laudenbach (François), xi, 104
 lemme
 d'Hadarnard, 12
 de Fatou, 170
 de Morse, 12
 de Poincaré, 175
 du demi-maximum, 168
 Levi-Civita
 connexion de, 517
 Levi-Civita (Tullio), 517
 Li (Shanna), x
 Lie
 dérivée de, 514
 Lie (Sophus), 514
 linéarisation
 d'une équation différentielle le long
 d'une solution, 514
 de l'équation de Floer, 223
 du flot d'un pseudo-gradient, 340
 Lipschitz (Rudolf), 58
 Liu (Xiaobo), 145

M

Maslov
 classe de, 496
 indice de, 181, 188
 indice relatif de, 496
 Maslov (Viktor), 181
 McDuff (Dusa), xi
 méthode

 de Newton-Picard, 299
 du chemin, 127
 métrique riemannienne, 517
 Milnor (John), 12, 47
 monodromie, 132
 Morse
 carte de, 14, 23
 complexe de, 51, 65, 337
 fonction de, 7, 8
 homologie de, 77
 inégalités de, 6, 82
 lemme de, 12
 Morse (Marston), ix, 5, 8, 121
 Morse-Smale
 champ de, 78
 Moser (Jurgen), 127
 mouton, 182
 Mouton (Alexandre), x
 multiplicateur de Floquet, 132

N

naturalité, 491
 Newton (Isaac), 299
 Newton-Picard
 méthode de, 299
 niveau, 502, 507
 nombres de Betti, 83
 non dégénéré-e
 point critique, 8
 solution périodique, 130
 non dégénérescence
 et transversalité, 132, 163
 norme opératorielle, 177
 noyau de Cauchy, 542

O

Oancea (Alexandru), 424
 octaves de Cayley, 487
 Oh (Yong-Geun), 423
 Ono (Kaoru), 145
 opérateur
 à indice, 213, 526
 de Cauchy-Riemann, 226
 de Fredholm, 213, 533
 Opshtein (Emmanuel), xi
 orientation, 506
 sur l'espace des trajectoires, 64
 oscillateur harmonique, 485, 486

P

$p > 2$, 215, 428
 périodique
 solution non dégénérée, 130
 Parseval

- formule de, 145
- Parseval des Chênes (Marc-Antoine), 145
- Picard (Émile), 299
- pléonasme, 320
- plan, 214, 430
- Poincaré
 - dualité de, 80
 - inégalité de, 538
 - lemme de, 175
 - polynôme de, 81
- Poincaré (Henri), 80, 81, 175, 516, 538
- point critique, 233, 506
- polynôme de Poincaré, 81
- pré-recollement, 294, 373, 400
- presque complexe
 - structure, 134
 - variété, 134
- principe
 - de prolongement, 248
 - de similitude, 248
- problème de Cauchy, 158
- propriété de Fredholm
 - dans le cas Morse, 342
 - de l'opérateur de Floer, 254
- pseudo-gradient, 22
- Q**
 - quadratique
 - hamiltonien, 129
 - quadrique, 18, 489
- R**
 - rayon d'injectivité, 178, 518
 - recollement, 293, 372, 399
 - unicité du, 315
 - Reeb
 - champ de, 488
 - théorème de, 28, 82
 - Reeb (Georges), 5, 28, 82
 - régularité elliptique, 161, 254, 425
 - régulière
 - valeur, 507
 - revêtement, 175
 - d'intégration, 176
 - Rey (Emmanuel), x
 - Riemann (Bernardt), 155
 - ruse, 285
- S**
 - Salamon (Dietmar), 145, 183, 233
 - Sard
 - théorème de, 507
 - Sard-Smale
 - théorème de, 239
 - Schwarz (Hermann Amandus), 160
 - Seidel (Paul), 423
 - selle, 14
 - de singe, 17
 - semi-Fredholm, 255
 - semi-groupe d'opérateurs, 259
 - Sikorav (Jean-Claude), xi
 - singularité apparente, 492
 - Smale
 - condition de, 35, 348
 - théorème de, 37
 - Smale (Stephen), 38, 239
 - Sobolev
 - espace de, 537
 - Sobolev (Sergei), 537
 - solution
 - faible, 534
 - fondamentale, 536
 - sous-niveau, 29, 507
 - sous-variété, 502
 - lagrangienne, 484
 - Souza (Nelson), x
 - sphère, 28, 53, 501
 - comme variété symplectique, 126
 - squelette, 104
 - stable
 - variété, 25
 - structure
 - complexe, 132
 - presque complexe, 134
 - suite exacte longue, 96, 521
 - surface, 126
 - comme variété symplectique, 126
 - de Riemann, 134
 - symplectification d'une variété de
 - contact, 488
 - symplectique
 - asphéricité, 148
 - base, 123
 - difféomorphisme, 125
 - espace vectoriel, 123
 - forme, 125
 - gradient, 128
 - groupe, 138
 - variété, 125
 - symplectomorphisme, 125
- T**
 - tangent
 - fibré, 505
 - vecteur, 504
 - technicité, 447

- théorème
 - d'Ascoli, 525
 - de Banach, 528
 - de Borsuk-Ulam, 103
 - de Brouwer, 47, 99
 - de Cauchy-Lipschitz, 58
 - de Darboux, 127
 - de Hahn-Banach, 231
 - de plongement de Whitney, 503
 - de recollement, 293, 372, 399
 - de Reeb, 28, 82
 - de Rellich, 255
 - de Rellich-Kondrachov, 542
 - de Riesz, 231
 - de Rolle, 314
 - de Rouché, 196, 497
 - de Sard, 507
 - de Sard-Smale, 239
 - de Smale, 37
 - de transversalité, 511
- théorie
 - de Fredholm, 526
 - de Hille-Yosida, 258
- Thom (René), 507
- Tian (Gang), 145
- topologie $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ de Whitney, 510
- tore, 16, 501
- trajectoires brisées
 - forment une variété à bord, 58
 - pour Floer, 290
 - pour Morse, 55
- transport parallèle, 518
- transversalité, 508
 - sous contrainte, 513
- U**
 - Ulam (Stanislaw Marcin), 103
 - unicité du recollement, 315
- V**
 - valeur critique, 507
- variété, 501
 - à bord, 504
 - complexe, 134
 - de Banach, 177
 - de contact, 487
 - de dimension 0, 502
 - de dimension 1, 46
 - instable, 25
 - kählérienne, 134
 - orientable, 506
 - presque complexe, 134
 - stable, 25
 - symplectique, 125
- vecteur tangent, 504
- Viterbo (Claude), 424
- W**
 - Whitney (Hassler), 503
 - Witten (Edward), ix
- Z**
 - Zehnder (Eduard), 145, 181, 183, 185

Cet ouvrage est une introduction aux méthodes modernes de la topologie symplectique. Il est consacré à un problème issu de la mécanique classique, la « conjecture d'Arnold », qui propose de minimiser le nombre de trajectoires périodiques de certains systèmes hamiltoniens par un invariant qui ne dépend que de la topologie de la variété symplectique dans laquelle évolue ce système.

La première partie expose la « théorie de Morse », outil indispensable de la topologie différentielle contemporaine. Elle introduit le « complexe de Morse » et aboutit aux inégalités de Morse. Cette théorie, maintenant classique, est présentée de manière détaillée car elle sert de guide pour la seconde partie, consacrée à l'« homologie de Floer », qui en est un analogue en dimension infinie. Les objets de l'étude sont alors plus compliqués et nécessitent l'introduction de méthodes d'analyse plus sophistiquées. Elles sont expliquées en détail dans cette partie. Enfin, l'ouvrage contient en appendice la présentation d'un certain nombre de résultats nécessaires à la lecture du livre dans les trois principaux domaines abordés — géométrie différentielle, topologie algébrique et analyse — auxquels le lecteur pourra se référer si besoin.

L'ouvrage est issu d'un cours de M2 donné à l'université de Strasbourg. Le texte, abondamment illustré, contient de nombreux exercices.

Michèle Audin, professeur à l'Université de Strasbourg, est spécialiste de géométrie symplectique et auteur de plusieurs ouvrages consacrés à ce sujet.

Mihai Damian, maître de conférences à l'Université de Strasbourg, est spécialiste de géométrie et topologie symplectiques, et en particulier des méthodes développées dans ce livre, auxquelles il a consacré plusieurs articles de recherche.