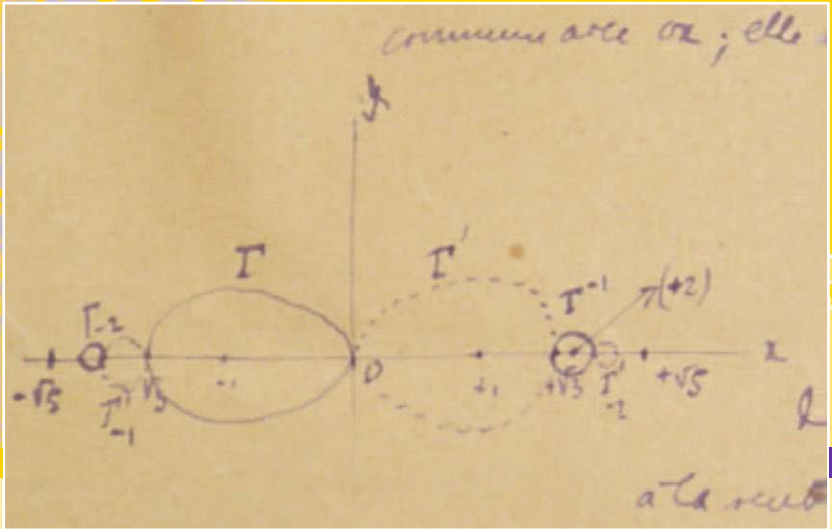


Michèle Audin



Fatou, Julia, Montel,

*le grand prix
des sciences mathématiques
de 1918, et après...*



Springer

Fatou, Julia, Montel

Michèle Audin

Fatou, Julia, Montel,

le grand prix des sciences mathématiques
de 1918, et après...

 Springer

Michèle Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France
maudin@math.u-strasbg.fr

ISBN 978-3-642-00445-2 e-ISBN 978-3-642-00446-9
DOI 10.1007/978-3-642-00446-9
Springer Dordrecht Berlin Heidelberg London New York

Library of Congress Control Number : 2009927533

Mathematics Subject Classification (2000): 01A60, 37FXX

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.

Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH

Image de couverture: Un ensemble de Julia ... par Julia

Imprimé sur papier non acide

Springer est membre du groupe Springer Science+BusinessMedia (www.springer.com)

Me voici devant tous un homme plein de sens
Connaissant la vie et de la mort ce qu'un vivant peut connaître
Ayant éprouvé les douleurs et les joies de l'amour
Ayant su quelquefois imposer ses idées
Connaissant plusieurs langages
Ayant pas mal voyagé
Ayant vu la guerre dans l'Artillerie et l'Infanterie
Blessé à la tête trépané sous le chloroforme
Ayant perdu ses meilleurs amis dans l'effroyable lutte
Je sais d'ancien et de nouveau autant qu'un homme seul
pourrait des deux savoir
Et sans m'inquiéter aujourd'hui de cette guerre
Entre nous et pour nous mes amis
Je juge cette longue querelle de la tradition et l'invention
De l'Ordre et de l'Aventure

Vous dont la bouche est faite à l'image de celle de Dieu
Bouche qui est l'ordre même
Soyez indulgents quand vous nous comparez
A ceux qui furent la perfection de l'ordre
Nous qui quêtions partout l'aventure
[...]

La jolie rousse, in [Apollinaire 1965]

Table des matières

Introduction	1
I Le Grand Prix, le cadre	13
I.1 Le problème de l'itération en 1915	13
I.2 Les protagonistes aux alentours de 1917–1918	20
I.3 La guerre	22
I.4 L'itération, quelques définitions et notations	38
I.5 Familles normales	44
I.6 Relations avec les équations fonctionnelles	48
II Le Grand Prix des Sciences Mathématiques	53
II.1 L'année 1917	53
II.2 L'année 1918	65
III Les mémoires	81
III.1 Le mémoire de Julia	84
III.2 Le(s trois) mémoire(s) de Fatou	91
III.3 Commentaires (à la première personne)	100
III.4 En résumé	101
IV Suites de l'itération	105
IV.1 Arrêt	105
IV.2 La distance (1914) et la dimension (1919) de Hausdorff	106
IV.3 Points irréguliers, points J , points O (1925–1927)	110
IV.4 Le problème du centre (1927–1942)	112
IV.5 La dynamique holomorphe	116
V Sur Pierre Fatou	125
V.1 Enfance et jeunesse de Fatou	126
V.2 Que savons-nous de Pierre Fatou ?	129
V.3 Suite de la carrière de Fatou	140

VI	Table des matières	
	V.4 La thèse de Fatou	146
	V.5 Fatou mathématicien	150
	V.6 Fatou astronome	157
	V.7 Enseignement et candidatures de Fatou	161
	V.8 Fatou et les mathématiciens	167
	V.9 Mort de Fatou	170
VI	Une polémique en 1965	177
	VI.1 Les protagonistes, de 1918 à 1965	178
	VI.2 Relations entre Julia et Montel, années 1930	184
	VI.3 Le troisième centenaire de l'Institut de France	195
	VI.4 Pour conclure : pour une biographie de Gaston Julia	209
	Bibliographie	241
	Index	265

Introduction

À qui s'adresse ce livre ?

Les historiens patentés écrivent assez peu sur l'histoire contemporaine des mathématiques. Pourtant, de plus en plus de mathématiciens s'intéressent à l'histoire de leur discipline, l'histoire des mathématiques qu'ils font tous les jours. C'est à eux que ce livre s'adresse. Ce qui n'empêche pas qu'il ait été écrit avec le souci de rigueur exigible d'un-e historien-ne comme d'un-e mathématicien-ne.

Le livre

Son objectif est l'étude des travaux de plusieurs mathématiciens sur l'itération des fractions rationnelles dans les années 1917–1918, en relation avec le sujet du Grand Prix des sciences mathématiques déclaré par l'Académie des sciences pour l'année 1918. On sait que ce prix a été décerné à Gaston Julia et que Pierre Fatou, qui avait travaillé lui aussi sur le sujet, n'a pas concouru. On sait que le sujet est ensuite, pour l'essentiel, resté en repos, disons des années 1920 aux années 1980, où il a trouvé une nouvelle dynamique, popularisant le nom de Julia et, dans une moindre mesure, celui de Fatou.

La problématique pourrait être résumée grossièrement en deux questions :

- Les raisons de la préférence accordée à Julia par la partie la plus influente de la communauté mathématique seront étudiées ; Julia était un grand blessé de la guerre de 1914–1918, une « gueule cassée », il sera encore intouchable en 1944, il est, en 1917–18, une sorte d'icône ; cette position sera éclairée par l'étude du contexte, des textes mathématiques et la publication de sources inédites.

- Comprendre le pourquoi d'une éclipse de plus de cinquante ans dans un si beau sujet est aussi une question intéressante. Brièvement : Julia était entouré d'étudiants mais n'a donné à aucun d'eux l'envie de s'intéresser au sujet ; Fatou, astronome à l'Observatoire de Paris, n'avait pas d'étudiants et

est mort dès 1929 (en laissant quelques problèmes à la postérité) ; d'autre part, les notions qui auraient pu faire avancer les questions posées, celles contenues dans les travaux de Felix Hausdorff par exemple, n'ont pas été bien diffusées en France (en raison notamment du contexte historique).

Au-delà de la description au jour le jour des découvertes mathématiques de Fatou, Julia, Lattès, Ritt et d'autres, que j'espère avoir su rendre intéressante ; au-delà des évidentes influences de la guerre, de la première guerre mondiale, qui n'en finit pas de tuer, sur le comportement des mathématiciens, influences sur lesquelles on trouvera dans ce texte des informations inédites ; au-delà de l'admiration qui ne peut manquer de saisir les lecteurs modernes habitués à l'étrange beauté des ensembles de Julia lorsqu'ils voient Fatou et Julia les inventer *à la main* et comprendre leurs propriétés sans l'intuition donnée par un ordinateur¹ ; nous insisterons sur la qualité du travail de Pierre Fatou, moderne et ouvert.

Ceci n'est pas une histoire de l'itération (il y en a d'ailleurs déjà une, celle d'Alexander [1994]², voir aussi le texte de Hervé dans [Julia 1968] et son article [1981] pour des commentaires historiques sur les travaux de Julia). La perspective est plutôt celle de la suite, de ce qui va se passer, après. Il est difficile à un-e mathématicien-ne d'aujourd'hui de parler d'ensemble de Julia sans penser aux disques de Siegel, à l'ensemble de Mandelbrot, aux anneaux de Herman et au lapin de Douady. Il est difficile de parler de la première guerre mondiale sans se souvenir qu'elle a été suivie (et pas seulement au sens chronologique du terme) par la deuxième³. Les itinéraires des mathématiciens dont il est question ici se sont heurtés à celles de ces deux guerres qu'ils ont vécues.

Chacune à sa façon, les questions envisagées mettent en évidence l'importance des contextes... C'est pourquoi il y a dans ce texte de nombreuses digressions. D'autre part, malgré ce côté digressif, on y trouvera une certaine unité de ton : par exemple, nous avons privilégié les citations et les exemples venant de l'Académie des sciences et de ses *Comptes rendus*⁴. Parce que l'his-

¹ Lars Ahlfors aurait dit à John Hubbard en 1984 que Lindelöf lui avait demandé de lire les mémoires de Fatou et Julia lorsqu'il était étudiant... mais qu'il n'avait compris ce que Fatou et Julia avaient en tête qu'en voyant les images produites par Hubbard et Mandelbrot (rapporté dans la préface de [Tan 2000]).

² Si l'on peut avoir quelques désaccords avec les appréciations portées dans ce livre, il n'en est pas moins une importante source de renseignements sur l'histoire de l'itération, notamment avant 1906.

³ Voire par la guerre d'Algérie. Bien que Montel et Julia aient encore été actifs professionnellement pendant cette guerre, il n'en sera pas davantage question ici.

⁴ La lecture des *Comptes rendus*, qui rendent compte (!) de ce qui se passe pendant les séances de l'Académie des sciences — présentation de notes au contenu scientifique, élection de membres, lecture de notices nécrologiques sur les membres décédés, choix de professeurs au Collège de France ou d'astronomes à l'Observatoire, choix de délégués à envoyer à telle ou telle réunion, discours « politique » de fin ou de début d'année — est instructive et passionnante, même si, on s'en

toire dont il est question ici est celle d'un prix de l'Académie des sciences, il n'est pas absurde de se demander ce que les membres de cette assemblée avaient dans la tête, en plus de la science, lorsqu'ils évaluaient les travaux qui leur étaient présentés.

Voici maintenant comment se présente le contenu de ce travail. Dans un souci de simplicité, il suit un ordre à peu près chronologique.

Le décor (le sujet du Grand Prix, la guerre, les premiers exemples de fractions rationnelles itérées) est planté et les personnages principaux (Fatou, Julia, Lattès, Montel et les autres) sont présentés dans le premier chapitre.

Ensuite (au chapitre II), les recherches de Fatou, Julia, Lattès et Ritt, celles de Montel, sont décrites, plus ou moins au jour le jour, comme elles apparaissent à l'Académie des sciences, de la note de Fatou du 21 mai 1917 à la proclamation du Grand Prix le 2 décembre 1918, en passant par la crise de mauvaise humeur de Julia en décembre 1917.

Les mathématiques contenues dans les mémoires de Julia et Fatou sont décrites (assez rapidement) dans le chapitre III. Un commentaire personnel : avant de lire leurs mémoires, j'ai essayé de faire le point sur les préjugés que je pouvais avoir sur le sujet et surtout sur ces deux auteurs, afin de ne pas les laisser biaiser ma lecture de ces textes mathématiques ; c'est donc bien parce que celles-ci m'ont frappée pendant que je lisais ces articles, que j'insiste sur les qualités du travail de Fatou et en particulier sur sa modernité.

Dans le chapitre suivant, (chapitre IV), la question de l'arrêt presque total, dès les années 1920, des recherches sur le sujet est posée. Y sont aussi présentés de proches parents de l'ensemble de Julia, les « points J » (qui sont sans doute à la source de la terminologie « ensemble de Julia ») apparus dans un article d'Ostrowski en 1927 et qui vont jouer leur rôle dans la suite de l'histoire.

On le verra, dans cette histoire, Pierre Fatou n'en finit pas, n'en finira pas de disparaître. Le chapitre V est consacré à sa personnalité et au peu que nous avons pu découvrir de sa biographie.

Dans le dernier chapitre (chapitre VI) sont reproduites des lettres pour la plupart inédites adressées à Paul Lévy en 1965. À l'occasion d'une bien tardive querelle de priorité entre Montel et Julia à propos des « points J », nous verrons apparaître des reproches faits à Julia et à son attitude de mathématicien pendant la période de l'itération, reproches qui, à ma connaissance, n'avaient jamais été explicités.

J'aurai cité ici ou là dans ce livre des extraits d'un rapport d'Hadamard sur Fatou, ainsi que des lettres de Fatou à ses amis Fréchet et surtout Montel. Pour les lecteurs que ces saucissonnages auraient frustrés, ces textes sont inclus dans leur intégralité et dans un appendice.

doute, « tout » n'est pas écrit (l'étude d'une partie de ce qui n'est pas écrit, à une autre période, est un des sujets de notre article [2007]). Le choix fait par l'Académie des sciences il y a quelques décennies de la disparition de ce mélange sera certainement déploré par les historiens qui se pencheront sur la fin du xx^e siècle.

Avertissement

On ne trouvera pas dans ce texte de biographie complète de chacun des protagonistes, c'est en particulier le cas pour Gaston Julia ; il y aura bien sûr des indications, en pointillés ; pour les informations qui manqueraient ici, voir par exemple sa nécrologie par Garnier [1978] ainsi que ce que l'on peut apprendre en feuilletant le volume 6 [Julia 1970] des Œuvres complètes de Julia. On ne trouvera pas non plus ici de liste exhaustive de ses travaux, après tout, les Œuvres de Julia ont été publiées (de son vivant). J'évoque aussi, au § VI.4, quelques-unes des raisons qui rendent l'écriture d'une biographie de Julia difficile.

Il n'en est pas de même des Œuvres de Fatou — bien que l'article [Nathan 1971] que lui a consacré le *Dictionary of scientific biography* ait annoncé que la Société mathématique de France (SMF) prévoyait de les publier (Szolem Mandelbrojt a d'ailleurs dit [Lebesgue 1991, note 358] être chargé par le Comité national des mathématiciens de les éditer). Cela n'a pas été fait, confirmant de manière posthume la sous-estimation de son œuvre que montrait de son vivant la carrière lente et modeste qui a été celle de Fatou. Sans prétendre à l'exhaustivité, ce texte est plus complet sur les travaux de Fatou. Pour des raisons analogues, il contient quelques indications sur sa biographie dont, grâce en particulier à l'aide de plusieurs membres de sa famille (voir ci-dessous), des renseignements inédits sur Pierre Fatou.

Quant aux autres mathématiciens mentionnés ici : on trouvera des indications et renseignements sur Montel, bien sûr, mais aussi sur Picard, Siegel, Hausdorff ou Garnier par exemple, ici et là dans ce texte — qui est équipé d'un index qui devrait être efficace. Ainsi ce livre pourrait contribuer à une histoire (moins monolithique que de coutume) de la communauté mathématique française au XX^e siècle.

Morts à l'ennemi

La première guerre mondiale, qui est le cadre du début de cette histoire, déjà assez ancienne pour que la plupart des témoins en soient morts⁵, nous est pourtant culturellement très proche et il n'est pas facile de l'aborder sereinement, ni même semble-t-il avec un minimum de perspective historique⁶.

⁵ Les deux derniers « poilus » français sont morts pendant l'écriture de ce texte.

⁶ Ce que démontre l'amalgame, dans le discours du Président de la République, le 17 mars 2008, entre les « poilus » de 14–18 et les résistants du plateau des Glières (haut-lieu, rappelons-le, de la Résistance française à l'Occupation allemande) qui

allaient *eux aussi* [souligné par moi] faire le sacrifice de leurs vies en proclamant
« vivre libres ou mourir »

(discours aux obsèques de Lazare Ponticelli). Cette absence de perspective historique est-elle à relier à la mode actuelle pour l'« histoire » de la première guerre mondiale ?

Des millions de jeunes gens sont morts pendant la première guerre mondiale, dont beaucoup avaient accepté l'idée de « mourir pour la patrie ». Parmi ceux d'entre eux dont la patrie était la France, une génération de jeunes scientifiques qui n'étaient pas voués à l'anonymat et au silence mais n'avaient pas eu le temps de laisser leurs noms à des découvertes, des théorèmes ou d'autres objets mathématiques. Par respect pour ces millions d'anonymes, les noms de ceux d'entre eux (mathématiciens pour la plupart) rencontrés au cours de ce travail sont cités dans ce texte.

Femmes

J'ai peine à le dire, mais cette histoire est une histoire d'hommes. Pourtant, on le sait, un des effets de la première guerre mondiale a été l'arrivée massive d'une nouvelle classe de femmes sur le marché du travail⁷.

L'histoire que l'on va lire est presque exclusivement masculine — nul n'a pensé à remplacer les mathématiciens occupés au front ou morts au combat par des femmes ! Quelques épouses y jouent leur rôle anonyme et discret, la fille de Charles Hermite que le jeune Émile Picard a épousée, ce qui a peut-être accéléré l'établissement de son pouvoir sur la collectivité, l'infirmière dévouée devenue la femme de Julia⁸, présente dans les discours et écrits de [Julia 1970] (sans que son prénom y apparaisse jamais⁹) comme épouse, mère des six fils de Gaston Julia, et elle aussi fille de, en l'occurrence du compositeur Ernest Chausson. Des épouses et des filles, mais aussi des sœurs et des mères... et même des ouvrières ! Citons ici une première fois un discours du président de l'Académie des sciences en 1915, Edmond Perrier [1915, p. 806] :

Hantées par la vision des tranchées les mères et les sœurs avaient trop d'angoisse au cœur pour songer à se parer ; la sobre élégance du costume presque religieux des infirmières n'admettait guère les fantaisies qui font vivre Mimi Pinson, et l'on ne pouvait s'attendre à ce que les doigts alertes

⁷ Il est évidemment faux de dire, comme on le fait souvent, que « les femmes » sont arrivées sur le marché du travail parce que les hommes étaient au front. Il y avait déjà de nombreuses femmes au travail bien longtemps avant la première guerre mondiale. Par exemple dans la paysannerie et, pour ce qui est des salariées, dans la classe ouvrière.

⁸ Dans l'histoire de la blessure de Julia et de sa re-naissance, il y a, bien entendu, des infirmières, au moins deux infirmières, celle qui l'a sauvé et qui était norvégienne (voir le discours au congrès d'Oslo dans [Julia 1970, p. 34]) et celle qu'il a épousée en 1918.

⁹ Une famille (ou un milieu) où les épouses n'ont pas de prénom : dans la biographie [Gallois 1994] de Chausson sont remerciées deux belles-filles de Marianne Chausson et Gaston Julia, Madame Marc Julia et Madame Sylvestre Julia.

et légers des « midinettes » consentissent courageusement¹⁰, comme ils l'ont fait, à calibrer des obus, emplir des grenades ou manipuler des explosifs.

Nous rencontrerons pourtant une femme scientifique, Jeanne Lattès, l'épouse (puis la veuve) de Samuel Lattès, une scientifique discrète et modeste, auteur d'une découverte importante, l'autohistoradiographie.

Quant à Pierre Fatou, eh bien, il était célibataire. À sa façon discrète, il introduit pourtant (en tant qu'astronome) une autre femme scientifique dans cette histoire, l'astronome Rose Bonnet, avec qui il observait les étoiles doubles.

Notons aussi l'apparition rafraîchissante au détour de ce texte de Marguerite Borel (1883–1969), fille du mathématicien Paul Appell (et d'une nièce de Joseph Bertrand, donc aussi apparentée par alliance à Hermite et à Picard) et épouse d'Émile Borel, une femme remarquable¹¹, qui a été, sous le pseudonyme de Camille Marbo, une écrivaine reconnue (par exemple par le Prix Femina en 1913) et dont le livre de souvenirs [1968] est une très vivante source de renseignements sur la période de 1883 à 1967, ce qui inclut les périodes considérées ici. Si, pour des raisons qu'il serait intéressant de creuser, elle ne mentionne pratiquement pas Julia dans ce livre écrit en 1967, elle est, dans une des envolées lyriques d'un discours de ce dernier [1970, p. 72], la Marguerite d'un Faust incarné par Émile Borel.

Illustrations

Il est question dans ce texte de mathématiques plus que délectables, qui ont acquis depuis vingt ou trente ans une grande popularité esthétique, mais qui ont été créées au cours d'une histoire plus que grave, les millions de morts d'une guerre atroce préparant les dizaines de millions de morts d'une guerre encore plus atroce (et abjecte), et il est question des destins individuels de ses protagonistes dans cette histoire pas si ancienne... Il était donc souhaitable de garder une certaine sobriété, c'est pourquoi, même si des références à des textes modernes sur ce que l'on appelle aujourd'hui les « systèmes dynamiques complexes » y sont données, ce texte ne fourmille pas d'images d'ensembles de Julia, « beautés banales des gravures de mode de la mathématique », « les “fractales” comme “top-models” de la mathématique » [Roubaud 1997, p. 135], qui l'auraient rendu anachronique et peut-être aussi un peu trop léger.

¹⁰ Les midinettes ont consenti, courageusement mais aussi lucidement, témoin la grève de quatorze jours au printemps 1917 à l'issue de laquelle elles ont obtenu notamment des contrats collectifs de travail et des jours de repos. Voir, sur les femmes, l'article [Thebaud 1992].

¹¹ Marguerite Borel a créé avec son mari, en 1906, la *Revue du mois*, un mensuel qui a eu beaucoup de succès. Elle a été présidente de la Société des gens de lettres en 1937, 1938 et 1947. Elle a aussi été présidente du jury Femina.

Sources

Sauf omission involontaire, toutes les sources de ce texte sont citées, à leur place, souci élémentaire de rigueur. Parmi ces sources, il y a des articles de mathématiques, des discours et des allocutions, des lettres, des pièces d'état-civil, des témoignages et des souvenirs. Sur l'histoire de la première guerre mondiale, les articles cités sont des articles écrits pour un « grand public » [Audoin-Rouzeau 1992 ; Becker 1992 ; Pierrard 1992 ; Thebaud 1992 ; Sirinelli 1992], publiés dans le magazine *l'Histoire* et parus en recueil dans une collection facilement accessible. Ces articles contiennent des références bibliographiques plus détaillées.

Outre les textes publiés¹² qui figurent dans la bibliographie, j'ai utilisé

- les plis cachetés de Julia ainsi que les manuscrits de certaines notes aux *Comptes rendus*, aux archives de l'Académie des sciences,
- le dossier des prix de l'Académie des sciences de 1918,
- les lettres de Julia et Fatou à Borel, du fonds Borel, celles de Fatou et Lebesgue à Montel du fonds Montel (72J) et celles de Fatou à Fréchet du fonds Fréchet de ces mêmes archives,
- toujours dans ces archives, les dossiers biographiques de certains des mathématiciens dont il est question ici (où l'on peut trouver notamment les notices de Fatou, un rapport manuscrit d'Hadamard cité plusieurs fois ici (et reproduit intégralement en appendice), ainsi que les lettres de Picard citées¹³ au chapitre V) et quelques informations venues du fonds Villat (61J),
- le registre des comités secrets¹⁴ aux archives de l'Académie des sciences,
- les archives administratives de l'Institut Henri Poincaré,
- le dossier Paul Lévy de la bibliothèque de Chevaleret,
- les rapports annuels de l'Observatoire (conservés à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris),
- les archives du Collège Stanislas,
- les archives personnelles de membres de la famille de Pierre Fatou,
- les archives Bourbaki numérisées par la cellule MathDoc, sur <http://math-doc.ujf-grenoble.fr/archives-bourbaki>,
- le fichier et les archives de la bibliothèque de l'IRMA,
- la base de données « mémoire des hommes » du ministère de la Défense, qui contient plus de 1,3 million de fiches de « Morts pour la France » de la guerre de 14–18 (<http://www.memoiredeshommes.sga.defense.gouv.fr>).

¹² Parmi les sources publiées, on trouvera plusieurs articles parus dans les *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, une publication extrêmement riche dont on pourra regretter qu'elle ait disparu sans avoir été remplacée.

¹³ En principe, dans ce livre, les citations de documents non publiés s'accompagnent d'une référence précise, parfois dans le texte lui-même, le plus souvent dans une note infrapaginale.

¹⁴ L'Académie se réunit en séance publique, puis en comité secret, c'est-à-dire en réunion non publique. Les procès-verbaux de ces réunions sont conservés dans un registre.

Les dates de naissance et de mort indiquées dans ce texte viennent de sources sûres (encyclopédies, site <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/> de St-Andrews pour la plupart des mathématiciens, dictionnaire [Véron 2004] pour les astronomes, annuaire de l'association des anciens élèves de l'ENS...). Les erreurs éventuelles sont de mon seul fait. Il y a pourtant quelques cas dans lesquels il n'a pas été possible de trouver ces renseignements (ils sont alors remplacés par un « XX »), d'autres dans lesquels ils sont seulement approchés, dans ces cas, une date approximative s'accompagne d'un « v. » (pour « vers »).

Les renseignements sur Paul Flamant sont dus à Jean Cerf (et ont déjà été utilisés dans [Audin 2009b]), ils complètent l'article [Sartre 1948].

La plupart des renseignements biographiques et personnels inédits sur Pierre Fatou viennent de membres de sa famille : j'ai expédié un jour une lettre à vingt-deux personnes portant le nom de Fatou et trouvées dans l'annuaire du téléphone, en région parisienne ou en Bretagne. Le lendemain soir, j'avais déjà parlé au téléphone avec quatre petits-cousins ou petits-neveux de Pierre Fatou, qui m'ont raconté ce qu'ils savaient de « Pierre Fatou l'astronome », comme on l'appelle dans la famille et qui m'ont mise en contact avec d'autres cousins. Tous m'ont rapidement envoyé des copies de tous les documents qu'ils possédaient. D'autres renseignements viennent des services de l'état-civil ou des archives des villes de Pornichet et de Lorient.

Origine des photographies

- La photographie de la famille de Pierre Fatou reproduite page 127 appartient à Madame Gladys Sérieyx, celle de Pierre Fatou au collège Stanislas (page 128) aux archives du Collège Stanislas, celle de Pierre Fatou jeune page 138 à Monsieur Henry Fatou. La photographie des astronomes lors du passage de Mercure (figures V.1 et V.2) appartient à l'Observatoire de Paris.

- Le portrait de Felix Hausdorff (reproduit page 107), a été publié dans ses Œuvres, il est reproduit ici grâce à l'aimable autorisation de l'édition Hausdorff.

- La photographie de Gaston Julia et Charles de la Vallée Poussin à Ravenne (page 192) vient de l'album photographique de George Pólya [Alexanderson 1987].

- La photographie de Samuel Lattès reproduite page 74 appartient à l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse.

- Le portrait de Paul Lévy (page 196) a été publié dans ses Œuvres complètes.

Les autres photographies ont été faites par moi-même. Les droits des documents reproduits pages 88, 99, 218 et 229 n'en appartiennent pas moins à l'Académie des sciences.

Remerciements

Je remercie

d'abord, les institutions :

- le service des archives municipales de la ville de Lorient pour l'acte de naissance de Pierre Fatou et les renseignements sur Florian La Porte,
- le service de l'état-civil de la mairie de Pornichet pour l'acte de décès de Pierre Fatou,
- le Collège Stanislas pour les informations sur Pierre Fatou et Désiré André, la numérisation et l'autorisation de publier la photographie de la page 128,
- la bibliothèque de l'Observatoire de Paris pour l'autorisation de consulter les rapports annuels et les registres d'inventaire,
- les bibliothèques de l'IRMA (Institut de recherche mathématique avancée de Strasbourg), de Chevaleret (Bibliothèque interuniversitaire scientifique Jussieu, mathématiques recherche), de l'École normale supérieure et de l'Institut Henri Poincaré pour tout ce que j'y ai appris,
- le *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach* pour avoir organisé un *Arbeitsgemeinschaft* sur les « ensembles de Julia de mesure positive » en mars-avril 2008,
- et surtout le service des archives de l'Académie des sciences pour son accueil, et tout particulièrement son conservateur Florence Greffe pour avoir classé et inventorié, en mars-avril 2008, la correspondance de Paul Montel et créé le fonds Paul Montel dans ces archives, et pour m'avoir autorisée à publier l'image constituant la figure III.1, les lettres de Fatou à Montel et à Fréchet et le rapport d'Hadamard,

★

ensuite, la famille de Pierre Fatou, en les personnes de

- son petit-neveu Henry Fatou pour les photographies, le texte de son père et les encouragements humoristiques qu'il m'a fait parvenir,
- ses petits-cousins et petites-cousines
 - l'amiral Alain Fatou pour les documents qu'il a rassemblés vers 1992 et qu'il m'a envoyés,
 - Anny Fatou pour l'arbre généalogique de la famille Fatou,
 - Gladys Sérieyx, pour les photographies et les autres documents qu'elle m'a envoyés,
 - Hélène Fatou, pour les contacts qu'elle a établis entre sa famille et moi et pour les suggestions qu'elle m'a faites,
 - Michel Fatou, pour les souvenirs oraux qu'il a eu la gentillesse de collecter chez d'autres de ses cousins et de me transmettre,

★

encore, les quatre rapporteurs anonymes qui ont lu une version préliminaire de ce texte pour Springer pour leurs suggestions et leurs très constructives critiques.

★

et enfin

- David Aubin, historien des mathématiques, pour sa connaissance de l’histoire des Observatoires, pour les références qu’il m’a envoyées sur Pierre Fatou et pour les indications qu’il m’a données sur les recherches en balistique signalées au chapitre I,

- June Barrow-Green, historienne des mathématiques, pour la référence à son article [2008] sur les mathématiciens britanniques,

- Xavier Buff, Arnaud Chéritat et l’ensemble des mathématiciens participants à l’*Arbeitsgemeinschaft*, pour l’aide qu’ils m’ont apportée dans la compréhension mathématique du sujet, et encore

- Xavier Buff pour sa relecture attentive d’une version préliminaire de ce texte, pour les innombrables corrections et précisions mathématiques qu’il a suggérées — grâce auxquelles il n’y a peut-être pas trop d’erreurs mathématiques dans cette version (je suis évidemment la seule responsable de celles qui, inévitablement, restent) — et pour les références qui sont à l’origine de la remarque IV.5.1,

- Arnaud Chéritat pour les dessins d’ensembles de Julia qu’il a fabriqués (à ma demande), qu’il m’a envoyés et que j’ai utilisés pour illustrer ce livre (les figures I.2, I.4, II.1, III.2 ainsi que celle de la note 33 du chapitre III, la figure IV.1 ainsi que toutes les composantes de la figure IV.2¹⁵)¹⁶ et surtout la figure IV.4,

- Dominique Dartron, bibliothécaire, pour son aide avec les archives de l’Institut Henri Poincaré (IHP),

- Suzanne Débarbat, astronome et historienne, pour les informations sur l’Observatoire qu’elle a fournies à Alain Fatou en 1992–93, l’invitation à l’Observatoire en décembre 2007, l’initiation à sa bibliothèque et pour toutes les informations qu’elle m’a données,

- Maurice Galeski, bibliothécaire, pour les inestimables renseignements qu’il m’a donnés sur l’histoire de la bibliothèque du Centre international de rencontres mathématiques (CIRM) et notamment, pour ce qui nous concerne ici, sur son fonds Gaston Julia,

- Étienne Ghys pour m’avoir indiqué l’article [Garnier 1954],

- Catherine Goldstein, historienne et mathématicienne, pour de nombreuses discussions, pour sa rigueur, pour les documents qu’elle m’a montrés,

¹⁵ Réalisée pour un exposé à l’*Arbeitsgemeinschaft*.

¹⁶ Chacune de ces figures, d’après ses dires, ne lui a coûté que dix minutes... jusqu’au jour où je lui ai demandé de fabriquer aussi la figure IV.4, qui lui a demandé toute une longue journée de travail, ne serait-ce que parce qu’il lui a fallu d’abord calculer précisément les positions des cinq cercles blancs qui apparaissent sur cette figure.

pour tous les renseignements qu'elle m'a donnés et pour toute l'aide qu'elle m'a apportée, dont ces quelques lignes ne peuvent donner aucune idée,

- Nathalie Granottier, bibliothécaire, pour son aide avec les fonds anciens de la bibliothèque du CIRM,

- Jeremy Gray, historien des mathématiques, pour ses commentaires et suggestions judicieuses après la lecture d'une première version de ce texte,

- Jean-Pierre Kahane pour une discussion au tout début de ce travail,

- Nicolas Lecervoisier, responsable des archives au Collège Stanislas, pour les recherches sur Pierre Fatou et Désiré André qu'il a menées, à ma demande, dans ces archives, pour son accueil et pour la visite guidée du Collège,

- Juliette Leloup, historienne des mathématiques, pour son aide avec les thèses dont il est question ici, et en particulier pour les rapports sur la thèse de Gaston Julia,

- Odile Luguern, bibliothécaire, pour son aide à la recherche du « don Fatou » dans la bibliothèque de l'ENS,

- Philippe Maisonobe, mathématicien niçois, pour m'avoir envoyé une copie du livre [MathNiçois 1966],

- le docteur Pierre Marinelli pour la consultation médicale posthume de Pierre Fatou,

- Frédéric Paulin pour les indications sur la conjecture d'Ahlfors,

- Jacques Roubaud pour une utile conversation,

- Claude Sabbah, pour son aide $\text{\TeX}$ nique,

- Arnaud Saint-Martin, sociologue et historien, pour m'avoir envoyé sa thèse [2008], pour avoir très gentiment répondu à mes questions, et pour les commentaires qu'il m'a envoyés sur une version préliminaire du chapitre sur Pierre Fatou,

- Norbert Schappacher, historien et mathématicien, pour de multiples conversations,

- Marie-Hélène Schwartz et Claudine Schwartz pour leur autorisation de publier les lettres adressées à (leur père et grand-père) Paul Lévy,

- Norbert Steinmetz pour la figure III.4, extraite de son livre [1993],

- Philippe Véron, astronome et historien, pour son envoi (sur CD) de son dictionnaire [2004] non publié des astronomes,

- Brigitte Yvon-Deyme, bibliothécaire, pour m'avoir montré les registres de la bibliothèque de l'IHP,

- Liliane Zweig, bibliothécaire, pour son accueil à la bibliothèque de Chevaleret.

★

Pendant que j'écrivais ce texte, j'ai lu ou relu *l'Éclat d'obus*, *À l'ouest rien de nouveau*, *le Feu*, *Orages d'acier*, *les Cloches de Bâle*, *les Croix de bois*, *Calligrammes* et *Poèmes à Lou*, *l'Acacia*... Il serait bien étonnant qu'aucune de ces lectures [Leblanc 1916 ; Remarque 1928 ; Barbusse 1916 ; Jünger 1920 ; Aragon 1934 ; Dorgelès 1919 ; Apollinaire 1965 ; Simon 1989] n'ait laissé de trace dans ce travail. Il est donc honnête d'en remercier les auteurs.

Le Grand Prix, le cadre

Bertinck a reçu une balle dans la poitrine. Un instant après, un éclat d'obus lui fracasse le menton. Le même éclat a encore la force d'emporter la hanche de Leer. Leer gémit et s'appuie sur ses bras. Il perd son sang rapidement. Personne ne peut le secourir. Au bout de quelques minutes, il se replie sur lui-même, comme un boyau vide. À quoi lui a-t-il servi d'avoir été, à l'école, un si bon mathématicien ?

Erich Maria Remarque, *À l'ouest, rien de nouveau* [1928]

Dans ce chapitre est décrit le cadre dans lequel se déroule le début de cette histoire : le problème posé pour le Grand Prix des sciences mathématiques, le contexte historique en mathématiques et le contexte historique général, c'est-à-dire la première guerre mondiale. Après une rapide présentation des divers protagonistes et de leur rôle sont posées quelques notations et donnés les premiers exemples pertinents pour le problème mathématique étudié, l'itération des fractions rationnelles, pour le situer, tel qu'il était au moment où l'histoire a commencé.

I.1 Le problème de l'itération en 1915

En 1915, l'Académie des sciences de Paris annonce qu'elle attribuera en 1918 un « Grand prix des sciences mathématiques ». Il s'agit d'un prix doté par l'État, d'une valeur de 3 000 F. Le sujet, publié le 27 décembre 1915 dans [Académie 1915, p. 921], est présenté ainsi :

L'itération d'une substitution à une ou plusieurs variables, c'est-à-dire la construction d'un système de points successifs $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, dont chacun se déduit du précédent par une même opération donnée :

$$P_n = \varphi(P_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

(φ dépendant rationnellement, par exemple, du point P_{n-1}) et dont le premier P_0 est également donné, intervient dans plusieurs théories classiques et dans quelques-uns des plus célèbres Mémoires de Poincaré.

Jusqu'ici les travaux bien connus consacrés à cette étude concernent surtout le point de vue « local ».

L'Académie estime qu'il y aurait intérêt à passer de là à l'examen du domaine entier des valeurs que peuvent prendre les variables. Dans cet esprit, elle met au concours, pour l'année 1918, la question suivante :

Perfectionner en un point important l'étude des puissances successives d'une même substitution, l'exposant de la puissance augmentant indéfiniment.

On considérera l'influence du choix de l'élément initial P_0 , la substitution étant donnée, et l'on pourra se borner aux cas les plus simples, tels que les substitutions rationnelles à une variable.

Il serait intéressant de savoir précisément comment et pourquoi ce sujet a été choisi. Nous savons que certains académiciens ont d'abord pensé à un autre sujet, rien moins que le théorème de Fermat¹, avant de se décider pour l'itération. Il est arrivé, c'était même une pratique courante, qu'un sujet de prix soit déclaré parce que l'on savait qu'un-e mathématicien-ne avait fait des progrès sur ce sujet². Ce n'est apparemment pas le cas ici, où il semble qu'au contraire le sujet du Prix va stimuler la recherche dans le domaine. Il n'est pourtant pas impossible qu'un des académiciens, Hadamard par exemple, ait pensé à la note de Fatou [Fatou 1906d] et au fait que ce dernier ait continué à travailler sur le sujet (sans rédiger) en déclarant ce sujet (voir l'extrait de lettre cité page 17). L'allusion à Poincaré pourrait venir aussi de ce côté-là : « comme tout le monde », Hadamard admirait beaucoup Poincaré, mais il avait, lui, organisé un séminaire sur ses travaux en 1913 et devait donc bien

¹ Petite note signée Darboux, Jordan et Picard, dossier des prix, archives de l'Académie des sciences :

L'Académie des sciences met au concours la démonstration du célèbre théorème de Fermat relatif à l'impossibilité de l'équation

$$x^n + y^n = z^n.$$

Elle a surtout en vue des progrès de la théorie des nombres qui pourraient conduire à cette démonstration.

Il est difficile de ne pas signaler ici que, quelques années plus tard, le 19 septembre 1923, dans une lettre au secrétaire-archiviste de l'Académie des sciences, Pierre Gauja, Picard lui demandera d'écrire à un correspondant

que l'Académie n'a jamais mis la question [le théorème de Fermat] au concours, si toutefois il en est bien ainsi

(dossier Picard, archives de l'Académie des sciences).

² Parmi les exemples les plus célèbres, rappelons celui du Prix Bordin de 1888, pour les avancées réalisées par Sophie Kowalevski sur le problème du solide (voir [Audin 2008]), et celui du Grand Prix des sciences mathématiques, déclaré fin 1890 parce que Stieltjes pensait savoir démontrer l'hypothèse de Riemann (et finalement décerné à Hadamard). Pour une histoire rapide, mais efficace, des prix mathématiques, voir [Gray 2006].

les connaître³. Le fait (note 1) que Darboux, Jordan et Picard aient pensé proposer le théorème de Fermat indique en tout cas qu'aucun des trois n'est à l'origine du sujet.

On remarquera qu'il est bien question, dans l'énoncé de ce sujet, de l'itération pour elle-même (en termes modernes et anachroniques, de dynamique) : on itérait bien entendu des fonctions depuis longtemps, par exemple pour trouver des solutions approchées d'équations algébriques, et plus d'un mathématicien s'est livré à cette activité⁴. Un des aspects les plus intéressants de ce sujet est le caractère global, « général » comme on disait à l'époque, de l'étude souhaitée. Voici, en anticipant un peu, le début du rapport [Académie 1918, p. 811] présenté par Émile Picard et Georges Humbert⁵ lors de la remise du Prix en 1918. Ils y évoquent l'histoire du sujet et précisent, par exemple, l'allusion aux travaux de Poincaré⁶ :

L'Académie avait mis au concours l'étude de l'*itération* d'une substitution, en rappelant que le point de vue *local* avait seul été considéré jusqu'alors et en invitant les concurrents à se placer d'un point de vue *général*.

Les travaux antérieurs, notamment les travaux fondamentaux de M. Kœnigs, avaient, pour une substitution S , $z_1 = \varphi(z)$, à une variable, conduit à la notion des *points d'attraction* : si ζ est un point laissé fixe par S ou par une de ses puissances (*point invariant*), et si une quantité correspondante, dite *multiplicateur*⁷, est de module *inférieur* à l'unité, les transformés successifs

³ Hadamard est d'ailleurs l'auteur de l'article [Hadamard 1921] sur l'œuvre mathématique de Poincaré que va publier *Acta Mathematica* dans son numéro spécial de 1921.

⁴ Pour en donner une petite idée : la « méthode de Newton » est, selon Cajori [1893, p. 363–366], due à Raphson, il l'appelle donc méthode « de Newton-Raphson » ; quant à Cayley, que nous aurons l'occasion de mentionner à nouveau, il appelle cette même méthode « de Newton-Fourier ». Newton, Raphson, Fourier, on pourrait même citer deux pages de Galois [1962, p. 379], à la suite d'un appendice du livre de théorie des nombres de Legendre [1955, Appendice, Section I] (voir aussi [Galuzzi 2001])... mais restons sérieux. Voir [Alexander 1994] pour une pré-histoire du sujet, de la méthode de Newton à ce dont il est question ici.

⁵ Georges Humbert (1859–1921), membre de l'Académie des sciences depuis 1901, joue un important second rôle dans cette histoire et dans la vie de Gaston Julia. Nous allons le voir trancher dans une querelle de priorité (ci-dessous, en décembre 1917). Signalons aussi que c'est lui-même, avec Painlevé, qui parrainera Julia pour son élection comme membre de la SMF le 13 mars 1919. Julia participera à la publications des Œuvres d'Humbert, avec le propre fils, Pierre Humbert (1891–1953) de ce dernier (un mathématicien de la génération de Julia). Voir aussi la note 18 du chapitre II.

⁶ Il semble clair qu'aucune connexion n'est établie par l'Académie des sciences avec les travaux de Poincaré sur les groupes kleinéens, dont nous aurons à reparler (voir la note 12 et le § IV.5.b), et ceci malgré le fait que Fatou avait mentionné, dès 1906, l'analogie avec les formes automorphes [Fatou 1906d].

⁷ La définition du mot multiplicateur, ainsi que d'autres définitions utiles, se trouve au § I.4.

(conséquents⁸) d'un point z , pris au voisinage de ζ , tendent tous vers ζ , ou tendent périodiquement vers p points, dont l'un est ζ , et dont les autres sont ses $(p - 1)$ premiers conséquents.

Ces résultats initiaux soulevaient bien des problèmes : les points attractifs sont-ils en nombre limité ; quel est le domaine exact d'attraction de l'un d'eux ; quelle division du plan est ainsi associée à une fonction $\varphi(z)$ donnée ? Sur ces questions fondamentales, on ne possédait qu'une Note de M. Fatou (octobre 1906), où l'auteur montrait, sur des exemples, que les régions de la division pouvaient être limitées par des courbes non analytiques, mettant ainsi en évidence les difficultés et la complexité de la question.

Enfin, à un autre point de vue, Poincaré avait établi que, dans certains cas, on peut associer à S une fonction méromorphe dans tout le plan, $\theta(u)$ telle que, si l'on pose $z = \theta(u)$, on ait $z_1 = \theta(su)$, s étant une constante de module supérieur à 1, ce qui ramène l'étude de l'itération à celle de $\theta(u)$; mais aucune application n'avait été faite de cette méthode d'itération paramétrique.

La note [Fatou 1906d]

Le seul travail global entrepris dans le domaine avant la publication du sujet du prix semble bien avoir été, en effet, la note de Pierre Fatou [1906d].

Personne n'avait osé aborder la même question dans l'ensemble du plan lorsque, dès 1906, dans une courte note aux *Comptes rendus*, M. Fatou, par l'exemple des résultats extraordinaires qu'on y rencontre, en montrait à la fois l'intérêt et la haute difficulté,

commentera Hadamard⁹ en 1921 dans un rapport que nous aurons l'occasion de citer plusieurs fois. Dans cette note, Fatou étudiait les applications rationnelles dont l'unique orbite attractive¹⁰ est un point fixe. Malgré l'attention portée aux équations fonctionnelles, les questions posées le sont en termes dynamiques : un point fixe attractif attire tout un voisinage ; comment les frontières de ces différents domaines de convergence sont-elles faites ? Il y démontre (avec quelques hypothèses supplémentaires) que les itérées d'une fraction rationnelle avec un unique point fixe convergent vers ce point... sauf sur un ensemble, qu'il note E et dont il montre qu'il est totalement discontinu (c'est-à-dire que ses composantes connexes sont des points) et parfait (c'est-à-dire qu'il est fermé et sans point isolé). Voir plus précisément l'exemple I.4.2

⁸ Le joli mot « conséquent », dont nos protagonistes feront grand usage dans les travaux cités mérite d'être défini : les conséquents d'un point z sont ses images successives $z_n = R^n(z)$ ($n \geq 1$), ses itérés.

⁹ Rapport manuscrit, 4 juillet 1921, dossier Fatou, archives de l'Académie des sciences. Le texte intégral de ce rapport figure dans l'appendice à la fin de ce livre.

¹⁰ Le mot « attractif » n'existait pas en 1906, n'existait toujours pas lorsque le sujet a été déclaré. Mais il est déjà en usage dans le rapport du Prix : nous allons voir une terminologie efficace et adaptée se mettre en place au fur et à mesure que les travaux sur le sujet avancent (voir page 70). La définition est rappelée ci-dessous au § I.4.

ci-dessous. En plus d'être le premier résultat global, il semble que ce soit aussi une des premières fois que ce que l'on appelle aujourd'hui la topologie générale est utilisé dans ce problème de l'itération. Fatou considérait aussi, dans la deuxième partie de cette note, le cas où la fraction rationnelle a plusieurs points limites et montrait que les lignes qui séparent les différents domaines de convergence ne sont pas en général analytiques, démontrant que c'était le cas pour $R(z) = (z^2 + z)/2$ (voir l'exemple I.4.3 ci-dessous).

Fatou avait continué à travailler sur le sujet, comme il l'écrivait dans une lettre à Fréchet le 10 février 1907 :

[...] j'ai fait des recherches plus étendues sur l'itération ; mais il me manque le courage pour rédiger tout cela [...]

(voir la lettre complète page 217) — vues les relations très proches entre Fréchet et Hadamard, il est probable que ce dernier était au courant.

Parenthèse (La topologie générale). Ce que nous appelons aujourd'hui la « topologie générale » est né d'une partie de la « théorie des ensembles¹¹ » ou de la « théorie des ensembles de points » — *Mengenlehre*, puisque cette théorie a été inventée en Allemagne et en allemand¹² : on s'accorde en effet à reconnaître la paternité de Cantor.

Même si l'expression n'existait pas encore, on utilisait donc déjà la topologie générale en analyse, et même en France, au moins depuis les travaux de Poincaré, puis de Borel¹³.

L'impression que nous produisent les mémoires de M. Cantor est désolante ; leur lecture nous semble à tous un véritable supplice, et en rendant hommage à son mérite, en reconnaissant qu'il a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre,

avait bien écrit Hermite [Dugac 1985, p. 209], mais c'était déjà très ancien (1883).

Mentionnons par exemple, le théorème de Borel-Lebesgue, qui était appelé un « lemme de théorie des ensembles » (en particulier dans [Julia 1918f]).

¹¹ Sur la théorie des ensembles en France à cette époque, voir le très intéressant article [Gispert 1995].

¹² On remarquera que, la même année, Mittag-Leffler publie dans « son » journal des traductions en français des articles de Cantor (parmi lesquels [1884]) et le mémoire de Poincaré sur les groupes kleinéens, dans lequel celui-ci écrit [1883, p. 78] :

Les sommets de divers polygones R forment *eine unendliche Punktmenge* P et pour obtenir la ligne L , il faut ajouter à cette *Punktmenge* son *erste Ableitung* P' . On voit que la ligne L est *eine perfekte und zusammenhängende Punktmenge*. C'est en ce sens que c'est une ligne.

Un passage qui montre que la terminologie (dérivé, parfait, connexe) n'existait encore qu'en allemand... et dont le sujet n'est pas sans lien avec celui de ce livre et méritait donc, de toute façon, d'être cité ici (voir aussi le § IV.5.b).

¹³ Voir son livre [Borel 1898].

Les travaux de Borel, de Baire et de Lebesgue font un grand usage de cette théorie des ensembles. Pour une histoire plus développée que celle que nous avons la place de faire ici, voir les articles de Taylor [1982 ; 1985] sur Fréchet, l'introduction [Purkert 2002] de l'édition de [Hausdorff 1914] contenue dans les Œuvres complètes [Hausdorff 2002] ainsi que [James 1999]. C'est Bourbaki qui, bien plus tard, réalisera la séparation entre la théorie des ensembles (cardinaux, etc.) et la topologie générale¹⁴.

Parmi les ouvrages consacrés à cette théorie avant la première guerre mondiale, citons ceux de Borel [1898] et Baire [1905], puis celui de Grace Chisholm Young et de son mari [1906], écrit avec la bénédiction de Cantor lui-même (voir la lettre qu'il a adressée à Grace Chisholm et que cite l'édition Chelsea de 1972 de ce livre) et celui de Schoenflies [1913]. Il existait aussi un livre de Sierpinski, en polonais, dont une partie a été traduite en français, mais seulement en 1928.

Ni la notion d'espace métrique ni *a fortiori* celle d'espace topologique n'apparaissent dans ces ouvrages qui sont, en effet, des livres de théorie des ensembles — les questions de puissance et de cardinaux y tiennent une place importante. Les notions d'ensemble dérivé (due à Cantor sous le nom d'*Ableitung*), d'ensemble parfait et de frontière y sont exposées.

Il semble qu'en France, le cours d'analyse de Jordan à l'École polytechnique (ou du moins sa deuxième édition [1893]) ait joué un rôle important dans la popularisation de cette discipline parmi les jeunes mathématiciens (ce livre a été utilisé par les générations de Lebesgue, Baire, Fatou... et au moins jusqu'aux années 1930). Elle était indispensable à la compréhension de la théorie de la mesure et à celle de l'intégrale de Lebesgue. C'est ce que dit un de nos protagonistes, Pierre Fatou, au tout début de sa thèse [1906c, p. 335] :

Le problème de la mesure des ensembles a été abordé pour la première fois par M. G. Cantor ; ses définitions ont été précisées par M. Jordan dans son cours d'analyse ; mais c'est M. E. Borel [...]

Dans ce livre de Jordan, on trouve le mot « écart », qu'utilisera encore Fréchet et qui deviendra, avec Hausdorff, notre « distance »¹⁵.

Les cours donnés par Borel aux normaliens à partir du printemps 1897 ont joué, eux aussi, un rôle non négligeable. Toujours à propos de Borel : il faut noter l'influence de sa *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* chez Gauthier-Villars sur la diffusion de ce qui va devenir la topologie générale.

Citons aussi ici l'article écrit par Zoretti [1912], sous l'influence de Borel (dont il avait rédigé le cours Peccot sur les fonctions méromorphes de 1901–1902), dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*¹⁶ — et dans lequel il

¹⁴ En 1965, Denjoy [1980] se plaindra que les étudiants formés par Bourbaki connaissent à peine les notions de puissance, d'ordre et de transfini.

¹⁵ Sur le cours d'analyse de Jordan, voir aussi [Gispert 1983].

¹⁶ Il est question ici de l'édition française, « rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk », de l'*Encyclopädie der Mathematischen*

présente notamment la théorie de la mesure de Borel et Lebesgue. Il est remarquable que l'édition originale allemande de cette encyclopédie ne comporte pas vraiment d'article sur ce sujet :

- il y a un article (de Schoenflies) sur la théorie des ensembles dans le tome I (arithmétique), dont la version française, parue en 1909, a été (très) adaptée par Baire, mais il est davantage consacré aux ordinaux et cardinaux qu'aux ensembles de points,

- il y a un article de Dehn et Heegaard sur l'*Analysis situs* dans le tome III (géométrie), dans lequel il est vraiment plus question de « géométrie de situation » que de topologie générale — il me semble que cet article n'a pas d'équivalent dans la version française.

Le chapitre supplémentaire contenant l'article de Zoretti est inséré entre les adaptations de celui de Pringsheim (sur les principes fondamentaux de la théorie des fonctions) et celui de Voss (sur le calcul différentiel). On trouvera des informations (partiales !) sur l'organisation du travail de rédaction de cette encyclopédie dans [Lebesgue 1991]. Baire avait été lui aussi sollicité par Molk. Dans une lettre à Borel [1990], il se plaint de devoir lire

certains topos de Hausdorff dont les Allemands font le plus grand cas.

Sauf erreur de ma part, Lebesgue n'a rien écrit pour cet ouvrage.

Le livre que l'on considère aujourd'hui comme le premier « vrai » livre de topologie sera d'ailleurs écrit par un mathématicien allemand, Felix Hausdorff [1914], justement (qui le dédiera à Georg Cantor, « créateur de la théorie des ensembles »). Le titre en est encore *Grundzüge der Mengenlehre* (fondements de la théorie des ensembles). Bien entendu et même s'il cite amplement Borel et même Baire, ce livre, paru en Allemagne en 1914, n'est pas utilisé en France dans les années qui nous intéressent : nous allons voir que la guerre va interrompre, et pour longtemps, les communications entre mathématiciens français et allemands¹⁷. Sur la réception et l'utilisation des travaux de Hausdorff, voir aussi le §IV.2.

Hausdorff mentionne aussi les mots « *Analysis situs* » (racine latine, comme dans le célèbre article de Poincaré et ses non moins célèbres suppléments ou comme dans le chapitre de Dehn et Heegaard mentionné ci-dessus)

Wissenschaften mit Einschuss ihrer Anwendungen, Herausgegeben im Auftrage (sous les auspices) des Akademien des Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, so wie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen (avec la collaboration de nombreux savants), engagée sous la direction de Felix Klein, conçue comme une œuvre de collaboration internationale... et dont l'édition française est la seule non-allemande qui soit parue, encore s'interrompt-elle définitivement en 1916, en raison de la guerre. Un exemple de coopération internationale brutalement et surtout durablement interrompue.

¹⁷ Remarquons aussi que la *Collection de monographies* de Borel n'accueille aucun auteur allemand.

et « topologie » (racine grecque¹⁸) sans qu'aucun des deux n'ait encore été, ni choisi, ni adopté. Le premier deviendra plus ou moins la « topologie algébrique », le second devra s'affubler du qualificatif « générale » avant de remplacer les ensembles de points¹⁹.

★

Comme cette parenthèse le montre, le début du XX^e siècle n'est pas une sorte d'appendice à un XIX^e siècle qui n'en finirait pas de finir. La période précédant immédiatement la première guerre mondiale est bien, en mathématiques aussi²⁰, le début d'une période moderne, que la guerre et ses suites vont ralentir.

I.2 Les protagonistes aux alentours de 1917–1918

Travaillent sur l'itération, entre 1915 et 1918, principalement (et par ordre alphabétique) Pierre Fatou (1878–1929), Gaston Julia (1893–1978) et Samuel Lattès (1873–1918), ainsi nous le verrons que le mathématicien américain Joseph Fels Ritt (1893–1951). Les travaux de Fatou et Julia vont faire grand usage de la notion de *famille normale*, due à Paul Montel (1876–1975). Quelques mots sur ces protagonistes à cette époque, toujours par ordre alphabétique.

Pierre Fatou

Né en 1878 à Lorient, il entre à l'ENS en 1898, en sort en 1901, devient astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris, passe sa thèse en 1907. De cette thèse, il « en a souvent parlé » avec Henri Lebesgue [Lebesgue 1991, p. 112] (il n'est donc pas étonnant qu'il ait laissé son nom à un lemme de la théorie de l'intégration). Il est promu astronome (titulaire) en 1928 et meurt l'année suivante. Voir le chapitre V pour des portraits et pour plus d'informations sur sa biographie et ses travaux.

¹⁸ Il semble que le mot « Topologie » ait été employé (ou en tout cas publié) pour la première fois dès 1847 par le mathématicien allemand Listing [1847]. Voir la reproduction de la couverture de ce livre dans [James 1999].

¹⁹ Si la terminologie « ensembles de points » a complètement disparu aujourd'hui en français, remarquons qu'en anglais *point set topology* persiste à être un synonyme de *general topology*.

²⁰ Il est fait allusion ici à la modernité, par exemple, d'un Picasso, d'un Schönberg ou d'un Apollinaire. C'est en pensant à ces mathématiciens modernistes du début du XX^e siècle que furent, par exemple, Borel, Baire, Lebesgue et Fatou, qu'est cité en ouverture de ce livre cet autre blessé à la tête de la guerre de 1914–18, « trépané sous le chloroforme », qui était, lui, un moderniste.

Gaston Julia

Né en 1893 à Sidi Bel Abbès, en Algérie, il entre (premier) à l'ENS en 1911 (il est aussi premier à l'École polytechnique) après une seule année de préparation au lycée Janson de Sully, et passe l'agrégation en 1914. Il est grièvement blessé au visage (nez enlevé, mâchoire fracassée) au Chemin des Dames²¹ en 1915, doit subir de nombreuses opérations (c'est une « gueule cassée », il portera toute sa vie un masque de cuir²²). Il passe sa thèse en 1917 (sur un tout autre sujet, la théorie des formes, voir page 58²³), est récompensé par le prix Bordin de l'Académie des sciences et se met à travailler sur le sujet du prix dont il est question ici. Voir le chapitre VI pour la suite.

Samuel Lattès

Né en 1873 à Nice, il entre à l'ENS en 1892 après une seule année de préparation à Marseille, passe l'agrégation en 1895, soutient sa thèse en 1906, est professeur à l'Université de Toulouse depuis 1911, meurt d'une fièvre typhoïde pendant l'été 1918. Sur ses travaux et sa vie, voir la note 51 de ce chapitre, ainsi que le chapitre II (où l'on trouvera une photographie de Samuel Lattès), notamment sa note 52 et les références qui y sont données.

Paul Montel

Né en 1876, à Nice lui aussi, il entre à l'ENS en 1894, passe l'agrégation en 1897, il aime les voyages et l'enseignement²⁴, ne se dépêche pas de faire une thèse, mais finit par s'y mettre²⁵ et la passe en 1907, enseigne dans des lycées puis, à partir de 1911, à l'Université de Paris. Il a obtenu en 1913 le prix Gustave Roux de l'Académie des sciences. Il mourra presque centenaire, mais nous en reparlerons (au chapitre VI). On trouvera des indications biographiques plus précises dans les articles [Cassin 1966 ; Beer 1966].

On l'aura remarqué, les protagonistes de cette histoire, le fils de mécanicien de l'Oranais (Julia), les fils de photographe ou de commerçant niçois (Montel

²¹ Il y a eu plusieurs batailles au Chemin des Dames (non loin de Soissons), la plus meurtrière et la plus célèbre étant celle d'avril 1917.

²² On trouvera une photographie (plus tardive) de Julia page 192.

²³ Le premier article de Julia [1913] s'intitule « Sur les lignes singulières de certaines fonctions analytiques ». Il est publié dans le volume 41 du *Bulletin* de la SMF... dans lequel paraissent aussi deux articles de Fatou [1913a ; 1913d] dont l'un a pour titre « Sur les lignes singulières des fonctions analytiques ». Une similitude de titres, troublante au vu de la suite, mais qui dissimule de profondes différences : Julia a vingt ans et produit un travail classique d'analyse complexe, Fatou, lui, continue à utiliser l'intégrale de Lebesgue.

²⁴ Il est, en 1898, le professeur, en mathématiques spéciales à Poitiers, du futur homme politique Raoul Dautry, avec qui il restera lié toute sa vie.

²⁵ À l'instigation de son ancien condisciple de l'ENS, l'historien Albert Mathiez.

et Lattès), comme le fils de marin breton (Fatou), ont reçu la même formation scientifique, par les classes préparatoires et l'École normale supérieure. On peut penser qu'ils s'appuient sur de mêmes connaissances, un corpus commun — notons toutefois que ni Lattès ni Montel n'ont bénéficié des cours de Borel à l'École normale supérieure.

Parenthèse (Rapports sur les thèses). Les rapports sur les thèses de nos protagonistes, sauf sur celle de Julia, qui est trop tardive (et dont nous reparlerons au chapitre suivant), se trouvent dans [Gispert 1991] : ceux de Painlevé sur Fatou p. 397 et sur Montel p. 399, celui d'Hadamard sur la thèse de Lattès intitulée « Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation » p. 396.

I.3 La guerre

La première guerre mondiale a déjà fait son apparition dans ce texte, dans la simple évocation des références sur la topologie générale ci-dessus. Et en effet, cette histoire a lieu pendant les deux dernières années d'une guerre qui a été une véritable tuerie : on sait qu'elle a fait huit millions de morts et six millions d'invalides, dont 1 400 000 victimes françaises, soit environ 10% de la population active masculine, et presque autant d'invalides, parmi lesquels de nombreuses « gueules cassées ».

La France a envoyé ses élites en première ligne. Les élèves des grandes écoles françaises sont le plus souvent partis dans l'infanterie, en général comme sous-lieutenants, un grade qui les plaçait en tête de leurs hommes et les exposait donc particulièrement. Gaston Julia et René Gateaux (dont il va être question plus bas) étaient tous deux sous-lieutenants d'infanterie, le premier au 34^e et le second au 69^e régiment. C'est un effet de la loi de 1905, dite « loi des deux ans²⁶ ». Cette politique « égalitaire » française a eu des effets profondément inégalitaires. Si les soldats français mobilisés ont été tués dans la proportion effrayante de 16,8%, cette proportion est de 30% pour les officiers d'infanterie et de 41% pour les élèves de l'ENS (chiffres cités dans [Audoin-Rouzeau 1992 ; Becker 1992]). On a aussi pu estimer que 40% des étudiants inscrits dans les universités françaises en 1914 avaient été tués ou mutilés (cité dans [Beaulieu 1989, p. 41]²⁷).

Les autres pays en guerre ont eu des politiques différentes. Ce qui ne veut pas dire que les jeunes intellectuels allemands n'ont pas été mobilisés ni qu'ils ne se sont pas engagés. Par exemple, Richard Courant a été blessé dans les

²⁶ La loi des deux ans a été remplacée en juillet 1913, malgré une violente opposition des socialistes, par une « loi des trois ans », qui annonçait la guerre à venir et qui modifiait la durée du service militaire et l'âge d'incorporation (20 ans au lieu de 21) mais pas le statut des élèves des grandes écoles.

²⁷ Il n'y a malheureusement pas de source citée pour ce chiffre dans [Beaulieu 1989].

tranchées [Reid 1976]²⁸, Max Dehn s'est engagé et a fait la guerre de 1915 à 1918, Heinz Hopf s'est engagé lui aussi, a fait la guerre comme lieutenant sur le front ouest et a été blessé deux fois, Emil Artin a été incorporé dans l'armée autrichienne²⁹ (voir aussi les exemples de Siegel et de Hasse ici page 116), le narrateur d'*À l'ouest rien de nouveau* [Remarque 1928] est un étudiant ou un lycéen lui aussi. Mentionnons encore, brièvement, le cas britannique. L'armée engagée par le Royaume-Uni dans la guerre est, d'abord, une armée de métier. Elle fait ensuite appel à des volontaires, enfin la première vague de conscription commence après le *Military Service Act* de janvier 1916, incorporant les hommes célibataires de 18 à 41 ans, ce qui est bien sûr, une situation très différente de celle de l'armée française. D'autre part, il est fait état, pendant toute la durée de la guerre, notamment à Cambridge, de pacifistes (souvent à cause du souvenir de la guerre des Boers), d'objecteurs de conscience (souvent pour des raisons religieuses), puis d'associations opposées à la conscription (Hardy a été secrétaire d'une de ces associations, *The Union of Democratic Control*) — des phénomènes qui n'ont pas d'analogue en France après le déclenchement de la guerre. Si cette guerre a massacré 800 000 soldats britanniques (parmi lesquels, puisqu'ils ont été mentionnés ici, le fils aîné de Grace Chisholm et William Young) et fait deux millions de blessés (parmi lesquels le mathématicien Ralph Fowler, blessé à Gallipoli), il n'est pas fait état d'une hécatombe des élites telle que celle qui a touché les étudiants français. Voir [Barrow-Green 2008].

Mais revenons aux mathématiciens français. Paul Lévy et Émile Borel ont servi dans l'artillerie, Maurice Fréchet, né en 1878, a été mobilisé avec le grade de sergent et a servi comme interprète auprès des troupes britanniques (mais au front tout de même), André Bloch³⁰ a été blessé, Robert Deltheil a été blessé deux fois, René Thiry a été blessé deux fois et a été fait prisonnier, Louis Antoine, sous-lieutenant³¹ au 151^e, a été blessé trois fois et est devenu aveugle, Louis Sartre, un autre normalien de la promotion 1911, a été fait

²⁸ Voir dans ce même ouvrage, pages 47–49, des informations et des commentaires sur la mobilisation à Göttingen au début de la guerre.

²⁹ Max Dehn a été récompensé par l'*Ehrenkreuz*, une décoration, ce qui ne l'a pas empêché de devoir quitter son poste à Francfort en 1935, puis l'Allemagne. Voir [Burde et al. 2002 ; Siegel 1978]. Quant à Artin, qui avait été incorporé encore adolescent, c'est Hambourg qu'il devra quitter en 1937. Voir [Brauer 1967]. Sur Heinz Hopf, voir [Frei & Stambach 1999]. Lui a été professeur à Zürich dès 1931.

³⁰ André Bloch et Paul Lévy sont les seuls polytechniciens de cette liste de jeunes mathématiciens soldats, dont tous les autres membres sont normaliens. André Bloch est né en 1893 comme Julia et a été reçu au concours d'entrée à l'x en 1912. Pour en savoir plus sur ce mathématicien peu ordinaire et d'ailleurs spécialiste lui aussi des théorèmes de Picard dont il est question ici ou là dans ce texte, voir [Cartan & Ferrand 1988].

³¹ Les grades et numéros de régiments qui apparaissent ici viennent de l'Annuaire des anciens élèves de l'École normale supérieure.



© M.A.

Le monument aux morts, inauguré le 9 décembre 1923,
à l'École normale supérieure

prisonnier, Paul Flamant, sous-lieutenant au 77^e, a été blessé à Charleroi et fait prisonnier, André Marchaud, de la promotion 1909, sous-lieutenant au 344^e, a été fait prisonnier dès le 20 août 1914, Henri Mineur, reçu à dix-huit ans au concours de l'ENS de 1917, est parti à l'armée.

Beaucoup de jeunes scientifiques sont morts. D'après [Guiraldenq 1999], sur 265 élèves reçus aux concours d'entrée à l'ENS de 1910 à 1913, 109 ont été tués (c'est la proportion de 41% indiquée ci-dessus)³². De la plupart, on a oublié les noms — ils figurent pourtant en lettres dorées gravées dans le marbre

³² Je ne connais pas la proportion des élèves de l'École polytechnique tués. Dans son livre [1970], Paul Lévy dit que son choix de l'École polytechnique (de préférence à l'ENS) lui a peut-être sauvé la vie.

du monument aux morts à l'École normale supérieure ainsi que sur les pages jaunies des volumes de l'annuaire des anciens élèves. On pense par exemple au brillant jeune mathématicien René Gateaux, tué dès le 3 octobre 1914, à l'âge de vingt-cinq ans, alors qu'il n'avait pas tout à fait terminé sa thèse³³, à Joseph Marty, spécialiste des équations de Fredholm, mort pour la France en 1914³⁴, à Roger Vidil, normalien de la promotion de 1911 comme Julia, qui avait rédigé ses notes du cours Peccot de Châtelet [1913], tué près d'Arras le 27 novembre 1914 et porté disparu jusqu'à ce que son corps soit identifié en 1917, à Paul Lambert, un algébriste, le deuxième de la même promotion à dix-sept ans, auteur d'un article sur les entiers de Gauss, caporal au 60^e, tué à l'ennemi en 1915, à Jean Piglowski, qui était toujours de bonne humeur et avait écrit un petit article sur le mouvement des projectiles en 1911, tué à Lesseux dans les Vosges le 18 février 1915, à Louis Néollier, sous-lieutenant au 258^e tué en 1914, et dont Lebesgue raconte l'oral d'agrégation catastrophique [1991, p. 308] (en 1913)³⁵, et qui était encore porté disparu³⁶ après l'armistice de 1918, ou à Roger Félix, premier de la promotion 1916 à dix-sept ans, qui a devancé l'appel pour partir avec ses camarades et est « mort pour la France » peu de temps avant l'armistice³⁷.

Le destin de ces jeunes gens est raconté à l'Académie des sciences, fin 1915, ainsi :

Ils étaient, pour ainsi dire, pacifistes par destination, parce que les œuvres scientifiques sont avant tout des œuvres de calme et de sérénité ; ils l'étaient

³³ Sur la vie, la mort et la destinée de René Gateaux, voir le passionnant article de Laurent Mazliak [2007]. L'Académie des sciences a décerné le Prix Francœur à Gateaux en 1916, à titre posthume.

M. Gateaux, naguère élève de l'École normale, puis disciple de notre Illustre correspondant M. le Sénateur Volterra, qui en avait reconnu la haute valeur, est aussi mort pour la France, trompant ainsi les légitimes espérances que suscitaient ses premiers travaux

déclarera Jordan [1916] lors de la séance publique au cours de laquelle seront proclamés les prix. Deux de ses articles posthume [1919a ; 1919b] seront publiés par Hadamard et Paul Lévy, dans le même volume qu'un article [Fatou 1919b] dont nous aurons à reparler.

³⁴ Voir aussi la note 62 du chapitre VI.

³⁵ Les algébristes Lambert et Vidil sont mentionnés dans [Dubreil 1982]. Julia évoque Lambert dans une allocution [1970, p. 169] prononcée en 1950. Lambert, Piglowski et Néollier apparaissent, bien vivants, dans [Lebesgue 1991]. L'article [Piglowski 1911] de Piglowski est référencé dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. J'ai trouvé mention de l'article [Lambert 1912] dans la notice [Julia 1919a] que Gaston Julia a consacrée à son ami Paul Lambert.

³⁶ Cette guerre a aussi provoqué de nombreuses disparitions. La fiche de Louis Néollier dans la base de données « mémoire des hommes » du ministère de la Défense indique qu'il est « mort pour la France du 20 au 26 septembre 1914 » — son corps n'a pas été retrouvé et c'est un jugement du 21 mai 1920 qui l'a déclaré mort.

³⁷ Sur Roger Félix, voir les souvenirs de sa sœur dans [Félix 2005].

aussi, par raison, parce qu'une intelligence séduite par les enchantements de la Science, ravie par ses merveilles, se refuse à comprendre que des hommes emploient toutes les ressources de leur esprit à rassembler les plus sûrs moyens de s'entre-tuer. Volontiers, ils se rangeaient parmi les disciples de cette école naïve qui prétendait « déclarer la paix au monde ».

Mais voilà que résonne l'appel aux armes. La Patrie est attaquée et tous ces pacifistes sont debout : pas un ne manquera à l'appel. Adieu ! le tranquille travail du laboratoire ; ils ne sont plus que des soldats désormais ; ils ne songent même pas — et il fut peut-être dommage qu'on n'y ait pas songé pour eux — à se réclamer de leur savoir pour obtenir des postes spéciaux ; ils croiraient déchoir s'ils n'étaient pas appelés à manier la pelle ou le fusil, tout comme les camarades qui viennent de déposer la lime ou de quitter la charrue³⁸. Tous sont frères ; tous vont marcher la main dans la main, sous l'uniforme bleu horizon, l'uniforme d'égalité qui les confond avec le ciel ! Seulement, quand arrivera l'heure de l'assaut, ils se souviendront que les plus instruits doivent l'exemple ; ils seront les premiers à sauter sur les glacis, les premiers à courir aux fils barbelés, les premiers à mourir. [Perrier 1915, p. 803]

Il faut noter que la rhétorique qui va accompagner l'évocation de la blessure de Julia tout au long des discours de lui-même ou d'autres recueillis dans [Julia 1970] est très proche de celle que nous venons d'admirer. Plus politique, Painlevé déclarera, lors de son allocution de la victoire [1918c, p. 799] :

Ah ! Messieurs, l'effroyable holocauste qu'a exigé, avant d'être anéanti, le Moloch monstrueux dressé par l'ambition pangermaniste ! Si stoïques que nous voulions être, notre cœur se serre quand nous songeons à nos laboratoires déserts, à nos chaires où des voix éloquentes et graves ne se feront plus entendre, à tant de cerveaux jeunes et puissants dont un éclat de fer stupide a interrompu pour jamais la pensée féconde. Nos grandes Écoles, pépinières de nos ingénieurs et de nos savants, — École polytechnique, École

³⁸ Écoutons un autre point de vue, celui de Camille Marbo [1968, p. 165 et 172], sur son fils adoptif Fernand Lebeau, normalien, socialiste et opposé à la guerre :

En tant qu'agréé physicien promis à un brillant avenir, il avait été affecté à une section de repérage par le son [...] Sans en parler à personne, il avait fait des démarches pour obtenir un poste de lieutenant d'infanterie, comme la presque totalité de ses camarades. À sa dernière permission, il m'avait dit :

« Nous, socialistes, désireux de travailler pour l'entente des peuples et la paix, nous avons décidé de nous faire envoyer en première ligne afin de prouver que nous sommes aussi courageux que n'importe qui. Ceux qui survivront auront le droit de parler haut devant les embusqués. » [...]

« Ne l'oublie pas, m'avait dit Fernand ».

Je ne l'ai pas oublié.

On le sait, de nombreux pacifistes et socialistes se sont engagés, comme Henri Barbusse qui a évoqué son expérience dans *le Feu* [Barbusse 1916], prix Goncourt en 1916.

centrale, École normale supérieure, pour ne citer que celles-là, — quels vides présenteront leurs auditoires³⁹ quand ils se réuniront pour la première fois !

On l'a compris, une génération d'intellectuels, de scientifiques et, pour ce qui nous concerne, de mathématiciens, a été sacrifiée et décimée. D'après [Gispert 1991, p. 60], la dernière thèse de mathématiques soutenue à Paris en 1914 l'a été en juin (celle de Georges Valiron, le 20 juin), Joseph Pérès a soutenu la sienne en 1915 et c'était la seule cette année-là, il n'y en a plus eu jusqu'à celle de Julia, dont il sera longuement question ici (voir page 58), en décembre 1917. D'après la même source, il n'y en aurait plus eu ensuite qu'une en 1919 et une en 1920. Il y a visiblement au moins une omission dans ce décompte : Pierre Humbert (le fils de Georges Humbert) a soutenu la sienne le 18 juin 1918 (à Paris)⁴⁰, il faut noter qu'il avait été blessé à la guerre et, comme Julia, avait repris ses recherches après sa blessure.

Les pères enterrent les fils. Julia et les mathématiciens

C'est une des raisons pour lesquelles Gaston Julia, brillant jeune normalien grièvement et atrocement blessé le 25 janvier 1915, est l'enfant chéri des mathématiciens de la génération précédente.

Il apparaît comme une sorte de fils de substitution pour beaucoup d'entre eux, qui ont perdu les leurs. Hadamard, par exemple, a perdu deux de ses fils⁴¹, Jordan trois fils et un petit-fils.

Plus près de Julia, citons Émile Borel, le directeur scientifique de l'ENS, qui a perdu son neveu et fils adoptif normalien, Fernand Lebeau, dans la tourmente le 29 septembre 1915 (il a été question de Fernand Lebeau dans la note 38, voir le livre de souvenirs [Marbo 1968]), Émile Picard, dont le fils aîné a été tué⁴² à Crouy en janvier 1915 (juste avant la blessure de Julia),

³⁹ Citons encore Camille Marbo [1968, p. 171] :

Revenu prendre son poste de directeur scientifique [à l'ENS], Émile Borel trouva l'École peuplée d'ombres.

⁴⁰ Renseignement fourni par Juliette Leloup.

⁴¹ Alors que leur mère, Louise Hadamard, est infirmière, Pierre Hadamard, élève de l'École polytechnique, est tué en février 1916 à Verdun à l'âge de 22 ans, et Étienne Hadamard, reçu à l'École centrale, est tué en juin 1916, lui aussi à Verdun, à l'âge de 19 ans. Ajoutons que le troisième fils de Jacques et Louise Hadamard, Mathieu, membre des FFL, sera tué en 1944. Voir [Maz'ya & Shaposhnikova 2005].

⁴² L'aîné des fils de Picard, Charles (1884–1915), a été tué à Crouy, près de Soissons, le 8 janvier 1915 ; sa plus jeune fille Madeleine (1892–1915) a été tuée pendant la guerre elle aussi, elle était infirmière. Picard perdra encore quelques années plus tard son dernier fils Henry (1886–1926) tué par la tuberculose. Lui survivront deux filles, Jeanne et Suzanne (dossier biographique de Picard, archives de l'Académie des sciences). Jeanne et Charles Picard (nés en 1882 et 1884) étaient des amis d'enfance (et des petits-cousins) de Marguerite Borel (née en 1883), voir son livre [Marbo 1968].

Georges Humbert, dont le fils a été blessé. Tous se relaient à son chevet au Val-de-Grâce.

L'ambiance dans laquelle se déroule le travail de Julia est très bien évoquée par le rapport que prononcera Picard à l'issue de sa soutenance de thèse (voir ici page 60) : à travers Julia, toute la génération⁴³ sacrifiée va pouvoir être glorifiée⁴⁴.

Le tome 6 des Œuvres complètes de Julia [1970], qui regroupe ses discours et textes non mathématiques, fourmille d'indications du fait que Picard était, pour Julia, une figure paternelle. Le très catholique Gaston Julia adore comparer Picard à Saint-Christophe (voir par exemple [Julia 1970, p. 50 et 262]). Il existe dans les archives de l'Académie des sciences une lettre que Julia a envoyée à Picard en février 1936 pour lui rendre compte de l'état de l'Union mathématique internationale (UMI) (Julia était membre de la Commission qui devait préparer la refondation de l'UMI au congrès d'Oslo⁴⁵), lettre dont la plus grande partie est consacrée à une description des douleurs et problèmes de santé de Julia. La façon dont Julia, qui est alors un homme de quarante-trois ans, se plaint montre bien le type de relations qu'il avait avec son correspondant. C'est aussi Julia qui est intervenu « au nom des élèves de M. Émile Picard », lors de la cérémonie de remise de la médaille de l'Institut Mittag-Leffler à Picard le 6 juillet 1937 (voir [Julia 1970, p. 39]). Il est probable que, inversement, Julia a été une sorte de fils pour Picard.

De même pour ses rapports avec Borel. Tous les jeunes normaliens (et en particulier Julia, qui rédigeait son cours) étaient, dès avant la guerre, des « enfants » du sous-directeur Borel⁴⁶. Les lettres de Julia à Borel⁴⁷ montrent que celui-ci lui a envoyé de l'argent, en 1914, pour l'aider à s'équiper avant

⁴³ Pour une discussion plus précise de la notion de génération (et de la génération dont il est question ici), voir [Sirinelli 1992].

⁴⁴ Julia joue bien ce rôle de représentant. Le souvenir que Paul Dubreil [1950, p. 149], normalien de la promotion de 1923, garde de l'inauguration du monument aux morts (représenté page 24) le montre :

Peu après la rentrée, l'École, cette année-là, reçut la Croix de Guerre, au cours d'une cérémonie où fut exalté le sacrifice de ses Fils, morts et vivants. Quand Dupuy eut fini de lire la longue liste de ceux qui étaient tombés, nous vous [Dubreil s'adresse à Julia] vîmes vous avancer pour recevoir la Croix de l'École et la porter au Monument aux Morts. Dans ceux de mes souvenirs qui se rapportent à la guerre 1914–1918, celui-ci est l'un des plus profonds ; il me laisse encore une impression saisissante de gravité et de grandeur.

⁴⁵ Sur l'UMI, voir aussi page 191.

⁴⁶ Pour l'ambiance « familiale » qui régnait à l'ENS, invitation des élèves chez le directeur scientifique, etc., voir encore [Marbo 1968].

⁴⁷ Fonds Borel, archives de l'Académie des sciences.

son départ pour le front. Borel est resté assez longtemps, lui aussi, une sorte de père pour Julia⁴⁸.

Effort de guerre

Montel, qui avait achevé son service militaire en 1898 avec le grade de caporal [Cassin 1966] a été mobilisé, malgré ses « problèmes d'yeux » :

Montel m'écrit que ses yeux recommencent à l'inquiéter

écrit Lebesgue [1991, p. 144] le 23 mars 1906, et encore, le 7 octobre 1910,

L'état des yeux de Montel ne s'est pas amélioré au contraire [Lebesgue 1991, p. 268].

Après quelques mois, il a été appelé par Painlevé à la Direction des Inventions et a contribué à l'effort de guerre aux côtés de Lebesgue (voir ci-dessous).

D'autres mathématiciens n'ont pas été mobilisés, Baire par exemple, à cause d'une santé psychique très défaillante⁴⁹, Denjoy déclaré inapte à la vie militaire à cause de sa très mauvaise vue, ne l'a été que dans le service auxiliaire [Cartan 1974] et a travaillé sur les problèmes mathématiques de la balistique (voir ci-dessous)⁵⁰. Les deux autres protagonistes de l'histoire de l'itération, Fatou et Lattès, n'ont pas fait la guerre.

Pierre Fatou était de constitution et de santé très fragile (voir ici le chapitre V et les références qu'il contient), ce qui explique qu'il n'ait pas été mobilisé.

Samuel Lattès avait lui aussi des problèmes de santé. Nous disposons ici encore du témoignage de Lebesgue. En 1910, il écrit à propos des mouvements de postes :

La santé de Lattès est telle qu'il n'acceptera peut-être pas d'aller à Clermont, mais on devrait le lui offrir [Lebesgue 1991, p. 251]⁵¹,

et, quelques jours plus tard :

⁴⁸ Ces mathématiciens constituent une sorte de « génération parentale », même s'il n'est pas tout à fait correct, quant à leur influence, de placer Borel et Hadamard dans la même génération que Picard et Jordan. En effet, Borel, directeur scientifique de l'ENS et sa *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, Hadamard, créant son séminaire mythique au Collège de France en 1913, auront une influence scientifique plus directe que Picard et Jordan.

⁴⁹ Réformé après quelques semaines de service militaire fin 1897, il est définitivement exempté le 1^{er} décembre 1914 (voir [Dugac 1990]).

⁵⁰ D'après [Choquet 1975], il a été envoyé en mission à Utrecht en 1917 et torpillé deux fois en s'y rendant.

⁵¹ Lattès a été professeur de lycée à Alger, puis à Dijon, de mathématiques spéciales à Nice, puis à Aix après un congé de maladie. Il a été ensuite, après sa thèse en 1906, nommé à Montpellier en 1908, chargé de cours à la faculté des sciences de Besançon en 1911 et enfin quelques mois plus tard professeur à Toulouse.

Lattès est neurasthénique⁵², soit, mais pas dans ses travaux [Lebesgue 1991, p. 256].

Il semble qu'il ait passé la durée de la guerre à Toulouse. Son éventuelle contribution à l'effort de guerre ne nous est pas connue.

★

Ce n'est pas ici le lieu d'étudier en détail et de manière systématique comment les scientifiques ont participé à l'effort de guerre. Cette question dépasse le cadre de la présente étude et mérite d'être laissée aux « vrais » historiens — qui s'en sont d'ailleurs saisis : voir la très intéressante étude [Aubin & Bret 2003] et, plus spécifiquement sur les mathématiques et les mathématiciens, les travaux du projet « histoire des mathématiques » de l'Institut mathématique de Jussieu, à paraître dans [Goldstein & Mazliak 2009].

Mentionnons quand même rapidement (en nous limitant à des sources publiées facilement accessibles⁵³ et concernant, pour la plupart, des mathématiciens dont il est question ailleurs dans ce texte) que certains scientifiques, et en particulier des mathématiciens, ont participé à l'effort de guerre sans faire la guerre elle-même. On sait que la France mobilise à partir du 2 août 1914. Dès le 3 août, le président de l'Académie des sciences (qui, en 1914, est Paul Appell) « s'exprime en ces termes » :

Mes chers Confrères,

Dans la situation grave où se trouve la Patrie, je suis assuré d'être l'interprète de tous les Membres de l'Académie non mobilisés dans un service public, en déclarant en leur nom qu'ils se tiennent à la disposition du Gouvernement, pour aider à la défense nationale, chacun selon sa spécialité.

Et notre chroniqueur Perrier, président l'année suivante, de confirmer, dans son inépuisable discours [1915, p. 809] :

Dès le 3 août 1914, ses membres [de l'Académie des sciences] se répartissent en quatre grandes Commissions correspondant à leurs compétences particulières, relativement aux divers aspects de la guerre. Une Commission de Mécanique s'apprête à étudier les perfectionnements qui peuvent être apportés à l'Aviation, à la traction électrique ou à vapeur, à la destruction des

⁵² Dans une lettre à Borel, le 11 mars 1902, Baire qualifie Lattès de « confrère en neurasthénie » [Baire 1990, p. 51].

⁵³ Feuilletter les *Comptes rendus* est assez significatif. En 1915, on trouve par exemple les titres de notes suivants :

Nouveaux traitements des blessures des nerfs par les projectiles, Sur la ration du soldat en temps de guerre, Sur les blessures des organes génitaux externes, Alimentation des armées en campagne, Méthode radioscopique pour localiser les projectiles, Sur un appareil d'induction pour la recherche des projectiles...

Pendant la seule année 1916, le seul Ernest Esclançon publie trois notes portant les titres :

Sur les trajectoires aériennes des projectiles, Sur les coups de canon et les zones de silence, Sur le principe de Doppler et le sifflement des projectiles.

fils barbelés ou même à l'Artillerie. Nombreux et particulièrement délicats sont les problèmes qui doivent occuper la Commission de Physique. Celle de Chimie se dispose à connaître de tout ce qui concerne les explosifs et ces gaz lacrymogènes, asphyxiants ou meurtriers par l'emploi desquels les Allemands ont trouvé moyen d'avilir encore la barbarie de leur guerre ; elle songe à organiser, non sans un haut-le-cœur, les moyens de rendre à des ennemis déshonorés, mais qu'il fallait cependant contenir par leurs propres moyens, gaz pour gaz⁵⁴, asphyxie pour asphyxie, comme le réclament instamment nos soldats menacés et les neutres eux-mêmes [... la quatrième Commission est celle d'hygiène, de santé et d'alimentation].

Nous verrons (au §II.2) Painlevé évoquer cette participation de l'Académie des sciences, début 1918, dans un style plus sobre. Dans ce qui a déjà été appelé ici son « allocution de la victoire » [1918c, p. 808], il dresse une liste et évoque la « mobilisation de la science » :

Tous les problèmes que posent la guerre sur terre, sur mer ou dans les airs, la guerre de mines, la guerre sous-marine, tous les moyens d'attaque et de défense dans la guerre de tranchées, etc., ont été étudiés, fouillés, approfondis par une multitude de chercheurs, savants, ingénieurs, artisans, ouvriers. Applications et perfectionnements de la T.S.F. ; communications à distance par le sol ; repérage par le son des batteries ou des sapes ennemies ; repérage ou guidage par les ondes hertziennes des dirigeables ou des avions ; repérage des positions ennemies par photographies aériennes ; explosifs nouveaux ; projectiles fumigènes ; gaz toxiques (moyens d'attaque ou de protection) ; moteurs d'avions ; mortiers de tranchées ; canons d'infanterie ; canons d'avions ; enfin tanks⁵⁵, autant de sujets (et combien j'en oublie !) qui ont sollicité les intelligences les plus diverses et mis à contribution toutes les sciences : chimie, mécanique, thermodynamique, optique, acoustique, électricité, météorologie, jusqu'à l'étude de phénomènes nouveaux dont l'intérêt apparaîtra dans l'avenir. Les mathématiques les plus abstraites ou les plus subtiles ont participé à la solution des problèmes de repérage et au calcul des tables de tir toutes nouvelles qui ont accru de 25 pour 100 l'efficacité de l'artillerie.

Venons-en donc aux mathématiciens⁵⁶. Voici par exemple ce que dit Montel [1941] dans la nécrologie de Lebesgue⁵⁷ en 1941 :

⁵⁴ Il y aura, à l'ENS, un laboratoire de chimie qui fabriquera des gaz de combat [Lebesgue 1991, note 996].

⁵⁵ La fabrication de chars d'assaut, décidée en juin 1917, a joué un rôle décisif dans la dernière phase de la guerre. Jules Breton, qui sera élu académicien libre en 1920, avait contribué, à la Direction des inventions, à la mise au point de cet engin. Voir à ce sujet le discours [Perrier 1940] du président de l'Académie des sciences, un autre Perrier, pendant une autre guerre.

⁵⁶ Voir [Barrow-Green 2008] pour l'importante contribution des mathématiciens britanniques à l'effort de guerre.

⁵⁷ D'autres mathématiciens ont contribué de façon différente, par exemple, le sergent Élie Cartan a dirigé l'« Hôpital auxiliaire 103 », installé dans les locaux de l'École normale supérieure (voir par exemple [Julia 1970, p. 59]). Peut-être Montel est-il mort trop tard pour que sa propre nécrologie [Mandelbrojt 1975] se soit encore inquiétée de nous raconter de si vieilles histoires à son sujet.

Pendant la guerre de 1914–1918, il préside la Commission de Mathématiques du Service des Inventions, Études et Expériences scientifiques que dirige notre confrère M. Maurain⁵⁸ dans cette Direction des Inventions que Painlevé avait créée. Avec une énergie inlassable, il travaille à la résolution des problèmes soulevés par la détermination et la correction des trajectoires des projectiles ; le repérage par le son etc. Aidé par une nombreuse équipe de travailleurs bénévoles, il prépare un recueil de trajectoires, à triple entrée, qui doit servir par interpolation à l'établissement rapide des tables de tir⁵⁹.

La Commission en question a été créée par Painlevé, qui était alors ministre de l'Instruction publique et Ministre des Inventions intéressant la Défense nationale, en novembre 1915. Celui-ci a d'ailleurs rappelé Émile Borel (sous-lieutenant d'artillerie, au combat malgré ses quarante-quatre ans) pour qu'il s'en occupe, avec Maurain et Lebesgue. Montel ne le dit pas, mais il y était, avec Lebesgue⁶⁰ :

En dehors de l'examen des inventions, ils eurent à établir les tables de tir des canons ennemis pour le service de repérage par le son de leur emplacement. À l'aide des éléments fournis par le service d'espionnage, il fallait reconstituer la trajectoire du projectile morceau par morceau. Ils durent aussi modifier certaines de leurs tables de tir et s'intéresser à la première et monstrueuse ébauche qui devait les conduire au tank [Beer 1966, p. 67].

Hadamard y a travaillé aussi [Maz'ya & Shaposhnikova 2005, p. 100]. On trouvera dans [Guiraldenq 1999] la reproduction d'une coupure de presse rapportant la nomination de Borel⁶¹ et, dans les dernières lettres de [Lebesgue 1991], des informations sur le travail qui se faisait là sous sa direction. Jules Drach et Ernest Vessiot ont appliqué leurs recherches à des problèmes de balistique, les travaux de Drach ont été communiqués à Denjoy, pour qu'il les étudie du point de vue pratique, lorsqu'il séjournait au polygone de Grâves⁶² (voir [Drach 1920, note 1]). Henri Villat, soldat de deuxième classe, a calculé, au centre de tir de Bourg d'Oisans, les tables de tir contre les aéronaves [Leray 1973]. On lira le rapport écrit par Hadamard sur les travaux de la Commission de balistique dans [Hadamard 1920].

La nécrologie de Gabriel Koenigs [de Launay 1931], un des acteurs principaux de la préhistoire du problème de l'itération, fait aussi état de son laboratoire de mécanique (spécialement consacré à la thermodynamique des

⁵⁸ Charles Maurain, mobilisé en 1914, a été affecté en 1915 à une station de repérage par le son (lui aussi) puis à la Direction des inventions (voir [Coulomb 1968]).

⁵⁹ D'après [Félix 1974], Lebesgue corrigea des erreurs grossières (et dangereuses) dont l'une prévoyait que le projectile pouvait tomber derrière le tireur.

⁶⁰ D'après une lettre citée dans [Taylor 1985, p. 289], René Garnier, alors à Poitiers, venait à Paris faire lui aussi des calculs « à la Section de l'Artillerie ».

⁶¹ Lorsque Painlevé quitte le gouvernement en 1917, Borel a quarante-six ans et repart dans l'armée active. Sur les activités de Borel, voir aussi la notice nécrologique que lui a consacrée Paul Montel [1956].

⁶² Sur les travaux et études sur la balistique réalisés au fort de Grâves, voir [Aubin 2008].

moteurs), inauguré en 1914 et qui rendit de grands services à la Défense nationale.

Quant à Paul Appell, il est le créateur du Secours National (voir [Buhl 1931b]).

À l'Observatoire

En pensant à Pierre Fatou qui y travaillait, venons-en à l'Observatoire. L'Observatoire de Paris en tant qu'institution n'a pas contribué à cet effort⁶³ de guerre, mais il est connu que des astronomes de l'Observatoire ont été mis à contribution. Les personnels mettent leur savoir au service de l'armée... mais pas sur leur temps de travail, comme le souligne le rapport annuel de l'Observatoire pour 1915. Par exemple, Charles Nordmann, qui s'est engagé, et qui, comme sous-lieutenant du génie, a mis au point les premiers appareils de repérage par le son⁶⁴ en octobre 1914 — et a effectivement repéré une batterie ennemie le 8 décembre 1914 [Lebesgue 1991, note 978]. Il n'y a pas d'indication précise que Fatou ait participé à ces expériences, mais il est probable qu'il l'a fait, puisqu'il était au courant et en a parlé à Lebesgue avant le 15 janvier 1915 [Lebesgue 1991, p. 317].

Les rapports annuels de l'Observatoire⁶⁵ sont extrêmement discrets sur ces questions. Par exemple, même cette activité de Nordmann n'y est pas mentionnée. Le rapport pour 1916 signale bien que le service d'astronomie physique de Maurice Hamy a été suspendu et Hamy « chargé de diverses missions concernant la Défense nationale », mais sans autre précision. Celui pour 1919 fera quand même la liste des personnels de l'Observatoire qui, non mobilisés, sont récompensés pour « les travaux d'astronomie et les services rendus dans l'intérêt de la guerre » (parmi lesquels Pierre Fatou, nommé à l'occasion Officier de l'Instruction publique).

Ambiance « patriotique »

C'est une époque de « patriotisme » et surtout de propagande effrénée⁶⁶. Les romans populaires publiés ces années-là, comme *l'Éclat d'obus* [Leblanc 1916] ou *Rouletabille chez Krupp* [Leroux 1917], pour ne citer que ceux des

⁶³ Sur l'effort de guerre des astronomes, voir [Saint-Martin 2008, §3.3.2].

⁶⁴ Un laboratoire de repérage par le son a aussi fonctionné à l'ENS sous la direction de Jacques Duclaux, mari de Germaine Appell, elle-même sœur de Marguerite Borel, bref, un beau-frère de Borel. Jean Chazy y a travaillé. Voir dans [Lebesgue 1991] la lettre du 2 janvier 1915 ainsi que les notes 973 et suivantes. Chazy a repéré avec précision la position de la « grosse Bertha » — ce qui lui a valu la croix de guerre (voir [Denjoy 1956]).

⁶⁵ Bibliothèque de l'Observatoire.

⁶⁶ Pour les effets produits par cette ambiance patriotique et anti-allemande et par l'expérience de la guerre sur la « génération du feu », poussée vers le pacifisme, le communisme ou le collaborationnisme, voir encore l'article [Sirinelli 1992].

auteurs les plus connus⁶⁷, témoignent de la force du sentiment anti-allemand. Les plus raisonnables des Français s'y sont laissé prendre : que l'on songe par exemple au *Noël des enfants qui n'ont plus de maison* de Claude Debussy en 1915 :

Noël, petit Noël, n'allez pas chez eux, n'allez plus jamais chez eux, punissez-les !

Vengez les enfants de France !

Si Henri Barbusse a obtenu, en 1916, le prix Goncourt pour, *le Feu*, un terrible livre-témoignage de la vie et la mort dans les tranchées, dans les dernières pages duquel on peut lire :

« Après tout, pourquoi fait-on la guerre ? » Pourquoi, on n'en sait rien ; mais pour qui, on peut le dire. On sera bien forcé de voir que si chaque nation apporte à l'Idole de la guerre la chair fraîche de quinze cent jeunes gens à égorger chaque jour, c'est pour le plaisir de quelques meneurs qu'on pourrait compter ; que les peuples entiers vont à la boucherie, rangés en troupeaux d'armées, pour qu'une caste galonnée d'or écrive ses noms de princes dans l'Histoire ; pour que des gens dorés aussi, qui font partie de la même gradaille, brassent plus d'affaires — pour des questions de personnes et des questions de boutiques. — Et on verra, dès qu'on ouvrira les yeux que les séparations qui se trouvent entre les hommes ne sont pas celles qu'on croit, et que celles qu'on croit ne sont pas. [Barbusse 1916]

il ne semble pas que cette condamnation — de la guerre plutôt que de l'Allemagne — ait été beaucoup entendue. La propagande était plus forte (l'expression « bourrage de crâne » est d'ailleurs apparue pour la première fois dans le livre de Barbusse). Le réaliste

On croit mourir pour la patrie. On meurt pour des industriels,

d'Anatole France, ne se fera entendre qu'en 1922. Quant à *la Chanson de Craonne*⁶⁸, chantée par les soldats mutinés en 1917, elle est interdite et le restera... jusqu'en 1974.

⁶⁷ Maurice Leblanc est le père d'Arsène Lupin, qui fait une apparition brève et artificielle dans une version tardive de [Leblanc 1916] et Gaston Leroux celui de Rouletabille et de Chéri-Bibi, un énorme succès en 1913. Deux auteurs extrêmement populaires au début du xx^e siècle.

⁶⁸ Une chanson qui a connu différentes versions avant de devenir « la Chanson de Craonne », évoquant la vie des soldats sur le front et dont voici le refrain :

Adieu la vie, adieu l'amour,
Adieu toutes les femmes
C'est bien fini, c'est pour toujours
De cette guerre infâme
C'est à Craonne sur le plateau
Qu'on doit laisser sa peau
Car nous sommes tous condamnés
C'est nous les sacrifiés.

Cette ambiance anti-allemande ne semble pas le moins du monde atténuée chez ces messieurs les académiciens des sciences. Elle va d'ailleurs durer longtemps après la guerre et nous n'en finissons pas de constater ses conséquences.

★

Mais nous sommes en 1915. Le 15 mars 1915, l'Académie des sciences a exclu ceux de ses correspondants qui avaient signé le « manifeste des 93 » ou « Appel des intellectuels allemands aux Nations civilisées » du 4 octobre 1914, un texte à vrai dire plutôt posé, protestant contre les accusations de barbarie portées à l'Allemagne après notamment l'invasion de la Belgique (six mille morts civils en août-septembre 1914). Cette exclusion est une mesure très exceptionnelle. Dans toute l'histoire de l'Académie des sciences, de la création à nos jours, il n'y a eu que trois vagues « d'exclusions » : Carnot et Monge ont été exclus de l'Académie des sciences à la Restauration par une ordonnance royale en 1816 (par le pouvoir politique, donc) ; nos intellectuels allemands sont donc exclus par les académiciens eux-mêmes ; il y aura encore l'annulation par les académiciens de l'élection de Georges Claude, un collaborationniste vraiment trop voyant (qui avait été un grand contributeur à l'effort de guerre en 1914–18), à la Libération en 1944.

Mais revenons à 1915 et laissons encore une fois la parole au président Perrier [1915, p. 805], qui nous « explique » l'affaire :

On a parlé de barbarie, mais la barbarie consciente change de nom : elle s'appelle le crime, et le crime ne cesse pas d'être le crime quand il est commis par des têtes couronnées, quand il devient collectif, surtout quand il est discipliné. C'est pourquoi l'Académie des sciences a rayé de ses listes, le 15 mars 1915, les signataires du triste manifeste où les intellectuels allemands ont essayé de défendre les cruautés et les félonies commises par leurs compatriotes et inspirées par eux à ceux qui les servent : le chimiste von Bayer [*sic*], de Munich, associé étranger, et trois correspondants : le mathématicien Felix Klein⁶⁹, de Göttingue ; le chimiste Emil Fischer, de Berlin ; l'anatomiste Waldeyer, également de Berlin⁷⁰.

[...] Par son geste l'Académie a voulu stigmatiser les contempteurs des conceptions morales que nous ont léguées les générations qui ont, durant de longs siècles, vécu, souffert, aimé et pensé sur notre sol⁷¹.

⁶⁹ Felix Klein est le seul mathématicien parmi les 93. La tradition veut qu'on lui ait demandé par téléphone de signer un texte qu'il n'avait pas lu (voir par exemple [James 2002, p. 228] — à défaut d'une source plus directe).

⁷⁰ On doit au chimiste Adolf von Baeyer (1835–1917), Prix Nobel en 1905, parmi d'autres travaux, la découverte du gaz lacrymogène. Emil Fischer (1852–1919), qui a été son assistant à Strasbourg, a eu, lui aussi, le Prix Nobel de chimie, en 1902.

⁷¹ Il n'est heureusement pas vrai que l'Académie des sciences a « exclu la plupart de ses membres allemands », comme on peut le lire dans [Lehto 1998, p. 16], et encore moins que ceci se soit passé *après* l'élection de Picard comme Secrétaire Perpétuel, comme la rédaction du texte en question le laisse entendre. Après l'exclusion des quatre signataires du manifeste des 93, l'état de l'Académie des sciences publié

Tout de suite après cette mesure d'exclusion, le quotidien *le Figaro* publiait (les 21 et 25 avril, 9, 18 et 26 mai 1915), une série d'articles sur « le Bluff de la science allemande », écrits par des scientifiques éminents (parmi lesquels on ne s'étonnera pas de retrouver notre Perrier). Toujours en 1915, le 4 octobre, Picard a présenté à l'Académie des sciences sa brochure *L'histoire des sciences et les prétentions de la science allemande*⁷² en ces termes :

En dehors d'une partie plus particulièrement historique, j'insiste dans cette étude sur le caractère souvent si formel des écrits scientifiques allemands. Ce caractère, où apparaissent parfois une notion singulière du réel et du vrai, et une sorte de mépris pour le sens commun, peut, je crois, être rattaché au subjectivisme et au formalisme kantien, et aux systèmes philosophiques qui en dérivent plus ou moins directement. La tendance à tout systématiser est habituelle à l'esprit germanique. On la retrouve même dans les vues les plus pratiques, jusque dans le concept d'organisation, nouvel Impératif que l'Allemagne voudrait, pour son plus grand profit, imposer au monde⁷³.

Et c'est à la fin de la même année 1915, le 27 décembre, que le président Edmond Perrier prononce le discours d'usage lors de la séance publique annuelle, un discours-fleuve de dix-neuf pages imprimées, dont nous avons déjà donné à lire plusieurs extraits, un discours imprégné d'une haine patriotique que l'on a certainement remarquée... et dont voici encore ici quelques expressions

dans les *Comptes rendus* en janvier 1916 témoigne de la présence de deux associés allemands (dont Dedekind), de quatorze correspondants allemands (parmi lesquels Schwarz, Max Noether et Hilbert) et de deux correspondants autrichiens.

⁷² Le sentiment anti-allemand de Picard est profond et durable. Il se manifestera encore par le boycott d'Einstein par l'Académie des sciences lorsque Langevin, un internationaliste convaincu, l'invitera à donner des cours au Collège de France en mars-avril 1922. Les Borel, Appell, Cartan notamment, accueilleront dignement le physicien, comme le raconte Camille Marbo [1968, p. 193].

À vrai dire, les sentiments anti-allemands du Secrétaire perpétuel Picard contre Einstein, en grande partie responsables de ce boycott, s'ajoutent dans ce cas à un anti-sémitisme affirmé et à sa détestation de la Ligue des Droits de l'Homme et des hommes de gauche parmi lesquels Langevin, Perrin et Hadamard, comme le montre sa correspondance avec Lacroix (archives de l'Académie des sciences, lettres des 6 août 1921, 8 août 1923, 9 août 1925, 13 novembre 1926...).

Pour en revenir aux Allemands en général, citons encore une lettre à Lacroix du 17 avril 1922, dans laquelle Picard mentionne un collègue allemand sous le nom de « Boche Hecker » (dossier Picard, archives de l'Académie des sciences).

Voir aussi la note 27 du chapitre VI.

⁷³ À quand une étude comparative de ce texte de Picard et des « types » de la revue nazie *Deutsche Mathematik* de Bieberbach ?

On est bien loin des affirmations répétées par le beau-père de Picard, Charles Hermite, dans sa correspondance, trente ans plus tôt, sur son admiration pour les mathématiciens allemands, avec qui, ni la guerre ni les dissensions politiques ne peuvent l'empêcher de collaborer (voir [Dugac 1984 ; 1985 ; 1989 ; Lampe 1916], et aussi la note 51 du chapitre II).

bien choisies : la félonie germanique, la Germanie, séparée désormais de tout le monde civilisé, les crimes de l'Allemagne, qui a mérité toutes les malédictions, ce qu'elle appelle sa Kultur, la monstrueuse Allemagne⁷⁴...

De décembre 1915 à mars 1916, le mathématicien belge Charles de la Vallée Poussin⁷⁵, de Louvain, est invité au Collège de France, un « témoignage de sympathie après les cruelles violences dont la Belgique a été victime », dit-il dans la préface de son livre [1916]. On trouve une mention de son passage dans une lettre de Lebesgue [1991, p. 330] à Borel : Lebesgue s'inquiète de l'auditoire possible des conférences de de la Vallée Poussin (il n'y a pas beaucoup de mathématiciens présents à Paris, et pour cause), auxquelles il va devoir assister... pour y apprendre ce qu'est l'intégrale de Lebesgue.

Le 13 mars 1916, l'Académie des sciences élit Charles de la Vallée Poussin membre correspondant, en remplacement de Felix Klein. Il est difficile de ne pas voir dans cette élection une réponse au

Il n'est pas vrai que nos troupes aient brutalement détruit Louvain
du manifeste des 93.

Ces années-là, la liste des adhérents de la SMF publiée dans le *Bulletin* est précédée de la mention :

En raison de l'état de guerre actuel, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé de suspendre les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies ; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous.

Après la guerre, cette mention sera remplacée par la suivante :

Dans la séance du 14 janvier 1920, l'Assemblée générale de la Société mathématique de France, considérant que les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies ont été suspendues pendant la guerre, a décidé que ces relations ne pourraient être reprises qu'à la suite d'une demande formelle des membres susvisés, demande qui serait soumise au vote du Conseil ; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous.

Ce texte figurera encore dans le *Bulletin* avant la liste des adhérents jusqu'en janvier 1930.

⁷⁴ L'objet final du discours de Perrier était de fustiger la dénatalité, l'alcoolisme et la lutte des classes, comme on pouvait l'attendre d'une allocution légèrement méprisante pour les ouvrières (voir l'extrait cité page 6), ce qui ne l'empêche pas de se conclure par un très catholique « Aimez-vous les uns les autres »...

⁷⁵ Charles de la Vallée Poussin est un mathématicien bien connu par exemple pour sa contribution au théorème des nombres premiers. Il sera le premier président de la nouvelle Union mathématique internationale, qui organisera le Congrès « international » des mathématiciens à Strasbourg en 1920. On trouvera une photographie de de la Vallée Poussin, avec Julia, lors du Congrès (plus) international de 1928 page 192.

Ajoutons que les Français n'ont pas été les seuls à se montrer violemment anti-allemands après la guerre. Voir par exemple les extraits d'articles parus dans la revue britannique *Nature* et cités dans [Dauben 1980].

Il faut quand même remarquer que, prononçant à son tour l'allocution de la séance publique annuelle, le 18 décembre 1916, Jordan qui, bien entendu, mentionne la barbarie allemande⁷⁶... mais relativement brièvement,

Sans parler des glorieux succès de nos armées, les crimes multipliés de nos ennemis sont le présage de leur défaite. Ils osent parler de liberté, d'affranchissement, lorsque sur chacune de leurs frontières gémit une nation opprimée ; lorsque des populations entières sont déportées en esclavage, et qu'ils s'apprêtent à les enrôler de force dans leurs armées. Qui pourrait croire au succès final de leur entreprise, qui prétend effacer vingt siècles de christianisme pour nous ramener au régime des monarchies de Babylone. Ils invoqueront en vain leur « Vieux Dieu Allemand », sanglante idole que s'est forgée leur orgueil. Nous leur laissons ce Dieu-là. Le nôtre ne connaît pas la vieillesse et n'est pas l'apanage d'un peuple ; mais c'est un Roi de justice, et avec son aide nous vaincrons [Jordan 1916].

ne manque pas ensuite, lorsqu'il évoque les académiciens décédés pendant l'année, de consacrer quelques lignes d'hommage au mathématicien allemand « mort chargé d'années » Richard Dedekind, correspondant depuis 1900 et associé étranger depuis 1910 (et qui n'a pas signé le manifeste des 93)⁷⁷.

Sept des lauréats des prix décernés lors de cette séance publique, parmi lesquels René Gateaux, ont été « tués à l'ennemi ».

I.4 L'itération, quelques définitions et notations

C'est un bon endroit pour revenir, enfin, aux mathématiques. Dans les chapitres suivants, nous essaierons d'expliquer ces mathématiques tout en

⁷⁶ D'après [Sirinelli 1992], dans les années 1920 encore, les candidats aux concours d'entrée aux grandes écoles composeront sur des sujets comme :

La guerre doit-elle être faite d'une façon humaine ou d'une façon barbare ?
Comment doit-on juger un peuple qui fait de la science l'arme de la barbarie ?

⁷⁷ En pleine guerre, le 12 mai 1917, le mathématicien allemand David Hilbert (qui n'a pas non plus signé le manifeste des 93) prononce un discours sur Gaston Darboux (décédé deux mois plus tôt) à l'Académie des sciences de Göttingen, discours qui sera traduit en français et publié par *Acta mathematica* [1920], un discours académique chaleureux qui se conclut sur l'influence des idées de Darboux sur les efforts de Felix Klein (à propos de l'enseignement des mathématiques) et sur son rôle dans l'Association internationale des Académies scientifiques. La publication dans *Acta mathematica* n'est évidemment pas un hasard — sur le rôle que Mittag-Leffler voulait faire jouer à « son » journal après la guerre, voir [Dauben 1980].

racontant chronologiquement l'histoire de la publication des travaux de Fatou et Julia sur l'itération.

Rappelons d'abord quelques définitions et fixons quelques notations. Il est question ici de fonctions holomorphes sur des ouverts de $\mathbf{C}$ et le plus souvent de fractions rationnelles, c'est-à-dire des fonctions analytiques sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, bien que beaucoup de résultats subsistent dans le cas d'une fonction entière avec une singularité essentielle en ∞ . Comme le faisaient les auteurs de l'époque, nous parlerons souvent de fractions rationnelles de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, tout en considérant le point à l'infini comme un point ordinaire et sans nous soucier des pôles des fractions rationnelles considérées. Une telle fraction sera en général notée R et k désignera le degré de R comme application de $\mathbf{P}_1$ dans $\mathbf{P}_1$, c'est-à-dire le nombre de points de $R^{-1}(a)$ (comptés avec multiplicité) pour $a \in \mathbf{P}_1$, ou encore

$$k = \sup(\deg P, \deg Q) \text{ si } R = \frac{P}{Q} \text{ est irréductible}$$

(P et Q sont des polynômes). Dans l'exemple où l'on applique la méthode de Newton pour trouver les racines d'un polynôme f de degré k , on itère la fraction rationnelle

$$R(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

qui est de degré k comme f .

Presque toujours (mais pas toujours, itérer un isomorphisme a aussi son charme, penser à une rotation...), on suppose que $k \geq 2$. La n^{e} itérée $R \circ R \circ \dots \circ R$ (n fois) de R est notée R^n . C'est une fraction rationnelle de degré k^n .

Les points périodiques de R sont les points fixes des R^n . La période d'un point périodique a est le plus petit n tel que $R^n(a) = a$. Les n points distincts $a, R(a), \dots, R^{n-1}(a)$ forment ce que l'on appelle un cycle périodique.

On appelle *multiplicateur* du point fixe z la dérivée de R en z . Remarquons que si

$$z_1 = R(z), \dots, z_{n-1} = R^{n-1}(z),$$

alors

$$(R^n)'(z) = R'(z_{n-1}) \cdots R'(z_1) R'(z),$$

de sorte que, si z est périodique de période n , on a

$$(R^n)'(z) = (R^n)'(z_1) = \dots = (R^n)'(z_{n-1}) :$$

tous les points d'un cycle ont le même multiplicateur.

Certains des points fixes de R ou de ses itérées seront⁷⁸ dits *répulsifs*, ce sont ceux tels que

$$R^n(z) = z \text{ et } |(R^n)'(z)| > 1.$$

⁷⁸ Le futur « seront dits », « seront » se justifie ici par le fait que la terminologie va se créer pendant l'histoire racontée.

Notons donc, suivant Julia, E l'ensemble (dénombrable) de tous les points fixes répulsifs et E' son ensemble dérivé, c'est-à-dire l'ensemble de ses points d'accumulation. Nous ne discutons pas ici le fait que E contient en effet des points, qu'il n'est pas vide, voir pour ceci la remarque III.1.2.

Les points fixes *attractifs* seront ceux dont le module du multiplicateur est strictement plus petit que 1. Depuis les travaux de Kœnigs⁷⁹ des années 1880, on sait que tout point fixe attractif possède un voisinage sur lequel la suite R^n converge vers une constante (égale à ce point fixe).

Les points fixes *indifférents* sont ceux dont le multiplicateur est de module 1.

Si ∞ est un point fixe, on le ramène à 0 par $w = 1/z$ qui conjugue R à

$$S(w) = \frac{1}{R\left(\frac{1}{w}\right)},$$

de sorte que le multiplicateur est

$$s = S'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(w)}{w} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z}{R(z)}.$$

Ainsi, par exemple, si R est un polynôme de degré $k \geq 2$, le point ∞ est toujours un point fixe attractif (et même *superattractif*, c'est-à-dire que $s = 0$).

Supposons que a soit un point fixe attractif de R . Comme $|R'(a)| < 1$, on peut trouver des réels $r > 0$ et $\sigma < 1$ tels que

$$|z| < r \Rightarrow |R(z) - a| < \sigma |z - a|.$$

Ainsi

$$|R^n(z) - a| \leq \sigma^n |z - a|$$

et la suite R^n converge uniformément vers la fonction constante égale à a sur le disque.

L'ensemble des points z du plan tels que $R^n(z)$ tend vers a est le bassin (ou domaine) d'attraction du point fixe a . Ce bassin peut avoir une infinité

⁷⁹ Gabriel Kœnigs (1858–1931) sera élu à l'Académie des sciences dans la section de mécanique le 18 mars 1918. Voir, à son sujet et au sujet de ses relations mathématiques avec Darboux, [Alexander 1995]. Il sera secrétaire général de l'UMI de 1920 à sa mort en 1931, une fonction qu'il n'aurait pas prise très au sérieux (d'après [Lehto 1998]). Il sera aussi, aux côtés de Paul Appell, Émile Borel, Jacques Hadamard, Jean Perrin et quelques autres, un des membres du comité d'honneur de l'Union rationaliste fondée en 1930 avec Langevin comme vice-président. Aucune des deux nécrologies [de Launay 1931] ni [Buhl 1931a] ne mentionne ni l'UMI ni l'Union rationaliste. Il n'est toutefois pas absolument exact qu'il n'y ait rien dans les archives de l'Académie des sciences sur son activité à l'UMI : dans une lettre à Villat (fonds Villat 61J) du 19 janvier 1920, Kœnigs écrit qu'il a donné les statuts de l'UMI à l'impression.

de composantes connexes. Celle qui contient a est le bassin (ou domaine) immédiat de a . Cette notion se généralise sans mal au cas d'un cycle attractif.

Signalons encore, puisque le mot apparaîtra forcément, que ce que nous appelons aujourd'hui un point fixe s'appelait à l'époque un point « double ».

Exemple I.4.1. Le premier exemple est, naturellement, le plus simple, celui de la fonction $R(z) = z^2$. Les points fixes de R sont 0 et ∞ et sont attractifs (superattractifs, même). Sur la figure, les itérés des points du disque (grisé) convergent vers 0, ceux des points de l'extérieur (blanc) vers ∞ .

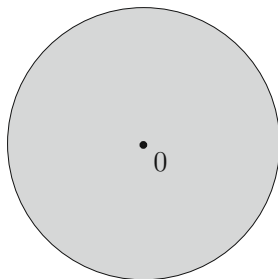


Fig. I.1. L'ensemble E' pour $z \mapsto z^2$

Les points fixes de R^n sont les solutions de l'équation

$$z^{2^n} - z = 0.$$

L'origine est un point fixe (superattractif). Si $n \geq 2$, toutes les autres solutions sont des points fixes répulsifs, donc

$$E = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid z^{2^n - 1} = 1 \right\} \subset S^1.$$

Cet ensemble est dense dans le cercle, de sorte que $E' = S^1$ tout entier. Il partage $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ en deux composantes connexes (bassins ou domaines d'attraction), la suite R^n converge vers une fonction constante sur chacune d'elles (égale au point fixe attractif qu'elle contient).

Cet exemple est bien connu de tous les « itérateurs » de l'histoire, bien avant le moment où nous l'avons fait commencer. On le trouvera traité explicitement par nos auteurs, par exemple dans [Julia 1918f, p. 103] et dans [Montel 1927, p. 228]. Il est d'ailleurs lié à la méthode de Newton : le polynôme $R(z) = z^2$ est conjugué à

$$S(w) = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \text{ par } z = \frac{w-1}{w+1}$$

et S est la fraction rationnelle

$$S(w) = w - \frac{w^2 - 1}{2w}$$

donnée par la méthode de Newton pour trouver les racines de $w^2 - 1$. Comme l'étude de R le montre, les itérés des points du demi-plan $\text{Ré}(w) > 0$ convergent vers la racine $+1$, ceux des points du demi-plan $\text{Ré}(w) < 0$ vers la racine -1 ... une situation idéale mais spécifique au degré 2. Comme l'a montré Schröder⁸⁰ dans un article [Schröder 1871] dont nous reparlerons, si α et β sont les racines (distinctes) d'un polynôme de degré 2, la médiatrice de $\alpha\beta$ partage $\mathbf{C}$ en deux hyperplans ouverts et la méthode de Newton converge vers une des racines à partir de tout point du demi-plan de cette racine.

Exemple I.4.2. Le deuxième exemple est un de ceux qui apparaissent dans la note [1906d] de Pierre Fatou de 1906. Il s'agit de la fraction rationnelle

$$Z = R(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2}.$$

Comme des travaux plus récents de Douady, Hubbard, et d'autres, ont popularisé les exemples de polynômes quadratiques, il est plus agréable pour les lecteurs d'aujourd'hui d'utiliser le polynôme conjugué par $v = 2/z$ (et $V = 2/Z$, comme on le précisait à l'époque)

$$V = P(v) = v^2 + 2.$$

L'ensemble E' est alors un ensemble de Cantor (un des premiers ensembles de Cantor en dimension 2) que l'on qualifie parfois de « poussière », assez difficile à visualiser. Il ressemble à celui de la figure, qui correspond à $z \mapsto z^2 + 1$ mais qu'Arnaud Chéritat suggère d'utiliser parce qu'il est un peu plus visible.

On n'employait pas la terminologie « ensemble de Cantor » de façon aussi générale à l'époque. Fatou a montré que cet ensemble est parfait, partout discontinu, et invariant par R . Les itérés de tous les points de $\mathbf{C}$, hormis ceux de E' , convergent vers le point fixe. À vrai dire, Fatou n'a pas défini (dans sa note [1906d]) l'ensemble appelé ici E' (et qu'il note E) exactement comme nous venons de le faire (ensemble dérivé de l'ensemble des points répulsifs), mais plutôt comme limite d'une suite de parties emboîtées. Le point 0 est un point fixe attractif, il attire donc les points des disques suffisamment petits. Choisissons un $r > 0$ assez grand pour que le disque de rayon r contienne tous les points critiques de l'application inverse de R . Ainsi l'image inverse du cercle C de rayon r est formée de k courbes fermées disjointes telles que la restriction de R à chacune d'elles est un difféomorphisme sur C . Fatou

⁸⁰ La réduction de la résolution d'une équation du second degré par la méthode de Newton à l'itération de $z \mapsto z^2$ se trouve aussi dans la note [Cayley 1890] de Cayley... qui se conclut par la phrase

J'espère appliquer cette théorie au cas d'une équation cubique mais les calculs sont beaucoup plus difficiles.

Nous le verrons, au-delà des calculs, la situation est beaucoup plus compliquée en degrés supérieurs. Voir par exemple la figure II.4.



Fig. I.2. L'ensemble E' pour $z \mapsto z^2 + 1$

appelle E_n l'ensemble des points z tels que

$$|z| > r, |R(z)| > r, \dots, \\ \dots, |R^{n-1}(z)| > r, |R^n(z)| \geq r \text{ et } |R^{n+1}(z)| < r$$

(il semblerait plus naturel de mettre des inégalités larges partout). Voir la figure I.3 sur laquelle sont représentés de façon très schématique les ensembles E_n pour $n = 0, 1, 2$ lorsque $k = 2$. On a alors $E_{n+1} \subset E_n$ et on vérifie sans mal que $\bigcap_n E_n$ est l'ensemble E' qui nous intéresse. Il faut noter ici que Fatou, spécialiste de l'intégrale de Lebesgue, est un familier des intersections infinies.

Exemple I.4.3. Dans sa note [1906d], Fatou considère aussi⁸¹ le polynôme

$$R(z) = \frac{z + z^2}{2}.$$

Les points fixes sont 0 et ∞ (attractifs) et 1 (répulsif). Les domaines de convergence vers 0 et ∞ sont séparés par des lignes qui ne sont pas analytiques.

⁸¹ Dans sa notice de 1921, Fatou dira :

J'ai également indiqué des cas où la substitution présente deux points doubles attractifs dont les domaines respectifs sont d'un seul tenant simplement connexe et séparés par une courbe non analytique,

Et Hadamard, dans son rapport déjà cité :

Dès ce cas simple cependant, les singularités les plus bizarres apparaissent.

Dossier Fatou, archives de l'Académie des sciences.

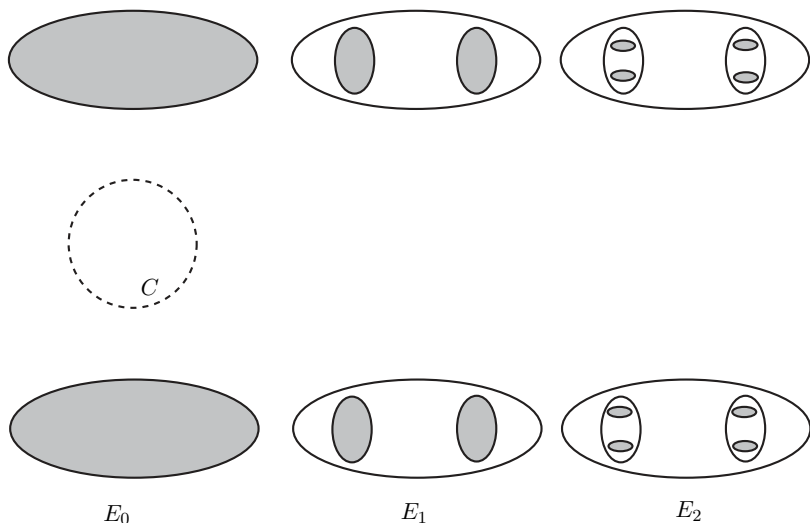


Fig. I.3. Vue schématique des ensembles E_0 , E_1 , E_2

Pour les lecteurs modernes, la fraction est conjuguée à

$$r(u) = u^2 + \frac{1}{8},$$

le polynôme a un unique point fixe attractif et l'ensemble E' est un cercle un peu déformé (avec des fossettes), une courbe pas très différentiable, et plus précisément, une courbe de Jordan simple qui ne possède de tangente en aucun point. Voir la figure I.4⁸².

Voir aussi, en plus de ce qui apparaîtra ici, par exemple l'exposé de Douady [1983] au séminaire Bourbaki, une très belle introduction moderne, même si déjà ancienne, au sujet, et les plus récents article de Yoccoz [1999] et livres de Milnor [2006a], de Berteloot et Mayer [2001] et de Tan Lei [2000].

I.5 Familles normales

Un des objets principaux étudiés dans les travaux de Fatou et Julia dont il est question ici est ce que l'on appelle aujourd'hui l'ensemble de Julia de la fonction R , que l'on définit, depuis Fatou [1920a], comme l'ensemble des points en lesquels la suite des fonctions itérées R^n de R n'est pas normale. L'idée de l'utilisation de la notion de suite ou de famille normale est apparue, comme on va le voir, alors que Fatou et Julia avaient commencé à travailler

⁸² Sur cette figure, comme sur la figure I.1 et sur la plupart des autres figures représentées dans ce texte, l'ensemble E' est la frontière de la partie grisée.

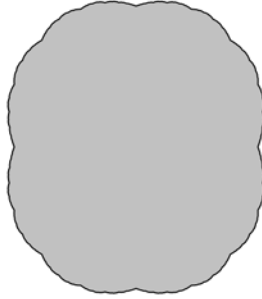


Fig. I.4. L'ensemble E' pour $R(z) = \frac{z + z^2}{2}$

sur l'itération des fractions rationnelles, elle a donné un sérieux coup de fouet à leurs travaux et fait faire un bond qualitatif au sujet.

Rappelons qu'une famille de fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbf{P}_1$ et à valeurs dans $\mathbf{P}_1$ est dite *normale*, une notion inventée par Paul Montel au début du siècle (pour simplifier, renvoyons ici à son livre plus tardif [Montel 1927, p. 32]) si de toute suite infinie de fonctions de cette famille, on peut extraire une suite convergeant uniformément dans U (en termes modernes, c'est une partie relativement compacte de l'espace $\mathcal{O}(U)$ des applications holomorphes de U dans $\mathbf{P}_1$, muni de la topologie de la convergence uniforme)⁸³. Dans ce cas, la limite est alors automatiquement une fonction holomorphe (peut-être constante égale à ∞). Une famille est normale en un point s'il existe un voisinage de ce point sur lequel elle est normale.

Exemples I.5.1.

(1) Commençons par un contre-exemple : considérons la fonction $f(z) = e^z$ et la suite (f_n) des $f_n(z) = f(nz)$. En un point iy_0 imaginaire pur, la suite (f_n) n'est pas normale : sur tout disque centré en ce point, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(z)| = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Ré}(z) < 0 \\ 1 & \text{si } \operatorname{Ré}(z) = 0 \\ +\infty & \text{si } \operatorname{Ré}(z) > 0, \end{cases}$$

⁸³ Comme on le savait très bien à l'époque où se passe notre histoire, les ensembles de fonctions continues (contrairement aux ensembles de points dans $\mathbf{R}^n$) n'ont pas la propriété que les compacts sont les fermés bornés. La condition d'équicontinuité d'Arzelà et Ascoli donne la compacité. Ce sont les travaux de Montel en analyse complexe qui ont révélé toute l'utilité de cette notion. On l'a compris, l'utilisation du mot « compact » est un anachronisme que nous nous autorisons.

de sorte qu'aucune sous-suite de (f_n) ne peut converger uniformément sur un tel disque.

(2) Revenons au cadre de l'itération. En un point fixe attractif a de la fraction rationnelle R , la suite des itérées R^n est une famille normale puisqu'elle converge uniformément, sur un disque centré en a , vers la fonction constante égale à a .

(3) Dans l'exemple I.4.1, un disque ouvert centré en un point du cercle contient des points où $R^n(z)$ converge vers ∞ et d'autres où elle converge vers 0. La famille R^n n'est donc normale en aucun point du cercle (et elle est normale partout ailleurs). Dans cet exemple, on voit que l'ensemble E' , défini comme ensemble dérivé de l'ensemble des points fixes répulsifs des R^n (il en est aussi l'adhérence puisqu'il est parfait), se trouve coïncider avec l'ensemble de ceux en lesquels la suite R^n n'est pas normale. Nous allons voir que cette propriété est très générale.

(4) Les points fixes répulsifs de R (et de ses itérées) sont toujours des points où la suite des itérées n'est pas normale : si $R(a) = a$ avec $|R'(a)| > 1$, comme $(R^n)'(a) = R'(a)^n$, la suite des dérivées des R^n n'a aucune sous-suite convergente au voisinage de a , donc R^n n'a aucune sous-suite uniformément convergente.

(5) Application aux groupes fuchsien ou kleinéens. On peut considérer l'ensemble des éléments d'un groupe discret Γ d'homographies

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

(un groupe kleinéen) comme une famille d'applications holomorphes de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. L'ensemble des points où cette famille n'est pas normale est appelé l'ensemble-limite de Γ , c'est aussi l'ensemble des points d'accumulation des points fixes des éléments du groupe. Par exemple, si le groupe est celui des homographies R telles que

$$\frac{R(z) - \alpha}{R(z) - \beta} = k^n \frac{z - \alpha}{z - \beta} \text{ avec } k \neq 1,$$

l'ensemble-limite est formé des deux points fixes α et β . Voir le livre (de Fatou) [Appell et al. 1930, §31–33]. L'analogie de cette situation avec celle de l'itération figure déjà dans les travaux de 1906 de Fatou sur l'itération⁸⁴, elle sera remarquée aussi par Julia. Nous y reviendrons (voir ici page 101 et le §IV.5.b).

La propriété d'être une famille normale en un point est clairement une propriété locale. Le théorème fondamental sur les familles normales est le suivant [Montel 1927, p. 21] :

⁸⁴ Poincaré [1883] avait lui aussi considéré l'ensemble-limite, défini comme celui des points où l'opération du groupe n'est pas proprement discontinue (sans la notion de famille normale). C'est la ligne L déjà rencontrée dans la note 12 et que nous verrons réapparaître au §IV.5.b.

Théorème. *Si des fonctions holomorphes sur un ouvert U sont uniformément bornées dans leur ensemble sur U , elles forment une famille normale.*

En termes modernes : dans l'espace $\mathcal{O}(U)$, les compacts sont les fermés bornés.

En application de la représentation conforme, Montel [1912] a aussi montré le critère de normalité suivant :

Théorème (de Montel). *Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions analytiques sur un ouvert U qui n'a que deux valeurs exceptionnelles⁸⁵ est normale.*

En effet, les fonctions de la famille $\mathcal{F}$ sont à valeurs dans le complémentaire de deux points dans $\mathbf{C}$, un ouvert qui est conformément équivalent à un ouvert borné. Ce théorème permet, par exemple, de démontrer le célèbre théorème de Picard (qui date de 1879, voir [Picard 1879]).

Théorème (Premier théorème de Picard). *Une fonction entière non constante prend toutes les valeurs sauf peut-être une.*

Supposons, dit Montel, que f évite deux valeurs. Il s'agit d'appliquer un théorème sur les suites de fonctions à l'étude de la fonction f . Il faut donc fabriquer une suite de fonctions dont les propriétés donnent des informations sur celles de f . La suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(z) = f(nz)$$

prend les mêmes valeurs que f , elle est donc normale (en vertu du théorème de Montel). Donc elle est bornée sur un disque, donc f est bornée sur $\mathbf{C}$, elle est alors constante grâce au théorème de Liouville.

Il y a toute une foule de théorèmes de Picard, à la démonstration desquels le théorème de Montel s'applique, par exemple le suivant.

Théorème (Deuxième théorème de Picard). *Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé*

$$D_0 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}.$$

Si f a une singularité essentielle en 0, elle prend toutes les valeurs complexes sauf peut-être une.

⁸⁵ Rappelons que ce que l'on appelle une « valeur » exceptionnelle est un nombre complexe a qui n'est pas une valeur, précisément :

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad a \notin f(U).$$

L'argument est analogue, utilisant cette fois la suite (f_n) , qui serait, si f évitait deux valeurs, uniformément bornée (mais alors f aurait une singularité apparente en 0) ou tendrait vers la fonction constante égale à ∞ (alors f aurait un pôle en 0), donc 0 ne serait pas une singularité essentielle⁸⁶.

Le théorème de Montel rapproche, on le voit, l'étude des points où une famille est ou n'est pas normale de l'étude des points singuliers essentiels pour une fonction unique⁸⁷. Voir aussi les §§ IV.3 et VI.3. Pour un panorama des théorèmes de Picard et de leurs variantes, voir [Segal 2008].

Pour en revenir à l'itération proprement dite, ce n'est pas comme ensemble des points où la suite n'est pas normale que l'ensemble de Julia a été défini, en tout cas par Julia, mais à partir de l'ensemble E des points périodiques réplusifs de R . Voir ci-dessus et le chapitre suivant.

I.6 Relations avec les équations fonctionnelles

On s'étonnera peut-être que tant des travaux cités ici et consacrés au problème de l'itération contiennent les mots « équations fonctionnelles » dans leur titre. Nous reviendrons plus bas (note 44 du chapitre II) sur la réapparition tardive des équations fonctionnelles dans les titres des articles de Fatou.

Toujours est-il que l'étude de certaines équations fonctionnelles est naturellement liée à celle de l'itération. C'est dans un article sur l'itération [Schröder 1871] que Schröder⁸⁸ pose la question de remplacer la fonction R par une

⁸⁶ C'est un bon endroit pour signaler que le court article [Dieudonné 1990] consacré par le *Dictionary of scientific biography* (DSB) à Montel est une très efficace introduction aux familles normales.

⁸⁷ Voici un commentaire d'Émile Borel (datant probablement de 1937, au plus tard de 1947) sur cette application des familles normales [Borel 1966, p. 46] :

[...] dans cette application, il faut aborder l'étude d'une fonction unique par une méthode dont le principe même introduit une infinité de fonctions. Dans toutes les autres applications de la théorie des familles normales, une suite infinie de fonctions se présente naturellement. Ici, il a été nécessaire de la construire de toutes pièces. Paul Montel est arrivé à déduire d'une fonction unique une famille de fonctions sur laquelle se reflètent collectivement les propriétés de la fonction initiale.

Parmi les suites infinies de fonctions qui se présentent naturellement, Borel pensait certainement à la famille des R^n de l'itération.

⁸⁸ Ernst Schröder (1841–1902) est un mathématicien allemand prolifique, influencé par Cantor et d'ailleurs, bien loin de l'itération, l'auteur d'une démonstration de ce que l'on appelle le théorème de Cantor-Bernstein (il existe une bijection de A dans B si et seulement si il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A). On trouvera d'autres aspects de la résolution de l'équation de Schröder dans [Alexander 1994].

conjuguée $S = \psi^{-1} \circ R \circ \psi$ pour lui donner une forme plus simple, essayant notamment

$$\psi(sw) = R(\psi(w))$$

ou, de façon équivalente,

$$F(R(z)) = sF(z) \text{ avec } w = F(z) \text{ et } F = \psi^{-1}.$$

C'est ce que l'on appelle depuis une « équation de Schröder » (R et s sont donnés et on cherche F).

Les travaux de Koenigs — déjà qualifiés ici de préhistoire du sujet — portent sur les équations fonctionnelles. Le lien avec l'itération est expliqué très clairement dans le livre de Paul Montel [1927]. Rappelons brièvement ici ce qu'il y explique. Cherchons donc à résoudre l'équation de Schröder

$$F(R(z)) = sF(z)$$

où F est l'inconnue, une fonction holomorphe à déterminer, sur un ouvert à déterminer lui aussi.

Supposons que $a \in \mathbf{C}$ soit un point fixe⁸⁹ attractif de R (mais pas super-attractif), simple au sens où l'on a, au voisinage de a ,

$$R(z) = a + s(z - a) + \sum_{k \geq 2} a_k (z - a)^{k+2},$$

donc $s = R'(a)$ est le multiplicateur de R en a et l'hypothèse que a est attractif mais pas superattractif dit que $0 < |s| < 1$. Pour $r > 0$ assez petit, on a donc, sur le disque $D(a, r)$

$$|R(z) - a| < \sigma |z - a| \text{ pour un } \sigma < 1$$

et aussi

$$|R(z) - a - s(z - a)| < A |z - a|^2 \text{ pour un } A > 0.$$

Posons

$$F_n(z) = \frac{R^n(z) - a}{s^n}$$

et montrons que la suite de fonctions holomorphes F_n converge vers une fonction F holomorphe sur $D(a, r)$ qui est solution de l'équation de Schröder. Posons $z_0 = z$ et $z_n = R(z_{n-1})$ pour $n \geq 1$. On a alors

$$F_n(z) = \frac{R(z_{n-1}) - a}{s^n} = (z - a) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{R(z_k) - a}{s(z_k - a)}.$$

⁸⁹ On suppose ici que le point fixe n'est pas le point à l'infini.

La fonction F_n une fois écrite comme un produit, la convergence de la suite est impliquée par celle du produit infini des termes $(R(z_k) - a)/s(z_k - a)$, laquelle est équivalente à celle de la série de terme général

$$\frac{R(z_k) - a}{s(z_k - a)} - 1 = \frac{R(z_k) - a - s(z_k - a)}{s(z_k - a)}.$$

On a

$$\left| \frac{R(z_k) - a}{s(z_k - a)} - 1 \right| < \frac{A |z_k - a|^2}{|s| |z_k - a|} = \frac{A}{|s|} |z_k - a| = u_k.$$

Mais la série à termes positifs de terme général u_k est convergente puisqu'on a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \left| \frac{z_{k+1} - a}{z_k - a} \right| = \left| \frac{R(z_k) - a}{z_k - a} \right| < \sigma < 1.$$

La suite F_n converge bien vers une fonction holomorphe F et l'on a

$$F_n(R(z)) = \frac{R^{n+1}(z) - a}{s^n} = sF_{n+1}(z)$$

de sorte que la limite F vérifie bien l'équation de Schröder.

Remarquons encore que $F(a) = 0$ et $F'(a) = 1$, de sorte que F est localement inversible au voisinage de a . D'autre part, en appliquant le résultat à une détermination de R^{-1} au voisinage de a (nous n'avons pas utilisé le fait que R est rationnelle), on obtient le même résultat quand $|s| > 1$. Ce que nous avons obtenu est un théorème de Koenigs [1884 ; 1885], formulé ici, en termes modernes, comme un énoncé de linéarisation :

Théorème. *Soit a un point fixe de R , de multiplicateur s avec $|s| \neq 0, 1$. Alors il existe une fonction holomorphe inversible F , définie au voisinage de a , telle que*

$$F(a) = 0 \text{ et } F \circ R \circ F^{-1}(w) = sw.$$

Remarque. L'application réciproque θ (dont l'existence a été établie par Poincaré [1890] pour $|s| > 1$) satisfait donc à

$$R(\theta(u)) = \theta(su) \text{ et } \theta(0) = a.$$

La fonction θ se prolonge à $\mathbf{C}$ tout entier, alors que la fonction F peut être multiforme. Voir les exemples II.1.2 et II.2.1 ci-dessous.

Dans le cas d'un point fixe superattractif (cas où $s = 0$), un théorème de Böttcher [1904a ; 1904b ; 1904c]⁹⁰ montre que R est conjuguée, au voisinage

⁹⁰ Les articles de Böttcher (un mathématicien polonais) cités ici ont été publiés en russe dans un journal de Kazan et il n'est pas certain que nos protagonistes aient pu les lire. Fatou écrira que

de ce point fixe, à une fonction puissance. L'équation fonctionnelle résolue par Böttcher est

$$F(R(z)) = aF(z)^k.$$

Ce théorème est l'outil indispensable dans l'étude, par exemple, du bassin d'attraction du point à l'infini quand R est un polynôme.

La forme additive de l'équation de Schröder,

$$F(R(z)) = R(z) + a$$

est appelée équation d'Abel⁹¹, est utile pour étudier ce qui se passe près des points fixes indifférents (ceux dont le multiplicateur s est de module 1), et sera étudiée, notamment par Fatou, pour étudier ce qui se passe près des points fixes paraboliques (ceux dont le multiplicateur est une racine de l'unité).

Les équations fonctionnelles d'Abel et de Schröder ont fait, avant les travaux de Kœnigs, l'objet de plusieurs articles aujourd'hui oubliés (et qu'il serait hors-sujet de citer ici), voir [Alexander 1994, Chapter 2].

L'existence de cette fonction [celle qui conjugue R à la fonction puissance] semble avoir été démontrée pour la première fois pas M. Böttcher [Fatou 1919b, p. 189]

mais sans citer les articles de Böttcher. Il pouvait en avoir eu connaissance par la recension qu'en avait donnée le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Sauf erreur (de ma part), Julia ne mentionnera Böttcher que dans [Julia 1923, p. 145], lui aussi sans donner de référence. Je n'ai d'ailleurs pas vus ces articles moi-même et je les cite aussi d'après le *Jahrbuch*. Ritt mentionnera et utilisera « un théorème de L. Boettcher » dans sa note [1918], et surtout, il en donnera une démonstration dans son article [1920]. Il est possible qu'il ait, lui, lu les articles : d'après [Lorch 1951], il avait appris le russe « avant que ce soit à la mode ».

⁹¹ Abel a consacré quelques articles aux équations fonctionnelles. L'un d'entre eux [Abel 1881, Mémoire VI] est paru dans le tome II de ses Œuvres complètes en 1881. L'article n'a pas été publié du vivant d'Abel, il est paru dans l'édition de Holmboe (en norvégien) de ses œuvres en 1839, ce n'était peut-être qu'un fragment mais nous ne le saurons jamais, puisqu'une partie des manuscrits d'Abel a brûlé par la suite ; il a été reproduit dans l'édition en français de 1881. Bref, l'article porte le titre « Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable » et commence abruptement par

La fonction fx étant donnée, trouver la fonction φx par l'équation

$$\varphi x + 1 = \varphi(fx).$$

L'article occupe trois pages et demie (dans lesquelles Abel transforme l'équation fonctionnelle en une équation aux différences) et les raisons pour lesquelles son auteur a pu s'intéresser à cette équation particulière n'y sont pas explicitées.

II

Le Grand Prix des Sciences Mathématiques

En 1917 et 1918 paraît, aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences, toute une série de notes liées au sujet du Grand Prix. Les auteurs en sont Fatou, Julia, Lattès, Ritt (et Montel). Julia dépose aussi des plis cachetés¹.

À la fin de l'année 1917, les mémoires concourant pour le Grand Prix sont déposés. En 1918, les notes continuent à arriver et les Commissions internes à l'Académie des sciences chargées de choisir les lauréats des prix se réunissent.

Dans ce chapitre est présentée la chronologie des notes relatives à l'itération et des décisions de l'Académie des sciences en 1917 et 1918. Parce que cette histoire n'est pas indépendante de son contexte historique et qu'elle va se dérouler dans l'ambiance évoquée au § I.3, quelques étapes de ces deux années de guerre sont rappelées simultanément.

Remarque. On va le voir, l'efficacité et la vitesse avec lesquelles les *Comptes rendus* sont utilisés comme moyen de communication entre mathématiciens dans cette histoire sont tout à fait remarquables et impressionnantes.

II.1 L'année 1917

En mars, le mathématicien Paul Painlevé est devenu ministre de la guerre (le président de la république est Raymond Poincaré, le cousin du

¹ Le pli cacheté est, comme son nom l'indique, contenu dans une enveloppe fermée, cachetée à la cire ; il n'est pas destiné à la publication immédiate mais permet de s'assurer la propriété d'un résultat. Sauf si l'auteur le demande, il ne peut être ouvert qu'au bout de cent ans (voir l'exemple, ou plutôt le contre-exemple célèbre de l'ouverture de celui de Doebelin dans [Kahane 2006b]). La façon dont Julia l'a utilisé dans cette histoire est la façon classique, « normale » — il en existera de plus particulières, par exemple par des auteurs qui ne pouvaient pas publier leurs résultats, pendant l'Occupation allemande (voir notre article [2007]). Sur le nombre des plis cachetés déposés pendant telle ou telle période, qui semble refléter les événements politiques du moment, voir [Berthon 1986].

mathématicien). Le 2 avril, Émile Picard² est élu (à l'unanimité) Secrétaire perpétuel³ de l'Académie des sciences (en remplacement de Gaston Darboux, mort le 23 février).

Les 2 janvier, 26 février, 19 mars, 10 et 23 avril, l'Académie des sciences publie des notes de Julia sur les formes quadratiques ou non quadratiques relatives au sujet de sa thèse (elle en a déjà publié plusieurs l'année précédente). D'après la notice que Julia a écrite pour son élection à l'Académie des sciences en 1934 et qui est publiée dans [Julia 1968],

Ce travail [...] a occupé [ses] loisirs d'hôpital pendant l'année 1916.

Il a terminé de rédiger les deux cent quatre-vingt-treize pages de sa thèse puisque le rapport de Georges Humbert sur celle-ci est daté du 24 mai⁴. Il a aussi formé son jury, Picard serait président, Humbert rapporteur, il lui fallait un troisième examinateur et, comme il craignait que Borel ne soit trop occupé, il a demandé à Lebesgue d'être cet examinateur (lettre à Borel⁵ du 29 mai 1917).

Le 21 mai

La guerre continue. Les soldats commencent à refuser d'être massacrés pour rien. Painlevé a nommé Pétain commandant en chef et Foch chef d'état-major. Début des mutineries. Le ministère de la guerre envoie une mission scientifique aux États-Unis (ce qui est annoncé dans les *Comptes rendus* juste avant la note de Fatou dont il va être question).

Pierre Fatou

Une note de Pierre Fatou [1917b], présentée à la séance du 14 mai, paraît⁶. L'auteur s'intéresse, comme en 1906, à la question de déterminer les domaines de convergence correspondants aux différents points limites de la fraction rationnelle. Il annonce savoir résoudre complètement le problème de l'itération, qu'il qualifie de « très difficile » en général, dans le cas particulier de fractions rationnelles qui envoient un disque donné sur lui-même. Voici la classification

² On devrait entrevoir dans ce texte l'énorme pouvoir qu'a détenu Émile Picard sur la communauté mathématique et plus généralement scientifique pendant plusieurs décennies (au moins de 1917 à sa mort en 1941). Voir aussi page 190.

³ C'est sur du papier à lettres cadré de noir que Picard, qui a perdu deux enfants en 1915, a envoyé sa candidature à ce poste le 25 mars (dossier biographique de Picard, archives de l'Académie des sciences).

⁴ Tous les renseignements concernant la thèse de Julia (date, rapports) ont été fournis par Juliette Leloup.

⁵ Fonds Borel, archives de l'Académie des sciences.

⁶ Une note est présentée pendant une séance. Elle peut être imprimée une ou plusieurs semaines plus tard, dans le fascicule d'une autre séance, par exemple parce que l'auteur n'a pas pu corriger les épreuves immédiatement.

qu'il obtient Il y a trois possibilités (pour clarifier l'exposition, nous incluons les exemples les plus simples) :

- soit R a deux points fixes attractifs conjugués par rapport au cercle, ainsi que $k - 1$ points fixes répulsifs situés sur le cercle ; l'intérieur du cercle converge vers l'un des points fixes attractifs et l'extérieur vers l'autre. C'est la situation que nous avons rencontrée dans l'exemple I.4.1 où les deux points fixes étaient 0 et ∞ , conjugués par rapport au cercle unité.

- Soit R a un unique point fixe attractif⁷ (ainsi que k autres points fixes qui sont répulsifs) qui est situé sur le cercle et les itérés de tous les points sauf ceux d'un ensemble parfait discontinu contenu dans le cercle convergent vers ce point fixe. En considérant que le « cercle » est l'axe réel (cas auquel Fatou se ramène de toute façon pour ses calculs), c'est le cas par exemple de

$$R(z) = 2z - \frac{1}{z},$$

le point à l'infini est l'unique point fixe attractif, les cycles répulsifs sont situés sur l'axe réel et forment l'ensemble parfait discontinu en question.

- Soit R a un unique point fixe de multiplicateur $s = +1$, racine double ou triple de $R(z) = z$, situé sur le cercle et les itérés de tous les points convergent vers ce point fixe sauf peut-être⁸ ceux de la circonférence (il reste $k - 1$ ou $k - 2$ points fixes répulsifs, situés sur le cercle). C'est le cas (toujours avec l'axe réel comme « cercle ») de

$$R(z) = z - \frac{1}{z},$$

dont le point à l'infini est l'unique point fixe, un point fixe « indifférent ». Les itérés des points de chacun des deux disques (hyperplans) ouverts convergent vers ∞ . Les seuls points de l'axe des x qui convergent vers ce point sont ses antécédents (une partie dénombrable de $\mathbf{R}$).

Le 4 juin

Gaston Julia

Julia dépose un pli cacheté qui est enregistré sous le numéro 8401. La petite enveloppe⁹ qui l'a contenu porte son nom et son adresse : Gaston Julia, 45 rue d'Ulm¹⁰. Elle contenait (avant son ouverture) onze pages de cahier, remplies

⁷ Le mot « attractif » n'existe toujours pas et Fatou appelle encore ces points des points limites ; ce sont en effet des points qui sont des limites.

⁸ On ne dit rien sur les points de la circonférence.

⁹ Pour tous les détails sur les aspects matériels, physiques, des plis en question, voir les pochettes de séances, aux archives de l'Académie des sciences.

¹⁰ L'adresse est celle de l'ENS. Julia n'y est plus élève mais habite toujours 45 rue d'Ulm, à l'hôpital 103, entre les opérations qu'il doit subir et qui ont lieu, elles, à

de la jolie petite écriture fine de Julia, à l'encre violette (avec beaucoup de ratures), sous le titre « Sur les transformations ponctuelles »¹¹.

Julia a donc déjà obtenu ses premiers résultats sur l'itération. Il n'en continue pas moins à travailler sur la théorie des formes puisqu'il publie encore deux notes à ce sujet, du fignoilage, les 11 et 25 juin. Il écrit à un ami, le 5 juillet [1970, p. 2] :

J'ai fait assez de travail l'an dernier pendant les loisirs que me laissaient de violents maux de tête, des pansements fréquents et des opérations ; j'ai rédigé une thèse que je soutiendrai je pense en novembre prochain [le 12 décembre, voir ci-dessous]. La thèse terminée, j'ai fait autre chose dont j'attends mieux et que je publierai dans quelques mois seulement, quand j'aurai assez creusé.

Entre temps, j'ai fignoilé quelques petites questions dont je ferai quelques articles [...]¹².

Cette autre chose est certainement le début de son travail sur l'itération et le mieux qu'il en attend est peut-être le Grand Prix. Il n'est pas impossible que Georges Humbert, Émile Picard ou d'autres aient incité Julia à concourir.

Paul Montel

La note [Montel 1917a] que Montel publie ce jour-là va inspirer Fatou et Julia.

À cette époque, j'ignorais les travaux de M. Montel. Mon attention sur eux fut attirée par sa Note du 4 juin 1917. Je les étudiâi à ce moment dans un tirage à part que M. Montel voulut bien m'envoyer

écrivra Julia dans sa note [1917] à propos de son premier pli cacheté.

Montel utilise sa théorie des familles normales pour étudier la représentation conforme d'ouverts simplement connexes de $\mathbf{C}$ dont la frontière n'est pas un arc analytique. C'est ce qui donne l'idée à Fatou et Julia d'utiliser cette même théorie pour étudier les ensembles compliqués qu'ils voient apparaître dans leurs travaux sur l'itération.

★

Le 4 août 1917, Émile Borel écrit la préface de son livre [1917], un cours à l'ENS, rédigé par Julia, qui aurait dû paraître en 1914, mais dont la parution a

quelques centaines de mètres de là, à l'hôpital militaire du Val de Grâce (voir [Julia 1970, p. 381]). Marguerite Borel, la femme du directeur scientifique de l'ENS, est infirmière à l'hôpital 103, ce qui fait que les normaliens blessés se retrouvent vraiment « chez eux ». Sur l'enveloppe du « pli cacheté », cette adresse n'est pas de la main de Julia mais de celle de la personne qui a enregistré le pli à l'Académie.

¹¹ Voir aussi la note 32.

¹² Le correspondant de Julia est un gendre de Poincaré. Dans la suite de sa lettre, Julia évoque donc les rapports de son travail avec celui de Poincaré.

été retardée par la guerre : lors de la mobilisation le 1^{er} août 1914, Julia avait fini les trois premiers chapitres et, a-t-il écrit à Borel¹³, il ne restait que deux problèmes à régler dans le quatrième. Julia a terminé la rédaction fin mai 1917 et corrigé les épreuves après avoir « été glorieusement blessé en janvier 1915 », écrit Borel,

[...] malgré des souffrances courageusement supportées et en même temps qu'il poursuivait de remarquables travaux personnels ; j'apprécie hautement la valeur du concours de ce jeune savant sur qui l'on peut compter pour perpétuer les traditions mathématiques françaises.

Ce qui montre d'une part les exceptionnelles capacités de travail dont disposait Julia, et de l'autre le poids des espérances que ses « pères » plaçaient en lui.

Le 27 août

L'Académie des sciences publie une note sur l'influence présumée de la canonnade sur la chute de la pluie. Julia dépose un deuxième pli cacheté (numéro 8431)¹⁴, sept pages, « Sur les substitutions rationnelles (2^e note) ».

Le 13 septembre, Painlevé est nommé premier ministre.

Le 17 septembre

Julia dépose un troisième pli cacheté (numéro 8438), quatre pages, « Sur les substitutions rationnelles ».

Le 17 novembre, Clemenceau remplace Painlevé à la présidence du Conseil.

Le 10 décembre

L'Académie des sciences tient sa séance publique annuelle¹⁵. Comme le président d'Arsonval est absent, c'est Perrier qui lit sa très sobre allocution

¹³ Julia a aussi rédigé le cours de Bôcher [1917] paru en 1917, mais donné en 1913–14 (le mathématicien américain Maxime Bôcher avait passé trois mois à la Sorbonne, un échange avec Harvard, à partir de novembre 1913 [Eisele 1971]). Julia avait fini cette rédaction avant la guerre : il n'est question ni de lui ni de ses blessures dans la préface. On le voit d'ailleurs s'inquiéter de ce texte dans ses lettres à Borel en août 1914. Pour les lettres de Julia à Borel, fonds Borel aux archives de l'Académie des sciences.

¹⁴ Les enveloppes ayant contenu les manuscrits portent la signature de la personne qui a reçu le pli cacheté et qui semble avoir été ici Lacroix, l'autre Secrétaire perpétuel.

¹⁵ Comme il se doit, la séance publique annuelle comporte une allocution du président (comme celles que nous avons déjà rencontrées, [Perrier 1915 ; Jordan 1916 ; Painlevé 1918c]), la liste des académiciens décédés pendant l'année avec quelques mots sur chacun d'eux et enfin la proclamation et la remise des prix — dont les lauréats sont normalement présents.

(mentionnant quand même que ce n'est pas encore lui qui aura la joie de « saluer l'aurore de la définitive victoire »).

Julia est venu recevoir le prix Bordin, qui lui est attribué pour les travaux de sa thèse, sur le sujet (sur lequel l'Académie n'a reçu que deux mémoires) :

Perfectionner, en quelque point important, la théorie arithmétique des formes non quadratiques.

La longueur du rapport consacré à ce travail¹⁶ et publié dans le volume correspondant des *Comptes rendus* est assez impressionnante. C'est tout simplement une reproduction du rapport que Georges Humbert a écrit sur la thèse en mai. Julia profite peut-être de sa présence en ces lieux pour déposer son quatrième et dernier pli cacheté (numéro 8466), quatre pages (dont l'une est la rédaction d'une rectification à une assertion contenue dans le deuxième pli), « Sur l'itération des fonctions rationnelles $z_1 = \varphi(z)$ ».

Une parenthèse sur la thèse de Julia s'impose ici.

Parenthèse (La thèse de Julia). Le 12 décembre (dans son CV [1970, p. 289], Julia parle de novembre, mais les dates indiquées sur le manuscrit et sur les rapports de thèse et de soutenance concordent et il s'agit bien du 12 décembre), Julia soutient sa thèse, « Étude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes, ou à indéterminées conjuguées¹⁷ ».

À cette époque, le titre officiel de directeur de thèse n'existe pas. Il est clair que le sujet sur lequel Julia a fait cette thèse est inspiré par les travaux d'Hermite, au point qu'un élève tardif de Julia à l'X croit bien se souvenir dans [Montbrial 2003] :

En géométrie, nous eûmes droit à un amphi unique de Gaston Julia. Dans cet amphi, naturellement, ce grand blessé de la première guerre mondiale ne faisait pas de mathématiques, mais il racontait tous les ans la même histoire, sur les conditions dans laquelle il avait fait sa thèse avec l'illustre Charles Hermite.

L'illustre Charles Hermite étant mort en 1901, il est probable que Julia s'est mal fait comprendre (Montbrial a suivi ce cours en 1963, Julia était âgé de soixante-dix ans et n'avait plus beaucoup de voix). Il est certain en tout cas qu'à l'époque où il préparait sa thèse, Julia a beaucoup parlé de mathématiques avec Georges Humbert et aussi avec Émile Picard. Dans une allocution prononcée en 1950, Albert Châtelet [Châtelet 1950, p. 145] s'adresse à Julia en parlant de « ton maître Georges Humbert ». Il est tout aussi certain que

¹⁶ La thèse de Julia elle-même est exceptionnellement longue (293 pages).

¹⁷ Julia a dû plus tard considérer sa thèse et les publications qui l'accompagnaient comme marginales dans l'ensemble de son travail, puisqu'il les a reléguées dans le tome 5 de ses Œuvres complètes. Nous avons vu que son premier article [1913] était déjà un travail classique d'analyse complexe. Julia est un analyste et va le montrer.

le cours de Georges Humbert de 1916 a beaucoup compté pour Julia¹⁸. Et, même si ce que l'on appelait « maître » à l'époque peut être assez varié, il semble bien que le rôle qu'Humbert a joué dans la thèse de Julia était très proche de celui d'un directeur de thèse actuel. Julia a raconté en effet :

Ces belles interprétations géométriques de faits arithmétiques m'enchantèrent. Elles me suggérèrent la thèse que je devais soutenir un an plus tard et qui intéressa vivement Humbert. Chaque semaine après le cours (qui avait lieu de 12^h30 à 14^h30), je lui exposai [*sic*] mes récentes trouvailles et il me pressait invariablement de les rédiger. Pour me surveiller plus étroitement, il m'invitait dans la propriété normande où il vivait presque en permanence et exigeait chaque jour, en plaisantant, un certain nombre de pages et de théorèmes. Puis nous allions nous promener dans la campagne. Assis sur un talus, au coin d'un champ ou d'une hêtraie, il m'expliquait ses propres travaux et, impromptu, de proche en proche, un tas de questions que j'ignorais totalement, car ma formation avait été plus analyste qu'arithmétique ou géométrique tandis qu'Humbert était plutôt algébriste et géomètre qu'analyste¹⁹.

Voir aussi [Desforge 1979]. Il n'est pourtant pas impossible que le cours Peccot donné par Châtelet [1913] lui-même en 1912 (celui que Vidil avait rédigé) ait influencé le choix du sujet de la thèse de Julia.

Toujours est-il que le jury est constitué, comme nous l'avons dit, d'Émile Picard, président, de Georges Humbert, rapporteur, et d'Henri Lebesgue, examinateur. Peut-être le délai entre la date où le rapport de Georges Humbert a été écrit (mai) et la soutenance (décembre) est-il dû aux opérations qu'a dû subir Julia. Il est certain qu'il a subi par exemple une greffe de cartilage en juin [Julia 1970, p. 1]. Peut-être aussi Picard souhaitait-il attendre la proclamation du Prix Bordin pour donner plus de solennité à la soutenance.

Il est probable en tout cas que la soutenance a été plus qu'un événement mathématique. Voici en effet ce que Picard a déclaré et que l'on peut lire dans le rapport de soutenance²⁰ :

¹⁸ Dans la nécrologie [Borel 1922], Borel indique notamment les sujets de sept cours donnés par Humbert au Collège de France, grâce aux notes que lui a communiquées Gaston Julia, qui a suivi tous les cours de Humbert de 1914 à 1920 (sauf celui de 1915) et il écrit :

Humbert a donné la vraie mesure de ses qualités de professeur, formé des élèves et exercé une influence importante sur l'orientation des études mathématiques en France.

Voir aussi les souvenirs de Paul Lévy sur les cours d'Humbert à l'x et au Collège de France dans son livre [1970, p. 37].

¹⁹ Ce texte est extrait d'un article [Julia X] de Julia dont nous avons trouvé un exemplaire (coupure de journal) dans le dossier Humbert aux archives du Collège de France sans parvenir à en déterminer l'origine (dans la suite de cet article, on voit Julia et Humbert chanter en chœur des airs de Wagner dans la campagne).

²⁰ Référence AJ/16/5542 aux Archives nationales. Et encore merci à Juliette Le-loup...

Monsieur, le travail que vous avez présenté comme thèse a été couronné avant-hier par l'Académie [nous sommes bien le 12 décembre]. On lira dans le prochain numéro des *Comptes rendus* le rapport fait à ce sujet par M. Humbert. Je ne redirai pas combien nous avons apprécié votre remarquable travail, dont la deuxième et la troisième partie témoignent d'un véritable esprit d'invention. Nous apprécions aussi les qualités morales dont vous avez fait preuve depuis trois ans. Vous avez eu la pieuse pensée de dédier votre travail à la mémoire de vos camarades de l'École normale tombés au champ d'honneur. Vous avez été plus heureux que tant de jeunes professeurs, dont la mort héroïque restera la gloire de l'École normale. Mais vous avez été cruellement éprouvé, et c'est entre de nombreuses opérations que vous avez eu l'énergie de vous livrer à des recherches mathématiques. Après les heures tragiques que nous vivons, la France aura besoin plus que jamais d'hommes de talent et de caractère. Nous comptons sur vous, monsieur, pour l'avenir. Après ce premier travail, en viendront d'autres que vous avez déjà sur le chantier. Pour aujourd'hui²¹, je suis heureux de vous dire que la Faculté vous confère le grade de docteur avec la mention très honorable, et nous y joignons nos vives et sympathiques félicitations.

On ne peut pas mieux décrire l'ambiance dans laquelle continue à se dérouler notre histoire.

Le 17 décembre

Ce jour-là, les académiciens entendent la lecture d'un télégramme de Vito Volterra²² qui remercie pour avoir été élu associé étranger dans ces termes :

= EN VOUS PRIANT VOULOIR EXPRIMER CONFRÈRES MA PROFONDE
RECONNAISSANCE TRÈS FIER GRAND HONNEUR CÉLÈBRE ACADÉMIE A VOULU ME
RENDRE JE TIENS VOUS DIRE QUE J'EN SUIS PARTICULIÈREMENT ÉMU DANS CE
MOMENT HISTORIQUE OÙ PAR UN ÉLAN FRATERNEL VOTRE NOBLE HÉROÏQUE PAYS
ENVOIE SON ARMÉE SE BATTRE À CÔTÉ DE LA NÔTRE = VITO VOLTERRA²³

Bien que ce ne soit le sujet d'aucun prix, des démonstrations du théorème de Fermat arrivent régulièrement à l'Académie des sciences. Une ce jour-là, par exemple. Mais c'est surtout ce jour-là que l'histoire publiée de l'itération commence vraiment.

Pierre Fatou

Et cette histoire commence par la publication d'une nouvelle note de Pierre Fatou [1917c], dans laquelle celui-ci annonce toute une série de résultats.

²¹ Le travail que Julia va soumettre pour le Grand Prix quelques jours plus tard est déjà annoncé. Connaissant la suite de l'histoire, il est difficile de s'empêcher d'entendre le « pour aujourd'hui » comme une promesse (?).

²² L'Italie a créé, en 1917, un *Uffizio Inventioni*, que dirige Vito Volterra. Sur l'activité de Volterra pendant la guerre, voir [Goodstein 2007].

²³ Pochette de séance, archives de l'Académie des sciences.

– S'intéressant toujours à la frontière du domaine d'attraction d'un point fixe (attractif) a , Fatou définit une partie D_a comme l'ensemble des points z du plan tels que, au voisinage de z , la suite f^n converge uniformément vers la fonction constante égale à a . Il affirme que la frontière de D_a , qu'il appelle F (sans doute parce que c'est une frontière²⁴) est un ensemble parfait (si la fonction f n'est pas linéaire) et surtout, et c'est la grande nouveauté, *qu'en un point de F , la suite des f^n ne peut pas être normale*. Dans tout disque centré en $z \in F$, chacune des f^n prend toutes les valeurs sauf au plus deux, dites exceptionnelles. Ces valeurs exceptionnelles n'existent que si (à conjugaison près), f est un polynôme ou une puissance ($z^{\pm k}$, les valeurs exceptionnelles sont 0 et ∞).

– S'il y a plus de deux points ou cycles limites, un seul des domaines de convergence D_a est connexe, les autres ont une infinité de composantes connexes. Voir l'exemple II.1.1.

– Il montre encore que l'ensemble F est l'ensemble dérivé de $\cup_{n \geq 0} R^{-n}(z)$ (pour tous les points z sauf ceux qui sont exceptionnels), que dans F , il y a en général des points fixes répulsifs²⁵ (voir l'énoncé précis dans la remarque III.1.2). Avec tout ça, l'ensemble nommé E' au I.4, dérivé de l'ensemble des points fixes répulsifs de R^n , est identique à l'ensemble F des points où la suite R^n n'est pas normale.

– Pour chaque cycle limite $a_1, \dots, a_n$, au moins un des domaines D_{a_i} contient un point critique de la fonction f^{-1} (une application des familles normales)²⁶.

– Il fait le lien avec sa note [1906d] de 1906. Et il donne de nouveaux exemples.

Exemple II.1.1. Fatou donne l'exemple de $R(z) = z^2 - 1$. Le point attractif est le point ∞ . Le domaine D_∞ (son bassin d'attraction) est connexe. Les points 0 et -1 sont échangés par R et forment un cycle d'ordre 2, qui est le seul cycle attractif. Les domaines D_0 et D_{-1} ont une infinité de composantes simplement connexes²⁷, comme le suggère la figure II.1. Il y a des points de D_∞ qui « s'infiltrant » entre les petits domaines qui constituent D_0 et D_{-1} .

Il paraît que cette image (à gauche sur la figure II.1, dessinée par Arnaud Chéritat) évoque les coupôles de la basilique Saint-Marc de Venise et leur reflet dans l'eau un jour d'acqua alta [Mandelbrot 1982, p. 185]; en tout cas elle porte aujourd'hui, chez les spécialistes de dynamique complexe, le nom de « basilique ».

²⁴ Un peu ironiquement, ce qui s'appelle aujourd'hui l'ensemble de Julia et donc se note souvent J , dont les points vont s'appeler assez vite des « points J », a vraiment été inventé par le discret Fatou sous le nom de F .

²⁵ Le mot « répulsif » n'existe toujours pas.

²⁶ C'est vrai aussi des points critiques de f , une application du lemme de Schwarz, voir [Douady 1983]. L'une ou l'autre de ces propriétés implique la finitude du nombre des cycles attractifs.

²⁷ Une « aire simplement connexe » est une aire délimitée par un seul contour.

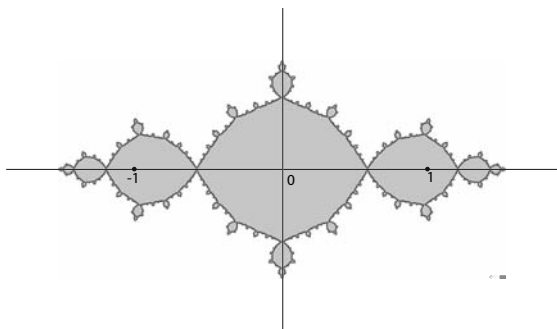


Fig. II.1. L'ensemble F pour $R(z) = z^2 - 1$ (la basilique)

Exemple II.1.2. Soit R le polynôme²⁸ défini par $R(\cos u) = \cos(2u)$, c'est-à-dire

$$R(z) = 2z^2 - 1, \text{ qui est conjugué à } P(z) = z^2 - 2.$$

Le seul point fixe attractif est ∞ et $D_\infty = \mathbf{C} - [-1, 1]$. Ici $\theta(u) = \cos u$ est la fonction de Poincaré définie au § I.6.

On a d'ailleurs $R^n(z) = z$ avec $z = \cos u$ si et seulement si $\cos(2^n u) = \cos u$ c'est-à-dire si et seulement si

$$u = \frac{2k\pi}{2^n \pm 1}.$$

Tous ces points sont répulsifs. Les valeurs de $\cos u$ correspondantes sont denses dans $[-1, 1]$. Donc E' est le segment $[-1, 1]$. Comme dans le cas de l'exemple I.4.1, l'ensemble E' (ou F) est un « continu linéaire²⁹ ».

Le 24 décembre

En cette veille de Noël, l'Académie reçoit une lettre de Gaston Julia, qui deviendra, une semaine plus tard, sa note [1917]. C'est le même jour que Julia dépose son manuscrit concourant pour le Grand Prix au secrétariat de

²⁸ Fatou considère plus généralement ceux définis par $R(\cos u) = \cos(2ku)$ et par $R(\sin u) = \sin(2k+1)u$ (les polynômes de Tchebychev).

²⁹ Il ne semble pas qu'il y ait dans les travaux considérés ici de définition précise de l'expression « continu linéaire ». Le segment qui apparaît ici est certainement un continu linéaire... continu voulant sans doute dire connexe et linéaire indiquant une « courbe » — l'expression cohabite souvent avec celle de « continu superficiel », plutôt en dimension 2 cette fois. Voir aussi la note 12 du chapitre III.

l'Académie des sciences [Julia 1917, note 2]. Il apporte la lettre en même temps. Il affirme dans cette lettre que les résultats annoncés par Fatou dans la note [1917c] sont contenus dans ses plis cachetés et demande l'ouverture de ceux-ci. Les plis sont ouverts en séance (les enveloppes vides sont conservées dans la pochette de cette séance) et l'Académie nomme Georges Humbert pour les étudier. Une coïncidence : au cours de la même séance, Hadamard transmet une note de Hardy et Littlewood [1917], dans laquelle ceux-ci généralisent un théorème de la thèse de Fatou [1906c] (sur les séries de Fourier) — les *Comptes rendus* publient aussi une note sur le son du canon à grande vitesse.

Le 31 décembre

L'Académie des sciences joue ici son rôle de validation des découvertes scientifiques et de leur priorité et les *Comptes rendus* publient le court rapport de Georges Humbert [1917] :

La comparaison du texte des deux Notes³⁰ avec celui des quatre plis montre que l'assertion de M. Julia est fondée : ses plis renferment bien, parmi d'autres, tous les énoncés dont il revendique la priorité ; ils y figurent, soit dans les termes de l'une ou de l'autre Note, soit en des termes équivalents, parfois aussi sous une forme plus générale ou plus étendue.

Gaston Julia

La lettre de Gaston Julia est donc publiée comme note [1917]. Voici l'essentiel de son premier paragraphe³¹ :

Je viens de lire avec intérêt la Note de M. Fatou publiée dans le *Compte rendu* du 17 décembre 1917. Les résultats essentiels qu'elle contient, je les ai consignés moi-même antérieurement dans une série de quatre plis cachetés [...] L'Académie pourra, en ouvrant ces quatre plis, se rendre compte que les résultats que donne M. Fatou, aux notations et aux exemples près, s'y trouvent avec l'indication brève des méthodes suivies dont l'une, coïncidence curieuse, utilise précisément les résultats de M. Montel sur les suites normales de fonctions analytiques qu'utilise M. Fatou. L'Académie estimera, à la fois quant aux méthodes et quant aux résultats, à qui doit être attribuée la priorité. J'ajoute que mes quatre plis contiennent d'autres résultats en sus de ceux indiqués par M. Fatou, et d'autres méthodes. Et relativement aux résultats énoncés par M. Fatou, il y a des précisions nouvelles qu'on peut énoncer.

³⁰ Les deux notes dont Humbert parle ici sont [Fatou 1917c] et [Julia 1917].

³¹ Cette lettre est arrivée à l'Académie des sciences le 24 décembre. La publication des *Comptes rendus* allait donc extrêmement vite. Malheureusement, le manuscrit en a été conservé par l'auteur et ne se trouve donc pas aux archives de l'Académie des sciences.

On a, paraît-il (voir [Alexander 1994, p. 115]), glosé sur l'expression « coïncidence curieuse », qu'il faut pourtant prendre comme une manifestation du fait que Julia est très en colère plus que comme une insinuation. Julia n'accuse pas Fatou de lui avoir volé ses résultats. La coïncidence, ce n'est pas que tous deux travaillaient sur le sujet, sachant que celui-ci était en concours et que Fatou avait déjà abordé la question, ce n'était pas inattendu, la coïncidence, c'est plutôt que tous deux ont vu le parti qu'ils pouvaient tirer des familles normales de Montel. Il est vrai que le ton de la lettre de Julia est un tantinet arrogant — mais n'est-ce pas tout simplement l'éternelle suffisance du normalien brillant, peut-être confortée ici par l'idée que beaucoup (tout ?) lui était dû, en raison des atroces blessures qu'il avait subies. On verra plus bas ce qu'il faut penser de son affirmation que ses résultats sont plus précis que ceux de Fatou.

À la requête de Julia, Humbert et l'Académie des sciences ont décidé de lui accorder la priorité. Il y aurait pourtant bien eu un petit bémol : après tout, quand Julia écrit dans sa note

Si j'ai pris la décision de déposer ces plis, c'est qu'à la date du 21 mai 1917, M. Fatou faisait connaître dans les *Comptes rendus* quelques-uns des résultats auxquels j'étais parvenu. Aussi, dès le 4 juin, je faisais connaître [...]

il reconnaît bien une priorité à Fatou³². Mais on semble ne pas le remarquer.

Toujours est-il que Julia reprend, dans sa note, les résultats énoncés par Fatou et qu'il explicite ce qu'il a fait exactement autour de chacun d'eux :

- Il a montré qu'il y avait un point critique pour f^{-1} , mais dans le domaine *restreint*, précise-t-il sans donner la définition.

- Il a, lui aussi, évalué le nombre de points fixes possibles, de façon moins précise que Fatou³³, dit-il, mais il a amélioré ce résultat depuis.

- Après quoi, il y a eu la note de Montel [1917a] et il s'est mis à utiliser les familles normales, introduisant l'ensemble que Fatou appelle F et lui E' , étudiant ses propriétés et démontrant celles annoncées par Fatou, oubliant le cas de l'exponentielle (à cause des préoccupations liées à sa thèse, dit-il).

- Lui aussi a trouvé des exemples ayant les mêmes propriétés que celui de Fatou (l'exemple II.1.1 ci-dessus)... et même celui de $R(z) = z^2 - 2$ (qui est, Julia l'a vérifié, conjugué à l'exemple II.1.2 lié à $\theta(u) = \cos u$).

La fin 1917

Les mémoires concourant pour le prix sont déposés à la fin de 1917 (si la date limite semble ne pas se trouver dans les *Comptes rendus*, elle figure sur

³² Ceci pourrait expliquer l'aspect de ses plis cachetés : il s'agit de brouillons, raturés, sur des pages de cahier arrachées. Il a certainement voulu déposer quelque chose, le plus vite possible, après avoir vu [Fatou 1917b] paraître dans les *Comptes rendus*.

³³ Il y a une erreur dans son énoncé, voir la remarque III.1.2.

le manuscrit de Pincherle³⁴ dont nous parlerons plus bas : 31 décembre 1917). En tout cas, nous l'avons vu, Julia dit dans sa note [1917] avoir déposé le sien le 24 décembre. Nous verrons lorsque la Commission les examinera qu'ils seront au nombre de trois.

II.2 L'année 1918

Pendant toute l'année 1918, même si les concurrents ont déposé leurs mémoires, les protagonistes de l'histoire continuent à envoyer des notes aux *Comptes rendus*, reprenant ou pas des résultats contenus dans leurs mémoires. Cette année-là, le président de l'Académie des sciences est Paul Painlevé (qui n'a plus de fonctions politiques).

Le 7 janvier 1918

C'est donc à Painlevé de prononcer un discours « en prenant possession du fauteuil » (selon le jargon consacré) lors de la première séance de l'année. Ce discours fait une part importante aux recherches liées à la guerre :

[...] Si je jette les yeux dans cette salle, à côté de ceux de nos confrères que leurs fonctions mêmes ont placées à la tête des grands services de la Défense nationale, j'aperçois (je cite au hasard, et combien l'énumération serait longue si elle était complète) tel astronome qui s'est révélé artilleur inventif et tenace, tels physiciens qui ont contribué à développer les applications militaires de la T. S. F. ; tels chimistes qui, dans la guerre des gaz, ont accru nos moyens de protection et d'attaque ; tel mathématicien, tel géodésien dont les calculs ont servi à repérer et à détruire les batteries ennemies. Vous avez encouragé ou récompensé de nombreux travaux dont les résultats ont dû être tenus secrets. Vos élèves, dont beaucoup sont déjà des maîtres, les plus jeunes au front, les autres dans les universités, dans les arsenaux, dans les usines, se sont attaqués efficacement à tous les problèmes nouveaux qu'a soulevés la guerre sur terre et sur mer. Il y a quinze mois, un de nos grands chefs employait une journée entière à visiter des laboratoires de science pure, qui spontanément s'étaient consacrés à la Défense nationale, et il ne dissimulait pas les sentiments d'admiration que lui inspirait cette mobilisation scientifique ; son œil aigu d'observateur avait discerné la vérité et la délicatesse des recherches, leur ténacité allant des premiers tâtonnements jusqu'à la réalisation en série des instruments pratiques ; le merveilleux rendement de ressources bien restreintes, obtenu grâce à l'ardeur désintéressée de tous, des initiateurs come des collaborateurs les plus modestes. [...] [Painlevé 1918a].

³⁴ Dossier des prix, archives de l'Académie des sciences.

Samuel Lattès

Conformément à la déclaration de motivations accompagnant l'intitulé du Grand Prix, Lattès³⁵, utilisant l'existence, démontrée par Fatou [1917c]³⁶ d'un point fixe répulsif (pour une fraction rationnelle ayant des points fixes distincts), fonde sa note [1918a] sur l'étude de la fonction de Poincaré notée θ (voir le §I.6 pour la définition de θ). Il pose sa version du problème de l'itération :

Déterminer l'ensemble E' dérivé de l'ensemble E des conséquents z_n d'un point z arbitrairement donné.

Et il propose de l'étudier en utilisant les propriétés de la fonction θ , en particulier dans le cas des fonctions θ pour lesquelles s est un entier, par exemple une fonction trigonométrique (nous avons vu que $\theta = \cos$ pour la fraction rationnelle de l'exemple II.1.2, Lattès mentionne aussi $\theta = \tan$ pour $s = 2$ et la fraction rationnelle exprimant $\tan(2u)$ en fonction de $\tan u$) ou une fonction elliptique, comme la fonction $\wp$ dans l'exemple ci-dessous³⁷. Ces exemples sont les cas naturels dans lesquels on connaît une formule de duplication (comme $\cos(2w) = 2\cos^2 w - 1$) qui donne $\theta(2w)$ comme fraction rationnelle de $\theta(w)$. Ils figuraient donc, en tant que tels, dans l'article de Schröder [1871] — bien avant que les mathématiciens s'intéressent à l'étude de l'ensemble E' .

Exemple II.2.1. Lattès³⁸ considère la fraction rationnelle

$$R(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}.$$

³⁵ Le manuscrit de la note de Lattès conservé dans la pochette de la séance aux archives de l'Académie des sciences est rédigé à l'encre verte, d'une belle et grande écriture.

³⁶ Tout ça va très vite : Lattès utilise une note parue trois semaines plus tôt, il est à Toulouse, on ne peut pas rêver qu'il mentionne la note de Julia [1917] du 31 décembre. Par contre, il utilise la notation E' comme Julia.

³⁷ Les cas des fonctions puissances (comme dans l'exemple I.4.1), des polynômes de Tchebychev (comme dans l'exemple II.1.2) et des fonctions elliptiques (comme ici) sont des cas où la fonction de Poincaré est périodique (voire bi-périodique). Pour une étude générale moderne de ces cas, voir [Milnor 2006b].

³⁸ Les travaux de Samuel Lattès n'ont pas été reconnus à leur valeur, pensait Lebesgue qui écrivait déjà en 1910 dans son style vivant et peu conventionnel :

Il a fait des travaux intéressants, *utiles, personnels* [souligné], seulement sa thèse n'est connue que de Hadamard, qui n'en est pas épaté comme de celle de Fréchet. [Lebesgue 1991, p. 251]

En plus de ses propres travaux, ce mathématicien niçois d'origine italienne a traduit le livre [Burali-Forti & Marcolongo 1910] auquel il a ajouté un supplément sur les systèmes quaternionniens.

La fonction $\wp$ de Weierstrass associée à la courbe elliptique d'équation $y^2 = 4z(z^2 - 1)$ satisfait à la formule de duplication

$$\wp(2u) = \frac{(\wp(u)^2 + 1)^2}{4\wp(u)(\wp(u)^2 - 1)},$$

autrement dit, $\wp$ est la fonction θ de Poincaré pour R avec $s = 2$. Les conséquents de $z = \wp(u)$ sont donc les

$$z_n = \wp(2^n u).$$

Déterminer l'adhérence de la suite des conséquents d'un point z donné est alors une question d'arithmétique.

★

Ce jour-là, l'Académie des sciences discute en comité secret (voir la note 14 page 7) de la trop grande abondance des mots étrangers introduits par certains jeunes scientifiques dans leurs textes ; Picard se plaint que les éphémérides des « petites planètes³⁹ » [astéroïdes] soient calculées par les Allemands⁴⁰.

Le 14 janvier

Gaston Julia

Dans cette note [1918a] (passée à la séance du 7 janvier comme celle de Lattès [1918a], mais publiée le 14), Julia considère comme Lattès l'ensemble des conséquents $\{z_1, \dots, z_n, \dots\}$ d'un point z et son ensemble dérivé. Le problème fondamental qu'il étudie est la façon dont un point limite de cet ensemble dépend de l'origine z de la suite dont il est la limite.

- Il considère donc l'ensemble dénombrable et non vide E des points réulsifs (avec la même notation ici qu'au § I.4).

- Il annonce que l'ensemble dérivé E' est parfait.

- La structure de l'ensemble E' est la même que celle de toutes ses parties, au sens où E' est partout discontinu ou partout continu linéaire, ou partout continu superficiel⁴¹ (et il démontre dans ce cas que, si E' est d'intérieur non vide, c'est $\mathbf{C}$ tout entier — autrement dit, s'il y a un point dans E' qui n'est pas dans $\mathbf{C}$, alors E' est d'intérieur vide). Il ne donne aucun exemple (tout simplement parce qu'il n'en avait pas encore trouvé [Julia 1918f, p. 105]).

- Lorsque E' n'est pas $\mathbf{C}$ tout entier, Julia étudie enfin les régions du plan délimitées par E' .

³⁹ Le rapport de l'Observatoire de Paris pour 1916 mentionne en effet que, faute d'éphémérides, on a ajourné l'observation des astéroïdes.

⁴⁰ Registre des comités secrets, archives de l'Académie des sciences.

⁴¹ Voir la note 29.

Le 28 janvier**Samuel Lattès**

Dans la note [1918b], passée à la séance du 21 janvier, Lattès commence son étude des fractions rationnelles à deux variables⁴²

$$(z_1, z_2) \longmapsto (R_1(z_1, z_2), R_2(z_1, z_2)).$$

Il considère la question « paramétrique », c'est-à-dire avec fonction θ , comme au §I.6 et s'intéresse au cas où il existe un point (z_1, z_2) en lequel les deux multiplicateurs⁴³ s_i satisfont à $|s_i| > 1$. Il étudie en particulier le cas d'une transformation de Cremona (cas où R_1 et R_2 sont des polynômes).

Cette note contient une petite erreur, qui sera signalée, quelques années plus tard, par Fatou [1924b] (voir ici la note 27 du chapitre V).

Gaston Julia

Dans sa note [1918b], Julia commence par se saisir de l'exemple que Lattès vient de publier [1918a] (ici l'exemple II.2.1) et signale que, dans cet exemple, l'ensemble E' est « identique au plan complet », c'est $\mathbf{P}_1$ tout entier : on choisit $u = 2\omega(v + iw)$ avec v et w des rationnels qui ont un développement en base 2 qui est périodique de période n ; alors $2^n u \equiv u$ modulo le réseau, u est alors un point fixe répulsif de R^n et, bien sûr, de tels u sont denses dans le parallélogramme de périodes.

Il étudie ensuite les régions du plan délimitées par son ensemble E' , quand celui-ci n'est pas le plan tout entier.

Le 4 février**Pierre Fatou**

Les *Comptes rendus* publient la note [Fatou 1918a]⁴⁴, dans laquelle Fatou montre que la frontière d'un ouvert invariant simplement connexe contenant un point fixe attractif ne peut être un arc analytique que si cet ouvert est un disque (et sa frontière un cercle!).

⁴² Le titre de sa thèse l'indique (voir page 22), Lattès est un spécialiste des équations fonctionnelles pour des fonctions de plusieurs variables, sur lesquelles il a publié plusieurs articles.

⁴³ Pour définir les multiplicateurs s_1 et s_2 en un point fixe, on change de coordonnées au voisinage de ce point fixe (ramené en 0) de façon à ce que la transformation s'écrive

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s_1 z_1 + F_1(z_1, z_2) \\ s_2 z_2 + F_2(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

où F_1 et F_2 ne contiennent pas de terme de degré 1. Samuel Lattès a déjà étudié le cas où $|s_1|$ et $|s_2|$ sont tous deux < 1 dans [Lattès 1911].

⁴⁴ Pierre Fatou, qui n'a pas envoyé de mémoire pour le Grand Prix, intitule *dorénavant* ses travaux « Sur les équations fonctionnelles », alors que les deux notes

Le 4 mars

La paix de Brest-Litovsk entre la Russie soviétique d'une part et les « empires centraux », l'Allemagne, l'Autriche-Hongrie, la Turquie et la Bulgarie de l'autre, a été signée la veille.

Joseph Fels Ritt

Au moment où deux millions de soldats américains partent ou se préparent à partir pour l'Europe, notons l'apparition d'un Américain dans notre histoire⁴⁵, Joseph Fels Ritt (1893–1951), qui sera un des fondateurs de l'algèbre différentielle et qui est déjà un spécialiste des équations différentielles. Il a lui aussi obtenu des résultats sur l'itération, dont une partie a été présentée à l'*American Mathematical Society*... le 27 décembre 1917⁴⁶, qui sont en relation intime avec les théorèmes publiés récemment par Fatou, et qui vont paraître, pense-t-il, au *Bulletin de l'AMS*. Il envoie donc aux *Comptes rendus* sa note [1918] dans laquelle il présente ceux de ses « théorèmes qui ne semblent pas identiques à ceux de M. Fatou et quelques autres qui [lui] paraissent être entièrement nouveaux ». Il utilise notamment l'application de Poincaré près d'un point fixe réplusif. Il donne des propriétés de la fonction θ grâce auxquelles il arrive à des résultats assez forts : près d'un point fixe de R , il y a une infinité de points fixes de R^n , en utilisant les ordinaux transfinis, dit-il. Lui aussi montre que l'ensemble des points d'accumulation des antécédents d'un point donné contient un ensemble parfait dans lequel tous les antécédents des

publiées avant la colère de Julia portaient le titre « Sur les substitutions rationnelles ». Fatou continue à travailler et à publier ses résultats mais se démarque, dans ses titres, du sujet du concours. Il me semble que l'appréciation de [Alexander 1994, p. 124] selon laquelle le titre « équations fonctionnelles » sentirait un peu son dix-neuvième siècle est un peu un contre-sens et en tout cas ne tient pas compte du fait que Fatou a changé de titre au cours de l'histoire racontée ici.

⁴⁵ D'autres Américains ont déjà contribué à l'histoire du sujet ou de sujets proches, notamment Edward Kasner (avec qui Ritt a fait sa thèse) et George Pfeiffer, mais il ne semble pas que nos protagonistes connaissent leurs travaux. Voir ici le § IV.4.

⁴⁶ La vingt-quatrième réunion annuelle de la société a en effet lieu les 27 et 28 décembre à New York. Ritt y présente son travail « *On the iteration of rational functions* » ; le secrétaire de la séance en prend note, de sorte qu'il y en a un résumé dans le volume 24 du *Bulletin* (page 272). L'article ne paraîtra pas. Le fait que Fatou et Julia aient annoncé des résultats analogues et la publication de la note [Ritt 1918], ont dû dissuader Ritt, ou le *Bulletin of the American mathematical society*, de le publier. En 1920, il publiera aux *Transactions* de l'AMS [1920] ceux de ses résultats qui ne sont pas dans les mémoires de Fatou et Julia,

I wish to present here that small part of my work which has not been covered by the other writers, postponing until after the appearance of their memoirs the publication of such of my other results as may still be of interest.

points répulsifs sont contenus (un des résultats annoncés par Lattès [1918a]). Dans le cas où R est un polynôme, il énonce clairement une dichotomie⁴⁷ en termes du bassin d'attraction de ∞ :

- soit toutes les orbites des points critiques de R restent bornées (et alors le bassin d'attraction de ∞ dans $\mathbf{P}_1$ est connexe et simplement connexe),
- soit une des orbites d'un point critique tend vers ∞ et alors le bassin en question est multiplement connexe.

De même que Lattès, il n'utilise pas les familles normales. Parmi les résultats qu'il utilise, le théorème de Böttcher, qui est, nous l'avons dit, l'outil indispensable pour étudier le voisinage de ∞ dans le cas d'un polynôme.

C'est dans cette note que le mot « répulsif » apparaît, sous la forme « point de répulsion », accompagné du « point d'attraction », comme le montre la lecture des articles mentionnés ici (ce sera confirmé par Ritt dans son article [1920]). La terminologie efficace attractif/répulsif est donc due à un Américain⁴⁸ (écrivant en français) ! De quoi reconforter les Académiciens inquiets de l'utilisation excessive de mots étrangers (voir le comité secret du 7 janvier, mentionné ci-dessus). Par contre, Ritt nomme aussi « point de circulation » un point fixe où la dérivée vaut 1, mais cette terminologie moins heureuse n'est pas passée à la postérité...

Le 18 mars

Gabriel Koenigs, un des ancêtres de l'itération, est élu membre de l'Académie des sciences dans la section de mécanique (en remplacement d'Henri Léauté).

Le 25 mars

Les offensives allemandes ont repris, Paris a été bombardé deux jours plus tôt par les *Pariser Kanonen*.

Samuel Lattès

À la suite de la note de Ritt [1918], Lattès reprend dans la sienne [1918c] l'utilisation de l'application de Poincaré. D'après le théorème de Picard, la fonction entière θ de Poincaré prend toutes les valeurs sauf peut-être deux, α et β . Lattès fait le lien avec l'approche de Fatou et Julia : si z est un point de

⁴⁷ Qui est aujourd'hui classique (et qui est donnée ici en termes modernes), entre les cas où l'ensemble de Julia est connexe et celui où il a une infinité non dénombrable de composantes connexes — mais ce n'est pas l'ensemble de Julia que décrit Ritt.

⁴⁸ Elle devra faire l'objet d'une sorte de double traduction pour devenir aussi efficace en anglais : Ritt écrit [1920] *point of attraction*, *point of repulsion*, pour ce qui s'appelle aujourd'hui *attracting point*, *repelling point*.

la frontière d'un domaine d'attraction, les $R^n(z)$ prennent toutes les valeurs sauf peut-être deux, qui ont les mêmes α et β .

La note [Lattès 1918c] est parue sous le titre « Sur l'itération des fractions irrationnelles », une coquille dans le titre... elle a été suivie d'un *erratum*. Il y avait déjà eu un *erratum* pour une coquille très visible (mais qui ne venait pas du manuscrit) dans une formule de la note [Lattès 1918a]. Apparemment, Lattès n'a pas corrigé ses épreuves avec beaucoup de soin.

Le 15 avril

Gaston Julia

Dans cette note [1918c], transmise la semaine précédente, Julia donne des exemples d'ensemble E' pour la note de Fatou [1918a] du 4 février. Il présente dans cette note des résultats contenus dans le mémoire qu'il a déposé pour le Grand Prix. Notamment le fait que les domaines de convergence vers un point fixe attractif (il utilise la terminologie « point limite à convergence régulière » mais ne doit pas y croire vraiment puisqu'il signale « point d'attraction » dans une note infrapaginale), ne sont multiplement connexes que si leur ordre de connexion est infini, c'est-à-dire, sont simplement connexes (comme un disque), doublement connexes (comme un anneau) ou un un groupe fondamental à une infinité de générateurs. Il donne trois exemples. Le premier est l'exemple de Fatou [1906d] que nous avons appelé ici exemple I.4.3, dans lequel il affirme que les lignes séparant les domaines de convergence (dont Fatou avait déjà signalé qu'ils n'étaient pas analytiques) forment une courbe de Jordan. J'explicite les deux autres ici.

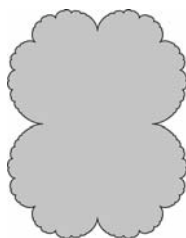


Fig. II.2. Un chou-fleur, $R(z) = z^2 + \frac{1}{4}$

Exemple II.2.2.

Il s'agit d'une perturbation d'un exemple simple, deux points attractifs symétriques par rapport à un cercle (comme dans le cas de $r(z) = z^2$, ici

l'exemple I.4.1 où ces deux points sont 0 et ∞). Julia dit pouvoir perturber r en R de façon que R ait deux points fixes attractifs proches des points attractifs initiaux, une courbe limite fermée simple (de Jordan) proche du cercle... mais aussi telle que, en aucun point de E , la courbe en question n'ait de tangente. Pour les lecteurs modernes : l'ensemble E' est un intermédiaire entre la figure I.1 (le cercle) et la figure I.2 (une poussière), comme par exemple la figure I.4 (cercle à fossettes) ou encore ce que l'on appelle aujourd'hui (suivant Douady) un « chou-fleur » et qui est représenté sur la figure II.2.

Exemple II.2.3 (... avec digressions). La fraction rationnelle est

$$R(z) = \frac{-z^3 + 3z}{2}.$$

Julia montre la forme de la courbe séparant les bassins d'attraction des points 1 et -1 , en lesquels $R'(1) = R'(-1) = 0$ (ce que l'on appelle aujourd'hui des points superattractifs). Le troisième point fixe à distance finie est 0 et il est répulsif. Julia indique une construction itérative donnant une courbe ayant, comme celle qui apparaît ici, la propriété de n'avoir de tangente en aucun point, analogue à celle construite par von Koch [1906]⁴⁹ (le mémoire contiendra la référence, mais ce n'est pas le cas de cette note, pourtant les triangles utilisés semblent bien en avoir été inspirés) : partir de deux triangles équilatéraux, ajouter six triangles équilatéraux huit fois plus petits, et ainsi de suite⁵⁰, comme sur la figure II.3.

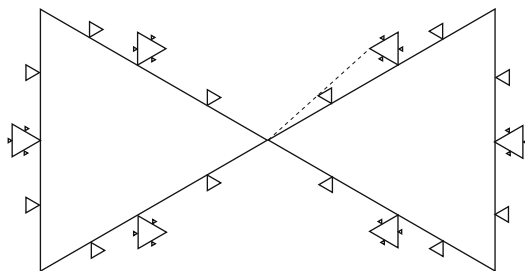


Fig. II.3.

Il était certainement encore nécessaire de donner et de redonner des exemples de ce qui était encore considéré, peu de temps auparavant, comme des monstruosités. Nous ne sommes pas si loin de l'« épistolaire bêtise d'Hermite »,

⁴⁹ Les ensembles totalement discontinus de l'itération, la courbe de von Koch, bientôt l'ensemble triadique de Cantor... Il reste à noter que le triangle de Sierpinski est apparu [1915], dans les *Comptes rendus*, peu de temps auparavant.

⁵⁰ Une remarque un peu hors-sujet mais irrésistible au milieu de ces questions de priorité : Paul Lévy raconte dans ses souvenirs [1970] qu'il a découvert la courbe de von Koch à l'âge de seize ans, en 1902 (quatre ans avant la parution de [von Koch 1906], donc). Voir aussi la note 61 du chapitre VI.

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivée

(en 1893, voir [Baillaud & Bourguet 1905b]) que Darboux répétait encore avec insistance vers 1906, d'après [Lebesgue 1991, p. 136] et que l'on cite souvent. À la décharge d'Hermite, mentionnons une façon plus délicate d'exprimer, certes son horreur, mais aussi sa « soumission », dans une lettre à du Bois-Reymond du 17 mai 1885 [Lampe 1916]⁵¹ :

Mais je ne sais quelle force d'inertie me retient dans un temps plus heureux et maintenant loin de nous, dans l'âge d'or de l'analyse, où jamais l'existence de la dérivée ne faisait une question, de sorte que ce n'est pas sans un sérieux effort, une grande gêne, je vous l'avouerai, que je me plie aux exigences, aux dures nécessités du temps présent en fait de rigueur.

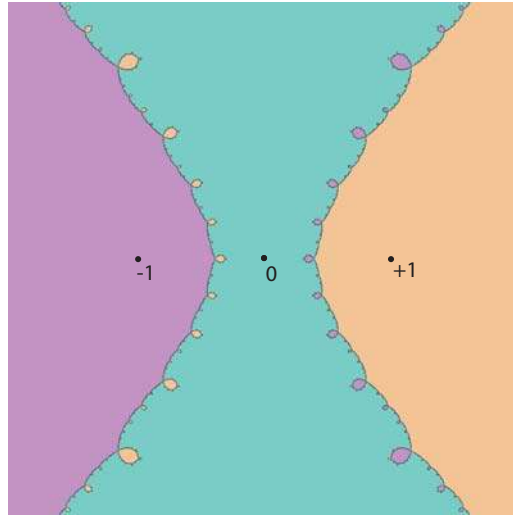


Fig. II.4. La méthode de Newton pour $z(z^2 - 1)$

Julia le signalera plus tard (cet exemple occupera dix-huit pages dans son mémoire [1918f]), l'itération de cette fraction rationnelle est liée à l'utilisation de la méthode de Newton pour trouver les racines du polynôme $z(z^2 - 1)$. La fraction rationnelle R étudiée ici est conjuguée (par $w = 1/z$) à

$$S(w) = \frac{2w^3}{3w^2 - 1} = w - \frac{w(w^2 - 1)}{3w^2 - 1}$$

⁵¹ Ce n'est certainement pas par hasard que ces lettres des années 1880 ont été publiées, en pleine guerre, en 1916 et en Allemagne : elles sont emplies de l'expression de la foi d'Hermite en la coopération scientifique, au-dessus des divisions entre la France et l'Allemagne..

donnée par la méthode de Newton pour trouver les racines de $w(w^2 - 1)$. Les points fixes ∞ , 1 et -1 de R correspondent aux points fixes 0, 1 et -1 de S (c'est pourquoi ils sont superattractifs, c'est toujours le cas avec la méthode de Newton pour un polynôme à racines simples). En principe, itérer la fraction rationnelle R devrait « donner » les racines de ce polynôme. Oui, mais... en partant de quel point ? Les bassins d'attraction de 1 et -1 sont constitués des points dont les itérés convergent vers ces racines. On voit ici (figure II.4) que la convergence de la méthode de Newton est plus compliquée que ce que l'étude du degré 2 pouvait laisser imaginer (voir la note 80 du chapitre I).

★

Encore une coïncidence : au cours de cette même séance du 15 avril, Georges Humbert présente une note [1918] dans laquelle il étend (au cas de formes quadratiques indéfinies) un théorème d'une « Note extrêmement remarquable » de Fatou [1906a].

En mai, Samuel Lattès tombe malade, d'une fièvre typhoïde. Le 5 juillet, il meurt, à l'âge de 45 ans⁵².



Samuel Lattès (1873–1918)

Le 8 juillet

En réunion en comité secret, l'Académie commence à décider à qui elle va décerner ses prix. Ce jour-là, elle décide d'attribuer le prix Francœur à Paul Montel.

Le 18 juillet commence la deuxième bataille de la Marne.

⁵² Pour en savoir plus sur la vie, la mort, et les travaux de Samuel Lattès, voir [Montel 1919 ; Buhl 1921].

Septembre

Victoires de l'Alliance.

Le 28 octobre

La réunion des académiciens en comité secret discute des organisations scientifiques qu'il y aurait intérêt à faire revivre parmi les Alliés⁵³.

Elle continue à écouter les rapports sur les prix. Elle décide d'attribuer à Fatou un prix de 2 000 F (de la fondation Henri Becquerel) « pour ses travaux sur la théorie des séries et l'itération des fractions rationnelles » et une partie du prix Gegner à Lattès (une aide financière de 2 000 F pour sa famille).

Les membres de l'Institut retenus à Lille pendant l'occupation de cette ville par l'armée allemande⁵⁴ protestent contre les exactions commises.

Il est touchant de constater que, guerre ou pas guerre, l'Académie des sciences continue à recevoir son contingent de lettres de loufoques — et ce jour-là, c'est un parfumeur de Perthuis (Vaucluse) qui s'inquiète du mémoire sur la quadrature du cercle qu'il a envoyé quelques semaines plus tôt.

Le 4 novembre

La veille, l'Autriche-Hongrie a signé l'armistice avec les alliés.

La réunion de l'Académie des sciences en comité secret se tient en deux parties. L'une d'elles est consacrée à écouter des rapports qui vont mener à l'élection de Foch (oui, du Maréchal Foch, le chef d'État-major général) comme académicien libre. La guerre est plus que présente. Pendant la seconde partie, les académiciens continuent à attribuer les prix.

M. Émile Picard dépose le rapport sur le Grand prix des Sciences mathématiques qui conclut à l'attribution du prix à M. Julia, une mention très honorable serait faite au travail de M. Lattès. Adopté.

⁵³ Une réunion s'est tenue à Londres du 9 au 11 octobre au cours de laquelle les Académies scientifiques des pays alliés ont arrêté des résolutions quant aux futures relations avec les savants allemands [Painlevé 1918c, p. 802]. L'armistice est proche... et le boycott scientifique de l'Allemagne et de ses alliés est déjà décidé.

La réunion d'octobre est suivie d'une deuxième, à Paris du 26 au 29 novembre, puis d'une troisième, à Bruxelles, du 18 au 28 juillet 1919 (moins d'un mois après la signature du traité de Versailles le 28 juin), qui met en place le Conseil de recherches (sous la présidence de Picard). On trouvera les conclusions de ces réunions dans [EnsMath 1920] pour les conférences de Londres et de Paris et dans [EnsMath 1921] pour celle de Bruxelles. Voir ce que Picard lui-même en dit dans son allocution [1921] au Congrès de Strasbourg.

⁵⁴ La ville de Lille a été occupée par l'armée allemande du 12 octobre 1914 au 17 octobre 1918. Pour une brève histoire de cette terrible période, voir [Pierrard 1992].

Le mémoire de Julia contenait pourtant une faute, qui le rendait, disons, lacunaire (voir la remarque III.1.2) et qu'il corrigera avant la publication.

La commission qui a examiné les mémoires (identique à celle qui a attribué le Prix Bordin à Julia un an plus tôt) était formée de Jordan, Appell, Painlevé, Hadamard, Boussinesq, Lecornu ; les rapporteurs étaient Émile Picard et Georges Humbert. On notera que Gabriel Koenigs n'en était pas membre, mais elle avait été constituée avant son élection.

Le 11 novembre

Au moment-même, dira Painlevé [1918c] trois semaines plus tard, où l'armistice est signé, le maréchal Foch est élu membre de l'Académie des sciences. Ce jour-là, Madame Lattès remercie l'Académie de la distinction accordée aux travaux de son mari.

Parenthèse (Jeanne Lattès). Samuel Lattès avait épousé, en 1910, une de ses élèves montpelliéraines, Jeanne Ferrier. Ils avaient une petite fille (voir [Buhl 1921]). Titulaire d'une licence de mathématiques et d'une licence de physique, Jeanne Lattès était professeur au lycée de garçons de Tarbes. Grâce à une bourse Carnegie, elle est devenue en 1921 une collaboratrice de Marie Curie à l'Institut du radium. En 1924, dans une note [Lacassagne & Lattès 1924]⁵⁵ avec Lacassagne, elle inventait une technique qui permet de détecter la présence et de préciser la localisation intracellulaire d'un élément radioactif injecté (au nombre des travaux qui en ont découlé, ce serait une des plus importantes découvertes de la biologie au ^{xx}e siècle, d'après [Latarjet 1979]). En 1926, elle passait sa thèse [Lattès 1926]. En 1930, à la suite d'alertes de santé, elle a quitté l'Institut du radium pour l'Institut Henri Poincaré (la porte à côté) comme assistante de calcul des probabilités auprès d'Émile Borel, et elle y est restée jusqu'à son départ à la retraite en 1958. Voir la rubrique nécrologique [Latarjet 1979] et une belle photo de Jeanne Lattès, au travail, dans le jardin de l'Institut du radium, dans [Devaux 2004].

Le 18 novembre

Le président (Painlevé) accueille Foch à l'Académie des sciences en ces termes :

Il y a cent vingt-deux ans⁵⁶, l'Académie des sciences accueillait dans son sein le vainqueur d'Arcole et de Rivoli ; aujourd'hui, pour reprendre les paroles lapidaires que vous adressiez hier aux soldats de la République, nous saluons en vous, monsieur le Maréchal, le vainqueur de la plus grande bataille

⁵⁵ Affirmation de sa fidélité à la mémoire de son mari ou ombre portée, par les règlements des *Comptes rendus* ou par elle-même, sur le fait qu'elle est une femme, ses notes sont signées Lattès (nom), J. Samuel (prénom).

⁵⁶ C'est cent vingt-et-un ans plus tôt que Napoléon Bonaparte a été élu académicien des sciences (le 5 nivôse an VI ou 25 décembre 1797).

de l'Histoire et le défenseur victorieux de la plus noble des causes : la liberté du monde. [Painlevé 1918b]

Sur cette séance, il existe un témoignage de René Garnier⁵⁷ écrit cinquante ans après. René Garnier était venu à l'Académie des sciences ce jour-là, pour remettre une note à Appell afin qu'il la présentât, il se souvient avec émotion de l'entrée solennelle de Foch en uniforme, encadré par Painlevé et Picard.

Le 2 décembre

Ce jour-là se tient la séance publique annuelle. Elle s'ouvre par l'allocution du président — une chance que ce soit à un authentique homme politique que revienne la joie tant attendue de célébrer la victoire. J'ai déjà cité page 27 le passage de ce discours concernant le sacrifice des jeunes scientifiques. Après les théories de Picard sur l'« esprit germanique » dans la science allemande, il est rassurant de voir l'argumentation changer de niveau [Painlevé 1918c, p. 800] :

[...] car il n'y a point une géométrie française et une géométrie allemande ; il y a une géométrie. Mais, ainsi que le même fer peut servir à moissonner ou à tuer, l'inflexible raison humaine peut être employée aux fins les plus généreuses ou aux plus abominables forfaits. La culture scientifique, âprement poursuivie dans un but d'utilisation immédiate, de lucre sordide ou de domination oppressive, dégrade l'âme au lieu de l'élever au-dessus d'elle-même. Elle aboutit à une sorte de barbarie savante, de cruauté organisée qui prend pour ses adeptes l'aspect d'une religion sauvage, dont tous les crimes sont sacrés et devant qui les infidèles doivent plier les genoux.

Ce n'est pas que les Allemands ont une façon de penser différente, germanique, mais c'est que leurs dirigeants politiques ont donné de mauvaises fonctions à la science. Il développe, remercie les Américains et envisage l'avenir des collaborations scientifiques [Painlevé 1918c, p. 802] :

[...] il ne suffit pas que le militarisme prussien soit abattu et momentanément réduit à l'impuissance : il faut que la mentalité allemande soit transformée. Tant que l'Allemagne n'aura pas renoncé au fond d'elle-même à son idéal sanglant d'oppression, de rapines et de violences ; tant qu'elle n'aura pas pris conscience et horreur de ses crimes, il n'y aura pas de réconciliation possible, fût-ce pour une collaboration scientifique, entre elle et l'humanité.

Il dresse ensuite la liste de rigueur des académiciens décédés en cours d'année, puis revient à la participation à l'effort de guerre pour annoncer ce que devrait être l'organisation de la recherche en France, dans une fin de discours résolument politique (et moderne).

Puis il donne la parole au Secrétaire perpétuel pour la lecture du palmarès. J'ai déjà cité ci-dessus le début du rapport sur le Grand Prix. Ce rapport est long (presque quatre pages), détaille l'apport de Lattès et celui de Julia, puis rappelle la « querelle » avec Fatou (qui n'a pas eu lieu) en ces termes :

⁵⁷ Dossier René Garnier, archives de l'Académie des sciences.

Au fur et à mesure de sa recherche, M. Julia avait consigné ces résultats dans des plis cachetés, déposés à l'Académie ; postérieurement au dépôt du dernier pli, et en décembre 1917, un géomètre connu, M. Fatou, auquel la théorie de l'itération devait déjà d'intéressants progrès dans une voie nouvelle, énonçait aux *Comptes rendus* la plus grande partie des mêmes résultats, qu'il avait obtenus de son côté et par la même méthode, en utilisant, lui aussi, les propriétés des suites normales de M. Montel : ce n'est pas la première fois, dans l'histoire de la Science, qu'on aura vu deux savants de valeur arriver en même temps, par la même marche, à une même découverte⁵⁸.

Il se conclut par des louanges sur les qualités mathématiques du mémoire de Julia et la décision de lui décerner le prix et d'attribuer une mention très honorable au travail de Lattès. Nous l'avons dit, Fatou reçoit 2000 F de la fondation Becquerel, le Prix Francœur est décerné à Montel « pour ses travaux sur les suites de fonctions analytiques ». Tous nos protagonistes — tous nos protagonistes français — sont donc récompensés.

L'Académie n'a reçu que trois mémoires. Ceux de Julia et de Lattès, et celui du mathématicien italien Salvatore Pincherle (qui n'est pas nommé dans le rapport de Picard).

Sur Salvatore Pincherle

Salvatore Pincherle (1853–1936), l'auteur du troisième mémoire, est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il a étudié notamment avec Weierstrass. À l'époque dont nous parlons, il était professeur d'analyse infinitésimale à Bologne. Il a envoyé son mémoire « Sur l'itération de la substitution $x^2 - a$ » sous la devise « *La verità, che tante ci sublima...* Dante⁵⁹ ». Ses propres contributions au problème de l'itération constituent une partie très marginale de son œuvre. Comme son titre l'indique, son mémoire consiste en l'étude des transformations $R(z) = P(z)/Q(z)$ de degré 2, qui se ramènent par homographie à $R(z) = z^2 - a$ (il s'agit des polynômes quadratiques qui produiront, bien plus tard, l'ensemble de Mandelbrot). Il considère seulement le cas où a est un réel strictement positif, mais il fait une étude assez précise de l'« ensemble de Julia » (qu'il n'appelle évidemment pas ainsi mais qu'il nomme $\mathbb{Z}$) selon la position de a par rapport à 2. Les six parties de son mémoire s'intitulent

⁵⁸ Citons encore une fois le rapport d'Hadamard sur Fatou :

Elle [l'Académie des sciences] a ainsi obtenu les travaux de premier ordre de M. Julia et aussi de M. Lattès, qui ont constitué pour la science mathématique française un grand succès, montrant au lendemain de la guerre, qu'elle gardait sa vitalité et sa puissance.

⁵⁹ Dossier des prix, archives de l'Académie des sciences. Pour ce type de concours, la règle est d'envoyer un mémoire anonyme identifié par une devise ainsi qu'une deuxième enveloppe portant la même devise et contenant le nom de l'auteur. Les devises utilisées par Julia et Lattès nous sont inconnues.

- I Préliminaires,
- II $a > 2$,
- III $a = 2$,
- IV $a < 2$,
- V Domaines de convergence régulière et irrégulière,
- VI Équations fonctionnelles.

Il serait injuste de dire que ce travail ne consiste que d'exemples — il faut dire que Pincherle lui-même répète en conclusion qu'il n'a étudié qu'un cas très particulier. Ces résultats ont fait l'objet de plusieurs notes dans les académies italiennes. Voir sa liste de travaux [1925]. Il est aussi l'auteur de l'article sur les équations et opérations fonctionnelles dans l'*Encyclopédie* allemande (et aussi dans l'édition française), un article un peu désuet — dont les § 33 à 38 sont consacrés à l'itération.

Salvatore Pincherle a aussi été le premier directeur de l'Union mathématique italienne en 1921 et le président du congrès international des mathématiciens de Bologne en 1928, ce qui n'a pas été une tâche facile, voir ici page 191, il y a d'ailleurs fait un discours dont, pour situer le contexte politique, nous citons quelques lignes [Pincherle 1929a] :

L'Homme exceptionnel que la fortune de l'Italie a fait surgir pour qu'il en dirige les destinées a approuvé notre ligne de conduite ; le Congrès a eu son appui [...]

Mussolini était en effet un des présidents du Congrès.

Pourquoi Fatou n'a-t-il pas concouru ?

On l'a compris : Fatou n'a pas envoyé de mémoire. Ses deux notes [1917b ; 1917c] n'étaient pourtant que la partie visible d'un iceberg qui sera publié en trois parties en 1919–1920, au total près de trois cents pages, et qui indiquent qu'il avait bien l'intention de concourir pour le grand prix.

Le rapport de la commission du prix le dit presque explicitement : si Fatou avait concouru, l'Académie aurait dû partager le prix. Il est certain aussi qu'un Grand Prix des sciences mathématiques aurait accru ses chances d'obtenir un poste de mathématicien.

Quant aux raisons pour lesquelles il n'a finalement pas concouru, laissant la place libre à Julia, on ne peut que les imaginer. Les 2 000 F de la fondation Becquerel lui ont été attribués pour « ses travaux sur la théorie des séries et l'itération des fractions rationnelles »... ce qui est très proche de l'intitulé du grand prix. Lui a-t-on demandé de ne pas concourir ? S'est-il retiré de lui-même après la note [Julia 1917] de Julia en décembre ? On a pu imaginer aussi que le fait de ne pas avoir fait la guerre, qui a culpabilisé plus d'un réformé, avait pu retenir Fatou. Il était peut-être tout simplement malade, comme le dit Hadamard dans le rapport de 1921 que nous avons déjà cité plusieurs fois :

son état de santé [l'] avait empêché de participer au concours en temps utile.

Il a pourtant envoyé des notes publiées le 17 décembre 1917 et le 4 février 1918, comme nous l'avons vu. Ce ne pouvait donc pas être une très grave maladie ! Le plus probable est qu'il a décidé de ne pas concourir parce que la compétition ne lui convenait pas — et le ton de son concurrent non plus. Il me semble que le changement d'intitulé de ses travaux signalé dans la note 44 va dans ce sens. Voir quelques éclairages sur la personnalité de Fatou au chapitre V.

Le 23 décembre

Pierre Fatou

Les prix ont été proclamés, Fatou n'a pas concouru, mais ça ne l'empêche pas de continuer à travailler. Il publie encore une note [1918b]⁶⁰ dans laquelle il démontre que, lorsque le complémentaire de notre ensemble E' , ou F , a deux composantes connexes, domaines d'attraction de deux points fixes attractifs, la courbe qui les sépare n'a de tangente en aucun point (sauf si c'est un cercle). Si l'un des points fixes devient⁶¹ indifférent, c'est-à-dire ici, comme Fatou le précise⁶², de multiplicateur $s = +1$, la courbe acquiert un point de rebroussement, qui est le seul où elle a une tangente.

Cette année-là, Julia a encore publié deux notes aux *Comptes rendus* [1918d ; 1918e], dont la dernière suit immédiatement [Fatou 1918b], mais sur de tout autres sujets.

Communication ?

Une question intéressante, à laquelle nous reviendrons (au § V.8), serait de savoir si, durant cette période, Fatou et Julia ont parlé, entre eux, de leurs travaux mathématiques (une sous-question serait : où pouvaient-ils se rencontrer ?).

⁶⁰ Alors que toutes les notes sur l'itération de Fatou, Julia et Lattès de 1917–18, de même que celle de Montel, sont parues sans nom de présentateur, celle-ci est présentée par Georges Humbert.

⁶¹ Le mot « devient » est dans le texte. On remarquera l'aspect dynamique, le côté « variation d'un paramètre », de cette façon de penser.

⁶² Il semble que la terminologie « indifférent » a été inventée dans cette note, avec le sens restrictif $s = +1$ (ce que l'on appelle aujourd'hui un point fixe parabolique).

III

Les mémoires

Le mémoire de Julia est publié, mais pas immédiatement nous allons le voir, comme l'article [1918f] dans ce qui est encore le Journal « de Jordan¹ ». Le mémoire de Samuel Lattès n'a jamais été publié, pourtant, d'après [Buhl 1921, p. 13], il devait être publié aux *Annales de l'École normale supérieure* en 1921 ou 1922 « grâce aux soins de M. Émile Picard » (il semble que l'on ne sache d'ailleurs pas ce qu'est devenu le manuscrit²). Pincherle a publié ses exemples. Pierre Fatou a partagé son mémoire en trois parties, les trois premiers chapitres [1919b], les quatrième et cinquième [1920a], puis les derniers [Fatou 1920b].

La publication du mémoire couronné³, de travaux auxquels l'Académie des sciences a décerné aussi, dans [Humbert 1917], une sorte de certificat de priorité, va de soi. La publication des trois cents pages de Fatou, simultanée avec (ou suivant immédiatement) celle du mémoire de Julia, prouve une fois encore, non seulement la qualité de ses résultats, mais aussi l'estime dans laquelle ses collègues mathématiciens tenaient son travail : après tout, beaucoup des résultats présentés dans [Fatou 1919b ; 1920a ; b] avaient déjà été estampillés comme « théorèmes de Julia ».

¹ Le titre officiel du journal est *Journal de mathématiques pures et appliquées*, fondé en 1836 et rédigé par Liouville et donc nommé « Journal de Liouville »... puis, comme pour le « Journal de Crelle », on l'a nommé du nom de son éditeur, Jordan donc en 1918.

² Le dossier des prix de 1918 aux archives de l'Académie des sciences ne contient que les cinquante-quatre petites pages du manuscrit de Pincherle — ainsi que les mentions des faits que Georges Humbert a emprunté le manuscrit de Julia le 14 janvier 1919 et celui de Lattès le 3 février 1919.

³ On devrait presque mettre des guillemets, pour une expression consacrée et figée dont nous verrons (au chapitre VI) que nos protagonistes l'emploieront bien des années plus tard, « le mémoire couronné de M. Julia » et même « mon mémoire couronné ».

Comment, par qui le choix du journal qui a publié le mémoire de Julia (le *Journal de mathématiques pures et appliquées*) s'est-il fait ? Peut-être était-ce l'endroit normal où publier un « mémoire couronné ».

Le choix du *Bulletin de la Société mathématique de France* pour Fatou était naturel, étant donnée son implication dans la vie de la SMF (voir le chapitre V). Signalons aussi que Lebesgue⁴, avec qui Fatou a travaillé pour sa thèse et qui a toujours montré, semble-t-il, son indépendance par rapport à Picard (voir page 190), était en 1919 le président de la SMF, et que Montel, un ami proche de Pierre Fatou, en était le secrétaire (et donc éditait le *Bulletin*) en 1919 et 1920. L'Académie des sciences n'est plus seule, ces années-là, à pouvoir valider la qualité et l'originalité d'un travail mathématique.

Nous disposons à propos de la manière de publier son mémoire, de deux lettres de Fatou à Montel⁵ :

J'accepte volontiers la solution que tu me proposes, car je crois aussi qu'il vaut mieux commencer dès maintenant cette publication. Je tâcherai cependant de te remettre les ch. VI et VII dans un délai assez rapproché, quitte à te donner plus tard quelques notes supplémentaires.

J'ai vu que Julia a commencé la publication de son mémoire sur les fonctions entières et qu'il annonce celui relatif à l'itération ; voilà près d'un an que ce dernier est à l'impression ; je pense qu'il a eu à le remanier pas mal, car je lui ai autrefois signalé des fautes qui apparaissaient dans ses notes des C.R. Tout cela n'est pas très facile à mettre au point et il dû s'en apercevoir malgré sa hâte de publier.

La deuxième est datée du 6 janvier 1920 :

J'ai déposé mon mémoire (ch VI et VII) chez ta concierge vendredi dernier⁶.
J'espère qu'il n'est pas perdu.



Venons-en à la description des articles en question. Il est remarquable que ces articles de mathématiques soient écrits de façon qui mette tellement en

⁴ C'est un bon endroit pour regretter la brouille survenue entre Borel et Lebesgue pendant la guerre, ici parce qu'elle a causé l'arrêt de leur correspondance, qui fait que les avis sans aucun doute tranchés que Lebesgue n'a pas manqué d'avoir sur l'histoire racontée ici ne nous sont pas parvenus.

⁵ Fonds Montel, archives de l'Académie des sciences. Cette première lettre est une carte et date de 1919 (la plupart des lettres de Fatou ne sont pas datées, mais l'article de Julia dont il est question est [Julia 1919c], premier d'une série de trois sur les fonctions entières, et il est paru dans le fascicule d'avril 1919 des Annales de l'ENS, son mémoire sur l'itération est à l'impression depuis plus d'un an). La hâte de Julia à publier est brocardée par Fatou dans une autre lettre à Montel (voir page 137). Notons encore que Ritt, qui attendait la publication du mémoire de Julia pour publier son propre article [1920] aux *Transactions*, confirme dans la note ‡ de la première page de cet article, que [Julia 1918f] est paru avec un an de retard.

⁶ C'est-à-dire le 2 janvier 1920. Pour le texte complet de ces lettres, voir l'appendice.

évidence les différences d'approche, de personnalité et de comportement des deux auteurs, même si, nous l'avons dit, leurs études les ont fait bénéficier d'un corpus de connaissances commun.

Le début du premier des trois articles de Fatou [1919b] fait un historique très clair du sujet, évoquant les travaux de Koenigs, les relations avec le théorème de Picard et celui de Schottky. Il précise n'avoir utilisé que les travaux de Montel :

J'ai ensuite reconnu que les recherches récentes relatives aux fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles permettaient d'aborder le problème dans toute sa généralité ; les propriétés des fonctions auxquelles nous faisons allusion sont dues principalement à MM. Landau et Schottky, et sont l'extension des théorèmes de M. Picard sur les fonctions entières. M. P. Montel, en leur appliquant la notion de suite normale de fonctions analytiques qui lui est due, est parvenu à des résultats élégants et d'un emploi très commode dans les applications. Nous⁷ avons fait exclusivement usage dans nos recherches des propositions de M. Montel.

Et c'est seulement à la toute fin de la troisième page qu'il aborde explicitement (et avec simplicité) la question de la priorité :

Nous nous sommes rencontrés dans ces recherches avec plusieurs auteurs qui sont parvenus en même temps et indépendamment à des résultats analogues aux nôtres, notamment MM. Ritt, Lattès et surtout M. G. Julia, dont les remarquables recherches ont fait l'objet d'un Mémoire non encore publié⁸, couronné par l'Académie des sciences, et dont les résultats ont été résumés par l'auteur dans diverses communications [Fatou 1919b, p. 163–164].

Plus agressif est le début du mémoire couronné. Julia ne perd pas de temps à faire l'historique du sujet ni à rendre hommage à ses prédécesseurs (c'est même presque l'inverse) :

Le Mémoire que je soumetts au jugement de l'Académie est consacré à l'étude de l'itération d'une fraction rationnelle, $z_1 = \varphi(z)$, dans tout le plan des z . Il n'y avait sur ce sujet, hors l'étude locale, que deux Notes de M. Fatou aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 15 octobre 1906 et du 21 mai 1917. Les résultats qu'il donne, fort intéressants, ne sont que des exemples qui utilisent des propriétés *particulières* de la fonction à étudier. On verra que ces exemples étaient les plus simples qu'on pût imaginer. J'ai tâché, dans ce Mémoire, prenant une fraction $\varphi(z)$ quelconque, de donner des propriétés qui fussent indépendantes de telle ou telle de ses particularités. J'ai

⁷ À cet endroit de son introduction, Fatou, qui écrivait « je », commence à employer « nous ». Ce qui indique peut-être que cette partie, qui est celle dans laquelle il situe son travail, inévitablement, par rapport à celui de Julia, a été repensée et réécrite.

⁸ L'article [Julia 1918f] paraît dans le volume de 1918 du *Journal de mathématiques pures et appliquées*, [Fatou 1919b] dans le volume de 1919 du *Bulletin de la Société mathématique de France*, mais, comme nous l'avons déjà signalé, la publication du mémoire de Julia a beaucoup tardé et peut-être sont-ils parus simultanément.

voulu descendre du général au particulier, et je n'ai donné des exemples que pour montrer la *réalisation* des possibilités qu'une analyse, stricte et avare d'hypothèses *a priori*, me révélait. L'Académie estimera si j'ai réussi. [Julia 1918f]

Il continue à aller droit au fait en présentant ses résultats.

III.1 Le mémoire de Julia

Voici un bref résumé de l'article [Julia 1918f]. Il semble bien qu'il s'agisse du texte même qu'il a déposé le 24 décembre 1917, seulement actualisé par des notes infrapaginales et une « Note additionnelle » en fin d'article — même si Fatou (dans la lettre à Montel citée ci-dessus) croyait que Julia remaniait sérieusement son mémoire. Il explique ce qu'il veut faire

un point z étant donné dont tous les conséquents $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ forment un ensemble e , quelles sont les propriétés de l'ensemble e' , dérivé de l'ensemble e .

Si $\zeta(z)$ désigne un point d'accumulation de cette suite d'itérés, où peut varier z pour que ζ soit une fonction analytique ? Les exemples de [Fatou 1906d] montrant que l'ensemble des points singuliers contient tous les points fixes répulsifs d'une des itérées R^n , Julia décide d'étudier l'ensemble E de ces points fixes répulsifs

$$E = \{z \in \mathbf{C} \mid \exists n \geq 1 \text{ avec } R^n(z) = z \text{ et } |(R^n)'(z)| > 1\}.$$

Après son introduction, l'article comporte vingt-sept pages de préliminaires, rappels de notions sur les « ensembles de points » (c'est l'article de Zoretti [1912] dans l'*Encyclopédie* que Julia donne comme référence) et d'analyse complexe, dans lesquelles se trouvent des variantes du lemme de Schwarz (notamment le cas d'une fonction d'un disque dans lui-même qui fixe un point du bord au lieu d'un point intérieur comme dans le cas de Schwarz) qui lui permet de retrouver les résultats de la note [Fatou 1917b] sur l'itération des fractions rationnelles qui préservent un disque⁹.

Grâce aux travaux de Montel sur les suites normales, au voisinage de tout point de E , les itérées R^n prennent toutes les valeurs sauf au plus deux¹⁰. Julia s'intéresse à l'ensemble E' dérivé de l'ensemble E des points fixes répulsifs. Il

⁹ Julia a dû s'apercevoir après coup que le résultat était intéressant en soi et il l'a republié dans [Julia 1920a] (sans signaler le doublon).

Il s'agissait dans ce travail d'une importante et élégante extension du lemme classique de Schwarz que l'on trouve maintenant dans tous les traités modernes de théorie des fonctions sous le titre de Lemme de Julia,

dira Nevanlinna [1961, p. 356]. Lui-même a généralisé ce lemme de Julia dans son article [1922]. Voir un énoncé page 90.

¹⁰ Ici l'on est proche du théorème de Picard. Voir le §I.5.

énonce et démontre un « théorème fondamental » sur la façon dont les images itérées d'un voisinage d'un point fixe répulsif recouvrent le plan : soit il y a deux points exceptionnels (et R est conjuguée à $(z - a)^k$ ou à $1/(z - a)^k$, dit Julia¹¹), soit il y a un point exceptionnel (et R est conjuguée à un polynôme), soit (dans le cas général) les images recouvrent le plan tout entier.

Julia montre alors que l'ensemble dérivé E' contient E , que E' peut être discontinu, continu linéaire (avec les exemples de Fatou $z^k/(z^k + 2)$ pour le premier cas et l'exemple de z^2 pour le deuxième) ou continu superficiel¹² et qu'alors $E' = \mathbf{C}$, mais il n'a pas d'exemple (il mentionne l'exemple de Lattès paru après le dépôt du mémoire dans une note au bas de sa page 106). Il montre aussi que E' est parfait et

*comment la structure de E' est la même dans toutes ses parties*¹³.

Il démontre enfin que la suite R^n est normale en dehors de E' , ce qui lui donne le résultat espéré : en dehors de E' , ζ est fonction analytique de z . C'est la fin de la première partie.

Dans les deux parties suivantes, il étudie les « propriétés géométriques » de E' , notamment les questions de connexité de E' et de son complémentaire.

En supposant que R ou l'une des R^n possède un point fixe attractif, il démontre que chacun de ces points fixes attractifs¹⁴ est à l'intérieur d'une région connexe dont la frontière est contenue dans E' et qu'il appelle « domaine immédiat de convergence » du point en question. Chacune de ces régions contient un point critique de R^{-1} .

Mais en général le domaine total de convergence de ce point est constitué d'une infinité de composantes connexes et sa frontière est l'ensemble E' tout entier.

Il démontre aussi, sur l'exemple de

$$R(z) = \frac{-z^3 + 3z}{2}$$

que les antécédents successifs de la plupart des points convergent vers les points de E' (cette propriété est générale, elle sera plus tard utilisée pour faire construire des ensembles de Julia aux ordinateurs, voir la remarque III.1.1).

Julia montre que le complémentaire de E' possède une, deux, ou une infinité de composantes connexes et que, s'il a deux composantes connexes, la

¹¹ Et donc aussi bien à $z^{\pm k}$.

¹² Si la définition précise de « continu linéaire » n'est pas complètement claire (voir la note 29 du chapitre II), un « continu superficiel » est ici une partie d'intérieur non vide.

¹³ Une version faible de la propriété d'auto-similarité qui définira plus tard les fractales.

¹⁴ Julia utilise la terminologie « groupe circulaire » pour une orbite et « groupe circulaire limite » lorsque les points de cette orbite sont attractifs. Il semble pourtant qu'à cette époque déjà, le mot groupe n'était plus synonyme d'« ensemble ».

limite de R^n sur chacune d'elles est une constante (comme dans le cas de l'exemple I.4.1, c'est-à-dire de la fonction $z \mapsto z^2$). Cette troisième partie contient une longue série d'exemples introduits et motivés de façon assez pédagogique et traités avec beaucoup de détails. Julia y étudie notamment le problème de la convergence de la méthode de Newton pour les polynômes $f(z) = z(z^2 - 1)$ et $f(z) = z^3 - a^3$ (voir la note 80 du chapitre I et page 74).

Si $k > 2$, le complémentaire de E' pour $R(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ a une infinité de composantes connexes ; il y a donc au plus une racine de f dont le domaine d'attraction est connexe, les bassins d'attraction des autres ont une infinité de composantes connexes. Sur la figure II.4, on voit que le bassin d'attraction de la racine 0 est connexe mais pas ceux des racines -1 et 1 .

Julia construit aussi un polynôme,

$$R(z) = A \left(\frac{z^5}{5} - 2a \frac{z^4}{4} + a^2 \frac{z^3}{3} \right)$$

(pour des valeurs bien choisies de A et a), spécialement conçu pour que son ensemble E' ait une infinité de composantes connexes sans que celles-ci soient des points.

Dans le cas de l'exemple de [Fatou 1906d] (ici l'exemple I.4.3) où

$$R(z) = \frac{z + z^2}{2},$$

il montre que l'ensemble E' est une courbe de Jordan¹⁵.

Dans la quatrième et dernière partie du mémoire, Julia étudie la convergence dans le cas d'un point fixe indifférent ζ avec $R'(\zeta) = e^{i\theta}$ dans le cas où $\theta/2\pi \in \mathbf{Q}$ (le multiplicateur est une racine de l'unité, c'est un point fixe parabolique, dans la terminologie moderne). Comme l'avait fait Leau¹⁶ [1897], il se ramène au cas où $\theta = 0$ et il dit qu'il va redémontrer le résultat de Leau, en utilisant la version du lemme de Schwarz qu'il a donnée dans ses préliminaires. Ce résultat est, dans les termes de Julia, que le point ζ

pouvait être entouré d'un petit cercle [disque] contenant des points dont les *conséquents* tendaient vers ζ et des points dont les *antécédents* successifs, définis par la branche de l'inverse de φ [notre R] qui égale ζ en ζ , tendaient aussi vers ζ .

¹⁵ Dans l'article [Julia X] déjà mentionné ci-dessus à propos d'Humbert, Julia dit aussi :

J'eus la joie de fournir à Jordan un des premiers exemples, non fabriqués exprès, de courbe de Jordan se présentant naturellement, comme frontière dans un problème simple.

¹⁶ On trouvera le rapport de Kœnigs sur la thèse de Léopold Leau (1868–1943), que l'on peut considérer comme son élève, thèse soutenue en 1897, dans [Gispert 1991, p. 368]. Léopold Leau est aussi un des fondateurs de l'espéranto.

Ce qu'il démontre est un peu plus précis, mais il n'y a pas d'autre énoncé. Il étudie d'abord le cas où le développement de R est en $z + az^2 + \dots$ avec $a \neq 0$, puis le cas général dans lequel il construit des « boucles » autour de ζ qui sont stables par R ou R^{-1} . Il étudie les exemples de $R(z) = z + z^2$ et $R(z) = z + z^3$. Voir, dans le résumé des mémoires de Fatou ci-dessous, l'étoile dessinée par Fatou.

Il n'a pas beaucoup avancé, dit-il, dans le cas où θ n'est pas commensurable à 2π , remarquant simplement que le point fixe pouvait alors être un centre ou alors être dans E' , mais sans trouver d'exemple¹⁷.

Remarque III.1.1. La propriété remarquée par Julia et signalée ici à propos de l'exemple de $R(z) = (-z^3 + 3z)/2$ permet de construire les points de E' : on part de $a \in E'$ et l'ensemble de ses antécédents est dense dans E' . On peut lire dans [Julia 1918f, p. 50] la belle phrase :

Cet ensemble E' qui, théoriquement, est bien défini, à l'aide de E dont la construction point par point exige déjà la résolution d'une infinité dénombrable d'équations algébriques, il fallait voir d'une façon nette ses propriétés géométriques.

La méthode évoquée permet en effet à un ordinateur de dessiner l'ensemble de Julia E' . On peut s'émerveiller du fait que nos protagonistes, qui n'avaient jamais vu de dessin d'ensembles de Julia ou de Fatou, aient quand même compris toute la complexité de la situation. Il est remarquable que leurs articles publiés ne contiennent aucune figure représentant l'ensemble E' . Il ne s'agit plus ici de la question de l'intérêt de l'ordinateur pour étudier l'itération, mais de la surprenante disparition des figures qu'ont nécessairement dessinées les auteurs. Par exemple, sur les manuscrits contenus dans les enveloppes cachetées de Julia, qui sont plus ou moins des brouillons, il y a des figures, dessinées à la main mais très claires¹⁸.

On voit ici (figure III.1) une photographie d'une de ces figures. Il s'agit dans le passage de Julia cité de la fraction rationnelle

$$R(z) = \frac{-z^3 + 3z}{2}$$

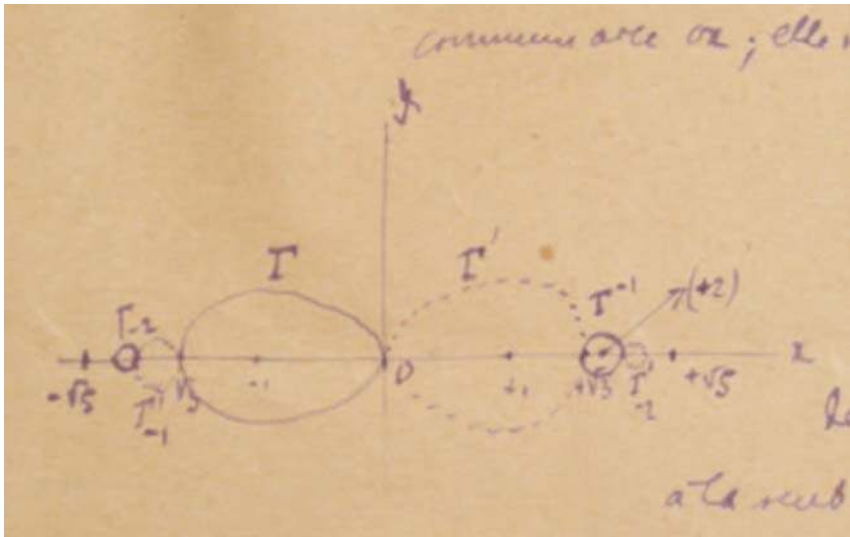
de l'exemple II.2.3. Cet ensemble E' est l'image de celui représenté sur la figure II.4 par $z \mapsto 1/z$. En dessous (figure III.2) le même ensemble E' fabriqué par Arnaud Chéritat et son ordinateur. Comme Julia l'explique de façon

¹⁷ Julia commettra bientôt une erreur sur ce sujet (voir le §IV.4) qu'il annonce d'ailleurs (pas comme une erreur !) dans une note en bas de la page 222.

¹⁸ On le pense souvent, on l'écrit parfois (ici [Chabert 1990, p. 360]) :

Malheureusement, *et pour cause* [souligné par moi], son texte [le mémoire de Julia] ne comporte pas de figures, il a fallu attendre les ordinateurs pour visualiser [...]

... mais on a tort ! Voir aussi les remarques III.2.1 et IV.5.1.



© Archives de l'Académie des sciences

Fig. III.1. Un ensemble de Julia... par Julia

détaillée dans cet article, le point fixe ∞ est attractif, les autres points fixes sont 0 (répulsif) et -1 et 1 (superattractifs, la fonction est impaire, il y a donc une symétrie), le bassin d'attraction de ∞ contient tous les points avec $|z| > 3$, ainsi d'ailleurs que l'axe imaginaire (sauf 0), les deux points limites de E' sur l'axe réel sont les points $\pm\sqrt{5}$ (indiqués sur la figure manuscrite et qui forment un cycle répulsif d'ordre 2), et l'ensemble E' est une courbe ayant des points multiples denses partout sur elle-même.

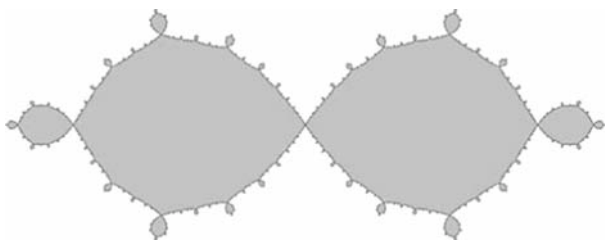


Fig. III.2.

La figure, que Julia a eu besoin de dessiner, est remplacée, dans son article, par l'exemple proche du célèbre exemple de von Koch [Julia 1918f, p. 170] déjà représenté ici sur la figure II.3 :

Il est assez difficile de se représenter exactement ce que peut être ce continu E' . Mais il n'est pas impossible de s'en faire une idée à l'aide d'un processus constructif, que je vais maintenant exposer et qui montrera qu'il n'y a nulle impossibilité par exemple à ce qu'une aire $\mathcal{R}_\infty$, simplement connexe, soit limitée par un continu linéaire E' ayant des points multiples partout denses sur lui-même, continu qui divise le plan en une infinité de régions dont chacune touche $\mathcal{R}_\infty$ par toute sa frontière ; la frontière de chaque petite région étant d'ailleurs une courbe simple.

Remarque III.1.2 (Existence de points fixes répulsifs). Dans son mémoire, Julia affirme que toute les fractions rationnelles ont des points fixes répulsifs (ainsi E n'est pas vide). Il utilise, bien entendu, ce fait :

Pour ne pas raisonner dans le vide, il importe d'abord de prouver que E contient toujours des points [Julia 1918f, p. 84].

Ce n'est malheureusement pas vrai. Julia ne dit pas comment il s'est aperçu de son erreur. C'est vraisemblablement une des fautes que Fatou lui a signalées¹⁹. L'exemple de $R(z) = z + z^2$ dont les deux points fixes sont ∞ (superattractif) et 0 (indifférent²⁰) le montre. Dans la note [Fatou 1917c] où il annonçait l'ensemble de ses résultats, Fatou avait écrit que c'était le cas « en général ». Le résultat correct est en effet :

Théorème. *Si l'équation algébrique $R(z) = z$ a une racine double, a , alors $R'(a) = 1$. Si toutes ses racines sont simples, alors il y en a au moins une en laquelle $|R'(a)| > 1$.*

Voir une démonstration au § III.2.

Dans un appendice au mémoire, Julia explique d'abord que son résultat est faux, puis comment on peut modifier les démonstrations pour qu'elles fonctionnent quand même : il faut utiliser des arguments plus compliqués pour montrer qu'un point fixe a « indifférent » avec $R'(a) = 1$ est limite d'une suite u_n , où u_n est un point fixe répulsif de R^n .

Bizarrement, cette erreur n'est pas signalée dans [Alexander 1994].

Pour conclure à la fois cette remarque et la précédente, il y a là un point délicat puisque, même si on ne le sait pas encore, les points indifférents a avec $R'(a) = e^{i\theta}$ et $\theta/2\pi$ diophantien ne sont *pas* dans E' (voir la note 17 et le § IV.4).

¹⁹ Voir la lettre de Fatou à Montel déjà citée page 82. Voir aussi page 198 la lettre de Montel à Paul Lévy du 9 juillet 1965 et la remarque qui l'accompagne.

²⁰ Dans ce cas, le multiplicateur en 0 vaut 1. On dit que ce point indifférent est *parabolique*. En un point parabolique, la famille des R^n n'est pas normale, ces points seront donc dans l'ensemble de Julia... tel que défini par Fatou.

Remarque III.1.3 (Équations fonctionnelles). Julia a décidé que les équations fonctionnelles étaient « hors sujet²¹ » :

J'aurais pu aussi appliquer les résultats obtenus ici aux équations fonctionnelles bien connues depuis les travaux de M. Kœnigs et de ses successeurs. Cela sortait de l'objet propre de ce Mémoire qui est l'étude de l'itération elle-même : peut-être reviendrai-je ultérieurement sur les questions laissées ainsi en suspens.

Nous l'avons dit au §I.6, les solutions de l'équation de Schröder (et dans une moindre mesure de celle d'Abel) sont ce que l'on appelle aujourd'hui des « formes normales » au voisinage des points fixes. Pour les dynamiciens d'aujourd'hui, elles font partie intégrante d'une étude de l'itération. Nous verrons que Fatou en est conscient. La remarque de Julia que nous venons de citer laisse un peu perplexe quant à la façon dont il envisageait cette question. Peut-être veut-il simplement dire qu'il n'a pas eu le temps. Il y reviendra dans deux articles, un peu plus tard, voir [Julia 1923 ; 1924b]²². Dans le deuxième article, il reprend les équations de Schröder et d'Abel d'un point de vue un peu différent.

Parenthèse (Le lemme de Julia). Ni le mémoire [Julia 1918f] ni l'article [Julia 1920a] ne contiennent vraiment d'énoncé du lemme de Julia extension du lemme de Schwarz. Voici celui que l'on trouve dans le livre de Bieberbach²³ [1927] :

Lemme. *Soit f une fonction analytique sur le disque unité $|z| < 1$ telle que $|f(z)| < 1$ pour tout z . On suppose que*

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1 \text{ et } f'(1) = \alpha \in \mathbf{R}$$

(la limite étant prise sur les segments à l'intérieur du disque). Alors sur tout disque de diamètre d tangent intérieurement en 1 au disque unité, la fonction f prend ses valeurs dans un disque tangent intérieurement au disque unité lui aussi et de diamètre $2\alpha d/(2 + d(\alpha - 1))$.

²¹ Ce qui n'est pas tout à fait symétrique du fait que Fatou intitule désormais ainsi ses articles, mais y fait penser.

²² Dans [Julia 1923], il est plutôt question d'une généralisation de l'équation de Poincaré

$$G(R_1(z)) = R_2(G(z)) \text{ avec } R_1(0) = 0 \text{ et } |R'(0)| > 1$$

(le cas de Poincaré est celui où $R_1(z) = sz$). Julia montre qu'en général les points de l'ensemble de Julia de R_1 sont des singularités essentielles des solutions.

²³ Nous avons choisi cette formulation parce qu'elle est presque contemporaine des articles originaux [Julia 1918f ; 1920a].

III.2 Le(s trois) mémoire(s) de Fatou

Répetons-le²⁴, les trois mémoires de Fatou sur l'itération s'intitulent « Sur les équations fonctionnelles ». La plus grande différence avec le point de vue de Julia est, me semble-t-il, la suivante : Fatou *définit* l'ensemble $\mathcal{F}$ qu'il va étudier²⁵ comme l'ensemble des points en lesquels la suite des itérées de la fonction R n'est pas normale. Cette définition très globale est bien sûr la définition moderne de l'« ensemble de Julia » de la fonction R . C'est aussi, dit-il, l'ensemble dérivé des points frontières des domaines de convergence, un ensemble parfait. Grâce aux théorèmes de Montel, il démontre que les cycles attractifs et indifférents sont en nombre fini. Il montre aussi que « dans des cas très étendus », les courbes qui limitent les domaines de convergence n'ont de tangente en aucun point ou en une infinité dénombrable de points. Il démontre tous les résultats annoncés dans [Fatou 1917c]²⁶. Voyons plus précisément comment il progresse au fil de ses sept chapitres.

Le premier chapitre est consacré à démontrer le théorème sur les points fixes qui fait l'objet de la remarque III.1.2. Comme la démonstration est très jolie, il serait dommage de ne pas la donner ici (avec les mêmes notations qu'au §I.4, même si elles ne sont pas exactement les mêmes que celles de Fatou).

La première assertion est claire : si $R(z) - z = (z - a)^2 S(z)$, où a n'est pas un pôle de S , alors $R'(a) = 1$. La deuxième se démontre à l'aide d'un argument élémentaire mais élégant. Conjugurons d'abord R par une homographie, de façon que ∞ ne soit pas un point fixe. Ainsi

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ avec } \deg Q = k \geq \deg P$$

et $R(z) = z$ est une équation algébrique de degré $k + 1$.

Si les zéros de $R(z) - z$ sont simples, il en est de même des pôles de son inverse $1/(R(z) - z)$. Le résidu en un tel pôle a est $1/(R'(a) - 1)$, de sorte que

$$\frac{1}{R(z) - z} = \sum_{\{a | R(a) = a\}} \frac{A(a)}{z - a} \text{ avec } A(a) = \frac{1}{R'(a) - 1}.$$

²⁴ Car nous l'avons déjà dit, dans la note 44 du chapitre II et page 80.

²⁵ Le F (comme « frontière ») de la note [Fatou 1917c] devient un $\mathcal{F}$ dans les mémoires.

²⁶ Citons encore le rapport d'Hadamard de 1921 :

Non seulement on ne saurait oublier que ces conquêtes [les résultats sur l'itération] doivent leur origine à l'initiative de M. Fatou [il s'agit de la note [Fatou 1906d]], mais celui-ci, que son état de santé avait empêché de participer en temps utile au concours, a obtenu peu après, par des méthodes souvent plus simples, des résultats plus décisifs encore que les précédents.

En développant les deux membres en $1/z$ et en égalant les coefficients, on trouve que $\sum A(a) = -1$. On a donc

$$\sum_{\{a|R(a)=a\}} \frac{1}{R'(a) - 1} + 1 = 0.$$

Cette relation se trouvait dans la note [Fatou 1917c] qui avait provoqué l'ire de Julia. Dans la liste de ce que Fatou annonçait alors que Julia le savait déjà, on lit [Julia 1917] : « Je donnais la relation [...] ».

Un argument géométrique permet de conclure : l'application $u \mapsto 1/(1-u)$ envoie le disque unité $|u| \leq 1$ sur le demi-plan $\text{Ré}(v) \geq \frac{1}{2}$. Si σ désigne l'image de $R'(a)$, on a donc $\sum \sigma = 1$. Le barycentre des points σ est au point $1/(k+1)$ ($k+1$ est le degré de l'équation algébrique $R(z) - z = 0$), qui est en dehors de ce demi-plan (puisque le degré k est au moins égal à 2), donc au moins un des points σ aussi et donc au moins un des $R'(a)$ est en dehors du disque unité.

Il démontre qu'il existe une infinité de cycles répulsifs ou paraboliques et annonce qu'il n'y en a qu'un nombre fini d'attractifs — mais qu'il le démontrera plus bas (à l'aide des familles normales). Comme il le dit dans son introduction [Fatou 1919b, p. 164] :

Bien que ce résultat soit beaucoup moins précis que celui qui résulte de l'application des théorèmes généraux sur les suites de fonctions analytiques, la manière élémentaire dont il est obtenu mérite d'attirer l'attention, et la méthode pourrait peut-être conduire à d'autres résultats.

Il démontre aussi que, en général²⁷, tout point admet une infinité d'antécédents. Il définit ce qu'il appelle un domaine complètement invariant (tel que $R(U) \subset U$ et $R^{-1}(U) \subset U$) et démontre le résultat sur les points critiques de R^{-1} qu'il avait annoncé, à savoir que tout domaine complètement invariant simplement connexe contient $k - 1$ points critiques de R^{-1} .

Il considère ensuite les points fixes attractifs et superattractifs (il utilise dans ce dernier cas la fonction donnée par le théorème de Böttcher), étudie les courbes analytiques invariantes au voisinage d'un tel point. Il regarde enfin les points doubles indifférents pour lesquels $R'(z) = 1$ (ce que l'on appelle des points fixes paraboliques)²⁸. Au voisinage d'un tel point fixe, supposé être 0,

²⁷ Sauf si R est conjuguée à un polynôme (∞ a un unique antécédent) ou à un Az^k ou A/z^k ... un résultat dont Ritt se plaindra [1920] qu'il figurait dans sa note [1918] et que Fatou ne le cite pas. Il semble d'ailleurs que, s'il en a adopté la terminologie, Fatou ne cite pas [Ritt 1918].

²⁸ Nous l'avons dit (note 62 du chapitre II), c'est sans doute Fatou qui a inventé le mot « indifférent », qui a un sens plus général aujourd'hui. On appelle aussi paraboliques les points fixes dont le multiplicateur est une racine de l'unité. Ce cas se ramène à celui des points fixes de multiplicateur 1. Dans le survol [Cremer 1925], que nous aurons l'occasion de mentionner à nouveau, Cremer utilise « *indifferent* » (sans traduire) lorsque $|R'(z)| = 1$ et « *rational indifferent* » lorsque $R'(z)$ est une racine de l'unité.

on a

$$R(z) = z + az^{n+1} + o(z^{n+1}) \text{ pour un } n \geq 1 \text{ et un } a \neq 0.$$

Reprenant les résultats de Leau [1897] (déjà cités ci-dessus), il démontre l'existence d'une « étoile » relative à un tel point fixe. Il semble que l'on préfère aujourd'hui la fleur²⁹ que ce résultat contient : il s'agit, à l'intérieur d'un disque arbitrairement petit centré au point fixe, de n ouverts simplement connexes D_i ($1 \leq i \leq n$) tels que

$$R(\overline{D_i}) \subset D_i \cup \{0\} \text{ et } \bigcap_{m \geq 0} R^m(\overline{D_i}) = \{0\}$$

(dits attractifs) et de n ouverts répulsifs D'_i (définition analogue), alternant autour de 0 et tels que leur réunion constitue un voisinage épointé de 0. Il faut bien dire que le résultat démontré apparaît de façon plus claire que dans le mémoire de Julia.

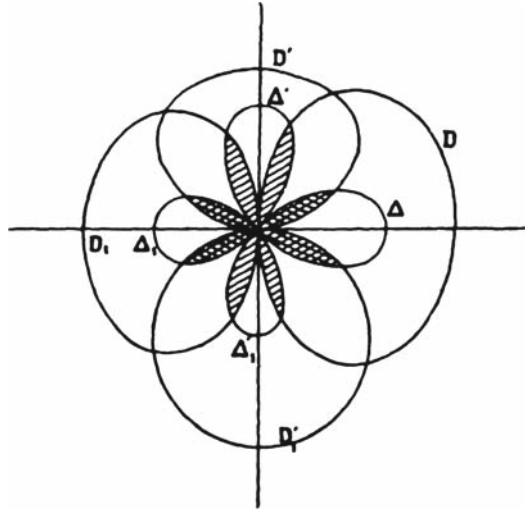


Fig. III.3. Une étoile, dessinée par Fatou dans le cas $n = 2$

L'étoile apparaît hachurée sur les figures de Fatou, dont l'une est reproduite ici (figure III.3). Les pétales sont les ouverts D et D_1 (attractifs), D' et D'_1 (répulsifs), sur lesquels $R^n(z)$ (respectivement $R^{-n}(z)$) converge vers 0. Sur les Δ , la convergence est uniforme. Sur les branches de l'étoile, par exemple $\Delta \cap D'$, R^n converge uniformément vers 0 et R^{-n} converge vers 0 (mais peut-être pas uniformément). Les demi-droites autour desquelles s'organisent les

²⁹ Il serait intéressant de déterminer qui a introduit la terminologie « fleur » que l'on trouve dans les travaux modernes (la fleur n'est pas dans [Leau 1897]). Fatou l'astronome a nommé l'étoile mais pas la fleur !

pétales de la fleur sont engendrés par les v tels que $nav^n = \mp 1$. Si $nav^n = -1$, la direction est attractive³⁰ au sens où, pour toute orbite $R^m(z)$ tendant vers 0,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{m} R^m(z) = v \text{ pour une de ces directions } v.$$

Fatou démontre ensuite l'existence et des propriétés d'une solution de l'équation d'Abel³¹. Dans chaque branche de l'étoile, il y a une solution uniforme de l'équation d'Abel

$$F(R(z)) = F(z) + a$$

telle que

$$F(z) = \frac{1}{z} + O\left(\log \left|\frac{1}{z}\right|\right).$$

C'est ce que l'on appelle aujourd'hui une coordonnée de Fatou (attention, la « coordonnée » de Fatou est définie sur un pétale attractif, pas sur un voisinage du point fixe). Il mentionne l'exemple de

$$R(z) = z + \frac{1}{z} \text{ au voisinage de } \infty$$

(conjuguée à $w/(1+w^2)$ en 0, donc un exemple avec $n = 2$).

Comme Julia, il dit savoir peu de choses sur le cas où $R'(z) = e^{i\theta}$ avec θ incommensurable à 2π . Pour compléter ce deuxième chapitre, il démontre... que l'ensemble E' dérivé des conséquents d'un point n'est pas vide. Il donne ensuite une liste d'exemples. Il est remarquable qu'il considère des familles d'exemples à paramètre, $z \mapsto z^2 + a$ (avec $a = 5$, $a = -5/4$), $z \mapsto z^d + a$ (a et d généraux), pour lesquelles il démontre que, si $|a|$ est assez grand, l'ensemble « de Julia » est totalement discontinu³².

Le chapitre III est consacré aux substitutions à cercle fondamental, c'est-à-dire, comme dans la note [Fatou 1917b], « celles qui transforment respectivement en eux-mêmes l'intérieur et la circonférence d'un cercle³³ et par conséquent aussi l'extérieur du cercle ». Fatou y considère aussi le cas d'une

³⁰ Avec ici les notations de [Milnor 2006a, § 10] plutôt que celles de Fatou.

³¹ Fatou présente ses résultats sur l'équation d'Abel au cours de la séance de la SMF du 26 novembre 1919 [Fatou 1919a].

³² L'ensemble de Mandelbrot est ici à portée de la main. Voir le § IV.5.a.

³³ Précisons que le mot « cercle » désigne ici ce que nous appelons aujourd'hui un disque (ce que nous appelons cercle est nommé « circonférence »). D'après [Cartan 1979/80], c'est Bourbaki qui, bien plus tard, imposera la terminologie distinctive boule/sphère disque/cercle.

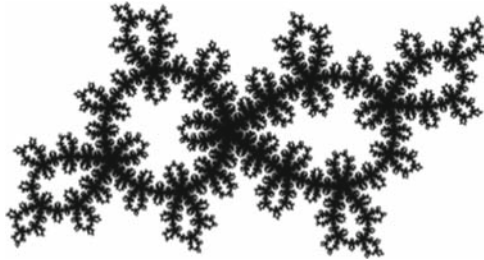
Il ne suffit pas que la transformation préserve le cercle, comme c'est le cas par exemple pour

$$R(z) = \mu z^2 \frac{z-3}{3z-1} \text{ avec } \mu = \exp(2i\pi\theta) \text{ et } \theta = 0,386351337$$

substitution qui préserve un cercle dont elle échange l'intérieur et l'extérieur (alors R^2 vérifie les propriétés précédentes). Dans ce chapitre, Fatou remarque notamment que, pour la substitution $z \mapsto z^3$, en partant d'un $z_0 = e^{i\theta_0}$ où θ_0 est un élément bien choisi de l'ensemble triadique de Cantor³⁴ alors l'ensemble E' dérivé des z^{3^n} est aussi un ensemble de Cantor (vu dans le cercle) — sans doute la première mention explicite de l'ensemble de Cantor³⁵ dans cette théorie ! C'est d'ailleurs quelques lignes plus bas (page 243) qu'il pose la question de la mesure de son ensemble d'intérieur vide.

Il revient aux exemples $R(z) = z^2 + 5$, $R(z) = z^d + a$ ($|a|$ grand), considère aussi $z/(z^m + 2)$ et $z^2/(z^2 + 2)$ (un des exemples de [Fatou 1906d], ici l'exemple I.4.2), dans lesquels l'ensemble-limite a une infinité de composantes

(pour la figure, encore une fois due à Arnaud Chéritat), qui préserve le cercle unité mais qui envoie l'intérieur du disque sur tout $\mathbf{P}_1$. L'ensemble de Julia de R est assez compliqué.



³⁴ Il semble que la toute première apparition de ce que l'on appelle aujourd'hui un ensemble « de Cantor » soit due à H. J. S. Smith [1874], plus connu pour ses travaux en théorie des nombres. L'ensemble triadique de Cantor est né peu après, en 1883. Pour les lecteurs francophones, voir [Cantor 1884].

³⁵ Ne commettons pas d'anachronisme : au temps dont il est question ici, il existe un seul « ensemble de Cantor », c'est l'ensemble triadique dont il vient d'être question, formé des réels compris entre 0 et 1 dont un développement en base 3 n'utilise que des 0 et des 2. On appelle aujourd'hui « un Cantor » un espace compact parfait totalement discontinu — homéomorphe, comme l'ensemble originel de Cantor, à l'espace produit $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$. Il serait dommage de ne pas mentionner ici la construction à peu près contemporaine par Louis Antoine (1888–1971) [1921], une autre « gueule cassée », d'un ensemble de Cantor plongé dans l'espace de dimension 3, le « collier d'Antoine » : il s'agit d'une chaîne fermée (un collier) dont chaque maillon est lui-même une chaîne fermée, dont chaque maillon... un fermé totalement discontinu dont le complémentaire n'est pas simplement connexe. Pour des informations supplémentaires sur Louis Antoine, voir la notice nécrologique que lui a consacrée son ami Gaston Julia [1971].

connexes et dont il montre que l'on peut numéroter (si l'on ose dire) ces composantes à l'aide d'un ensemble qui a la puissance du continu.

Jusqu'ici, tout a été traité de façon « élémentaire », c'est-à-dire sans utiliser la technique nouvelle des familles normales. Fin de [Fatou 1919b].

Les familles normales arrivent au chapitre IV, où est défini l'ensemble parfait $\mathcal{F}$ dont les propriétés principales sont étudiées : l'ensemble $\mathcal{F}$ de R est le même que celui de R^n , il est complètement invariant, tous les points des cycles répulsifs sont dans $\mathcal{F}$ ainsi que les points fixes indifférents avec $R'(z) = e^{2i\pi p/q} \dots$ $\mathcal{F}$ est parfait, il a même structure dans toutes ses parties (s'il contient une partie continue, il est continu, etc.), si $\mathcal{F}$ est d'intérieur non vide, c'est $\mathbf{P}_1$ tout entier (exemple de Lattès), $\mathcal{F}$ est compact, si en tout point de $\mathcal{F}$, $|R'(z)| > k$ (le degré de R), alors $\mathcal{F}$ est totalement discontinu et de longueur nulle³⁶, tout point de $\mathcal{F}$ est limite de points périodiques, tout point de $\mathcal{F}$ est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, sauf au plus de deux points exceptionnels (la propriété dont nous avons signalé page 85 qu'elle pouvait servir à construire les ensembles de Julia), $\mathcal{F}$ divise le plan en une, deux (dans ce cas les fonctions limites sont constantes), ou un nombre infini de composantes connexes. La question de l'« accessibilité » des points frontières de ces composantes est soulevée. Comme annoncé dans le premier article [Fatou 1919b], il montre que le nombre de cycles attractifs est inférieur au nombre de points critiques de R^{-1} (et il en est de même des points fixes paraboliques)³⁷.

Voici encore une question posée dans cet article (E_c désigne l'ensemble des conséquents des points critiques de R^{-1} et E'_c est son ensemble dérivé) :

Il signale [...] l'intérêt qu'il y aurait à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble $\mathcal{F}$ varie d'une manière continue³⁸, tant au point de vue de la position des points qu'au point de vue de la connexion des domaines dans lesquels il divise le plan lorsqu'on fait varier les coefficients de $R(z)$. Il paraît bien et l'on peut le constater sur des exemples que la discontinuité a lieu pour les valeurs des coefficients telles que $\mathcal{F}$ contient des points de $E_c + E'_c$. [Fatou 1920a, p. 73]

Au chapitre suivant sont étudiés les domaines de convergence et leurs propriétés de connexité. Une autre question, à laquelle il pense, sans avoir pu le démontrer, que la réponse est négative : quand $\mathcal{F}$ est partout discontinu, peut-il contenir des points critiques de R^{-1} ? Il étudie ensuite une assez longue

³⁶ L'ensemble $\mathcal{F}$ est intersection d'ensembles E_n comme ceux considérés dans la note [Fatou 1906d] et ici page 44, et schématisés sur la figure I.3. L'hypothèse faite sur le multiplicateur garantit exactement que la somme des longueurs des courbes (rectifiables) qui bordent E_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

³⁷ Il remarque au passage que tout point périodique attractif est limite d'itérés de points critiques de R^{-1} .

³⁸ Ici, c'est de la distance et de la topologie de Hausdorff qu'on aurait besoin. Voir le §IV.2.

liste d'exemples,

$$R(z) = az + z^3, \text{ avec } a \in [1, 2], \quad R(z) = \frac{z}{2 + z + z^2},$$

où $\mathcal{F}$ est parfait discontinu,

$$R(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(z^4 + 1) + z,$$

où $\mathcal{F}$ renferme une infinité de continus distincts, comme pour

$$R(z) = z(z+1)(z+2) \text{ ou } R(z) = z(z^2 - a) \text{ avec } |a| > 1,$$

ou $R(z) = (2z^2 + 1)/3z^2$ (ce que donne la méthode de Newton pour $z^3 - 1$),
 $R(z) = Kz - \frac{1}{z}$, $R(z) = z^2 - 1$...

Fin de l'article [Fatou 1920a]³⁹.

Dans le chapitre VI, Fatou étudie le caractère (non) analytique et (non) différentiable des courbes qui limitent ces domaines. Nous avons vu (exemple I.4.3) que

$$R(z) = \frac{z + z^2}{2}$$

donne lieu à un $\mathcal{F}$ qui est une courbe de Jordan qui n'a de tangente en aucun point. C'est le cas pour la frontière du bassin immédiat d'un point fixe attractif de R si elle ne contient aucune limite de conséquents de points critiques de la fonction R^{-1} . Dans d'autres cas, on peut obtenir une courbe avec des tangentes en une infinité dénombrable de points seulement (par exemple avec $R(z) = z + z^2$).

Il démontre aussi que, si $\mathcal{F}$ contient un arc isolé de courbe analytique, alors $\mathcal{F}$ est un arc de cercle (résultat dont Julia signale dans une note en bas de la page 114 de [Julia 1918f] qu'il tue une de ses remarques), mais il peut contenir des arcs analytiques non isolés : il donne l'exemple de $z \mapsto cz - \frac{1}{z^3}$, où $\mathcal{F}$ contient par exemple l'axe réel tout entier⁴⁰. Finalement, ces techniques donnent en retour des résultats sur les transcendentes uniformes solutions des équations fonctionnelles de Schröder et d'Abel, montrant notamment que

³⁹ Ici (c'est-à-dire dans l'article [Fatou 1920a, p. 83]), Fatou utilise, au détour d'une démonstration, l'écart entre deux courbes C et C' , dont il rappelle la définition dans une note de bas de page et qui est $\max(d, d')$, où

$$d = \inf_{m \in C} d(m, C') \text{ et } d' = \inf_{m' \in C'} d(m', C).$$

Cette distance, qui est bien celle de Hausdorff, n'est qu'un outil (dans l'étude de la frontière du bassin immédiat d'un point fixe attractif) et ne semble pas opératoire pour la question de la continuité posée ci-dessus.

⁴⁰ Dans $\mathbf{P}_1$, les droites sont des cercles.

la fonction de Schröder est définie et analytique sur le domaine immédiat du point fixe considéré — mais très singulière sur sa frontière (dont tous les points sont des points d'accumulation de ses zéros). Fin du troisième article [Fatou 1920b].

Remarque III.2.1 (Les figures). Comme celui de Julia, les articles de Fatou contiennent des figures, celle de l'étoile reproduite ici (notre figure III.3), mais pas seulement. Il est remarquable que, à l'exception de la figure à base de triangles dessinée par Julia (notre figure II.3 du chapitre II), aucun des deux n'ait choisi de représenter les ensembles E' ou $\mathcal{F}$ en question — pourtant, nous l'avons vu, au moins une figure avait été dessinée sur un des brouillons de Julia (reproduite ici comme figure III.1). Même sans avoir vu les brouillons de Fatou, il est difficile d'imaginer qu'il n'ait pas fait de figure. Il propose d'ailleurs, comme Julia, une construction itérative donnant une idée de ce qu'est l'ensemble $\mathcal{F}$, toujours dans l'exemple II.2.3, mais à base de cercles tangents plutôt que de triangles [Fatou 1920a, p. 86] :

On peut se faire une idée de l'ensemble $\mathcal{F}$ par l'exemple suivant qui est analogue : considérons deux circonférences tangentes entre elles extérieurement ; traçons deux autres circonférences tangentes extérieurement aux deux premières et complètement extérieures l'une à l'autre ; traçons ensuite quatre circonférences tangentes extérieurement respectivement aux quatre circonférences déjà tracées, mais extérieures les unes aux autres et ainsi de suite de manière que les rayons de ces circonférences successivement tracées tendent vers zéro et que chaque point de l'une d'elles soit limite de points de contacts ; l'ensemble de toutes ces circonférences et de leurs points limites forme une courbe ayant une infinité de points doubles qui est analogue à notre $\mathcal{F}$; les circonférences doivent seulement être remplacées par des courbes de Jordan sans points doubles qui, comme nous le verrons au Chapitre suivant, n'ont de tangentes en aucun point.

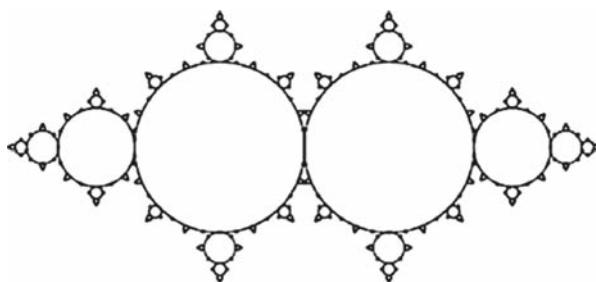


Fig. III.4.

Un long discours qui est probablement la description d'un bon schéma dessiné par son auteur au brouillon et qu'il n'aurait pas été très difficile de faire reproduire dans un article publié... La figure suggérée par ce passage

de [Fatou 1920a] est exactement celle dessinée, sous le nom d'« ensemble de Julia synthétique », par Norbert Steinmetz dans [1993, p. 135] et reproduite ici (figure III.4). Il s'agit ici de l'ensemble $\mathcal{F}$ pour $R(z) = az + z^3$ (avec a réel dans $[1, 2]$) qui, pour $a = 3/2$, est conjugué par une similitude au $(-z^3 + 3z)/2$ de notre exemple II.2.3.

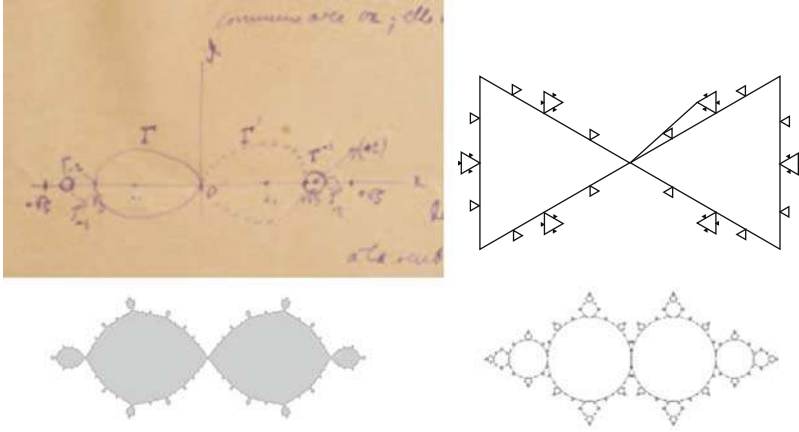


Fig. III.5. Quatre représentations du même ensemble de Julia

Autrement dit, les quatre figures (II.3, III.1, III.2, et III.4) représentent la même chose.

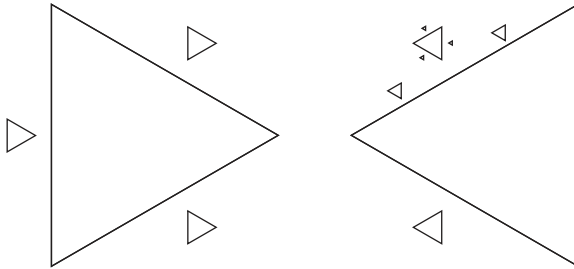


Fig. III.6. Une figure de Cremer en 1925

Les travaux sur l'itération de Julia et Fatou ont été le sujet d'un séminaire à l'université de Berlin⁴¹ et dont Cremer [1925] a écrit un compte rendu. Dans ce remarquable article, il a reproduit la figure de Julia avec les triangles...

⁴¹ Organisé par Ehrhard Schmidt et Ludwig Bieberbach, avec la participation notamment de Brauer, Reidemeister et Hopf.

et il en a ajouté une variante, reproduite ici telle quelle sur la figure III.6. L'ensemble de Julia, par exemple, du polynôme $R(z) = z^3 + 1,55z^2$ a cette allure. À propos des images, voir aussi la remarque IV.5.1.

III.3 Commentaires (à la première personne)

Il est complètement évident que les travaux dont il est question ici sont de tout premier ordre, ceux de Julia comme ceux de Fatou. Pourtant, je ne m'en cache pas : j'ai trouvé les trois articles de Fatou plus agréables à lire et plus limpides. C'est une des raisons pour lesquelles ils se sont trouvés prendre plus de place dans ce texte. Il va sans dire que la lecture que je fais de ces textes n'est pas celle qui en a été faite à l'époque — ni même celle qu'en a faite Ahlfors (voir la note page 2).

Dans l'inévitable comparaison — il n'est question ici que de la rédaction — disons que Julia avait contre lui sa jeunesse (vingt-quatre ans en 1917) et donc une moins grande maturité mathématique, et aussi le fait qu'il lui fallait écrire très vite pour rendre son mémoire à temps. Rappelons et soulignons le fait que le mémoire de Julia a été déposé dès le 24 décembre 1917, en particulier il n'a bénéficié ni des exemples de Lattès ni de la terminologie de Ritt. Sa trop grande confiance en lui et ses *a priori* ont aussi entraîné des erreurs, fautes de mathématiques ou erreurs de jugement.

Je ne partage pas l'opinion exprimée par Alexander [1994, p. 124] selon laquelle Julia s'exprime de façon plus précise. Je trouve parfois assez difficile de comprendre ce qu'il démontre exactement, c'est-à-dire d'identifier des énoncés, bien que certains d'entre eux soient effectivement présentés comme des théorèmes. Par exemple, la jolie généralisation du lemme de Schwarz mentionnée ci-dessus (qui permet de retrouver les résultats de Fatou sur les fractions rationnelles à cercle fondamental) ne donne pas lieu à un énoncé⁴². Les nombreuses italiques que comporte le texte [Julia 1918f], pour l'emphase, pour certains énoncés, ne le rendent pas très facile à lire. Il n'est pas faux de dire, au vu de la suite de ses travaux de recherche, que Julia n'était pas un moderniste⁴³.

Nous verrons (au § V.4) que Lebesgue reprochait à la rédaction de la thèse de Fatou le fait qu'il ne mettait pas assez en évidence ce qu'il faisait. Il a visiblement bien progressé depuis. Ces textes de Fatou sont très modernes pour une lecture au XXI^e siècle : il explique ce qu'il fait, en extrait des énoncés précis (présentés en italiques), utilise des notations récentes mais efficaces comme le *o* de Landau⁴⁴, a adopté la terminologie attractif/répulsif (c'est un

⁴² Ni dans [Julia 1918f], ni même dans [Julia 1920a]... ce pourquoi nous avons dû faire appel à Bieberbach (page 90).

⁴³ Hadamard concluait le rapport cité en disant que Fatou était un novateur.

⁴⁴ Peut-être pas inventé par Edmund Landau lui-même, le « petit *o* » a été popularisé par lui.

avantage de n'avoir pas rendu ses articles fin 1917 : Julia a dû trainer les « points limites à convergence régulière », etc.), utilise des notions d'avenir comme les « courbes identiques du point de vue de l'*Analysis situs* » ou les groupes fuchsien (dont Julia a bien remarqué qu'ils avaient une relation avec le sujet mais a décidé [1918f, p. 106] qu'ils n'étaient pas le sujet⁴⁵), mentionne l'ensemble triadique de Cantor, fait une belle remarque sur la courbe de von Koch, qui a été inventée précisément pour n'avoir de tangente nulle part, contrairement aux exemples d'ensembles E' qui arrivent naturellement dans les mathématiques, soulève des questions intéressantes comme les propriétés arithmétiques des multiplicateurs, la continuité de $\mathcal{F}$ en fonction de R , ou la question de la mesure de ces ensembles d'intérieur vide [1919b, p. 243], une question qui n'a été résolue (dans le cas d'un polynôme quadratique) que récemment par Xavier Buff et Arnaud Chéritat [2005]⁴⁶.

D'autre part, le style de Fatou est cordial, c'est celui d'un mathématicien profond et réfléchi. Nous en avons déjà rencontré des exemples, nous en verrons d'autres. En voici un (à comparer avec la citation de Julia contenue dans la remarque III.1.3). Le début du premier mémoire (tous s'intitulent « Sur les équations fonctionnelles ») contient la belle phrase (et surtout un bel adjectif) :

Mais les premières recherches relatives à ces équations [fonctionnelles], recherches sans lien entre elles et sans méthode bien définie, appartenaient pour la plupart au domaine des mathématiques délectables.

Avec Koenigs, on a commencé à en faire des mathématiques intéressantes, et les travaux qui suivent vont aussi dans ce sens. Il semble clair que Fatou voit dans la résolution des équations de Schröder et d'Abel autre chose qu'une question récréative.

Enfin, il ne semble pas faux de dire que le corpus de mathématiques dans lequel s'insère le travail de Julia est l'analyse complexe (à la Picard) alors que Fatou, par la théorie de la mesure, s'accroche aussi au train de la topologie générale en création (voir aussi les commentaires sur l'article [Fatou 1923a] au § V.5).

III.4 En résumé

En 1918, on sait que l'ensemble des points où la suite R^n n'est pas normale est aussi celui des points d'accumulation de l'ensemble des points périodiques répulsifs.

On sait que cet ensemble n'est vide que si R (supposée non constante) est conjuguée à une rotation ($z \mapsto \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$), qu'il n'est réduit à un point que si R est de degré 1 mais pas conjuguée à une rotation ($z \mapsto \lambda z$ avec $|\lambda| \neq 1$ ou $z \mapsto z + b$).

⁴⁵ Sur cette question, voir aussi le § IV.5.b.

⁴⁶ Un autre prix de l'Académie des sciences, le Prix Le Conte, a récompensé leur travail sur cette question de Fatou en 2006.

Sinon, c'est-à-dire si R n'est pas une homographie (c'est-à-dire si $k \geq 2$), il est infini et contient les points des cycles répulsifs. Il est alors parfait, et d'intérieur vide s'il n'est pas égal à $\mathbf{P}_1$ tout entier. Il est invariant par R . Il peut être totalement discontinu ou continu, ou même posséder une infinité non dénombrable de composantes connexes sans être totalement discontinu⁴⁷, mais il est homogène, au sens où il est partout totalement discontinu ou partout continu.

Il peut être connexe ou pas. S'il contient un arc analytique, c'est un arc de cercle (ce qui inclut les segments de droites et les cercles). S'il n'est pas lui-même un arc de cercle, il ne contient aucun arc isolé de courbe possédant une tangente en chaque point.

Son complémentaire possède une, deux ou une infinité de composantes connexes (que l'on appellera « composantes de Fatou » et que certains auteurs appellent aussi des composantes « stables »). Dans le cas où R est un polynôme, les composantes bornées sont simplement connexes⁴⁸.

Fatou–Julia, encore

En réalité, l'histoire Fatou–Julia ne s'arrête pas avec la publication des mémoires des deux mathématiciens. Tous deux ont continué à travailler sur le sujet, chacun de son côté, bien entendu, de sorte que les *Comptes rendus* ont pu publier

- le 10 octobre 1921, une note de Fatou [1921a] dans laquelle celui-ci annonce toute une série de résultats sur les fractions rationnelles permutable... et, deux semaines plus tard,
- le 24 octobre 1921, une note de Julia [1921b] se terminant par une note de bas de page dont on ne s'étonnera pas du contenu :

Les résultats des paragraphes 2° à 5° de la partie II ont été également obtenus, et indépendamment de moi, par M. P. Fatou, qui vient de les exposer dans une Note aux derniers *Comptes rendus*.

La question des fractions rationnelles permutable est naturelle, par exemple parce que deux fractions rationnelles permutable ont le même « ensemble de Julia ». Noter qu'il y aura aussi, après la publication de l'article [1922] de Julia, un article de Ritt [1923], qui poursuit ses travaux par une méthode algébrique.

⁴⁷ Ce cas intermédiaire ne se produit pas pour les polynômes quadratiques. La figure III.6 schématise un exemple de cette sorte (pour un polynôme de degré 3).

⁴⁸ Dans les exemples utilisés ici, l'ensemble de Fatou

- est connexe dans les exemples I.4.2 et II.1.2,
- a deux composantes connexes dans les exemples I.4.1 et II.2.2,
- a une infinité de composantes connexes dans les exemples II.1.1 et II.2.3.

Des recherches algébriques de M. Ritt enfin établissent que les solutions fournies dans mon travail sur la permutabilité des fractions rationnelles sont les seules possibles

dira Julia dans sa notice académique [Julia 1968, p. 7].

Mais revenons au 24 octobre 1921 : ce même jour, deux pages plus loin, paraît une deuxième note du même Fatou [1921b], dans laquelle il étudie le groupe des substitutions algébriques $g : \mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P}_1$ telles que, pour un certain n , on ait $R^n \circ g = R^n$. Toujours résolument moderne, Fatou précise la terminologie dans une note infrapaginale qu'il serait dommage de ne pas citer :

Nous disons « groupe fini ou infini » au lieu de « groupe contenant un nombre fini ou une infinité dénombrable d'opérations » ; « groupe linéaire » au lieu de « groupe fini ou infini de substitutions du 1^{er} degré ».

IV

Suites de l'itération

La problématique serait : pourquoi un sujet si brillamment commencé s'est-il brutalement arrêté ? Deux mathématiciens très différents se passionnant et démontrant les mêmes résultats... Et on n'en parle (presque) plus pendant soixante ans, où le sujet se met à refleurir.

IV.1 Arrêt

Il semble en effet que le sujet se soit arrêté, au moment où il commençait à se développer et où, qui plus est, des outils nouveaux pour le poursuivre se mettaient en place.

Gaston Julia était un mathématicien brillant, très prolifique¹ et touche-à-tout. Il semble bien que ce qui l'ait le plus intéressé, dans le sujet de l'itération (à part le côté compétitif), c'est la relation avec le théorème de Picard (voir le §I.5 et, ci-dessous le §IV.3). Bizarrement, lui qui était entouré de jeunes gens, à l'École polytechnique où il a enseigné dès 1919, comme répétiteur d'Hadamard, à l'ENS où il a aussi été nommé maître de conférences dès 1919, et à la Sorbonne, où il a enseigné à partir de 1920 et où il a participé à la mise en place, dans les années 1930, du « séminaire Julia² » auquel ont collaboré presque tous les brillants jeunes mathématiciens de l'époque, bizarrement, il n'a pas eu d'élève qui se soit intéressé au sujet.

¹ La liste des publications de Gaston Julia, répertoriée au début de ses Œuvres complètes, bien qu'elle ne soit pas exhaustive (oubliant, notamment, [Julia 1943]) comporte 157 articles de recherche (84 jusqu'en 1929 inclus), dont une grande partie de notes aux *Comptes rendus*. Il y a aussi 30 livres (dont beaucoup sont des cours rédigés par les auditeurs) ou éditions de livres et une soixantaine d'autres publications, discours notamment.

² Sur le séminaire Julia, voir ci-dessous page 179 et notre article [Audin 2009a].

Il semble que Julia n'ait d'ailleurs pas eu d'élève du tout à cette époque³. Dubreil le remercie pour avoir « guidé et stimulé ses recherches », mais c'est un algébriste. Dans son texte sur les travaux de Julia en analyse complexe [Julia 1968, p. 98], Hervé parle « de toutes les questions sur lesquelles M. Julia stimula la recherche par la beauté de ses propres résultats », ce qui est très vague, d'autant plus qu'il se contente de citer la thèse de Milloux [1924] qui porte sur les valeurs d'une fonction près d'une singularité essentielle et pas sur l'itération⁴. Julia était peut-être un « tombeur de problèmes » mais il n'était sans doute pas un « semeur d'idées⁵ ». Ce n'est pas l'opinion qu'il avait de lui-même, il dit en effet en 1961 [1970, p. 384] :

Je n'ai d'ailleurs jamais pu terminer tous ces travaux, parce que, aussitôt publiés, d'autres mathématiciens se sont mis à les travailler et à les exploiter, pendant que, passant à un autre ordre d'idées, je mûrissais et produisais d'autres résultats. Décidément, le travail du pionnier me convenait mieux que l'exploitation méthodique et complète des résultats.

Pierre Fatou, astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris, a dû travailler beaucoup... comme astronome-adjoint, mesurant des étoiles doubles visuelles, et il a donc bénéficié de moins de temps et a surtout eu moins de contacts avec les jeunes mathématiciens. Il n'est donc pas tellement étonnant qu'il n'ait pas eu d'élève⁶. Il est d'ailleurs mort assez vite. Voir le chapitre V.

IV.2 La distance (1914) et la dimension (1919) de Hausdorff

Ce paragraphe est une suite de la parenthèse sur la topologie générale de la page 17. La distance de Hausdorff est, nous l'avons dit, le bon langage dans lequel poser la question de Fatou mentionnée ici page 96, une question qui est

³ Beaucoup plus tard, il a dirigé, notamment, la thèse de Jacques Dixmier. Voir le discours de celui-ci dans [Julia 1970, p. 331].

⁴ Les raffinements du théorème de Picard faisaient déjà partie du passé... Il est remarquable que, lors d'une des toutes premières réunions de ce qui va devenir le groupe renouvateur des mathématiques, le 14 janvier 1935, la première proposition négative concrète, formulée par l'analyste Mandelbrojt, est qu'on s'occupe « le moins possible de fonctions entières » (archives Bourbaki numérisées, document `delta_002`).

⁵ Ces deux qualificatifs sont copiés dans le texte que Jean-Pierre Kahane a écrit pour l'Académie des sciences [2006a] après la mort d'Adrien Douady qui, lui, était sans aucun doute les deux.

⁶ D'après [Bloch 1931], Fatou a recherché et trouvé des collaborateurs sur les questions d'astronomie qui l'intéressaient — étoiles doubles, stabilité des orbites. Juste avant sa mort, il envisageait des programmes pour former des astronomes qui ne soient pas *que* des calculateurs. Nous verrons au chapitre V l'exemple de Rose Bonnet. Léon Bloch ne mentionne pas d'éventuels élèves mathématiciens.

restée en repos jusqu'aux années 1990. C'est une bonne occasion d'aborder la question de la façon dont les mathématiciens, notamment en France, ont reçu les œuvres de Hausdorff.

La distance de Hausdorff

Mentionnons d'abord la notion de distance de Hausdorff — distance sur un espace de parties (les compacts) d'un espace métrique — déjà signalée page 96 et qui est définie dans [Hausdorff 1914, p. 293] (et prendra plus de place dans le paragraphe intitulé *Mengenräume* dans l'édition de 1927 du même livre).



Felix Hausdorff (1868–1942)

L'introduction [Purkert 2002] dans les Œuvres complètes de Hausdorff fait une étude détaillée, non seulement de l'histoire de la topologie générale avant la parution de [Hausdorff 1914] (évoquée ici page 17), mais aussi de la réception de ce livre (notamment en Pologne et en Russie). Si l'influence de Hausdorff sur Bourbaki est connue (et reconnue par les collaborateurs de cet auteur), sa diffusion en France dans les années qui ont suivi la première guerre mondiale est moins claire. Par exemple, il y a bien eu une recension en français, mais elle a été faite par le journal suisse *L'Enseignement mathématique* et le livre n'a pas du tout été signalé dans le *Bulletin des sciences mathématiques* (de Picard).

À la suite des articles [Taylor 1982 ; 1985], l'article [Siegmond-Schultze 2005] donne quelques indications intéressantes sur la façon dont ce livre a été

reçu en France et surtout sur les relations entre ce livre et les travaux de Fréchet par exemple. J'y ajouterai une remarque. L'édition de 1914 du livre de Hausdorff semble ne se trouver aujourd'hui dans aucune bibliothèque mathématique française⁷ (il y a un exemplaire à la BNF). Il arrive bien entendu que des livres disparaissent mais, vue l'ambiance décrite ici au § I.3, il est bien possible que celui-ci n'y soit, en effet, jamais arrivé⁸. Sauf peut-être à Strasbourg, allemande en 1914 et où, après tout, s'est trouvé Fréchet, qui confirme mon impression en disant qu'il ne prit connaissance de ce livre qu'après la guerre [1921, p. 367],

travaux qui ne sont parvenus à ma connaissance que tout récemment, ajoute-t-il. À Strasbourg, donc. Le fait que le livre n'y soit pas aujourd'hui (et que l'édition de 1927 n'y soit pas non plus) évoque la possibilité qu'il ait disparu au cours des transferts de la bibliothèque pendant la deuxième guerre mondiale (de Strasbourg à Clermont-Ferrand en 1939, puis retour en 1941, enfin évacuation à Tübingen, Oberwolfach et retour à nouveau) ou, pire encore, qu'il ait été détruit pendant la période de l'annexion de l'Alsace au *Reich* parce que son auteur était juif. En tout cas, même l'édition de 1935 présente à la bibliothèque de l'IRMA à Strasbourg a été acquise après la deuxième guerre mondiale.

Un exemple de la méconnaissance des travaux de Hausdorff lié au sujet de ce texte est fourni par le livre [Montel 1927] que nous aurons à citer. Montel commence son exposition par des rappels sur les « ensembles de points », et fait référence au cours de Jordan [1893], à l'édition de 1914 de celui de de la Vallée Poussin [1921]⁹ et à celui de Schoenflies [1913], une référence allemande

⁷ Si les notes historiques des chapitres I et II du livre de topologie générale de Bourbaki citent bien l'édition de 1914 (et ce, dès la première édition en 1940), c'est celle de 1927 que cite de Possel (réputé rat de bibliothèque [Dubreil 1982]) dans son exposé sur la topologie générale au séminaire Julia le 12 novembre 1934. Il y a un exemplaire de l'édition de 1927 à la bibliothèque de l'IHP (qui a été utilisé, puisque nous savons par exemple, grâce au registre de prêt, qu'il a été emprunté par Élie Cartan en novembre 1933).

⁸ Si un livre paru en Allemagne en 1914 semble ne pas être arrivé du tout dans les librairies et bibliothèques françaises, il était peut-être possible, en 1919, d'acheter un livre allemand plus ancien (voir la note 43).

⁹ La quatrième édition du livre [de la Vallée Poussin 1921] commence par un avertissement écrit par l'auteur en décembre 1920 et qui nous ramène au contexte du début de cette histoire :

La troisième édition de cet Ouvrage a disparu dans les flammes en août 1914, lors des événements tragiques qui marquèrent le passage des Allemands à Louvain.

d'avant la guerre. Ce livre de Montel est paru la même année que la deuxième édition de celui de Hausdorff et Montel pouvait encore l'ignorer¹⁰.

Voir au § IV.5.c quelques réponses que l'utilisation de la distance de Hausdorff permet d'apporter à la question de Fatou que nous avons citée page 96.

La dimension de Hausdorff

Une autre notion qui aurait pu faire avancer le sujet est celle de dimension de Hausdorff, que Hausdorff invente justement dans un article [1919] publié en 1919, mais qui n'a pas eu tout de suite beaucoup de retentissement en France : entre le moment où les mathématiciens français ont cessé de boycotter les mathématiciens allemands et celui où la politique nazie a décidé que Hausdorff ne pouvait plus travailler, il s'est passé bien peu de temps¹¹...

Contrairement à ce qui se passait pour la distance de Hausdorff, il y a peu d'indications sur la réception de l'article [1919] dans lequel Hausdorff a défini la dimension qui porte son nom. Il est remarquable que ni la notion ni l'article ne soient mentionnés dans le livre de topologie de Bourbaki. Il ne semble pas que Louis Antoine, par exemple, qui, juste après Fatou et Julia, inventait pour sa thèse soutenue à Strasbourg en 1921 une des premières fractales, l'ait utilisée ou même mentionnée.

Il serait intéressant d'étudier de façon précise la diffusion de la notion de dimension de Hausdorff et son utilisation par les mathématiciens. Il faut noter que Hausdorff lui-même ne mentionne ni son article [1919] ni la notion dans la deuxième édition de son livre parue en 1927. La dimension de Hausdorff est pourtant connue et utilisée en France par Bouligand (un proche de Fréchet), qui a fait le point sur les différentes notions de dimension dans ses livres [1932] et [1935]... notions qui semblent absolument disjointes des ensembles de Julia. Apparemment, personne n'a eu l'idée, dans les années 1930, de calculer la dimension de Hausdorff des ensembles de Julia¹² (Bouligand mentionne pourtant des travaux de Denjoy, Montel ou Lebesgue, ainsi que la thèse d'Antoine).

On pourra aussi consulter le commentaire de S. D. Chatterji dans [Hausdorff 2001, p. 44–54] et les relations avec les notions de capacité dans le livre de Kahane et Salem [1963].

Le calcul de la dimension de Hausdorff de tel ou tel ensemble de Julia est aujourd'hui une activité assez répandue. Par exemple, celle de l'ensemble

¹⁰ Nous ne savons pas s'il a possédé un exemplaire de ce livre, mais il est certain que Julia, par exemple, en avait un, qui se trouve aujourd'hui à la bibliothèque du CIRM.

¹¹ Felix Hausdorff, sa femme et sa belle-sœur se sont suicidés en janvier 1942 pour échapper à la déportation. Sur la vie de Felix Hausdorff, une personnalité sympathique, un mathématicien qui était aussi, sous le pseudonyme de Paul Mongré, un écrivain, voir [Segal 2003, p. 455–461].

¹² Gaston Julia possédait des exemplaires de ces ouvrages, qui ne semblent pas l'avoir inspiré non plus (fonds Julia, bibliothèque du CIRM).

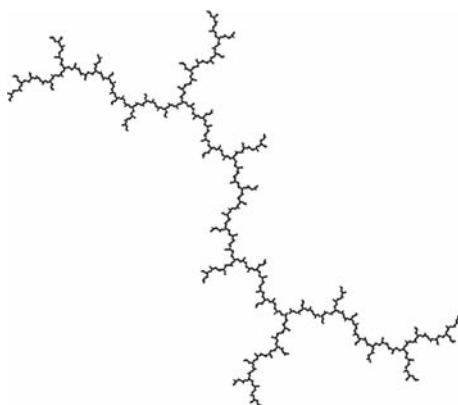


Fig. IV.1. Une dendrite, ensemble de Julia de $z^2 + i$

de Julia de $z \mapsto z^2 + i$ (une « dendrite », représentée sur la figure IV.1, les ensembles de Julia et de Fatou sont tous les deux connexes) est de l'ordre de 1,2. Nous mentionnerons d'autres apparitions de cette notion au § IV.5.c.

IV.3 Points irréguliers, points J , points O (1925–1927)

En 1927, la *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* (dirigée par Émile Borel chez Gauthier-Villars) publie un livre de Paul Montel [1927], dans lequel celui-ci fait le point sur la théorie des familles normales, qu'il a inventée, et sur les applications de cette théorie, qu'elles soient dues à lui ou à d'autres. Ce livre reste une très belle introduction au sujet, aux sujets. Son chapitre VIII, consacré à l'itération, en particulier.

Entre temps (et même avant la question de la permutabilité ayant fait l'objet de sa note [1921b] et de son article [1922]), Julia a travaillé à des résultats liés aux célèbres théorèmes de Picard, qui font l'objet de sept notes aux *Comptes rendus* (parues dans le tome 168 et qui ne seront pas citées précisément ici), de trois articles aux *Annales de l'École normale supérieure* [1919c; 1920b; 1921a] et du cours Peccot qu'il a donné en 1920¹³, un cours qui est

¹³ On l'a dit et redit, beaucoup de brillants jeunes mathématiciens sont morts à la guerre... c'est peut-être pourquoi Julia a pu donner deux cours Peccot, en 1918 et en 1920 (même s'il n'était pas le premier à le faire, voir page 209). C'est Paul Lévy qui a donné celui de 1919 — un cours lié aux travaux de Gateaux (voir [Mazliak 2007]).

devenu, quelques années plus tard, rédigé par Paul Flamant¹⁴, le livre [Julia 1924a]. Par commodité, nous citons plutôt ce livre que les articles originaux.

Les célèbres théorèmes de Picard dont il est question ici sont ceux que nous avons énoncés au § I.5. Les raffinements dus à Julia [1924a] sont les suivants, respectivement pour le premier et le deuxième théorèmes de Picard :

Théorème. *Si f est une fonction entière non constante, il existe une demi-droite telle que dans tout angle arbitrairement petit dont elle est bissectrice, la fonction prend toutes les valeurs sauf peut-être une.*

Théorème. *Si f a une singularité essentielle en z_0 , pour tout $a \in \mathbf{C}$ (sauf peut-être une valeur exceptionnelle), l'équation $f(z) = a$ a une infinité de solutions au voisinage de z_0 .*

Par exemple, nous l'avons vu au § I.5, pour la fonction entière $f(z) = e^z$, les demi-droites en question sont les deux demi-droites d'origine 0 de l'axe imaginaire. Nous verrons Montel donner une démonstration du premier de ces théorèmes page 201.

En 1925, Alexandre Ostrowski¹⁵ écrit lui aussi un article [1925] sur le sujet. Pour une famille de fonctions $\mathcal{F}$, il introduit la notion de « points J », ceux en lesquels la famille n'est pas normale (dans le cas où $\mathcal{F} = \{R^n\}$, les points J sont ceux de l'ensemble de Julia).

Ostrowski appelle les droites portant les demi-droites définies par Julia des « droites J », une terminologie reprise par Montel dans son livre [1927, p. 82] deux ans plus tard¹⁶. Les résultats qu'il démontre utilisent, comme ceux de Julia et de façon essentielle, la théorie des familles normales.

Il n'y a pas de relation directe entre points J et droites J , au sens où les points J sont définis pour une famille de fonctions $\mathcal{F}$ et les droites J pour une fonction f . Mais il y a bien sûr des liens : pour une fonction f avec une singularité essentielle à l'infini, les points J de la suite $f_n(z) = f(z/n)$ engendrent des droites J . Voir ici page 201.

¹⁴ Paul Flamant (1892–1940), entré premier à l'ENS en 1913, avait, lui aussi été blessé, et même fait prisonnier, pendant la guerre, il a passé presque quatre ans en captivité, après lesquels il a été reçu premier à l'agrégation en 1919. Il a gardé de cette période une santé très fragile. Au début de la deuxième guerre mondiale, en 1939, professeur à l'Université de Strasbourg et capitaine de réserve, il n'a essayé ni de se faire réformer, ni de se faire affecter à l'arrière, et s'est retrouvé dans les casemates humides de la ligne Maginot. C'est là qu'il a fait une rechute, qui a entraîné sa mort. Voir [Sartre 1948].

¹⁵ Alexander Ostrowski (1893–1986) est un mathématicien d'origine ukrainienne, qui a fait ses études en Allemagne avec Hensel, puis Hilbert et Landau, contribué au 13^e problème de Hilbert en 1920 (il était alors *Privatdozent* à Göttingen), été professeur à Bâle presque toute sa vie, ceci incluant la deuxième guerre mondiale.

¹⁶ Il y a une recension de l'article d'Ostrowski par Bieberbach dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* dans laquelle sont nommés des points de Julia et même des suites de Julia, etc.

Revenons à la définition des points J . Nous l'avons dit, la propriété pour une famille d'être *normale* est une propriété locale. Donc, si une famille $\mathcal{F}$ n'est pas normale sur l'ouvert U , c'est qu'il existe un point $z_0 \in U$ tel que la famille ne soit normale sur aucun voisinage de z_0 . C'est donc que, pour tout $r > 0$ assez petit, il existe une suite $S_r \subset \mathcal{F}$ dont aucune suite extraite ne converge dans le disque $D(z_0, r)$.

La suite en question dépend, *a priori* du r considéré, une subtilité qui avait échappé à Julia et qu'Ostrowski a mise en évidence dans son article. Bien sûr, si la famille $\mathcal{F}$ est une suite, comme dans le cas de l'itération d'une fraction rationnelle, cette remarque n'a pas lieu d'être. Et d'ailleurs, Ostrowski l'a démontré (mais ce n'est pas absolument trivial), on peut en effet supposer que la suite ne dépend pas de r .

Avec un peu de quantificateurs, le point z_0 est un point J si

$$\forall r > 0, \quad \exists S_r \subset \mathcal{F} \dots$$

telle qu'aucune suite extraite de S_r ne converge uniformément dans $D(z_0, r)$. Dans son livre [1927, p. 37], Montel définit des « points O » : le point z_0 est un point O si

$$\exists S \subset \mathcal{F}, \quad \forall r > 0 \dots$$

aucune suite extraite de S ne converge uniformément sur les disques $D(z_0, r)$. Et il donne la démonstration d'Ostrowski du fait que les points J sont effectivement des points O (l'inverse étant clair!). Il décide donc d'appeler ces points « irréguliers » — comme il le fait depuis longtemps lorsque la famille est une suite [Montel 1907]. Et il remarque aussi que, comme il l'a démontré dans sa thèse [1907] dans le cas d'une suite, les points irréguliers d'une famille bornée en chaque point « forment un ensemble parfait non dense, continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine » [Montel 1907, p. 39].

Deux raisons d'avoir passé tant de temps sur cette question :

- les « trucs J » annoncent, voire préparent, le nom « ensemble de Julia »
- la discussion « points irréguliers/points J » est loin d'être close (voir le chapitre VI).

Mais revenons à l'itération.

IV.4 Le problème du centre (1932–1942), points de Cremer et disques de Siegel

Il s'agit de l'étude locale de R près d'un point fixe (que l'on suppose être 0) en lequel $|R'(0)| = 1$. La question est de savoir si R est linéarisable, c'est-à-dire s'il existe un voisinage de 0 sur lequel R est conjuguée à une application linéaire — ici une rotation. Il s'agit de résoudre l'équation de Schröder. On dit alors que 0 est un « centre ». Il est clair qu'un centre est un point fixe

contenu dans l'ensemble de Fatou (alors que les points fixes paraboliques sont contenus dans l'ensemble de Julia).

Avant même les travaux de Fatou et de Julia, Kasner [1913] avait conjecturé que la réponse était oui, en d'autres termes que la linéarisation était toujours possible¹⁷, puis Pfeiffer [1917] avait donné des contre-exemples, montrant qu'il existe une fonction analytique

$$R(z) = sz + \dots \text{ avec } |s| = 1 \text{ et } s^n \neq 1$$

pour laquelle l'équation de Schröder n'a aucune solution analytique à l'origine¹⁸ et dont la dérivée en ce point n'est pas nulle (et il applique ce résultat au problème de géométrie posé par Kasner)¹⁹.

Julia lui-même, dans une note [1919b] postérieure à son mémoire couronné, avait démontré que, si $k = \deg R \geq 2$, la réponse était toujours non, et que les points fixes indifférents étaient toujours dans l'ensemble de Julia :

Dans ma note du 28 janvier 1918²⁰, j'ai laissé en suspens la question de savoir si, pour une substitution rationnelle $z_1 = R(z)$, un point invariant $\zeta = R(\zeta)$ où l'on aurait $R'(\zeta) = e^{i\theta}$, θ étant incommensurable à 2π , pouvait être un *centre*. Je suis en mesure aujourd'hui de trancher cette question par la négative : *pour une substitution rationnelle, il n'y a pas de centre, tout point $\zeta = R(\zeta)$ où $|R'(\zeta)| = 1$ est un point de l'ensemble parfait que j'ai appelé E' .*

Fatou [1920a, p. 58] n'y croyait visiblement pas et signalait ce résultat de Julia comme annoncé sans démonstration²¹. Siegel écrira [1942] :

*Julia tried to prove the erroneous hypothesis that the Schröder series is always divergent if $f(z) - a_1 z$ is a rational function not identically zero*²².

On écrit $R'(0) = e^{i\theta}$ et on sait maintenant que la réponse dépend des propriétés arithmétiques de $\theta/2\pi$:

– Si $\theta/2\pi \in \mathbf{Q}$, on se ramène au cas où $\theta = 0$. Dans ce cas,

$$R(z) = z + \alpha z^{n+1} + \dots \text{ avec } \alpha \neq 0 \text{ pour un } n \geq 2.$$

Nous avons vu (au §III.2) que l'étude de Leau [1897], complétée par Fatou [1919b] décrivait la dynamique au voisinage du point fixe à l'aide d'une étoile (et d'une fleur).

¹⁷ La question est formulée par Kasner en termes des invariants conformes de l'angle de deux courbes planes.

¹⁸ Comme l'explique fort bien Siegel au début de son article [1942], il y a toujours une solution formelle, la question étant de savoir si elle converge ou pas.

¹⁹ Il n'est pas évident que Fatou et Julia aient connu ces travaux américains qu'ils ne citent ni l'un ni l'autre.

²⁰ Il s'agit de la note [Julia 1918a].

²¹ Encore un euphémisme délicat de la part de Fatou : en réalité, il y a un résumé de démonstration (*eine Beweisandeutung*, dira Cremer [1927]) dans [Julia 1919b], contenant un trou, signalé par un « on démontre aisément que ».

²² Le a_1 de Siegel est notre multiplicateur s .

– Cremer²³ [1927 ; 1932] a montré que, si²⁴

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |s^n - 1|^{1/\log M_n(r)} = 0, \text{ où } M_n(r) = \sup_{|z| \leq r} |R^n(z)|,$$

alors l'équation de Schröder n'a pas de solution au voisinage de a et en particulier la fraction rationnelle n'est pas linéarisable. Les s en question sont très bien approchés par les racines de l'unité, ou les θ par les rationnels. Cette partie du cercle unité est de mesure nulle dans ce cercle et, en ces points, la linéarisation n'est pas possible.

– Si $\log |s^n - 1| = O(\log n)$, en d'autres termes si $\theta/2\pi \notin \mathbf{Q}$ est un irrationnel diophantien, c'est-à-dire mal approché par les rationnels au sens où il existe des nombres réels positifs C et m tels que, pour tous entiers p et q ($q > 0$), on ait

$$\left| \frac{\theta}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^m}$$

(par exemple si $\theta/2\pi$ est algébrique)²⁵. L'ensemble de ces irrationnels est de mesure pleine et Siegel a montré [1942] que la solution formelle de l'équation de Schröder converge et donc que R est bien linéarisable. En particulier, dans ce cas, le point fixe est un centre (c'est pourquoi on appelle ce résultat le théorème du centre) ; un disque sur lequel R se linéarise est appelé un disque de Siegel²⁶ et un tel disque isole le point fixe de l'ensemble E' de Julia, montrant que le résultat annoncé par Julia dans [1919b] était faux.

²³ Hubert Cremer était un élève de Bieberbach, nous l'avons déjà rencontré, écrivant le survol [Cremer 1925] et dessinant la figure III.6. On trouvera des renseignements intéressants sur ce mathématicien dans [Segal 2003].

²⁴ La condition est équivalente au fait que la suite $\sqrt[n]{1/|s^n - 1|}$ n'est pas bornée quand $n \rightarrow +\infty$.

²⁵ Liouville a montré en 1884 que les nombres algébriques sont diophantiens (c'est ainsi qu'il a pu donner les premiers exemples de nombres transcendants) et que l'on peut prendre, pour exposant m le degré du nombre algébrique. Siegel lui-même a amélioré cet énoncé (on peut choisir $m = 2\sqrt{d} + \varepsilon$) en 1929 : si x est algébrique de degré d , il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{2\sqrt{d}}}.$$

Plus tard (en 1955), Roth montrera que l'on peut même choisir $m = 2 + \varepsilon$ — un résultat qui lui vaudra la médaille Fields en 1958.

²⁶ Sur les disques de Siegel et ces autres domaines de rotation que sont les anneaux de Herman, voir l'exposé de Douady [1987] au séminaire Bourbaki. Sur le « problème du centre de Siegel », voir aussi [Pérez Marco 1992].

– Bien plus tard, Rüssmann [1967], puis Bruno [1971 ; 1972] trouveront une condition arithmétique plus faible²⁷, puis Yoccoz [1995] prouvera, en 1987, que ceci était optimal en montrant des cas non linéarisables²⁸.

Parenthèse (Théorèmes de Denjoy). Au temps où Cremer publiait les articles [1927 ; 1932], la question de la conjugaison à une rotation semble avoir été d'actualité : c'est en 1932 qu'Arnaud Denjoy [1932] démontrait son célèbre théorème — les difféomorphismes du cercle de classe $\mathcal{C}^2$ dont le nombre de rotation est irrationnel sont conjugués à des rotations. Et puisqu'il est question ici d'itération, et de Denjoy, notons que ce dernier est aussi l'auteur, améliorant une démonstration de Julius Wolff [1926], d'un théorème de la théorie de l'itération [Denjoy 1926], mais dans un disque (dans ce cas, dit hyperbolique, l'ensemble de Julia est vide), le théorème dit de Denjoy-Wolff — pour une transformation holomorphe f du disque unité dans lui-même qui n'est pas conjuguée à une rotation, les $f^n(z)$ convergent vers un point du cercle, indépendant de z . Sur la vie et l'œuvre d'Arnaud Denjoy, voir [Denjoy 1975].

Remarque. On sait aujourd'hui (grâce à Yoccoz) démontrer l'existence de disques de Siegel, un résultat que Fatou n'avait pas réussi à démontrer, en utilisant deux résultats de ce même Fatou, le théorème de prolongement radial (lui-même lié au « lemme de Fatou » de la théorie de l'intégration, voir le § V.5 pour des énoncés de ces deux résultats) et le fait que tout point d'un cycle attractif de R attire un point critique de R^{-1} (voir la note 37 du chapitre III).

Parenthèse (À propos de Carl Ludwig Siegel). Revenons à la première guerre mondiale. Mobilisé en 1917, Siegel n'a pas supporté l'armée. Weil raconte dans son livre [1991, p. 133] qu'il lui a dit avoir déserté. Le mot est peut-être exagéré. Toujours est-il que, d'après Davenport [1985]²⁹, le père d'Edmund Landau, qui était médecin et voisin des Siegel à Berlin, a aidé à ce qu'il soit soigné puis libéré.

Il a fait une thèse, dirigé par Landau, justement. Il a été professeur à Francfort à partir de 1922 dans une ambiance exceptionnelle (voir son émouvante évocation de cet âge d'or dans son article [1978]) — jusqu'à l'arrivée

²⁷ On écrit s sous forme de fraction continue et l'on appelle p_n/q_n la n^e réduite. Rüssmann et Bruno montrent que si

$$\sum_n \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty,$$

alors R est linéarisable.

²⁸ Le polynôme $z^2 + sz$, avec un multiplicateur $s = e^{i\theta}$ tel que la série $\sum_n \log q_{n+1}/q_n$ soit divergente, n'est pas linéarisable au voisinage de 0 [Yoccoz 1995].

²⁹ L'article [1985] « de Davenport » dont il est question ici est en réalité un article de Madame Davenport, autour de lettres que son mari lui a écrites et de notes qu'il a prises au cours de discussions avec Siegel lors d'un séjour à Göttingen en 1966.

de Hitler au pouvoir. Il a passé l'année 1935 à Princeton, puis est retourné à Francfort, est parti à Göttingen en 1938, puis à Princeton en 1940 et il y est resté jusqu'en 1951 où il est reparti pour Göttingen.

Que cette information à cet endroit soit pertinente ou pas, signalons encore que Siegel et Julia ont été assez liés dans les années 1930. Siegel est venu à Paris en mai 1937, il a donné une série de trois exposés au séminaire Julia, puis Julia lui a rendu visite à Francfort en juin et ils se sont rendus ensemble aux festivités du bicentenaire de Göttingen³⁰ — une authentique cérémonie nazie. Les prises de position et les choix incompatibles de Hasse et de Siegel les ont séparés³¹. Les mêmes raisons ont sans doute éloigné aussi Siegel et Julia. Siegel fera pourtant partie des personnalités membres du comité de parrainage du jubilé scientifique de Julia en 1961 — mais pas Hasse³².

IV.5 La dynamique holomorphe

À partir des résultats de Julia, Fatou, Siegel mentionnés ci-dessus et à partir des années 1980 on assiste à la constitution de ce que l'on appelle aujourd'hui les systèmes dynamiques complexes, ou holomorphes³³.

Il ne serait bien entendu pas absolument correct de dire que personne n'a plus travaillé sur l'itération avant l'explosion des années 1980. Nous

³⁰ Dans une carte postale à Hasse datée du 14 juin 1937, Julia écrit :

Je ne connais pas l'heure exacte à laquelle j'arriverai à Göttingen le 25 juin. Elle dépend du train que prendra Siegel, avec qui je dois faire le voyage de Francfort à Göttingen. Siegel vous indiquera l'heure en question, car il la connaît certainement [...]

(Nachlaß Hasse, université de Göttingen).

³¹ Toujours d'après Davenport [1985], il est arrivé que Siegel, dans les années 1920, exprime devant Hasse son horreur de la guerre et le fait que son service militaire l'avait presque tué. Hasse avait alors exprimé l'opinion exactement opposée : son service dans la marine avait beaucoup amélioré sa santé et il gardait de la guerre les meilleurs souvenirs.

³² Sur Hasse et Julia, voir [Audin & Schappacher 2009].

³³ Un indicateur de la reconnaissance de l'existence d'une sous-discipline est fourni par la classification par sujets de l'*American mathematical society*. Celle-ci comporte ou a comporté :

- depuis 1980, la sous-sous-rubrique 30D05, *Functional equations in the complex domain, iteration and composition of analytic functions* de la rubrique 37, *Functions of a complex variable*,
- depuis 1991, la sous-sous-rubrique 32H50, *Iteration problems* de la rubrique 32, *Several complex variables and analytic spaces*,
- de 1991 à 1999, la sous-sous-rubrique 58F23, *Holomorphic dynamics* de la rubrique 58, *Global analysis, analysis on manifolds*,
- et enfin depuis 2000, la sous-rubrique 37F, *Complex dynamical systems*, de la nouvelle rubrique 37, *Dynamical systems and ergodic theory*.

mentionnerons au §IV.5.b les travaux de Sullivan, du côté des groupes kleinéens. Mentionnons rapidement ici les résultats obtenus par Noel Baker³⁴ sur l'itération des fonctions *entières* (un sujet abordé par Fatou en 1926 dans l'article [Fatou 1926] où il posait de nombreuses questions difficiles, voir page 153). Une histoire complète de l'itération (ce que ce livre n'est pas) devrait bien entendu prendre en compte ces travaux.

IV.5.a L'ensemble de Mandelbrot (vers 1980)

Il s'agit de considérer une famille de fractions rationnelles et le comportement de leurs « ensembles de Julia » et « composantes de Fatou » lorsqu'on les fait varier dans la famille. Dans l'exemple de la famille des polynômes de degré 2, conjugués à des polynômes $R(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbf{C}$, la partie M de l'espace des paramètres c pour lesquels l'ensemble de Julia est connexe est appelé « ensemble de Mandelbrot ». C'est aussi l'ensemble des c tels que l'orbite du point critique 0 de R , c'est-à-dire la suite $R^n(0)$, soit bornée (ici ceux des exemples I.4.1 et II.1.1 mais pas celui de l'exemple I.4.2 ni de la figure I.2). Lorsque c est en dehors de l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia est totalement discontinu (et parfait).

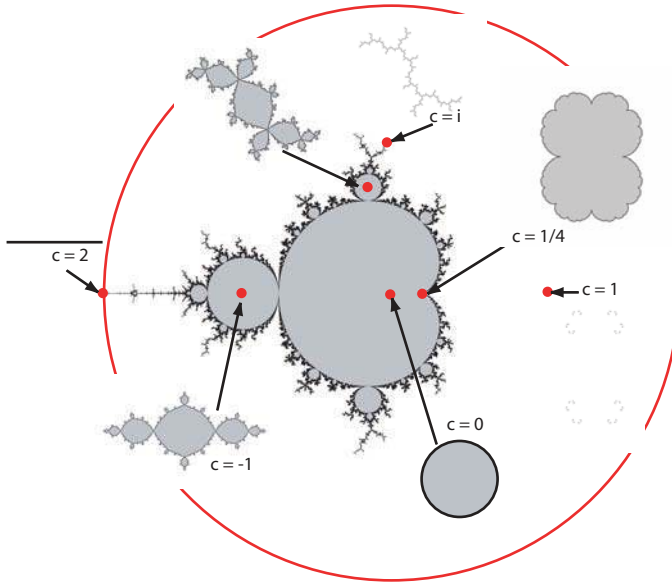


Fig. IV.2. L'ensemble de Mandelbrot et quelques ensembles de Julia associés

³⁴ Voir une description de ces travaux dans [Rippon 2005].

En général, l'ensemble de Julia est victime d'une dichotomie sévère : soit il est connexe, soit il a une infinité non dénombrable de composantes connexes. Nous avons vu au chapitre III Julia et Fatou³⁵ nous en donner de nombreux exemples. Dans le cas des polynômes quadratiques et donc de l'ensemble de Mandelbrot considéré ici, le seul cas possible d'une infinité de composantes connexes est celui où celles-ci sont des points : l'ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 + c$ est

- connexe si c est dans l'ensemble de Mandelbrot,
- un Cantor sinon.

Dans son célèbre livre [1982, p. 182], Mandelbrot³⁶ attribue à Fatou dans sa note [1906d] de 1906 l'idée de considérer la transformation $z \mapsto \lambda z(1 - z)$ en faisant varier le paramètre λ dans $\mathbf{R}$. Il n'y a pourtant rien de tel dans cette note. Même si, nous l'avons vu, il y a des exemples à paramètres dans les mémoires de Fatou.

Pour en savoir plus sur l'ensemble de Mandelbrot, un beau sujet mais pas celui de ce travail, voir [Tan 2000].

IV.5.b Des groupes kleinéens à la question des composantes errantes ((1883–)1906–1980)

Nous avons déjà évoqué, à la suite de Fatou, les relations ou plus précisément les analogies entre la famille R^n des itérées d'une fraction rationnelle R et celle des éléments d'un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2; \mathbf{C})$ (voir ci-dessus pages 46 et 101 — et, pour l'influence de Poincaré, la note 12 du chapitre I). La conclusion de la note [1906d] disait :

Ainsi, des équations fonctionnelles simples conduisent à introduire des transcendentes uniformes possédant des ensembles parfaits discontinus de singularités, ou des coupures non analytiques. On sait d'ailleurs que des faits analogues se présentent déjà dans la théorie des fonctions automorphes.

Encore en 1921, c'est une autre note de Fatou [1921d] qui commence ainsi³⁷ :

La théorie des groupes kleinéens et les recherches relatives à l'itération des fonctions rationnelles ont mis en évidence ce fait que des courbes sans tangentes et des ensembles parfaits partout discontinus³⁸ peuvent s'introduire, notamment comme frontières de domaines d'existence de fonctions uniformes, dans des problèmes à énoncés simples où toutes les données sont analytiques.

³⁵ Cette dichotomie avait été aussi pressentie par Ritt [1918], voir page 70.

³⁶ Benoît Mandelbrot a été élève à l'École polytechnique où il a suivi les cours de Paul Lévy et ceux de Julia.

³⁷ Nous le verrons aussi évoquer les lignes singulières des fonctions kleinéennes dans une lettre à Montel, ici page 222.

³⁸ Pour ces ensembles il arrive souvent qu'une courbe qui les contient ne peut avoir de tangente en aucun point de l'ensemble. Note de Pierre Fatou.

Cette propriété avait été notée par Hadamard, grand connaisseur de Poincaré, dans son rapport de 1921 (voir page 215), elle est développée et explicitée dans le livre (de Fatou, répétons-le) [Appell et al. 1930]³⁹.

Plus tard, c'est un théorème d'Ahlfors, affirmant que le quotient Ω/Γ de l'ensemble de normalité Ω par le groupe Γ est de type fini [Ahlfors 1964], qui a inspiré à Sullivan l'idée de son théorème de non-errance [Sullivan 1985], qui affirme que toute composante de l'ensemble de Fatou est, finalement, périodique (c'est-à-dire qu'une itérée convenable de cette composante est périodique) : l'application de la fraction rationnelle à aucune composante de l'ensemble de Fatou ne la condamne à errer éternellement.

Cette question est parfois attribuée à Fatou et à Julia (mais nous n'avons pas su trouver où, ni même si l'un ou l'autre avait posé la question explicitement). La démonstration de Sullivan utilise les homéomorphismes quasi-conformes (inventés et utilisés dès les années 1930 par Ahlfors et Teichmüller). Non content de clore ce problème ouvert, Sullivan a donné une nouvelle démonstration du théorème d'Ahlfors, ainsi que tout un dictionnaire entre la théorie de l'itération et les groupes kleinéens (voir [Sullivan 1985]), le théorème de non-errance traduisant le théorème d'Ahlfors⁴⁰.

Remarque IV.5.1 (Les figures (suite)). Il est remarquable qu'il existe si peu d'images d'ensembles limites dessinées avant l'ordinateur. Poincaré, qui ne rechignait pas devant une belle figure dans ses articles de géométrie, n'a inclus aucune image d'ensemble-limite dans son mémoire [1883] sur les groupes kleinéens. Nous avons déjà cité (note 12 du chapitre I) des commentaires de Poincaré sur la ligne L des points où l'opération du groupe kleinéen n'est pas proprement discontinue — ensemble des points de non-normalité, ensemble-limite. Ajoutons ici une autre phrase de Poincaré, issue du même article :

On voit que le plan se décompose en deux ouverts D et D' , le premier est recouvert par le polygone R_0 et ses transformés, le second par le polygone R'_0 et ses transformés. Ces domaines sont séparés par une ligne L , si l'on peut appeler ça une ligne.

Nous sommes en 1883, dix ans *avant* qu'Hermite exprime encore son effroi et son horreur (page 73). Il est possible que Poincaré n'ait pas osé représenter L , après tout, il hésitait à la qualifier de ligne. Il semble que les premières figures publiées d'ensembles limites l'aient été en 1897 dans le livre [Fricke & Klein 1897] (qui contient de nombreuses et belles images géométriques). Nous en reproduisons une ici (figure IV.3).

³⁹ La frontière dont il est question dans la citation ci-dessus s'appellera Φ dans le livre de Fatou, sans doute par analogie avec l'ensemble F ou $\mathcal{F}$ de ses travaux sur l'itération.

⁴⁰ Une conjecture d'Ahlfors, qui a succombé récemment aux attaques de toute une série de mathématiciens (voir [Calegari & Gabai 2006] et la recension de cet article dans *Mathematical reviews*), affirme que le lieu de non-normalité d'un groupe kleinéen de type fini est $\mathbf{P}_1$ tout entier ou de mesure nulle. Le théorème de Buff et Chéritat [2005] est donc une des premières discordances dans ce dictionnaire.

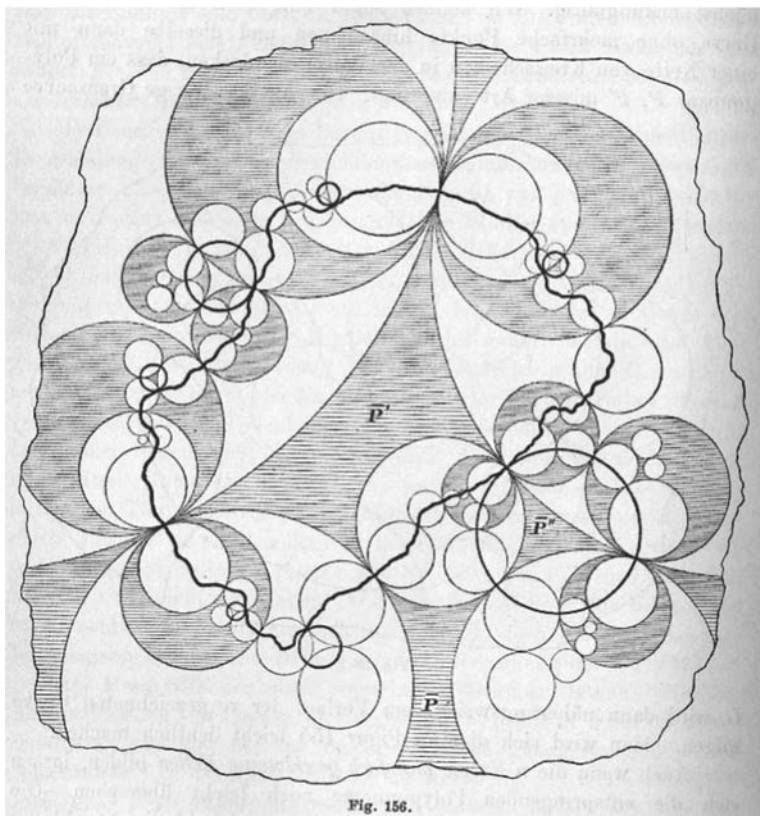


Fig. IV.3. La figure 156 de [Fricke & Klein 1897]...

Cette figure a une histoire. D'abord, parce qu'elle a fini par figurer dans les Œuvres de Poincaré (!) : lorsque Garnier, en 1954, donne une conférence sur les travaux de celui-ci, à l'occasion de son centenaire, il éprouve le besoin de montrer les ensembles limites et inclut donc (sans mentionner l'emprunt) cette figure et ses voisines dans son article [Garnier 1954] (paru dans le volume 11 des Œuvres de Poincaré). Ensuite parce qu'elle a fait l'objet d'une critique de Mandelbrot [1983] :

It now seems that Figure 6 [notre figure IV.3] was drawn by a hapless draftsman [un malheureux dessinateur] (legend has it that he was an engineering student in Fricke's class), who had been instructed how to determine a few points of L exactly, and was then left to draw "some very wiggly and complicated curve" passing through these points. As Fricke did not know what to expect, the draftsman received no explicit directions.

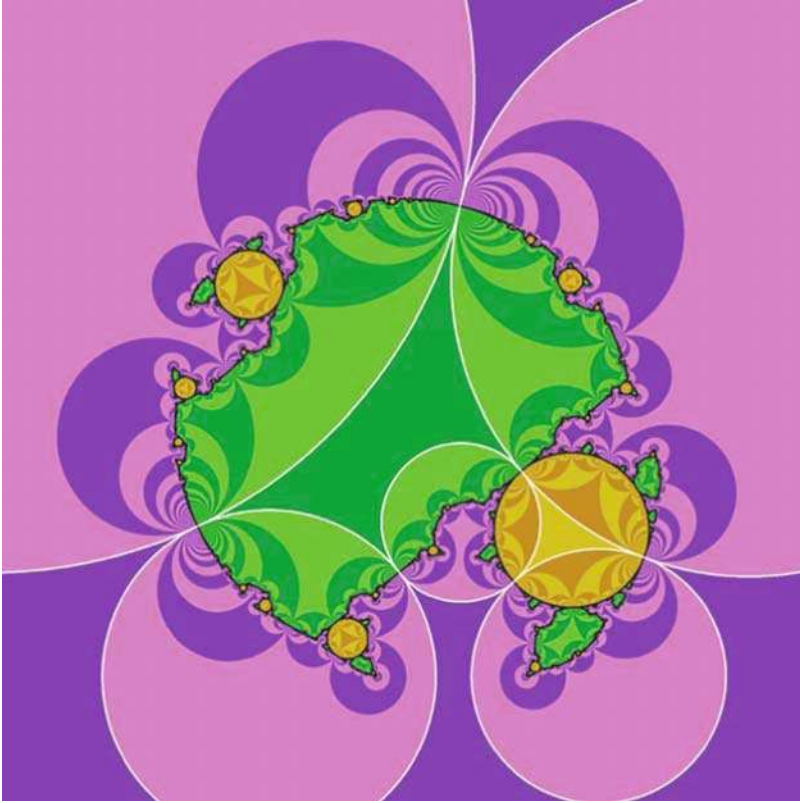


Fig. IV.4. ... et celle qu'Arnaud Chéritat et son ordinateur dessinent aujourd'hui

Il semble plutôt remarquable que Fricke, Klein, et le dessinateur⁴¹, aient été capables, en 1897, de concevoir une courbe contenant tant du vrai ensemble-limite (la courbe très ondulée et les cercles dessinés en gras). Il manque à cette figure ce qui va rendre l'ensemble-limite invariant, c'est-à-dire

⁴¹ Fricke, lui-même élève de Klein, enseignait à Braunschweig et à des élèves ingénieurs. On aura remarqué que Mandelbrot ironise sur le malheureux élève et son professeur, mais s'abstient de mentionner (et donc de critiquer) Klein. Commentant une autre figure du même livre de Fricke et Klein, les auteurs de [Mumford et al. 2002] écriront, eux :

Figure 6.4 [la figure 145 de [Fricke & Klein 1897]] was drawn by one of Klein's students, by a happy chance a gifted draftsman [par chance un dessinateur doué], whose beautiful pictures were not to be improved until the advent of modern computer graphics a century later.

C'est une excellente occasion de renvoyer les lecteurs à ce bel ouvrage et à ses non moins belles figures.

des petites « copies » de la courbe ondulée accrochées aux cercles tangents dessinés en gras, et ainsi de suite.

L'ordinateur utilisé par le collaborateur de Mandelbrot ferait, bien sûr⁴², beaucoup mieux en 1983. La figure IV.4 présentée ici a été réalisée par Arnaud Chéritat, qui a fait encore mieux en 2008 ; elle montre

- les cinq cercles qui définissent les inversions engendrant le groupe (en blanc),
- les trois polygones que ces cercles déterminent : un quadrilatère (vert foncé), un triangle (orangé clair) et un pentagone (violet foncé),
- leurs images respectives par les éléments du groupe, en vert, orangé, violet,
- l'ensemble-limite (noir) est la frontière entre les couleurs.

Ajoutons que Gaston Julia possédait un exemplaire du livre [Fricke & Klein 1897], acquis, si l'on en croit l'inscription manuscrite « Gaston Julia, octobre 1919⁴³ », après l'écriture de son mémoire sur l'itération (ce qui ne veut pas dire qu'il ne l'avait pas lu avant). Il a annoté quelques pages de ce livre (conservé à la bibliothèque du CIRM), mais ne nous a malheureusement laissé aucun commentaire (même marginal) sur la figure 156.

IV.5.c L'ensemble de Julia dépend-il continûment de la fraction rationnelle ?

Voici une reformulation de la question de [Fatou 1920a, p. 73] (voir ici page 96). Considérons une famille

$$\mathcal{R} : X \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$$

de fractions rationnelles (X est une variété algébrique complexe, par exemple $X = \mathbf{C}$ et $\mathcal{R}(t, z) = z^2 + t$). La question serait d'étudier le lieu de bifurcation $B(\mathcal{R})$, ensemble des t au voisinage desquels l'ensemble de Julia $J(R_t)$ ne dépend pas continûment de t . La continuité est définie par la distance de Hausdorff sur les compacts de $\mathbf{C}$.

Douady étudie la question très précisément pour les polynômes quadratiques dans un article assez accessible [2009]. Il y montre notamment que l'application

$$R \longmapsto J(R)$$

est semi-continue inférieurement, alors que l'analogue pour l'« ensemble de Julia rempli » (le complémentaire du bassin d'attraction du point à l'infini, la

⁴² J'avoue ne pas avoir vraiment compris la figure de [Mandelbrot 1983] (qui représente l'ensemble-limite seul, sans les cercles qui lui ont donné naissance) avant de voir la figure IV.4.

⁴³ Ce qui indique que l'on pouvait acheter un livre allemand — et même un livre de Klein — paru avant la guerre, à Paris, en 1919.

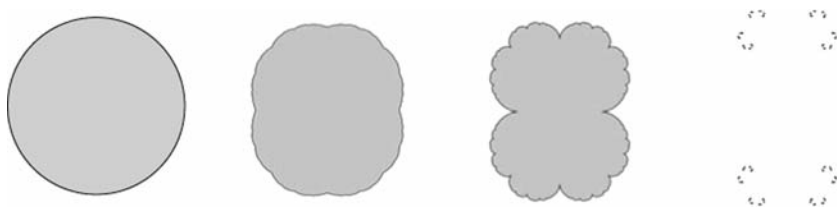


Fig. IV.5. La semi-continuité de J pour $R(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbf{R}$, $c \in [0, 1]$

partie représentée en grisé sur les figures) est semi-continue supérieurement. Ces deux propriétés jouent un rôle important dans la construction par Buff et Chéritat d'ensembles de Julia de mesure positive.

Dans l'exemple où $\mathcal{R}(t, z) = z^2 + t$, $B(\mathcal{R})$ est le bord de l'ensemble de Mandelbrot (voir le § IV.5.a). On sait en général que $B(\mathcal{R})$ est fermé, nulle part dense, et que c'est aussi l'ensemble des t au voisinage desquels le nombre de cycles attractifs de R_t n'est pas localement constant. Voir [Douady 2009; McMullen 2000] et les références contenues dans ces articles.

Au-delà du calcul des dimensions de Hausdorff de tel ou tel ensemble de Julia, notons par exemple que la dimension de Hausdorff de l'ensemble de bifurcation $B(\mathcal{R})$ défini ci-dessus est (quand $B(\mathcal{R})$ n'est pas vide) la dimension de l'espace de paramètres X . C'est par exemple 2 dans le cas de $z^2 + t$, voir [McMullen 2000], et c'est aussi la dimension de l'ensemble de Julia $J(R_t)$ pour t dans une partie dense de $B(\mathcal{R})$.

Sur Pierre Fatou

Mon intérêt pour cette histoire est venu du côté de Gaston Julia. Si aucune biographie ne lui a été consacrée, il y a beaucoup à lire sur sa vie. Une image de son enfance et de sa scolarité brillante puis de sa deuxième naissance (selon ses propres termes) après ses blessures de 1915, image polie par lui-même, est donnée par les nombreux discours qu'il a prononcés ou qui lui ont été adressés au cours de nombreuses cérémonies tout au long du xx^e siècle (voir [Julia 1970]). Ce qu'il dit, ce qu'il ne dit pas, l'endroit où il le dit, la date à laquelle il le dit, ceux qui s'adressent à lui, ceux qui ne s'adressent pas à lui : indépendamment d'autres sources moins publiques, sa biographie officielle est assez bien renseignée (mais voir aussi le § VI.4).

C'est la lecture des articles de mathématiques de Pierre Fatou ainsi que la façon dont il a joué son rôle dans l'histoire du Grand Prix des sciences mathématiques en 1917–1918 qui m'ont donné envie d'en savoir plus sur ce mathématicien. Comme nous l'avons déjà remarqué, il a été un protagoniste discret mais assuré, assuré mais cordial, de l'histoire de l'itération.

Il existe très peu d'informations publiques sur la biographie de Pierre Fatou¹. Les sources publiées utilisées ici sont les deux articles « nécrologiques » de Chazy [1932] et de Bloch [1931], la notice [Nathan 1971] du *Dictionary of scientific biography* ainsi que le discours prononcé par Mineur [1929] au cours des obsèques de Pierre Fatou. Les lettres de Lebesgue [1991] à Borel déjà citées plusieurs fois dans ce livre, contiennent des renseignements précieux. Les indications sur la vie de la société dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* ont aussi été très utiles.

¹ David Aubin m'a indiqué une partie de ces références ainsi qu'un document que l'on lira ci-dessous. Gladys Sérieyx m'a envoyé l'article du quotidien local *le Nouvelliste du Morbihan* contenant le discours de Mineur, une source publiée... mais qu'il aurait été difficile d'exhumer sans son aide. On apprend énormément sur le contexte du travail de Fatou à l'Observatoire en lisant la thèse [Saint-Martin 2008].

Outre les sources publiées, sont utilisés ici des renseignements d'état-civil (les actes de naissance et de décès de Pierre Fatou, l'acte de naissance de Florian La Porte), les rapports annuels de l'Observatoire de Paris et des documents provenant des archives de l'Académie des sciences.

L'aide généreuse et abondante de la famille de Pierre Fatou a été décisive. Il est remarquable que ce mathématicien, mort sans enfant il y a déjà longtemps (en 1929) possède une grande famille de petits-cousins et de petits-neveux dont plusieurs sont très attachés à l'histoire de leur famille et en particulier à celle de « Pierre Fatou l'astronome », comme ils l'appellent, dont on verra qu'il s'agit d'une singularité de la famille. Parmi les nombreuses informations transmises par ces parents, et dont beaucoup appartiennent à une tradition orale familiale, se trouve un texte écrit, des souvenirs de Robert Fatou (1895–1981), un neveu de Pierre Fatou qui l'a un peu connu². Il préparait le concours d'entrée à l'École navale au lycée Saint-Louis et Pierre Fatou était son « correspondant » :

aux environs de l'année 1911 [...] j'étais invité à l'accompagner le dimanche, soit au concert, soit dans des promenades silencieuses à travers les rues de Paris. Ce qui me procurait un plaisir modéré

(le jeune homme avait seize ans...), il l'a revu plusieurs fois vers 1920 et a eu plus tard la bonne idée d'écrire quelques pages de souvenirs sur cet oncle (qu'il n'a malheureusement pas datées). Ce document touchant est une des sources importantes de ce chapitre. On peut aussi découvrir beaucoup de choses, tout simplement, en lisant un faire-part de décès de la mère de Pierre Fatou (et encore merci à Gladys Sérieyx).

Une précision : on le verra, cet embryon de biographie n'a pas été conçu comme un éloge académique.

V.1 Enfance et jeunesse de Fatou

Pierre Fatou est né³ à Lorient le 28 février 1878. Il était le quatrième et dernier enfant de Prosper Ernest Fatou et de Louise Eulalie Courbet, après Louis, né en 1867, Ernestine, née en 1869, et Jeanne. Dans la famille de Pierre Fatou, à l'époque et jusqu'à nos jours, beaucoup des hommes sont des officiers de marine. L'acte de naissance de « notre » Fatou indique que son père, âgé

² Les quelques pages de souvenirs de Robert Fatou ont été assemblées à des copies de documents publiés que lui a transmis Suzanne Débarbat en 1992–93, par un petit-cousin de Pierre Fatou, l'amiral Alain Fatou qui m'a envoyé cet ensemble, quinze ans après.

Alain Fatou est un petit-fils de l'oncle médecin de Pierre Fatou dont il va être question ci-dessous.

³ D'après une tradition familiale, tous les Fatou descendent d'un pharmacien de Quimper, Ambroise Fatou, né au château de Versailles en 1786.

de cinquante-six ans⁴, était capitaine de frégate en retraite, et que sa mère, âgée de trente-trois ans, était « sans profession ». Les parents de Pierre Fatou s'étaient mariés le 25 juillet 1866. Son père avait un frère qui était lui aussi capitaine de frégate, un autre était pharmacien et un troisième médecin. Ce dernier a peut-être aidé l'enfant à naître, toujours est-il qu'il a accompagné le père, comme témoin, pour la déclaration à l'état-civil.

Nous ne savons presque rien de l'enfance de Pierre Fatou, si ce n'est que

De bonne heure ses oreilles avaient pu se familiariser avec les classiques, car l'une de ses sœurs et son frère jouaient du piano, la première avec art, le second avec acharnement

comme l'écrit Robert Fatou, qui était le fils de ce pianiste acharné.

D'autre part, son père est mort en 1891, alors que Pierre Fatou avait treize ans.



Cette photographie, prise vers 1885, représente un jeune homme non identifié (un cousin ?), la mère de Pierre Fatou, son père Ernest Fatou, son frère aîné Louis et sa sœur Ernestine, assis sur les chaises (de gauche à droite), sa sœur Jeanne avec sa poupée et Pierre Fatou lui-même, assis par terre.

⁴ D'après les documents généalogiques de la famille Fatou, Prosper Ernest Fatou (que l'on appelait Ernest) est né en 1832, ce qui lui fait quarante-six ans en 1878. Sans doute une erreur de calcul de l'employé de mairie.

Pierre Fatou a fréquenté le lycée de Lorient, où il a été, à seize ans, l'élève du philosophe Alain, qui s'appelait encore Émile Chartier et était alors un jeune professeur⁵ (il n'avait que dix ans de plus que son élève). Il n'est pas impossible que Fatou ait maintenu plus tard le contact avec son ancien professeur, en tout cas Alain était au courant de l'évolution de sa carrière lorsqu'il s'en est souvenu dans son livre [1936, Chapitre Lorient] :

J'eus en ces années-là un élève tout simple et modeste, qui était un génie mathématicien. Je lui enseignai vaille que vaille la philosophie de ces choses ; il comprenait aisément tout cela et ne faisait jamais d'objection. Il m'apprit beaucoup sur ces méthodes d'aigle ; car j'observai l'aiglon encore petit. Il est mort il y a quelques années calculateur à l'Observatoire de Paris, et auteur d'une thèse qui fut comprise peut-être de deux hommes dans le monde. Il s'appelait *Fatou*. Selon mon avis, il est mort de l'ennui mathématique. Et il n'est pas le seul⁶.



© Archives du Collège Stanislas

Pierre Fatou à 17 ans en uniforme du collège Stanislas

Après le lycée de Lorient, Pierre Fatou est venu à Paris. Il a été élève au Collège Stanislas de 1894 à 1897, en mathématiques élémentaires et mathématiques spéciales⁷. Le palmarès des prix du Collège Stanislas nous apprend

⁵ Le philosophe Alain a enseigné au lycée de Lorient de 1893 à 1900.

⁶ Ce texte d'Alain date de 1936, il anticipe un peu sur la suite de l'histoire racontée ici en nous proposant une première version de la mort de Pierre Fatou.

⁷ Encore merci à Nicolas Lecervoisier et aux archives du Collège Stanislas.

que Pierre Fatou, élève de mathématiques spéciales a obtenu le premier prix de mathématiques en 1896–97. Il était alors l'élève, dans la « section bleue », de Charles Biehler⁸, un enseignant réputé⁹.

Pierre Fatou a été ensuite élève au lycée Saint-Louis (d'après ce que dit [Bloch 1931]) et il est entré à l'ENS en 1898.

V.2 Que savons-nous de Pierre Fatou ?

On trouvera dans ce paragraphe ce qu'un sociologue appellerait peut-être un *habitus* psycho-sociologique, une description du milieu dans lequel Fatou a vécu et, à partir de sources finalement assez minces, parfois réduites à l'état d'indices, une tentative de donner une idée de son caractère, de ses goûts et de son style de vie.

Pierre Fatou venait donc d'un milieu breton catholique, d'une famille dans laquelle il y avait (et il y a encore) beaucoup de marins — dont plusieurs sont passés par l'École navale, ce qui veut dire qu'ils ont fait un tant soit peu d'études scientifiques, nous avons vu ou nous verrons que Picard, Julia, et même Montel ont fait passer le concours d'entrée dans cette école — mais aussi des médecins, des pharmaciens (dès l'« origine », voir la note 3), des magistrats, jusqu'à un conseiller d'État... et même un général (de l'armée de terre), Georges Fatou, un cousin germain de Pierre Fatou.

Une bourgeoisie peut-être pas très fortunée mais cultivée, donc — nous avons vu que l'on jouait du piano dans la famille de Pierre Fatou, nous aurons à reparler de ses propres goûts musicaux. Il n'en reste pas moins que Pierre Fatou faisait, dans une telle famille, figure de singularité (isolée) et ce pour au moins deux raisons. Parce qu'il n'avait pas les capacités physiques de ces marins ; son neveu Robert Fatou avoue avoir ressenti

un peu de pitié pour cet oncle d'apparence débile, n'ayant jamais joué au football, ne sachant peut-être même pas nager.

⁸ Charles Biehler est l'auteur d'une thèse soutenue en 1879 et de plusieurs articles. À cette époque, le Collège Stanislas était dirigé par des pères marianistes et Biehler était lui-même un marianiste. Il connaissait bien Hermite (sa thèse est dédiée « À mon maître M. Charles Hermite ») et même Mittag-Leffler, comme en témoigne, son apparition ici ou là dans leur correspondance, par exemple la mention de « Mr. Biehler, le directeur d'études au Collège Stanislas que vous connaissez » dans une lettre d'Hermite à Mittag-Leffler datée du 18 février 1892 [Dugac 1989].

⁹ Le rapport d'Hermite sur la thèse de Biehler [Gispert 1991, p. 329] se termine par

Cette thèse est l'œuvre d'un professeur de mathématiques spéciales dévoué à ses élèves, et qui consacre avec succès un talent distingué d'analyste à les initier dans la mesure convenable à l'algèbre supérieure de son époque.

Parce que, surtout, il était passé par l'ENS ; on peut imaginer le respect, ou le complexe d'infériorité, que les élèves (ou les anciens élèves) des classes préparatoires à l'École navale pouvaient éprouver à l'égard de leurs condisciples des classes de mathématiques spéciales, et surtout de ceux qui « intégraient » l'École normale supérieure. Voici ce qu'en dit son neveu :

Au sein d'une famille dont sans doute bien des membres étaient incapables de le comprendre, mais même de soupçonner l'étendue de son intelligence, on s'étonnait facilement de son apparence extérieure, du négligé de sa tenue vestimentaire ou de celle de son logement, de son indifférence totale aux rites mondains comme au ton de sa conversation, laquelle restait terne, lente et même hésitante, aussi longtemps que le sujet traité n'effleurait pas les fibres de sa curiosité.

De sa passion pour les mathématiques, bien entendu personne parmi ses proches n'était à même de l'entretenir. On lui accordait de confiance des connaissances scientifiques exceptionnelles, en raison de ses diplômes et des conditions brillantes de son passage à l'École normale. Les siens en étaient très flattés, mais certains eussent sans doute préféré que Pierre Fatou eût été nanti d'un bagage intellectuel plus modeste, moins abstrait, partant plus accessible, mais sous des dehors moins originaux plus conformes aux traditions de son milieu.

Il est d'ailleurs avéré que tout le monde ne l'appréciait pas, ou ne le trouvait pas sympathique, dans sa famille, peut-être à cause de son caractère à la fois réservé et ironique, qui a pu être perçu comme de la hauteur : Michel Fatou m'a rapporté qu'il était sorti une fois d'une réception chez des cousins en faisant semblant d'être mort de froid et en déclarant « l'atmosphère était glaciale ! »

Pierre Fatou était pourtant très lié à sa famille, à son frère l'amiral Louis Fatou, à son cousin le général Georges Fatou, et la famille a gardé le souvenir du fait que Georges et Pierre Fatou se fréquentaient et s'estimaient (d'après Michel Fatou, petit-fils de Georges Fatou) ; on se souvient aussi dans la famille qu'il lui est arrivé d'emmener sa cousine Marguerite (une tante de Michel Fatou) à l'Opéra dans les années 1920.

Ses liens avec et sa fréquentation de membres de sa famille ont dû être d'autant plus importants que Pierre Fatou, célibataire, a vécu plusieurs années avec sa mère. Le faire-part annonçant la mort de sa mère indique en effet qu'« elle est décédée en son domicile à Paris 172 boulevard Montparnasse », ce qui est l'adresse¹⁰ que Pierre Fatou donnait à la SMF depuis 1906. Pierre Fatou habitait donc avec sa mère (ce qui pourrait être la raison de son déménagement en 1905) jusqu'à la mort de celle-ci en 1911. Son neveu ne parle pas

¹⁰ C'est au métro Port-Royal, pratiquement à l'angle de l'avenue de l'Observatoire, à deux pas du lieu de travail de Fatou (comme me l'a fait remarquer Suzanne Débarbat, un astronome faisant des observations de nuit devait habiter le quartier). Auparavant, en 1905, il habitait un petit peu plus loin de l'Observatoire, au 15 rue des Ursulines, comme on l'apprend, toujours, dans la liste des adhérents de la SMF, publiée chaque année dans le *Bulletin* de cette société.

de la mère (sa grand-mère) dans ses souvenirs, mais il a dû arriver à Paris à la rentrée 1911, alors qu'elle est décédée le 8 avril. En l'absence d'autres informations, on peut imaginer qu'après avoir marié ses filles, la mère de Pierre Fatou soit venue à Paris s'occuper de son jeune fils décidément célibataire, peut-être au moment où il était assez malade pour avoir demandé un congé en 1906 (voir ci-dessous page 142).

Même après la mort de sa mère, le célibataire Pierre Fatou ne vivait pas absolument seul puisque, nous apprend son neveu, il possédait un perroquet (sans doute arrivé à Paris avec la mère de Pierre Fatou puisque hérité de son père qui l'avait ramené d'un voyage au Brésil) qui chantait une chanson à boire. Comme Ernest Fatou est mort en 1891, le perroquet devait avoir un âge respectable ! Ajoutons qu'une tradition familiale orale veut que la pièce qui lui servait de bureau ait été fermée à clef et que sa femme de ménage n'ait pas eu le droit d'y pénétrer.



© M.A.

172 boulevard Montparnasse
(le 26 décembre 2007)

Outre sa famille, Pierre Fatou avait des amis, et même un groupe d'amis, des amitiés forgées au cours de ses années à l'École normale supérieure. Nous l'avons dit (page 22), Pierre Fatou a acquis à l'ENS et à la Sorbonne un bagage mathématique (cours de Borel, Picard, Goursat, Appell,...) qui le mettait en connivence scientifique avec ses collègues mathématiciens (notamment Montel, Fréchet, Julia,...). Mais il s'est aussi fait, à l'ENS, des amitiés durables. Il y a fait la connaissance du (futur) physicien Eugène Bloch, qui était entré dans

cette école un an avant lui, et de son frère aîné Léon Bloch, qui sont devenus ses amis¹¹. Nous citerons aussi¹², en témoignage de leur amitié, des lettres de Fatou à Fréchet et surtout à Montel.

Léon Bloch [1931] nous dit que Fatou et lui-même appartenaient à un groupe d'amis, une « cohorte », qui se réunissait régulièrement, toujours dans le même café (et « de temps immémorial »). Les amis discutaient, notamment de politique¹³. Il semble que les Bloch appartenaient plutôt à une mouvance « de gauche » (on ajoutera ici autant de guillemets que l'on le souhaitera : ce qu'est la gauche dans la période, disons entre l'Affaire Dreyfus et le Front populaire, n'est pas complètement clair), il en était peut-être alors de même de Pierre Fatou. Son activité de « syndicaliste », que nous évoquerons ci-dessous, est une indication qui pointe dans la même direction.

Il est à remarquer que cette activité syndicale a lieu parmi les astronomes, un milieu dans lequel il n'est pas évident que Fatou se soit fait des amis ; à part comme président ou même simple membre de l'AAPSO, qui il fréquentait à l'Observatoire ne nous est pas connu.

Nous verrons d'autre part que Pierre Fatou avait d'autres amis, Léon Guillet et sa famille, par exemple (voir la note 102), mais nous ne savons ni comment ils se sont connus ni à quel groupe les rattacher (dans le cas de Léon Guillet, ni aux mathématiciens, ni aux astronomes, ni à la famille, ni aux normaliens...).

En dehors de ses activités professionnelles (ou semi-professionnelles à la SMF ou à l'AAPSO) de mathématicien ou d'astronome, nous savons que Pierre Fatou était un grand amateur de musique. Nous avons dit qu'il allait à l'Opéra. Il y allait même assez loin :

La passion musicale l'avait conduit tout jeune à faire le pèlerinage de Bayreuth¹⁴ où il a connu les soirées historiques qui réalisèrent la Tétralogie. Dans ces dernières années, il avait été peu à peu gagné au charme tragique de la musique russe, à l'éclatante couleur des Espagnols, à tout cet exotisme si prenant qu'il rend parfois injuste pour notre musique française. [Bloch 1931]

Robert Fatou (le neveu) précise :

Bien que n'ayant jamais « appris » la musique, Pierre Fatou y trouvait certainement un immense plaisir [...]. [Il] avait le don de lire la musique et

¹¹ Léon Bloch, entré à l'ENS en philosophie en 1894 (la même année que Paul Langevin, Henri Lebesgue et Paul Montel), est lui-même devenu physicien. Il a écrit notamment un article faisant le point sur la physique quantique à la fin de la guerre en 1918. Assistant à la Faculté des sciences, il a donné plusieurs séries de conférences sur la structure des atomes et la physique moderne à l'IHP de 1928 à 1933, dont certaines ont donné lieu à des articles dans les volumes 1 et 2 des *Annales de l'Institut Henri Poincaré*.

¹² Par fragments dans ce chapitre, intégralement dans l'appendice.

¹³ Le fait que Fatou s'intéressait à la politique est confirmé par les souvenirs de son neveu, d'après lequel il s'intéressait aussi à la sociologie.

¹⁴ D'après son neveu Robert, Fatou est même allé plusieurs fois à Bayreuth.

il la savourait. Il achetait les partitions de ses auteurs favoris, les romantiques allemands d'abord, puis les Russes pour lesquels il avait conçu une très grande admiration. [...] Au concert, il suivait attentivement des yeux sur les portées l'exécution des morceaux et rentré chez lui il « entendait » à nouveau ses airs préférés en parcourant les pages de ses cahiers. Parfois, si sa mémoire lui était infidèle, il s'aidait d'un piano ou d'un alto¹⁵ pour retrouver une mélodie. Alors un sourire éclairait son visage, témoignant de son intense satisfaction.

Le père de Michel Fatou disait que Pierre Fatou était (ou se disait ?) le meilleur spécialiste français de la musique russe. Son goût pour la musique s'accompagnait d'un goût (plus inattendu) pour la danse. Ce n'était pas un secret pour ses amis :

Nous nous rappelons tous qu'à l'âge de vingt ans, on le rencontrait chaque soir au concert ou au bal, et qu'une partie de sa thèse fut conçue à Bullier¹⁶. [Bloch 1931]

Il semble que la famille ne connaissait pas ce goût puisque le neveu Robert a été étonné, vers 1920 (c'était donc un intérêt durable pour Fatou, qui n'avait plus vingt ans) de voir son oncle prendre des cours de tango¹⁷, à Luna Park, avec une jeune femme dont il prend bien soin de préciser qu'elle était chaperonnée par son père et n'était pour Fatou qu'un professeur. La famille semble avoir été très surprise lorsque Robert Fatou a fait état de cette activité de « Pierre Fatou l'astronome ». Lui-même nous confirme ce goût durable à la fin d'une lettre adressée à son ami Montel :

6 déc. 1920

Mon cher Montel

J'ai fait ces jours derniers un petit travail sur certaines fonctions uniformes et ai rédigé là dessus une note que je comptais primitivement donner aux C.R. Mais comme cela dépassait notablement les limites permises, pour ne pas avoir à refaire une note succincte et faire ensuite un article détaillé, j'ai trouvé expédient de te donner cette note pour le BSM¹⁸, en la faisant suivre de quelques applications, détails de calcul et de démonstration. Ce mode d'exposition a d'ailleurs en soi quelques avantages et peut-être a-t-on plus

¹⁵ Il est question ici d'un piano et d'un alto. D'après Henry Fatou, Pierre Fatou était un excellent violoniste. Un autre parent rapporte qu'il jouait d'un instrument, sans pouvoir préciser duquel. La trompette visible sur la photographie de famille page 127 ne semble pas une option très sérieuse.

¹⁶ Le bal Bullier était situé au 174 boulevard du Montparnasse... littéralement la porte à côté pour Fatou qui, rappelons-le, habitait au 172.

¹⁷ En 1920, le tango devait être « la » danse à la mode. Une petite remarque : l'amour de la musique est traditionnel (et bien connu) chez les mathématiciens, et nul ne s'en étonne. Moins connu, mais aujourd'hui classique aussi, est l'intérêt montré par de nombreux-x mathématicien-ne-s pour le tango.

¹⁸ Il s'agit ici du *Bulletin* de la SMF, que l'on appelait alors « la société mathématique ».

de chances d'être lu de cette manière. Tu voudras bien remettre tout cela à Galbrun¹⁹.

Si tu vas à la Société mathématique mercredi prochain, ce que je ne puis faire moi-même, ayant ma soirée prise, je te serais reconnaissant de donner lecture de cette note²⁰, bien entendu sans les notes explicatives de la fin et même au besoin en sautant quelques passages du § II. Si cela t'embête et si tu penses que cela embêtera tout le monde, tu peux aussi t'en dispenser.

Cordialement à toi

P. Fatou

Note pour l'histoire des mathématiques²¹ : le § III a été trouvé à Bullier.

Note complémentaire : il est inutile de donner lecture de la note précédente à la SM.

La musique, la danse, mais ce n'est pas tout : Pierre Fatou était aussi un photographe amateur. Cette activité, dit Bloch,

nous a valu des albums de souvenirs photo d'un art d'une délicatesse surprenante [Bloch 1931, p. 57].

Cet avis n'est pas partagé par son neveu :

La plupart de ses innombrables clichés ne représentaient que les élégantes qui se pavanent sur l'avenue du Bois ou les trottings du boulevard Saint-Michel qui, pas plus les unes que les autres ne représentaient rien de pittoresque. Quant aux paysages recueillis au cours de ses vacances, ils restaient généralement d'une qualité inférieure à celle de banales cartes illustrées²².

Évoquons encore la manière dont il passait ses vacances. Il aimait les randonnées en montagne :

Menant dix mois par an²³ une existence absolument sédentaire, il n'en conservait pas moins la curiosité du monde et le goût des voyages. Il m'a

¹⁹ Henri Galbrun a soutenu en 1912 une thèse sur les équations aux différences finies ; il deviendra spécialiste des mathématiques de l'actuariat. Il est en 1920, avec Montel, secrétaire de la SMF.

²⁰ La communication « Sur un problème de la théorie générale des fonctions analytiques : en quel ensemble de points une fonction analytique devient-elle nulle sur une ligne singulière ? » a bien été faite à la SMF, mais le 22 décembre 1920, ce qui n'était pas exactement « mercredi prochain » (qui aurait été le 8 décembre), mais la séance suivante. La partie « Vie de la société » du *Bulletin* de la SMF indique que l'article correspondant est paru au *Bulletin des sciences mathématiques* et donne la référence [Fatou 1921c].

²¹ Quatre-vingt-huit ans après le destinataire Montel, Florence Greffe et moi-même avons sans doute été les premières à lire cette petite note. Au risque de ne pas respecter la nécessaire distance avec l'objet de cette étude, j'avoue avoir été émue de ce message que nous avait adressé Fatou.

²² Il semble que les albums de photographie de Pierre Fatou n'aient pas été conservés, nous ne pourrions donc pas nous faire une opinion.

²³ Les astronomes parisiens avaient un mois et demi de vacances [Saint-Martin 2008, p. 218]. De plus, Pierre Fatou a fait souvent des observations pendant les mois d'été. Il n'a donc certainement pas pris deux mois de vacances tous les ans.

souvent décrit ses excursions dans le Tyrol ou dans la région des lacs italiens, et ses relations présentaient toujours des vues originales, même sur les sujets les plus rebattus

nous dit son neveu, et Bloch confirme :

il avait parfois des sursauts d'énergie incroyables, qui lui permettaient de faire des marches de dix heures dans les montagnes du Tyrol ou le long des grèves bretonnes. [Bloch 1931]

Car Fatou était resté un Breton, qui allait tous les étés

demander à l'air chargé de la senteur des goémons le coup de fouet qui le remettrait d'aplomb pour un an. [Bloch 1931]

Fatou aimait les mathématiques, l'astronomie, la Bretagne, la photographie, la solitude et le silence, le bal et surtout la musique. Cet homme méditatif, réfléchi, réservé, silencieux et discret, voire taciturne — Lebesgue [1991] disait Fatou « assez renfermé et timide » (le 16 janvier 1906) —, pas en très bonne santé, peut-être neurasthénique, danseur, musicien, photographe, fumeur de pipe²⁴, Pierre Fatou semble en effet avoir été capable de beaucoup de fantaisie.

Pour compléter ce portrait un peu pointilliste²⁵ de Pierre Fatou, citons encore la notice [Bloch 1931] que lui a consacrée son ami Léon Bloch, une sorte de « biographie intellectuelle », que nous complétons par quelques indications allant dans le même sens.

Cordial et discret, il s'asseyait sans déranger personne au cœur de notre cohorte, et pour rien au monde, il n'eût interrompu la conversation déjà commencée. Qu'il s'agit d'art, de science, de politique, de littérature ou de musique, il gardait volontiers un obstiné silence, lequel n'était ni dédaigneux ni distant, mais où pourtant le voisin subtil eût pu voir quelquefois une réserve. Venait-on à lui demander son avis, sa réponse se faisait attendre plusieurs secondes, et nous devions tendre l'oreille pour recueillir la sentence qu'il laissait choir d'une voix cavernueuse. La phrase proférée était toujours différente de celle qui était attendue. À l'aspect banal de la question, que nous pensions avoir retournée sous toutes ses faces, venait se substituer un aspect nouveau qui apparaissait immédiatement comme le seul vrai. L'angle sous lequel Fatou envisageait les problèmes était toujours celui qui nous avait échappé, celui qui pénétrait au cœur de l'énigme. [Bloch 1931, p. 53]

Nous avons vu que le très jeune neveu de Fatou n'avait pas beaucoup apprécié les silences de son oncle. Un peu plus tard, il les comprendra mieux :

vers 1920, quand j'étais enseigne de vaisseau²⁶, il m'arrivait de passer quelques jours de permission dans la capitale, où alors je commençai à

²⁴ D'après une tradition orale familiale.

²⁵ Plus par manque d'information que par choix stylistique.

²⁶ Il n'y aura pas dans ce texte de digression sur les grades dans la marine française. En 1920, Robert Fatou avait vingt-cinq ans et était enseigne de vaisseau. Plus tard, capitaine de vaisseau, il commandera le croiseur-école Jeanne-d'Arc, ce qui fait qu'il sera bien connu de plusieurs générations de (plus jeunes) officiers de marine — parmi lesquels quelques petits-cousins Fatou.

distinguer, sous l'extrême originalité de mon parent, un cœur d'or assorti d'une franchise imperturbable et d'une liberté de jugement qui ne se laissait entraver par aucune convention, pas plus que par les opinions de quiconque. Comme néanmoins sa délicatesse naturelle lui interdisait de froisser son prochain, il lui arrivait de se taire plutôt que d'afficher des sentiments contraires à ceux de ses interlocuteurs.

On pourra confronter ces opinions sur la façon élégante et sympathique avec laquelle Fatou s'exprimait à quelques citations extraites de ses articles :

Cette étude a été faite par M. Leau dans sa Thèse ; nous allons reprendre son analyse sous une forme différente et compléter sur beaucoup de points les résultats obtenus par cet éminent géomètre. [Fatou 1919b, p. 191]

Ou encore :

Ce cas a été étudié également par Lattès dans son article déjà cité du *Bulletin de la Société mathématique*, et d'une manière entièrement correcte, bien qu'il ait indiqué postérieurement des résultats inexacts à ce sujet²⁷. [Fatou 1924b, p. 76]

La façon dont il s'adresse à son ami Montel, pour lui signaler des erreurs dans certains de ses articles publiés est tout aussi remarquable :

Vendredi²⁸

Mon cher Montel

J'accepte sans restriction le 2^e alinéa²⁹ p. 41 mais je fais quelques réserves sur ce qui précède immédiatement (p. 41, lignes 6 à 12) : « Puisqu'il existe une courbe aboutissant en z_0 sur laquelle $f(z)$ a pour limite z_0 on en déduit que $f(z)$ a pour limite z_0 sur toute courbe intérieure à (d) aboutissant en z_0 et remplissant les conditions du § 23...

Je me reporte aux conclusions du § 23 et je lis : Soit L une courbe intérieure à l'angle AOB , tangente en O à OA et admettant en ce point un rayon de courbure non nul...

Or ici nous n'avons aucune raison de supposer que la courbe ℓ a un rayon de courbure, ni même une tangente distincte ou non de la tangente au cercle. D'ailleurs le § 23 envisage des courbes de plus en plus rapprochées de la frontière et ce qui nous intéresse ici surtout ce sont au contraire les cordes de la circonférence.

Il faut donc se référer au § 22 qui précède et, effectivement ce § 22 donne à *peu près* confirmation de ton assertion ; mais pas tout à fait car, je le répète, l'argument limite de $z - z_0$ peut avoir toutes les valeurs comprises entre $\frac{\pi}{2}$

et $\frac{3\pi}{2}$ (fig) en sorte que la courbe L (p. 34) ne soit ni tangente à OA ou à OB , ni intérieure à un angle $< AOB$.

²⁷ *C. R. Acad. Sc.*, t. 166, 1918, p. 51. Les deux fonctions vérifiant les équations (27) ci-après, cessent en général d'exister pour $s' = s^p$, contrairement à l'affirmation contenue dans cette Note (note de Pierre Fatou).

²⁸ Lettre non datée, peut-être d'octobre 1924, fonds Montel, archives de l'Académie des sciences.

²⁹ L'article dont il est question est [Montel 1917b].

Je constate cependant, en me reportant à la démonstration du § 22 qu'il n'y a aurait probablement pas grand chose à changer pour que ça colle. Cela marche si les [illisible] λ_n convergent uniformément vers le segment A_2A_3 ; cela marche aussi à fortiori (§ 11) si les points limites des λ_n sont tous intérieurs à Δ'_1 . Je pense donc que cela marche dans les cas intermédiaires. Il n'y a donc pas d'erreur de principe, comme je l'avais cru d'abord, mais seulement négligence de détail, dont on s'aperçoit d'autant plus que tes démonstrations sont, en général, parfaitement précises et claires.

Il manque donc à la suite du § 22 la démonstration du théorème suivant qui, à première vue semble devoir tenir en quelques lignes (mais encore faut-il y réfléchir un peu) : « Si $f(x)$ tend vers α sur une courbe quelconque aboutissant en 0 et intérieure à AOB , $f(x)$ tend uniformément vers α dans tout secteur $A'OB'$ complètement intérieur à AOB » Tant que cela n'est pas fait, il peut subsister quelque doute sur les conclusions de la p. 41.

Ce qui ne l'empêche pas d'être capable d'ironie :

Mardi [6 janv. 1920³⁰]

Mon cher Montel

Si au lieu d'effectuer sur z les substitutions du groupe $(z|k^{\pm n}z)$ tu effectues les substitutions $(z|z+p\omega+q\omega')$ où p et q désignent tous les entiers et (ω, ω') deux nombres quelconques, et que tu considères les fonctions

$$F_{pq}(z) = F(z + p\omega + q\omega')$$

où F est une fonction entière ou méromorphe, tu dois parvenir à des résultats nouveaux et intéressants. Il semble que Julia n'y ait pas songé, car il n'aurait pas manqué de le publier *urbi et orbi*.

Voici encore un passage de [Bloch 1931] sur le comportement de Fatou au cours de leurs réunions amicales :

Comme tous les penseurs de la vraie race, il ne formulait jamais son opinion sous une forme qui pût blesser autrui en découvrant un manque de clairvoyance. Fatou ne parlait point par aphorismes, à la façon des géomètres ou des sots.

Même si l'on est tenté de le faire, il n'est pas indispensable de penser ici à tel ou tel géomètre en particulier, la tendance à s'exprimer par aphorismes étant assez partagée parmi les mathématiciens. À quel géomètre pensait Bloch n'est pas clair — le sens exact qu'il donnait à ce mot non plus. On classerait volontiers Fatou parmi les géomètres — surtout après avoir lu le premier chapitre, « Les groupes discontinus de substitutions linéaires », de son livre [Appell et al. 1930].

Léon Bloch nous dit même ce que Fatou pensait des succès officiels (il n'est pas question dans ce texte du Grand Prix des sciences mathématiques de 1918, mais rien n'interdit d'y penser) :

³⁰ Voir dans l'Appendice les lettres de Fatou conservées par Montel.



© Famille Fatou

Pierre Fatou

Le succès, j'entends le succès officiel et couronné, qui est peut-être le rêve le plus naturel du monde, le seul concevable, le seul digne d'être suivi, demeura pour Fatou jusqu'à son dernier jour l'idéal des médiocres³¹. Comme il eût été attristé d'entendre des hommes de mérite classer les valeurs personnelles selon les titres de la hiérarchie sociale, depuis le pauvre lauréat de l'Institut de France jusqu'au plantureux Prix Nobel. Pour Fatou, il n'y avait d'autre succès que celui de la contradiction vaincue. Bien poser un problème, bien reconnaître ses affinités avec d'autres problèmes, bien saisir le nœud qui les lie, telle est la seule partie qui lui parût digne d'être jouée. [Bloch 1931, p. 54]

Robert Fatou confirme :

La fortune, autant que les honneurs, lui étaient bien indifférente et je ne l'ai jamais entendu faire de discrètes allusions à la maigreur de sa bourse que pour déplorer de ne pas pouvoir en faire profiter de plus nécessaires que lui.

Pour clore cette partie consacrée à la personnalité de Pierre Fatou, signalons son « indéfectible droiture » :

Tout en lui était clair et net, dépourvu de traverses et d'intrigue. Il n'avait ni parti pris, ni jalousie, ni haines, et ne méprisait que deux choses au monde, le mensonge et le favoritisme. Quelque surprenant que cela paraisse, un caractère de cette trempe peut avoir des ennemis. On admet difficilement qu'un esprit libre juge des hommes et des choses sur leur seule valeur, indépendamment de toute tactique politique, de toute tradition religieuse ou sociale. [Bloch 1931]

³¹ En plus du Prix de la fondation Henri Becquerel que lui a accordé l'Académie des sciences en 1918, notons parmi les honneurs officiels reçus par Pierre Fatou, sa nomination comme Officier d'Académie, le 14 juillet 1911, Officier de l'Instruction publique le 21 août 1919 (voir page 33), et chevalier de la Légion d'Honneur le 1^{er} octobre 1923 (promotion Pasteur).

Nous verrons qu'en effet Fatou avait des ennemis, à l'Observatoire à ses débuts (voir le § V.3), mais pas seulement, comme le montrera la lenteur de sa carrière, sa vie durant.

Santé de Fatou

Il est indispensable, parce qu'elle va jouer un rôle important dans sa vie professionnelle, d'insérer ici quelques indications sur la santé de Pierre Fatou.

Pierre Fatou était neurasthénique, nous dit Lebesgue (voir la lettre du 16 janvier 1906 citée page 142). La neurasthénie semble avoir été très fréquente parmi les mathématiciens de cette époque. Outre celle de Fatou, nous avons vu mentionner celle de Baire, qui était sérieusement malade, et même celle de Lattès (page 30). Quant à comprendre ce que désignait ce terme ? De la mélancolie peut-être. Un état dépressif, sans doute — que les conditions de travail de Fatou dans les premières années du siècle peuvent expliquer dans son cas.

Mineur [1929] estime que la santé de Pierre Fatou ne lui « avait pas permis d'embrasser la carrière de marin ». Et en effet, c'était un homme frêle et de santé très fragile

Toute sa vie fut une lutte contre les digestions difficiles, les palpitations de cœur et les insomnies. [Bloch 1931]

ce qui est la raison probable pour laquelle, bien qu'il n'ait eu que trente-six ans en 1914, il n'a pas été mobilisé. Chazy³² confirme :

La santé de Fatou était souvent précaire, et les observations soumettaient sa résistance physique à de rudes épreuves ; mais il apportait une grande conscience à toutes les tâches qui lui étaient confiées, notamment dans la réduction [rédaction ?] des observations, à la discussion des constantes instrumentales. [Chazy 1932]

Le rapport annuel de l'Observatoire de Paris pour 1929 notera, dans le paragraphe consacré à la mort de Fatou :

Sa santé malheureusement avait toujours été un peu chancelante ; elle limitait dans une certaine mesure l'effort qu'il aurait voulu consacrer à la pure observation astronomique, qu'il aimait, et dans laquelle il témoignait d'une habileté sûre et éclairée.

Pourtant son neveu Robert Fatou écrit que Pierre Fatou n'avait

sa vie durant, jugé utile de consulter un médecin.

³² Jean Chazy (1882–1955), lauréat (avec Boutroux et Garnier) du grand Prix des sciences mathématiques de 1912 (sur les équations différentielles algébriques), est aussi un spécialiste du mouvement des corps célestes. Il a étudié en particulier le problème des trois corps et l'avance du périhélie de Mercure et sa résolution par la théorie de la relativité.

Cette information est confirmée (après la mort de Fatou) par une lettre de Louis Fatou (voir ci-dessous page 171). Peut-être son neveu n'a-t-il pas été conscient que Pierre Fatou était malade parce que :

Il parlait rarement de lui-même, moins encore de ses misères corporelles, qu'il avait l'habitude de traiter par le sourire ou par le dédain, presque toujours de taire simplement, avec ce courage fait de pudeur qui appartient aux seuls Bretons. Aussi en arrivions-nous à trouver normal, presque naturel, cet air de fatigue qui, d'année en année se marquait plus profondément sur son visage. Ceux qui revoyaient Fatou à de longs mois de distance lui trouvaient toujours mauvaise mine, l'aspect morose et décharné. [Bloch 1931]

La différence d'aspect physique entre le Pierre Fatou de la photo des astronomes reproduite sur les figures V.1 et V.2 et celui, plus émacié, du portrait plus connu que l'on devine sur la figure V.3 est en effet frappante. Nous verrons plus bas (au § V.9) que Pierre Fatou souffrait vraisemblablement d'un ulcère à l'estomac.

V.3 Suite de la carrière de Fatou

Revenons à la chronologie, interrompue page 129 en 1898, au moment où Fatou entrait à l'ENS. Il a passé l'agrégation en 1901, y a été reçu deuxième, et a été immédiatement embauché à l'Observatoire de Paris, d'abord comme astronome-stagiaire, puis comme astronome-adjoint à partir de janvier 1904 (sur le poste libéré par Hamy promu astronome-titulaire). On lit parfois (dans [Nathan 1971], puis par exemple dans [Alexander 1994] ou sur le site de Saint-Andrews) que c'est parce qu'il n'y avait pas beaucoup de postes de mathématiciens à Paris³³ qu'il a accepté un poste d'astronome-adjoint (en réalité, au début, de stagiaire, puis d'aide astronome). Les raisons pour lesquelles Fatou aurait voulu rester à Paris ne sont pas explicitées dans ces textes. Ce n'est d'ailleurs pas exactement ce que dit Léon Bloch³⁴ :

Fatou est entré dans l'Astronomie, pour ainsi dire, par hasard. Il le doit à l'initiative de Tannery³⁵, qui voulait faire bénéficier l'Observatoire de la présence d'un de ses meilleurs agrégés, lequel devait bientôt être un de nos meilleurs docteurs. En ce temps, l'Observatoire de Paris n'était plus l'Observatoire d'Arago et de Le Verrier. Le recrutement des vocations y était difficile, celui des talents y était presque inconnu. De ponctuels et calmes fonctionnaires y faisaient correctement leur métier, à peu près comme peut faire le sien un chef de division à la Préfecture de la Seine. Tannery comprit qu'il fallait rendre à cette institution un peu de lustre et d'originalité. En

³³ La plupart des mathématiciens mentionnés dans ce texte ont commencé leur carrière en enseignant dans des lycées, souvent en province.

³⁴ Voir aussi, pour une des raisons possibles de ce choix de l'Observatoire, un poste sans enseignement, le § V.7 ci-dessous.

³⁵ Au temps où Fatou y était élève, Jules Tannery était le sous-directeur de l'ENS, le poste que prit ensuite Borel.

proposant d'y attacher un mathématicien comme Fatou, il était sûr de sauvegarder au moins l'Astronomie théorique, dans toutes les applications par où elle touche à l'analyse. [Bloch 1931]

Le travail d'un astronome était en effet, au début du xx^e siècle, un travail de service (météo, heure, carte du ciel) et pas un travail de recherche³⁶. Quelques « ponctuels et calmes fonctionnaires » figurent sur la photographie reproduite sur la figure V.1 (on y remarquera les bonnets d'astronomes, qui accentuent le côté « rond de cuir »).

Au début, Fatou a dû travailler plus à sa thèse qu'à sa tâche d'astronome.

De fait, pendant ses premières années de stage, Fatou resta le mathématicien d'élite qui devait aboutir en 1907 à la publication de sa célèbre thèse sur les Séries trigonométriques. [Bloch 1931]

Ce qui ne plaisait pas à tout le monde puisque, en 1906, on s'est plaint de lui en ces termes (au cours d'une réunion du conseil de l'Observatoire³⁷) :

M. Fatou [...] s'était montré très actif et plein de zèle avant sa nomination. Élève sans traitement en Novembre 1901, il a été, sur la proposition de Monsieur le Directeur³⁸, promu aide astronome au 1^{er} janvier 1904 et, trois mois après, il devenait astronome-adjoint ; il a donc obtenu un avancement exceptionnel et on pensait avoir fait en lui une excellente acquisition. Malheureusement cet espoir a été entièrement déçu. Non seulement ce fonctionnaire n'a presque rien produit pendant ces deux ans, mais sa participation si restreinte aux travaux a été une véritable entrave pour ses collaborateurs³⁹. C'est à cause de lui que la publication du volume des observations de 1902 a été retardée de plus de six mois [...] Il s'est établi ainsi une situation anormale et troublante qui ne peut se prolonger.

Ces années-là, on note des récriminations de même nature contre Salet et même contre Nordmann, qui a, lui aussi, demandé des longs congés pour raison de santé [Saint-Martin 2008, pp. 197 et 202] ; tous deux poursuivaient, comme Fatou, des recherches personnelles. C'est ce que Bloch commente ainsi :

À vrai dire, la besogne d'observation quotidienne, que Fatou exécutait avec une parfaite conscience, ne le passionnait pas : elle constituait pour lui l'ossature, non pas la fin dernière de la science. Ne nous étonnons pas si, dans le milieu un peu primaire où ce normalien était jeté, son souci de théorie lui valut d'abord quelques déboires.

³⁶ Pierre Fatou n'est pas le seul mathématicien connu à avoir gagné sa vie comme employé d'un observatoire ; citons, dans la génération précédente et à Leyde le cas de Thomas Stieltjes. Les deux activités de mathématicien et d'astronome ne sont pas séparées de façon absolue : encore en 1890 et alors qu'il est professeur à Toulouse, Stieltjes accompagne Benjamin Baillaud, alors directeur de l'Observatoire de Toulouse, dans son voyage d'inspection au Pic du Midi [Baillaud & Bourguet 1905b, p. 79].

³⁷ Archives nationales, F/17.3722, cité par Philippe Véron [2004] et Arnaud Saint-Martin [Saint-Martin 2008]. Encore merci à David Aubin.

³⁸ Le directeur de l'Observatoire de Paris était, en 1906, Maurice Lœwy. C'est Benjamin Baillaud qui lui a succédé.

³⁹ Les rapports annuels de l'Observatoire sont moins virulents !

Lebesgue [1991, p. 134] raconte l'affaire à Borel en direct (le 16 janvier 1906) :

Fatou m'écrit, ce dont vous êtes peut-être au courant, que Lœwy cherche à se débarrasser de lui se basant sur son mauvais état de santé qui, dit Lœwy, l'empêchera toujours de faire de l'astronomie. Pour cette raison, Lœwy considère Fatou comme plus propre à faire de l'enseignement. D'après Fatou, l'idée de Lœwy serait de créer par le départ de Fatou un poste pour un certain Ebert⁴⁰ auquel Fatou fait le reproche, quelque peu nationaliste, d'être récemment naturalisé⁴¹.

Je crois, mais ne vous basez pas trop sur cela car je n'ai pas de sérieuses raisons de [le] croire, que Fatou peut momentanément se passer d'un traitement. Si je ne me trompe pas, il n'y aurait pas d'inconvénient pour Fatou, au contraire, à ce qu'on lui donne un congé lui permettant de soigner sa neurasthénie, assez aiguë paraît-il. Je crois que Fatou ne verra aucun inconvénient à ce qu'on lui donne un congé mais ce qu'il désire, il me semble et cela me paraît trop naturel, c'est que ses droits pour plus tard soient réservés et qu'une incapacité physique de remplir les obligations de son poste, qui n'est peut-être que momentanée, ne soit pas considérée comme une raison suffisante de le rejeter hors de l'Observatoire.

Fatou m'écrit avoir parlé de tout cela à Tannery qui a promis de s'en occuper. Si vous avez l'occasion d'en parler à Tannery ou à quelque personne qui ait prétexte à intervenir, je vous en serais reconnaissant. Je suppose que Fatou vous a d'ailleurs mis au courant ; cela n'est cependant pas certain car Fatou est assez renfermé et timide.

Puis, début février 1906 :

Pour Fatou, je crois qu'une solution est prête d'intervenir ; il a demandé un congé [Lebesgue 1991, p. 137].

Si le rapport annuel de l'Observatoire ne mentionne pas explicitement de congé accordé à Fatou celle année-là, on l'y voit observer la nuit au Grand instrument méridien en janvier, puis d'août à décembre, ce qui confirme qu'il a pris quelques mois (au maximum six, de février à juillet) de congé.

Il avait probablement eu des problèmes avant 1906, puisque, le 7 avril 1905, Lebesgue [1991, p. 107] avait écrit, toujours à Borel :

⁴⁰ Il y avait en effet ces années-là à l'Observatoire de Paris un « assistant-volontaire » nommé Wilhelm Ebert, qui travaillait en collaboration à un catalogue d'étoiles. En 1905, il a obtenu un poste d'astronome-adjoint à Nice, mais il est revenu à Paris en 1906, toujours comme assistant-volontaire. Il est donc très vraisemblable qu'il aurait été heureux d'avoir un poste d'astronome-adjoint à Paris. Ces renseignements, contradictoires avec ceux de [Lebesgue 1991, note 1095], viennent des rapports annuels de l'Observatoire, dans lesquels on apprend aussi qu'Ebert et Fatou ont collaboré, plus tard, en 1908, à l'étude de l'Instrument méridien photographique de Lippmann.

⁴¹ Maurice Lœwy, avec qui il semble assez clair que Fatou avait des rapports exécrables, était lui-même d'origine autrichienne, naturalisé français en 1868, une cause possible du commentaire « nationaliste » sur Ebert.

Merci beaucoup de ce que vous avez fait pour Fatou ; je crois bien qu'il a été négligent, mais je pense qu'il y a dans son état de santé des circonstances atténuantes et qu'il eût été exagéré qu'on l'exécutât.

Rappelons que les lettres de Borel à Lebesgue n'ont pas été conservées. D'autre part, la seule lettre connue de Fatou à Borel est une démonstration de mathématiques (voir le § V.5). Nous ignorons donc ce que Borel a fait pour Fatou.

Comme l'ont fait beaucoup d'astronomes, Pierre Fatou a participé à l'observation du passage de Mercure le 14 novembre 1907. La bibliothèque de



Fig. V.1. Passage de Mercure, 14 novembre 1907

l'Observatoire conserve une photographie d'un groupe d'astronomes prise sur la terrasse à cette occasion (figure V.1) sur laquelle Fatou figure (on distingue mieux les personnages sur le détail reproduit sur la figure V.2).

Parenthèse (Les astronomes sur la photo). Ouvrons ici une parenthèse pour évoquer rapidement les personnes figurant sur la photo prise lors du passage de Mercure, une digression qui peut aider à comprendre l'ambiance dans laquelle se déroulait la partie non mathématique de la vie de Fatou. D'après les indications manuscrites, figurent sur cette photographie, de gauche à droite

– Benes ; il s’agit de Ladislav Benes, un astronome (et plus tard militaire) tchèque (alors autrichien, donc), qui était élève libre à l’Observatoire depuis juillet 1907 (et l’est resté jusqu’en décembre 1907),

– Bocquet [*sic*] ; il s’agit sans aucun doute de Félix Boquet, qui était alors chef du service de l’heure,

– A. Chatelu ; André Chatelu, un employé scientifique (calculateur) né en 1873,

– J. Chatelu ; Jules Chatelu, lui aussi employé scientifique, puis aide-astronome, né en 1870,

– Rabioulle ; Émile Rabioulle, calculateur lui aussi à cette époque, qui sera tué au combat le 21 septembre 1914 comme sous-lieutenant d’infanterie,

– Simonin ; Martial Simonin, qui sera astronome-titulaire à l’Observatoire de Paris en 1911 (mais qui, en 1907, devait encore être affecté à Nice), nous verrons Fatou se résigner à être un sous-ordre de Simonin dans une lettre à Montel reproduite ici page 226,

– Fayet ; Gaston Fayet, un autodidacte (entré à l’Observatoire comme calculateur, il y a passé le baccalauréat puis une thèse), spécialiste des comètes, plus tard directeur de l’Observatoire de Nice,

– Renan ; Henri Renan, spécialiste des observations méridiennes, qui a eu une carrière plus facile, ENS, élève astronome, aide-astronome, astronome adjoint, astronome titulaire en 1906,

– Gonnessiat ; François Gonnessiat, de passage comme astronome adjoint à l’Observatoire de Paris du 1^{er} novembre au 1^{er} décembre 1907 entre ses postes de directeur à Quito (avant) et à Alger (après), juste le temps de regarder passer Mercure et de poser pour la photo,

– Fatou, avec chapeau et cane,

– Brandicourt ; Charles Brandicourt, réputé un fonctionnaire sans envergure⁴²,

– Viennet ; Éloi Viennet, un des membres du premier bureau de l’AAPSOF.

Tous ces renseignements viennent du dictionnaire de Philippe Véron [2004].

★

Mais revenons à Pierre Fatou. Dans un observatoire, il ne manque pas de tâches subalternes et routinières que l’on attribue, entre autres, aux jeunes

⁴² Citons, toujours pour montrer l’ambiance, deux appréciations (copiées dans [Véron 2004]) portées sur Brandicourt par deux directeurs de l’Observatoire, Lœwy d’abord, en 1905 :

N’a pas de titres scientifiques. Employé de bonne volonté, mais d’une valeur moyenne,

puis Baillaud, en 1911 :

Très bon observateur, calculateur consciencieux, doit cependant terminer sa carrière dans la catégorie où il se trouve.



Fig. V.2. Passage de Mercure, détail

recrues⁴³. À cette époque, nous l'avons dit, l'Observatoire jouait un important rôle de service public (donner l'heure légale et exacte par exemple). Rien pour exciter la conscience ou le désir de science d'un Fatou. Celui-ci est d'ailleurs, les premières années, souvent absent pour raisons de santé comme le signalent les rapports annuels. Au fil du temps, on relève dans ces rapports que Fatou a été employé à diverses observations pour déterminer les coordonnées des étoiles de repère de la carte du ciel (il a par exemple fait 2207 observations à cet effet en 1903), à l'envoi de l'heure en province (en 1905), à d'autres observations avec tel ou tel autre instrument, avec tel ou tel collègue, rien qui soit de sa responsabilité en tout cas, jusqu'à la guerre où il se retrouve à faire seul ce que l'on faisait à cinq jusque là.

Soit la personne qui se plaignait de lui ci-dessus était vraiment un ennemi de Fatou, soit la conception que Fatou et ses collègues avaient de son rôle et de son travail a finalement changé : toujours est-il que, au moment de sa mort en 1929, il ne comptait à l'Observatoire que des amis (ce que l'on peut lire dans le rapport annuel de cette institution pour 1929 et qu'aucune rubrique nécrologique n'aurait omis de signaler) et que son travail y était reconnu et apprécié.

Il semble bien que par la suite Fatou ait assuré ses fonctions sérieusement, et pas seulement parce qu'il a, en effet, effectué des observations et des

⁴³ C'est une des raisons pour lesquelles le personnel scientifique de l'Observatoire de Paris est plus féminin que celui de la Faculté des sciences. En ce temps-là, le mot « calculatrice » désignait une employée qui fait des calculs.

mesures. Même aux non-spécialistes d'astronomie, il peut sembler que ce qu'il a eu à faire, à partir de 1923, à l'équatorial de la tour de l'ouest, était plus motivant (voir le § V.6). Il n'y a d'ailleurs plus d'absences « répétées » signalées. Il est possible que ceci soit un signe de l'évolution du métier d'astronome, de l'astronomie de position et des services vers des observations plus physiques, pendant cette période (voir [Saint-Martin 2008]).

Notons encore une information donnée par Lebesgue [1991, p. 118] : on aurait proposé « jadis » (la lettre date du 22 août 1905, le « jadis » n'est donc pas très ancien !) à Fatou de partir pour l'Observatoire de Quito⁴⁴, ce qui lui aurait valu une carrière rapide au retour, mais Fatou avait refusé.

Fatou syndicaliste

En 1909, plusieurs astronomes ont fondé l'*Association amicale des personnels scientifiques des Observatoires français* (AAPSOF). Il ne s'agissait pas au sens strict d'un syndicat (la loi Waldeck-Rousseau de 1884 qui avait autorisé les syndicats continuait à les interdire dans la fonction publique), mais elle en a joué le rôle (voir [Saint-Martin 2008]). En 1911, Pierre Fatou était le président de cette association — ce qui montre son investissement dans la vie professionnelle.

V.4 La thèse de Fatou

Fatou travaillait à sa thèse pendant que Lebesgue donnait son cours Peccot sur les séries trigonométriques et Lebesgue cite plusieurs fois les travaux de Fatou dans son livre [1906]. Lebesgue a fait preuve à l'égard de Fatou d'une grande délicatesse. Il écrit en effet à Borel le 29 janvier 1905, à propos de la préparation du livre en question :

Je puis donner le manuscrit avant le premier janvier 1906. Je ne tiens pas à trop traîner sur ce sujet qui, comme vous le pensez, commence à perdre pour moi l'attrait de la nouveauté.

Seulement il y a une petite difficulté. Fatou m'a communiqué un certain nombre de résultats qui se rapportent de près ou de loin aux séries de Fourier ; je voudrais bien que Fatou se décide à rédiger et soutenir sa thèse avant l'apparition de mes Leçons. Les questions dont il s'occupe sont assez voisines parfois de celles que je traite pour que ceux qui jugent superficiellement ne distinguent pas bien ce qui est à Fatou⁴⁵. Et vous savez avec quelle facilité on

⁴⁴ Le directeur de l'Observatoire de Quito était, de 1900 à 1906, un astronome français, François Gonnessiat (que nous avons vu sur la photo du passage de Mercure).

⁴⁵ Lebesgue avait une grande estime pour Fatou. À tout ce qui apparaît ici, il faut ajouter qu'il demande systématiquement à Borel de lui envoyer les ouvrages de sa collection.

attribue à ceux dont on connaît déjà le nom le mérite des propriétés trouvées par d'autres.

Je viens d'écrire à Fatou et j'espère qu'en lui indiquant, comme je l'ai fait, pour janvier 1906 le dépôt de mon manuscrit, je vais le faire se dépêcher un peu. Je reconnais maintenant que j'aurais mieux fait de passer ma thèse plus tôt⁴⁶, je veux essayer de l'empêcher d'agir comme moi. Si vous avez l'occasion de lui causer, vous pourriez peut-être agir sur lui dans le même sens [Lebesgue 1991, p. 93].

Fatou n'a soutenu sa thèse⁴⁷ qu'en 1907, le 14 février d'après [Lebesgue 1991, note 393], ce qui est confirmé par la notice de 1921⁴⁸ dans laquelle Fatou a indiqué qu'il était devenu docteur ès sciences en février 1907 et par une lettre qu'il a écrite à Fréchet le soir-même de sa soutenance et qu'il a datée « jeudi soir », le 14 février 1907 était bien un jeudi (voir cette lettre page 218) — et ce qui pourrait sembler contradictoire avec le fait qu'elle a été publiée dans le volume de 1906 d'*Acta mathematica*. Nous avons vu qu'en janvier 1905, Lebesgue (et peut-être aussi Borel) le pressait de rédiger. Il l'a fait, puisque, écrit Lebesgue le 16 juin 1905 :

Fatou m'a dit que sa thèse était rédigée ; il m'en avait souvent parlé, j'espère qu'au total ça fera une bonne thèse [Lebesgue 1991, p. 112]⁴⁹,

et, deux jours après

Je suis heureux d'apprendre qu'à première vue vous jugiez intéressante la thèse de Fatou. Nous avons causé souvent ensemble et je ne pense pas que nous interférions beaucoup. Il s'occupe surtout de l'intégrale de Poisson et d'une série de Taylor sur son cercle de convergence, ce dont je ne m'occupe pas. Parfois nous tendons à un même but : représenter une fonction la plus quelconque en le plus de points possible. Fatou y arrive par l'intégrale de Poisson, moi par la sommation de Fejer [Fejér] ; nos énoncés et nos méthodes sont différentes. [...]

Fatou m'a annoncé un résultat qui me paraît important dans les applications ; c'est l'extension de l'égalité de Parseval aux fonctions non bornées. Il est si

⁴⁶ Rappelons que la thèse de Lebesgue ne date que de 1902. Fatou l'a immédiatement utilisée.

⁴⁷ Le jury de la thèse de Fatou était composé de Paul Appell (président), Paul Painlevé et Émile Borel (examineurs). Sans doute Lebesgue, qui était alors provincial, ne pouvait-il pas en faire partie. La thèse est dédiée « À Messieurs Émile Borel et Henri Lebesgue ». La seconde thèse portait sur les solutions périodiques des équations du mouvement des systèmes.

⁴⁸ Dossier Fatou, archives de l'Académie des sciences. La date indiquée dans [Gispert 1991] (avec le rapport sur la thèse qui, lui, est bien daté du 14 février) est le 1^{er} juillet.

⁴⁹ Il n'est pas exact de dire que Lebesgue a dirigé (*supervised* [Alexander 1994, p. 88]) la thèse de Fatou. D'abord nous l'avons dit parce que la notion de directeur de thèse n'existait pas en France à cette époque. Dans ce cas particulier, le « il m'en avait souvent parlé » de Lebesgue montre clairement la façon dont les choses se passaient.

difficile d'attaquer ces maudites fonctions et dans les applications [...] c'est une telle diminution de généralité et d'intérêt que de faire les suppositions nécessaires pour qu'on n'ait que des fonctions bornées que j'attache à un tel résultat plus de prix qu'il n'en paraît mériter.

Lebesgue va ensuite lire attentivement la thèse. Le 26 février 1906, il donne une opinion vague sur la rédaction

D'une manière générale il me semble que Fatou met assez mal en lumière l'intérêt des questions dont il s'occupe et des résultats qu'il obtient [...] Fatou me semble admettre aussi assez volontiers que tout le monde sait ou voit la même chose que lui et il donne parfois assez peu d'explications⁵⁰ [Lebesgue 1991, p. 138].

Il propose, début avril 1906, une grande liste de corrections (que l'on trouvera dans [Lebesgue 1991, pp. 145–148]) et que Fatou fera ou ne fera pas. Entre temps nous l'avons vu, Fatou a demandé un congé.

À cause de ses problèmes de santé, de ses difficultés à l'Observatoire ou pour d'autres raisons, toujours est-il que la suite a traîné encore un an. Les lecteurs attentifs ont pourtant bien compris que Fatou n'est pas resté inactif pendant ce temps, puisque sa note [1906d] dont nous avons déjà beaucoup parlé ci-dessus est parue le 15 octobre.

Le 29 novembre 1906, Fatou passe au secrétariat de la Faculté des Sciences voir si le rapport sur la thèse de Montel est arrivé, puis il lui rend compte de cette visite dans une lettre qui montre bien son état d'esprit pendant cette période d'attente :

Mon cher ami,

Je suis passé ce matin au secrétariat de la Faculté des sciences, mais Guillet m'a déclaré que ton manuscrit n'avait pas été rapporté par Painlevé ; il est vrai qu'il y a pas mal de désordre dans son cabinet et qu'il a remué un certain nombre de thèses entassées pêle-mêle sur sa table avant de me donner l'assurance qu'il était encore entre les mains de ce dernier. Tu feras donc bien de t'adresser à Painlevé pour savoir ce qui en est. Je dois dire cependant que ta thèse n'était pas marquée sur le registre du secrétariat, parmi celles qui ont été rapportées⁵¹.

Pour moi, je ne suis pas encore fixé sur la date de ma soutenance, n'ayant pas reçu d'épreuves depuis le mois de septembre. Il y a si longtemps que cela

⁵⁰ Rares sont les thèses auxquelles un tel reproche ne peut pas être fait ! Nous avons vu à propos de l'itération que les qualités de rédaction de Fatou s'étaient beaucoup améliorées par la suite.

⁵¹ D'après [Gispert 1991, p. 399], Montel a soutenu sa thèse le 25 mai 1907 (mais le rapport de Painlevé n'est pas daté).

dures que j'ai fini par me lasser d'y penser et cette attente ne m'agite pas du tout⁵².

Je continue de travailler un peu de temps en temps sur l'itération. J'ai obtenu incidemment un résultat sur les séries de Taylor que j'ai communiqué l'autre jour à la Société mathématique et qui a plu à Hadamard⁵³. Voilà de quoi il s'agit.

Suppose une série de Taylor

$$(1) \quad u + u_1x + \cdots + u_nx^n + \cdots$$

dont les coefficients sont déterminés par la loi de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(f fonction analytique). Si l'on ne précise pas davantage, on ne peut rien dire car toute série de Taylor s'obtient de cette façon.

Mais supposons que la substitution ($u \sim f(u)$) possède un point limite régulier c'à un point racine α de l'équation

$$u - f(u) = 0 \text{ avec } |f'(\alpha)| < 2$$

(f holomorphe en α). Si la valeur initiale u se trouve dans le domaine de convergence relatif au point α , la série (1) représente une fonction méromorphe qui est le *quotient de 2 fonctions entières de genre zéro et d'ordre zéro*, la fonction entière du dénominateur étant

$$(q = f'(\alpha)) \quad (1-x)(1-qx)(1-q^2x) \cdots (1-q^nx) \cdots$$

fonction que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques.

Ce résultat est assez curieux, comme tu le vois, il donne un résultat précis sur le prolongement analytique d'une classe étendue de séries de Taylor données par la loi de leurs coefficients, cette loi n'étant pas en général analytique (c'àd n'étant pas de la forme $a_n = \varphi(n)$ où φ est une fonction analytique donnée.

[...]

Si tu veux que j'aille trouver Painlevé pour toi, envoie-moi un mot.

Bien cordialement à toi et à bientôt

P. Fatou⁵⁴

⁵² Bizarrement, du point de vue de la chronologie, les exemplaires (imprimés en Suède, comme tirés-à-part de l'article [Fatou 1906c], le 23 novembre 1906) de la thèse de Fatou portent la mention (et surtout la date) :

Vu et approuvé
Paris, le 4 juillet 1905
le Doyen de la Faculté
des sciences
Paul Appell

(à cette date, la thèse de Fatou n'avait pas encore été relue).

⁵³ Fatou a présenté « sur certaines séries de Taylor » le 22 novembre 1906. C'est Hadamard, comme président de la société, qui présidait la séance.

⁵⁴ Archives de l'Académie des sciences, fonds Montel. Voir le texte complet de cette lettre dans l'Appendice.

V.5 Fatou mathématicien

S'il est vrai que l'activité scientifique de Pierre Fatou se déroule dans une époque où l'astronomie subit de profondes mutations, s'il est bien possible que son engagement à l'Observatoire soit dû à une anticipation de ces mutations par Tannery, il reste que, pendant presque toute sa carrière, Fatou a mené ses deux activités de mathématicien et d'astronome de façon presque étanche, ce qui lui a posé quelques problèmes au début comme nous l'avons vu. C'est pour cette raison que nous présentons ses deux vies scientifiques dans deux paragraphes séparés.

Commençons donc par les mathématiques et par un nouvel extrait du rapport d'Hadamard de 1921, cette fois le tout début :

M. Fatou, astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris, a travaillé aux parties les plus élevées et les plus difficiles des mathématiques actuelles et, chaque fois, il a donné aux études qu'il abordait une impulsion importante et féconde.

La thèse et alentour

La question à laquelle Fatou s'est intéressé dans sa thèse est naturelle et ancienne : étudier une série entière sur son cercle de convergence. La méthode est nouvelle : c'est l'intégrale de Lebesgue.

J'ai remarqué que les progrès réalisés dans l'étude de l'intégration et de la dérivation des fonctions de variables réelles par les importants travaux de M. Lebesgue permettaient de répondre à certaines de ces questions⁵⁵ [...] avec plus de précision et de généralité qu'on n'avait pu le faire précédemment,

dit Fatou lui-même dans la notice de ses travaux qu'il a écrite en 1921.

Mais l'application de ces notions aux problèmes qui s'étaient posés dans les théories étudiées par M. Fatou, n'était pas sans présenter des difficultés qu'il a surmontées avec ingéniosité et talent [...]

commente Painlevé dans son rapport sur la thèse [Gispert 1991, p. 397].

Ses travaux ont été immédiatement utilisés et développés. Fatou a laissé son nom à un lemme indispensable de théorie de l'intégration, le « lemme de Fatou⁵⁶ », qui affirme que, *si f_n désigne une suite de fonctions mesurables, alors*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

⁵⁵ Il s'agit du comportement d'une série de Taylor sur son cercle de convergence.

⁵⁶ Ce lemme est le résultat qui fait que tous les mathématiciens connaissent le nom de Fatou. Anny Fatou m'a raconté qu'un professeur de mathématiques lui avait demandé si elle était « de la famille du lemme de Fatou ». Quant à Michel Fatou, il se souvient de « colleurs » lui réservant les questions les plus difficiles lorsqu'ils avaient compris qu'il était, lui aussi, parent de ce lemme.

Un de ses théorèmes, *si f est une fonction holomorphe bornée sur le disque ouvert $|z| < 1$, il existe une fonction bornée f^* sur le cercle unité et définie presque partout par la formule*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}),$$

a été une des premières applications de l'intégrale de Lebesgue à l'étude des fonctions holomorphes, dit Rudin dans son livre [1966, p. 265] de même que Segal dans le sien [2008, p. 301]⁵⁷. Le résultat est un peu plus général : on peut remplacer le disque par un domaine borné plus compliqué, la fonction holomorphe par une fonction harmonique...

C'est depuis la thèse de Pierre Fatou [1906c, p. 350] que l'on appelle « formule de Parseval » l'égalité

$$\sum |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|^2 dt$$

pour une fonction $f(t) = \sum a_n e^{2i\pi n t}$, dont nous a déjà entretenus Lebesgue (dans la lettre citée page 148), qui l'avait démontrée pour les fonctions bornées, et que Fatou a démontrée pour ce que nous appelons aujourd'hui les fonctions L^2 , résultat auquel Lebesgue accordait tant de prix (voir ci-dessus page 148)⁵⁸.

Un des tout premiers articles publiés de Fatou est la note [Fatou 1904b], dans laquelle il étudie les relations entre partie réelle et partie imaginaire d'une série de Taylor sur son disque de convergence. Les notes [Fatou 1905b ; 1906b] sont des annonces de résultats de la thèse.

Ce qui précède donne à penser que l'évaluation du travail de Fatou antérieur à l'itération que fait Alexander dans son livre [1994, p. 89–90] est un peu légère⁵⁹. Dans le présent texte, on a vu aussi les travaux de Fatou (autres que ceux sur l'itération) susciter les notes [Hardy & Littlewood 1917 ; Humbert 1918] qui sont déjà apparues dans cette histoire sans en perturber la chronologie. Mentionnons encore l'échange de lettres entre Hurwitz et Pólya [1916] et ceux de Marcel Riesz [1916a ; 1916b]⁶⁰. Il existe un autre « lemme de Fatou »

⁵⁷ Ce résultat faisait déjà l'objet d'un paragraphe dans le chapitre du livre de Bieberbach [1927] sur les fonctions bornées dont nous avons déjà cité le « lemme de Julia » page 90.

⁵⁸ Le livre d'histoire [Kline 1972], paru avant le retour à la mode de l'itération, n'a pas, dans son index, d'entrée « itération », ni même d'entrée « Julia » — mais il cite Fatou pour cette formule de Parseval.

⁵⁹ Il est vrai que la source principale de cette évaluation est la liste de publications de Fatou telle que relevée dans [Poggendorff 1922] (!), et encore avec omission puisqu'y sont cités, non pas deux mais, trois articles entre la thèse de Fatou et 1916, à savoir [Fatou 1910 ; 1913a ; d] — voir ici une bibliographie plus complète.

⁶⁰ Il n'est donc pas vrai, comme le croyait, ou en tout cas le disait, le philosophe Alain, que seuls deux hommes avaient compris la thèse de Fatou : en plus de Lebesgue, en voici déjà trois.

(toujours dans sa thèse [Fatou 1906c], annoncé dans [Fatou 1904a], son tout premier article), celui qui dit que, si la série de Taylor en 0 d'une fraction rationnelle a tous ses coefficients rationnels, alors les pôles de cette fraction sont des inverses d'entiers algébriques, lemme qui a donné naissance à une notion d'« anneau de Fatou ».

Il est possible que des problèmes de santé, les difficultés à l'Observatoire, sa soutenance de thèse, puis la reprise de ses activités d'astronome à l'Observatoire, aient empêché Fatou de consacrer beaucoup de temps aux mathématiques, et notamment de poursuivre et de rédiger le travail sur l'itération. Pour cette période intermédiaire, il faut mentionner un petit article de Fatou [1910] dans lequel il considère à la fois deux de ses objets préférés, une série entière (de Taylor)

$$\sum u_n z^n, \text{ avec } u_n = R^n(u)$$

où R est une fraction rationnelle avec un point fixe attractif de multiplicateur s et pour la somme de laquelle il décrit les singularités (il y a un pôle en chaque s^{-n}). Ce résultat a d'ailleurs été généralisé par Lattès [1915] au cas où les coefficients s'obtiennent par itération de fonctions de plusieurs variables.

La théorie des nombres

Dans la troisième note [Fatou 1904c] que publie Fatou en 1904, il étudie la répartition des fractions p/q qui approchent un réel a au sens où

$$|q(p - aq)| < 1.$$

En appelant $\varphi(h)$ le nombre de solutions pour lesquelles $q < h$, il montre que

$$\varphi(h) > \frac{1}{2} \log h$$

(et pas plus lorsque a est un entier quadratique). Ce résultat a des applications aux séries trigonométriques (voir ci-dessous à propos de la note [Fatou 1913a]) que Fatou utilise dans sa thèse. Cette recherche est clairement liée à la seule lettre de Fatou conservée dans le fonds Borel⁶¹.

Mentionnons à nouveau la note « extrêmement remarquable » [Fatou 1906a] déjà citée page 74, en citant la notice de 1921 :

⁶¹ Archives de l'Académie des sciences, fonds Borel. La lettre de Fatou conservée dans le fonds Borel date vraisemblablement de 1903 ou 1904 — en tout cas avant le 12 décembre 1904, date de [Fatou 1904c]. Fatou remercie pour l'envoi d'un mémoire, qui est peut-être [Borel 1903a], ainsi que d'une note du *Bulletin de la Société mathématique de France*, qui est sans aucun doute [Borel 1903b]. Dans cet article, Borel faisait la liste des parties fractionnaires de $\sqrt{N}$ pour $1 \leq N \leq 500$ (l'article est essentiellement une table) rangées par ordre croissant et il avait remarqué des lacunes près des fractions simples — rien par exemple entre 0,4941853 et 0,5202593, une lacune autour de $1/2$. C'est une remarque à propos de ces lacunes que Fatou envoie à Borel.

J'ai remarqué que la méthode de Dirichlet pour le calcul du nombre de classes de formes quadratiques binaires de déterminant donné, conduit, lorsqu'on l'applique aux formes d'Hermite définies, à une expression simple du nombre de classes où ne figurent que les facteurs premiers du déterminant. Les calculs, résumés dans une note des comptes-rendus [*sic*], ont été communiqués par moi à G. Humbert qui les a développés dans son cours du collège de France, et qui a étudié ensuite des problèmes analogues plus étendus.

L'itération et ses suites

Il est inutile de s'étendre ici sur le monument sur l'itération qui a fait l'objet du chapitre II et du § III.2. Après la note préliminaire [1906d] et les trois mémoires [1919b ; 1920a ; 1920b], il restait encore à Fatou quelques problèmes à étudier⁶².

Dans [Fatou 1922g], Fatou étudie des exemples d'itération de fonctions algébriques. Les deux notes [1922d ; 1922e] annoncent les résultats sur les fonctions à deux variables qui font l'objet de l'article [1924b].

Les deux articles [1923c ; 1924a] font le point sur la permutabilité.

Dans [1926], Fatou fait le point sur l'itération des fonctions entières qui ne sont pas des polynômes⁶³. Il explicite ce qui subsiste dans ce cas des résultats obtenus sur les fractions rationnelles et étudie en détail deux exemples. Remarquons que la démonstration du fait que l'ensemble $\mathcal{F}$ (des points en lesquels la suite des itérées n'est pas normale) n'est pas vide n'est pas aussi facile que ce que nous avons compris au cours de la lecture de la remarque III.1.2 et du § III.2. Dans cet article, Fatou pose encore un certain nombre de questions⁶⁴, par exemple, y a-t-il des fonctions entières dont l'ensemble de Julia est $\mathbf{C}$ tout entier (comme dans l'exemple de Lattès) ?

À ces articles, il faut ajouter la communication (du 28 janvier 1920) [Fatou 1921e] et l'article [Fatou 1923a], dans lequel Fatou considère une famille d'ouverts emboîtés

$$\cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots$$

dont les frontières sont des arcs analytiques et leur réunion $D = \cup D_n$. Sous l'hypothèse que l'on accède d'un point de ∂D_n à un point de ∂D_{n+1} par un

⁶² Dans son discours lors de l'enterrement de Pierre Fatou, Henri Mineur [1929] prendra parti, déclarant :

À l'une de ses plus importantes découvertes, c'est-à-dire à celle de l'itération des fonctions rationnelles, le nom de Pierre Fatou reste indéfectiblement attaché ; c'est lui qui a le premier osé aborder ce problème, il est aussi le premier à l'avoir résolu.

⁶³ Le cas d'une fonction méromorphe qui aurait une singularité essentielle à l'infini est encore beaucoup plus compliqué !

⁶⁴ Dont beaucoup ne trouveront de réponses que dans les années 1955–75, renvoyons à nouveau à la description des travaux de Noel Baker dans [Rippon 2005].

arc contenu dans D_{n+1} et de longueur u_n avec $\sum u_n < +\infty$, il montre qu'il y a des points accessibles (par des arcs de longueur finie)⁶⁵ sur la frontière de D . Nous l'avons vu (page 96), la question de l'accessibilité des points frontières des « composantes de Fatou » est posée dans [Fatou 1920a, p. 51]. La question considérée ici vient bien de l'itération, cas où, partant de D_0 , petit disque centré en un point fixe attractif, on construit $D_1 = R^{-1}(D_0)$ (pour la branche de R^{-1} telle que $D_1 \supset D_0$, et ainsi de suite⁶⁶). L'article est classé « topologie générale », et plus exactement *Mengenlehre. Allgemeines und abstrakte Mengen. Punktmengen* par Plancherel dans sa recension pour le *Jahrbuch*⁶⁷.

Et le reste

Entre les deux centres d'intérêt que constituent la thèse de Fatou et son travail sur l'itération, il faut mentionner l'article [Fatou 1921c], dans lequel Fatou étudie l'ensemble de « zéros » sur le bord S^1 d'une fonction f holomorphe à l'intérieur du disque unité D . L'annonce qu'il en avait faite pendant la séance de la SMF du 22 décembre 1920 portait le sous-titre : « En quel ensemble de points une fonction analytique devient-elle nulle sur une ligne singulière ? » Plus précisément, ayant fixé $A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, il considère les trois parties de S^1 :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{m \in S^1 \mid f(z) \rightarrow A \text{ sur tout chemin aboutissant en } m\}, \\ e &= \{m \in S^1 \mid f(z) \rightarrow A \text{ pour } z = rm, r \in]0, 1[\text{ et } r \rightarrow 1\}, \\ E &= \{m \in S^1 \mid f(z) \rightarrow A \text{ pour un chemin aboutissant en } m\},\end{aligned}$$

qui vérifient, bien sûr

$$\mathcal{E} \subset e \subset E.$$

Lorsque f est bornée (ou atteint toutes les valeurs sauf deux, cas qui se ramène à celui d'une fonction bornée par représentation conforme⁶⁸), on a $e = E$. Dans son article, Fatou étudie toutes les possibilités pour les trois ensembles en question.

Dans le cas où f est bornée dans D , e est de mesure nulle, un résultat dû à Marcel et Frédéric Riesz [1916]. Fatou avait montré dans sa thèse que le complémentaire est de mesure non nulle, il donne dans [1923b] une démonstration « beaucoup plus rapide et élémentaire » du résultat de [Riesz & Riesz

⁶⁵ Un point a du bord d'un ouvert U est accessible s'il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1[\rightarrow U$ tel que $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = a$.

⁶⁶ Ce n'est pas sans lien avec la note [Fatou 1921d] où sont observées les singularités de la frontière d'un domaine sur lequel est définie une solution d'une équation fonctionnelle.

⁶⁷ Les autres articles mathématiques de Fatou sont en général classés parmi les fonctions d'une variable complexe dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, la revue de référence de l'époque.

⁶⁸ Comme nous l'avons déjà signalé au § I.5.

1916], démonstration d'ailleurs en partie reproduite dans l'article [1921c] en question.

Fatou montre ensuite que, dans le cas général, $\mathcal{E}$ est toujours de mesure nulle, mais que e et E peuvent être de mesure quelconque. Il utilise pour ceci des exemples venant de ses travaux sur l'itération, par exemple une fonction satisfaisant à l'équation de Schröder pour une fraction rationnelle à cercle fondamental, cas où, pour $A = \infty$, E et e sont de mesure pleine égale à 2π . Il montre ensuite que E peut être de mesure quelconque. Le résultat général auquel il parvient est le suivant :

Soient L un arc de courbe rectifiable, f une fonction analytique définie d'un côté de L et $A \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Soient E l'ensemble des points de L auxquels aboutit un chemin sur lequel $f(z)$ tend vers A et $\mathcal{E}$ celui des points où f est continue et prend la valeur A . Alors :

- *si f est bornée ou n'évite que deux nombres complexes, E est toujours de mesure nulle mais peut ne pas être dénombrable et il en est de même pour $\mathcal{E}$,*
- *sinon, $\mathcal{E}$ est toujours de mesure nulle mais E peut être de mesure quelconque et, par exemple, contenir tous les points de L .*

Mentionnons encore [Fatou 1913a]. Dans sa thèse, Fatou avait démontré *Si la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ diverge, la série de Fourier*

$$\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

n'est absolument convergente dans aucun intervalle mais peut être absolument convergente en une infinité dénombrable de points,

résultat dans la démonstration duquel il utilisait les approximations obtenues dans [Fatou 1904c]. Lusin et Denjoy avaient aussi donné des démonstrations, Lusin avait montré que l'ensemble des points de convergence absolue ne pouvait avoir pour mesure que 0 ou 2π . Dans cet article, Fatou donne une démonstration simple du résultat de Lusin.

Il serait dommage de ne citer ici

- ni [Fatou 1913d], une généralisation de la fonction f^* ci-dessus, qu'il utilisera dans son mémoire sur l'itération [1920b],
- ni [Fatou 1922f], dans lequel il étudie les points singuliers de la fonction inverse d'une fonction invariante par R ,
- ni [Fatou 1924c]⁶⁹, où il étudie la monodromie d'une équation différentielle (réapparition des groupes fuchsien, cet article est d'ailleurs le seul de son auteur mentionné dans [Appell et al. 1930]),
- ni [Fatou 1925b] où est étudiée l'uniformisation d'une fonction multiforme du type de l'inverse d'une fonction fuchsienne (cette note a pu être inspirée par la rédaction en cours de [Appell et al. 1930]).

⁶⁹ Le volume 52 du *Bulletin* de la SMF dans lequel est publié l'article [Fatou 1924c] est le « volume du cinquantenaire » de la Société, il contient des articles de la fine fleur de la mathématique française... parmi cette fine fleur, outre Fatou, on trouve Julia, Paul Lévy et Montel.

Appell & Goursat

Fatou a passé aussi beaucoup de temps à réviser (pour sa deuxième édition) le premier volume et à écrire les 521 pages du deuxième volume du livre [Appell et al. 1930]. Ce deuxième volume, que l'on nomme, suivant les indications portées sur sa couverture, « Appell & Goursat-tome-2 », a pour auteur, pour seul auteur, Pierre Fatou.

Nous n'avons pas trouvé, sur cette « deuxième édition » et ce « deuxième volume » plus d'informations que celles données par Mineur et celles qui viennent de la lecture des livres eux-mêmes.

Les révisions et augmentations faites par Fatou dans le premier tome portent sur l'introduction, qui est passée de dix à vingt-trois pages. Il s'en explique au début :

Nous donnons toutefois dans les derniers paragraphes de cette introduction les démonstrations de quelques principes de la théorie des fonctions que l'on ne trouve pas en général dans les traités classiques et dont nous aurons besoin pour l'exposé de certaines recherches récentes exposées dans le 2^e tome de ces leçons.

Il s'agit des § 8 à 16 de cette nouvelle introduction, dans lesquels il décrit notamment la solution du problème de Dirichlet par la formule de Poisson et l'utilise pour démontrer qu'une application analytique qui envoie un disque dans un autre disque et qui est telle que l'image inverse de chaque point soit formée de n points est rationnelle de degré n . Les § 15 et 16 sont consacrés aux « ensembles de points » (au théorème de Borel-Lebesgue et à la non dénombrabilité du continu (Cantor)).

Voici ce que dit Goursat⁷⁰ lui-même dans l'introduction du deuxième tome :

Lorsque la maison Gauthier-Villars nous a proposé de publier une nouvelle édition de la *Théorie des fonctions algébriques*, épuisée depuis quelques mois, il nous a semblé qu'il serait utile de la compléter par un aperçu, au moins sommaire, de la théorie des fonctions fuchsienues. Le regretté Fatou avait bien voulu se charger de ce travail. Mais, au lieu des quelques chapitres que nous attendions de lui, c'est un véritable traité des fonctions automorphes qu'il nous a laissé. Nous sommes heureux d'avoir provoqué ainsi la publication d'une œuvre magistrale, que la trop grande modestie de l'auteur l'eût peut-être empêché d'écrire. Les jeunes mathématiciens français pourront maintenant s'initier facilement à cette vaste théorie, due à notre grand Henri Poincaré, et cette lecture ne pourra qu'augmenter les regrets qu'inspire, à tous ceux qui l'ont connu et apprécié, la fin prématurée de Fatou, dont la Science attendait encore beaucoup.

Le manuscrit a été entièrement rédigé par Fatou, qui avait remis les dernières feuilles à l'imprimerie quelques mois avant sa mort. Notre confrère M. Drach

⁷⁰ Dans les années 1920, les notes mathématiques de Fatou aux *Comptes rendus* ont été présentées par Édouard Goursat.

a bien voulu se charger de revoir les épreuves des derniers chapitres. Nous lui adressons nos bien vifs remerciements ; nous les adressons aussi à M. Henri Mineur, qui a pris une part active à la correction des épreuves.

La « trop grande modestie » d'un auteur décédé est sans doute une bonne raison de ne pas avoir fait paraître un livre qu'il a écrit sous son nom...

Fatou n'a terminé la rédaction de ce livre que quelques mois avant sa mort.

Mais je donne l'assurance à sa famille et à ses amis que le livre paraîtra, avait promis Mineur [1929]. Ce sont en effet Jules Drach et Henri Mineur qui en ont relu les épreuves.

★

En pensant aux remarques faites sur les figures (remarques III.2.1 et IV.5.1), ajoutons que ce livre ne contient pas d'image d'ensembles limites.

V.6 Fatou astronome

Pierre Fatou a donc travaillé à l'Observatoire de Paris de 1901 à sa mort, la plupart du temps comme « astronome-adjoint ». Astronome-adjoint n'était pas un poste si subalterne que son intitulé le laisse penser. Astronome-adjoint était l'équivalent, à l'Observatoire, de maître de conférences, à l'université (aujourd'hui, professeur de seconde classe). Il y avait aussi des aides-astronomes et de nombreux astronomes-stagiaires, nettement plus subalternes (et en particulier, pas payés), et Fatou lui-même a commencé comme astronome-stagiaire⁷¹.

Les observations

Et Léon Bloch [1931] :

Pour moi, qui ai suivi sa carrière d'astronome depuis le début jusqu'à la fin, je sais avec quelle rigoureuse correction il accomplissait sa tâche diurne et nocturne. Combien de fois ai-je recueilli ses lamentations lorsqu'il voyait son instrument méridien hors d'usage pour une vétille, — une lampe de micromètre à remplacer, — avarie d'un jour que les formalités administratives prolongeaient pendant des semaines. Combien de fois l'ai-je entendu s'affliger de ces astronomes qui croient avoir suffisamment fait pour leur science quand ils ont signé par temps couvert leur rapport de présence.

Dans sa notice de 1928⁷², Fatou a comptabilisé par exemple avoir fait, entre 1903 et 1908, cinq mille huit cent dix observations, la plupart publiées dans les *Annales de l'Observatoire de Paris* en 1903, 1904, 1905 et 1906.

⁷¹ Les traitements des astronomes : avant la guerre, ils étaient alignés sur ceux des universités mais, en 1926, ils étaient un ou deux échelons en-dessous, comme s'en plaignait le directeur, Deslandres, dans le rapport de l'Observatoire pour 1927.

⁷² Archives de l'Académie des sciences, dossier Fatou.

Mais qu'observait-il ? En astronomie,

il observa des comètes, les planètes et des occultations d'étoiles par la Lune, et surtout s'attacha aux mesures d'étoiles doubles. Les recherches récentes dans le domaine de la dynamique et de la statistique stellaires ont montré l'importance que présente l'étude des mouvements des étoiles doubles, mais cette étude est un travail de longue haleine [...] Fatou apporta ainsi sa contribution aux travaux ingrats de l'astronomie de position qui sont la base des belles découvertes relatives à la constitution du monde sidéral. [Chazy 1932]

Ce sont les observations d'étoiles doubles qui ont constitué l'essentiel de ses observations à partir de 1923 :

Il s'est attaché de préférence aux couples dont le mouvement orbital a pu être mis en évidence, aussi a-t-il choisi, en général, des étoiles brillantes,

dit le rapport de 1923, et encore :

Il a continué l'observation des couples brillants et serrés d'étoiles doubles⁷³, note celui de 1925. Il comparait aussi ses observations avec les éphémérides existantes.

Ces observations étaient faites à l'Équatorial de la tour de l'Ouest... une lunette avec laquelle on regardait les étoiles doubles, ou ce qui a l'air d'en être, les mesures ayant pour objet de décider si ces couples d'étoiles sont liés ou non. Le mécanisme de l'équatorial était ancien, ses trappes et le mouvement d'horlogerie entraînant la rotation de la coupole laissaient à désirer. Fatou avait dû remédier lui-même à ce défaut par l'addition de poids moteurs supplémentaires. En 1928, les trappes ont été réparées mais toujours pas la coupole.

Une partie de ses observations d'étoiles doubles (visuelles) a été publiée dans le *Journal des Observateurs* de son vivant [1928d], d'autres sont consignées par Rose Bonnet⁷⁴, une aide-astronome qui avait travaillé avec lui à

⁷³ Un danseur de tango observe des couples brillants et serrés...

⁷⁴ Sur le conseil de Fatou, Rose Bonnet a entrepris dès 1928 des recherches statistiques sur les étoiles doubles (relations entre les périodes, les excentricités et les masses). Nous savons qu'elle a suivi des cours de Fréchet en 1928–29 (le fonds Fréchet des archives de l'Académie des sciences conserve des cahiers dans lesquels elle a pris des notes de ces cours). Elle a continué les observations et le travail mathématique après la mort de Fatou. En 1937, elle était toujours aide-astronome lorsqu'elle a obtenu une subvention de l'Académie des sciences pour la publication d'un mémoire sur les étoiles doubles pour lequel nous n'avons trouvé aucune référence ultérieure. Outre publier les observations de Fatou, Rose Bonnet a soutenu une thèse [1945] sur les étoiles doubles, les « binaires », le 3 mai 1945. Une collègue et amie fidèle de Pierre Fatou : elle a dédié sa thèse à la mémoire de son père, à sa mère et à son mari et... « à la mémoire de Pierre Fatou, astronome et mathématicien ». Elle a continué à travailler au-delà de cette thèse puisque le registre des lecteurs de la bibliothèque de l'IHP la voit s'inscrire dans cette institution en juin 1948 (elle est présentée par Fréchet) et que le *Bulletin* de la SMF la voit devenir membre de cette société en 1955.

partir de juin 1928, dans un article publié tardivement [1941]. Citons encore le paragraphe consacré à Fatou dans le rapport annuel de l'Observatoire pour 1929 :

à l'équatorial de l'ouest où il faisait avec un soin très consciencieux des mesures d'étoiles doubles ; et, par ailleurs, en collaboration avec M^{lle} Bonnet, des recherches statistiques sur les éléments de leurs orbites.

et le discours d'Henri Mineur [1929] :

Il observa constamment et son amour de sa science était tel que, lorsqu'il fut nommé astronome titulaire, il continua à observer personnellement, bien que les règlements lui eussent permis de s'en abstenir.

C'est d'ailleurs Fatou qui avait initié Henri Mineur à l'observation, lorsque celui-ci était astronome-stagiaire, en 1922. Ils ont observé au « cercle méridien Bischoffsheim » puis se sont exercés ensemble aux mesures d'étoiles doubles à l'équatorial de la tour de l'ouest.

Si les étoiles doubles étaient vraiment son domaine, Fatou a observé bien d'autres corps célestes et, par exemple, en 1924, une petite planète qui venait tout juste d'être découverte par l'astronome allemand Walter Baade le 23 octobre et s'appelait « 1924 TD Baade » ou « planète Baade » mais à laquelle Baade a donné le nom plus poétique de Ganymède que cet astéroïde porte depuis. Cette « planète » est particulièrement intéressante par la grandeur exceptionnelle de son excentricité, écrit Fatou dans sa notice de 1927. Voir [Fatou & Giacobini 1924], les observations de Fatou et Giacobini, publiées dès le 10 novembre.

Pierre Fatou a aussi écrit des articles théoriques liés à ses pratiques d'astronome, en optique géométrique et en mécanique céleste.

Optique géométrique

Citons [1913c] (communiqué à la SMF le 19 mars 1913 [1913b]) qui lui a été inspiré « par ses occupations journalières » (dit Chazy [1932]), et dans lequel

Fatou démontre, à l'aide de la notion de chemin optique, par une voie élémentaire et intuitive, le théorème de Thiesen généralisant la condition des sinus. [Chazy 1932]

De façon à peu près contemporaine de ses recherches sur l'itération, il a publié en 1917 un petit article [1917a] dans lequel il démontre que l'aberration sphérique⁷⁵ des lentilles minces subsiste pour les lentilles d'épaisseur quelconque. On peut diminuer l'aberration en utilisant une lentille très épaisse, « mais dans des proportions qui sont pratiquement sans intérêt », dit Fatou dans sa notice de 1921.

⁷⁵ L'aberration sphérique (négative) est ce qui fait que le foyer des rayons lumineux marginaux est plus proche de la lentille que celui des rayons centraux.

Mécanique céleste

À partir de 1921, Fatou s'est occupé de mécanique céleste. Il a commencé par une étude du mouvement (asymptotique) d'une planète dans un milieu qui oppose une résistance dépendant de la position et de la vitesse de la planète, notamment dans le cas où cette résistance est proportionnelle à la vitesse (Fatou considère aussi le cas du carré de la vitesse). La planète tourne alors en spirale à une certaine distance du centre attractif, distance qui tend à devenir constante.

Ceci est proche de l'intérêt de Fatou pour les étoiles doubles : une étoile double se formerait lorsque l'une des deux étoiles capturerait l'autre qui se serait aventurée dans son atmosphère, celle-ci ne tombant sur l'astre attirant qu'au bout d'un temps infini. Ce travail a fait l'objet de l'article [Fatou 1922a] du *Bulletin astronomique*. Lui et ses suites ont été présentés à la séance de la SMF du 26 avril 1922. S'en sont suivies trois notes aux *Comptes rendus* parues sous le même titres, celle [Fatou 1922b] de Fatou, la généralisation [Chazy 1922] par Chazy quelques semaines plus tard, et enfin une deuxième note [Fatou 1922c] de Fatou. Enfin est paru l'article [Fatou 1923d].

Citons encore quelques notes, sur le mouvement d'un point matériel soumis à l'attraction d'un sphéroïde aplati [1925a] (des résultats applicables à l'étude des satellites), sur le mouvement des nœuds de certaines orbites [1927b; 1928c] ou sur le mouvement du périhélie des planètes [1928a], ou encore la note [1927a] qui annonce les recherches à venir de [1928e].

Son article [1928e] occupe une place importante (bien plus de place que l'itération!) dans l'article [Nathan 1971] que le *Dictionary of Scientific Biography*⁷⁶ a consacré à Pierre Fatou. Il s'agit d'un authentique article de mathématiques, à propos du système formé par deux planètes tournant autour du soleil, avec une authentique application à la mécanique céleste :

[...] pour calculer les perturbations produites par Jupiter sur les coordonnées héliocentriques de Neptune, il n'y avait pas d'inconvénient à remplacer l'attraction de Jupiter par sa valeur moyenne, c'est-à-dire cette planète par l'anneau de Gauss qu'on peut lui substituer dans le calcul des inégalités séculaires. [Fatou 1928e, p. 128]

Depuis Gauss en effet, on remplaçait pour les calculs la planète perturbante par sa masse répartie autour de son orbite (anneau de Gauss), mais sans justification autre qu'heuristique. Fatou donne donc une justification mathématique à cette pratique. Ses résultats reposent sur l'étude (annoncée dans la

⁷⁶ Dans cette édition du DSB, il n'est question ni de Julia, ni de Montel, ils étaient d'ailleurs encore vivants... Montel, lui, y est apparu plus tard, dans les suppléments [Dieudonné 1990]. L'article sur Fatou est consacré à ses travaux de mécanique céleste, puis, à propos de ses travaux en mathématiques, si le mot « itération » apparaît bien, il n'est question explicitement que de ses résultats sur les séries de Taylor — l'itération n'était pas encore à la mode!

note [1928b]) du comportement des solutions d'un système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1, x_2, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \quad i = 1, 2$$

(où les f_i sont périodiques en t/ε et développables en série de Fourier) lorsque ε tend vers 0.

Après sa mort, ses collègues ont trouvé dans ses papiers des articles terminés. Ils ont publié la note [1929]. Le plus important de ses travaux de mécanique céleste avait été rédigé trois mois avant sa mort, il a été publié à titre posthume [1931], il porte sur le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe.

V.7 Enseignement et candidatures de Fatou

À propos de sa non participation au Grand Prix de 1918, nous avons déjà mentionné que Fatou aurait pu désirer postuler à un poste de mathématicien. Déjà Painlevé concluait son rapport sur la thèse (en 1907) en espérant que le jeune homme resterait mathématicien :

Je conclus donc à son acceptation [de la thèse], en exprimant le vœu que ce soit pour M. Fatou un encouragement à continuer ses travaux dont on peut légitimement espérer qu'ils contribuent un jour à honorer la science française. [Gispert 1991, p. 398]

D'après Bloch, Fatou a presque toujours refusé d'ambitionner une charge d'enseignement :

Non qu'il y fût impropre, comme s'efforçaient assez maladroitement de le faire croire quelques juges douteux. Le contraire résulte à l'évidence du succès qu'il recueillit dans les quelques conférences qu'il consacra à l'École aux candidats à l'agrégation de mathématiques, comme aussi des brillantes communications faites par lui devant la Société mathématique de France. Mais il avouait lui-même que l'enseignement d'examen n'était pas son fait. La partie scolaire, souvent disciplinaire, que cet enseignement comporte n'était pas à la mesure de ses aptitudes physiques, moins encore à celle de son originalité. Un enseignement vraiment supérieur, s'adressant à une élite, lui eût parfaitement convenu et eût honoré ceux qui lui en eussent confié la charge⁷⁷. [Bloch 1931, p. 54]

⁷⁷ Bloch, lui-même universitaire, n'est pas un observateur ingénu. Il sait exactement de quoi il parle. Il pense à un poste particulier (à l'ENS ? au Collège de France ?). Et il pense à des collègues particuliers, qui auraient pu lui donner cette charge. De même qu'il sait exactement à qui il pense lorsqu'il mentionne des « juges douteux » ou qu'il constate avec étonnement qu'un homme comme Fatou peut avoir des ennemis (page 138).

Pourtant, quel qu'ait été son intérêt pour la mécanique céleste, quelles qu'aient été ses réticences face à l'enseignement, il est avéré que Fatou a essayé d'obtenir un poste de professeur, à la Sorbonne, à l'ENS ou au Collège de France. Nous disposons à ce sujet de quelques allusions⁷⁸ dans des lettres à Montel.

J'ai été voir Picard ce matin à la sortie de son cours, comme j'y étais d'ailleurs décidé. Il m'a fait le meilleur accueil et paraît décidé à me soutenir ; je lui ai exposé que j'avais quelques hésitations à demander cette place pour des raisons de santé ; il m'a dit que c'était en effet à considérer, mais qu'à part cela ma place était à la Sorbonne et non à l'Observatoire. Il m'a dit d'autre part que la candidature de Denjoy avait des partisans, mais qu'il ne connaissait pas l'opinion de certains de ses collègues, notamment de Vessiot et m'a engagé à les voir. Je vais donc faire une tournée de visites pour tâter le terrain ; je ne serai candidat que s'il y a une majorité très nette en ma faveur, et une certaine bienveillance même de la part de ceux qui ne voteraient pas pour moi, de façon à pouvoir réclamer un service qui ne soit pas trop pénible, sinon j'abandonne la partie⁷⁹.

Cette lettre n'est pas datée, mais elle a été écrite entre 1920 et 1922 (voir la note 29 page 235). Il y est sans doute question de suppléer Painlevé, élu député, à la Sorbonne (voir l'appendice).

[...] ⁸⁰ tu peux considérer que je ne suis pas candidat, mais ne le dis pas encore ; je me donne encore quelques jours pour réfléchir et je pourrais changer d'avis si j'obtenais des renseignements plus favorables en ce qui concerne l'organisation du service, mais c'est peu probable puisque Vessiot qui est la plus grande autorité en la matière et qui paraît animé de dispositions bienveillantes me laisse entrevoir la perspective du service auquel je suis le moins adapté.

D'autre part, Vessiot m'a donné un conseil que je suis décidé à suivre bien que cela n'ait plus pour moi, en vertu de ce qui précède, d'utilité positive, à savoir de faire imprimer une notice. A ce propos, je retrouve dans mes brouillons un certain nombre de résultats dont quelques-uns ne sont peut-être pas sans valeur, mais il peut y en avoir qui ne sont pas nouveaux.[...] ⁸¹

En 1921, Fatou fait donc imprimer une notice⁸² et il est candidat au Collège de France. Le compte rendu de l'assemblée des professeurs du 2 juin 1921 (conservé aux archives du Collège de France) dit :

⁷⁸ Il est clair que ce qui intéresse d'abord Fatou dans ces lettres, ce sont les mathématiques.

⁷⁹ Fonds Montel, archives de l'Académie des sciences. Voir le texte complet dans l'appendice.

⁸⁰ Fragment de lettre non datée, fonds Montel, archives de l'Académie des sciences. Voir l'appendice. Rappelons qu'Ernest Vessiot a été directeur scientifique de l'ENS jusqu'en 1935.

⁸¹ Et, comme toujours, Fatou se met à parler de mathématiques. Voir la lettre complète page 233.

⁸² Par l'imprimerie Téqui, rue de la Sablière — et pas par Gauthier-Villars, l'imprimeur attitré de l'Académie des sciences.

Le Professeur Hadamard expose les titres des deux candidats qui lui paraissent l'un et l'autre capables de faire honneur au Collège de France par leur enseignement et propose toutefois de mettre en 1^{ère} ligne M. Lebesgue et en 2^{ème} ligne M. Fatou. Ces propos sont appuyés par M. Langevin.

L'assemblée des professeurs suit cette proposition. De même, l'Académie des sciences classe Lebesgue en première ligne et Fatou en deuxième ligne (comme le signalent les *Comptes rendus* le 11 juillet 1921). Lebesgue a pris le poste, qu'il a occupé jusqu'à la fin de sa vie en 1941.

Fatou n'a pas renoncé à obtenir un poste à la Sorbonne.

J'ai reçu une lettre de Lebesgue dont tu connais probablement le contenu. Je suis allé d'autre part voir Goursat qui m'a conseillé d'attendre et de ne pas dire maintenant que je ne suis pas candidat.

Je reprends ma lettre interrompue précisément par l'arrivée de Lebesgue qui vient de me dire de la part de Goursat que Picard s'entend avec Julia pour qu'on me donne un service qui puisse me convenir et que dans ces conditions il me conseille d'être candidat ferme. Je crois donc cette fois ne pas pouvoir me dérober ; à la réflexion il me semble que je peux tenter cette expérience surtout si étant simplement délégué à la Sorbonne en remplacement de Painlevé, je suis mis en congé à l'Observatoire ce qui me permettrait, je pense, d'y reprendre du service si par exemple au bout d'un an je constatais n'être pas en état de continuer à la Sorbonne. Il faudra que j'éclaircisse ce point qui est très important pour moi.

S'il n'est pas certain que Fatou ait vraiment été candidat à cette occasion (remplacement de Painlevé, pris par sa carrière politique), il est avéré qu'il l'a été en 1927. Par exemple, Weil pense se souvenir dans [1991, p. 58] (la scène se passe en 1928) :

Il [Lebesgue] me dit de l'attendre, alla échanger quelques mots avec Picard et revint à moi : « Avez-vous votre manuscrit ? — Oui. — Prenez un taxi, allez à telle adresse chez Monsieur Garnier et dites-lui que Monsieur Picard désire qu'il se charge de votre thèse ». Garnier venait d'être nommé à la Sorbonne ; sans l'influence prépondérante de Picard un autre candidat, disait-on (c'était Fatou), aurait pu et même dû passer.

C'est sans doute à la réputation d'enseignant faite à Fatou (en particulier par lui-même) que fait allusion Picard dans une lettre⁸³ adressée à Garnier peu de temps après son élection à la Sorbonne, le 20 janvier 1928 :

Mon cher ami,

Je vois que l'on vous fait travailler, et que l'on a peut-être abusé d'un argument que j'avais donné en votre faveur, à savoir que, contrairement à votre concurrent, on pouvait vous confier tous les enseignements [...]

Deux parenthèses s'imposeraient ici, l'une concernant l'étonnant succès de Garnier, que l'on trouvera ci-dessous à la page 189, et l'autre sur l'impresionnant pouvoir dont disposait Picard, que l'on trouvera, elle, à la page 190.

⁸³ Archives de l'Académie des sciences, fonds Garnier. Ce fonds contient quelques lettres (très amicales) de Picard à Garnier — dans lesquelles en général il lui demande de un service.

Fatou astronome titulaire

Mais revenons à Pierre Fatou et à sa carrière d'astronome. Un poste d'astronome titulaire est vacant en 1927. La commission désignée par l'Académie des sciences (car c'est, là aussi, l'Académie des sciences qui décide⁸⁴) propose, au cours de sa réunion en comité secret du 30 mai, de classer en première ligne Pierre Salet et en deuxième ligne Armand Lambert⁸⁵, inversant ainsi le classement du Conseil des Observatoires. Une discussion s'élève alors « sur les titres des deux candidats et sur ceux de M. Fatou, qui n'est pas sur la liste ». Andoyer, Deslandres et Picard se prononcent pour Lambert, tandis que Perrin, Hamy et Cotton sont pour Salet, alors que Bigourdan et Lebesgue proposent la désignation de Fatou. Le vote de l'Académie des sciences en séance publique une semaine plus tard donne une liste formée de Pierre Salet en première ligne et de Fatou en deuxième.

L'année suivante, le 25 juin 1928, Fatou est proposé en première ligne sur le poste d'astronome-titulaire vacant à l'Observatoire. Le Conseil des Observatoires avait présenté, en première ligne Lambert, et en deuxième Fatou, et l'Académie des sciences a inversé le classement⁸⁶. Il a donc été nommé le 7 juillet 1928.

C'est ainsi que le temps arrive à faire en trente ans ce que le mérite ferait facilement en dix⁸⁷. [Bloch 1931]

Citons encore une fois le rapport annuel de 1929 de l'Observatoire :

tranquillisé sur le sort de sa carrière par sa récente nomination comme astronome titulaire et débarrassé de ce côté de ce qu'il appelait un lourd souci, il faisait des projets de travail dans le calme d'une sorte de vie nouvelle.

Bloch le dit, nous l'avons déjà signalé page 106, Pierre Fatou s'apprêtait notamment à former une génération nouvelle d'astronomes.

⁸⁴ L'Observatoire est un pur produit de l'Académie des sciences, d'après [Saint-Martin 2008, p. 58].

⁸⁵ Armand Lambert avait déjà été proposé en deuxième ligne pour un poste d'astronome titulaire... en 1920. Il est vrai que lui avait une charge de cours à la Sorbonne. À noter que cet astronome avait participé à l'*Encyclopédie* avec des articles sur les fonctions sphériques.

C'est lui qui assurera l'intérim de la direction de l'Observatoire pendant l'Occupation, avant d'être déporté et assassiné à Auschwitz.

⁸⁶ Les deux fois, en 1927 et en 1928, cette proposition paraît, dans les *Comptes rendus*, avec une erreur sur le prénom de Fatou, qui est nommé « Paul Fatou ». Il y a pourtant eu un *erratum* la première fois.

⁸⁷ D'après les tableaux réalisés par Arnaud Saint-Martin [2008, p. 165], le passage de Fatou serait dans la moyenne : la moyenne d'âge au passage astronome-titulaire était (en 1910) de 51 ans (et 56% des astronomes-adjoints restaient pour toujours dans ce grade). Une sorte de passage à l'ancienneté, donc, pour notre brillant scientifique.

Fatou académicien ?

Dans le discours qu'il a prononcé pendant l'enterrement de Pierre Fatou, Henri Mineur [1929] a notamment affirmé :

L'Académie des sciences devait sans nul doute l'appeler à elle, au mois d'octobre prochain.

Il est impossible de savoir sur quoi est fondée l'affirmation de Mineur. Apparemment, Picard lui-même a parlé de cette élection à l'Académie des sciences à l'amiral Louis Fatou.

[...] et j'ai su par M. Émile Picard, grand pontife de la Science officielle qui avait toutefois mis bien du temps à découvrir ce savant trop modeste⁸⁸ — qu'il était assuré de son élection à l'Institut avant la fin de l'année,

écrit ce dernier à son cousin Étienne Fatou, peu de temps après la mort de Pierre Fatou, le 2 septembre 1929 (pour cette lettre, voir encore ci-dessous).

Une élection était bien prévue avant la fin de l'année (en novembre et pas en octobre comme l'annonçait Mineur), pour remplacer Pierre Puiseux, dans la section d'astronomie. Il n'y a rien, ni dans le dossier biographique de Pierre Fatou, ni dans le registre des comités secrets, qui confirme les assertions faites par Mineur dans son discours au mois d'août ou par Picard au moment où il a parlé avec Louis Fatou. Fatou avait bien déposé une nouvelle « Notice sur les travaux scientifiques » à l'Académie des sciences, mais celle-ci date de 1927 (en tout cas elle ne fait état que des travaux de Fatou jusqu'en 1927) et correspond plutôt à ses candidatures comme astronome titulaire⁸⁹. Il n'est jamais fait mention dans les *Comptes rendus* du fait qu'il ait officiellement annoncé sa candidature à une élection dans la section d'astronomie. Ajoutons que son nom n'est apparu dans aucune des élections précédentes.

On peut dire que l'élection dont il était question pour la fin de l'année en 1929 avait beaucoup tardé (Pierre Puiseux est mort le 28 septembre 1928). Le 25 février, il a déjà été question de rapprocher l'élection

afin de mettre un terme aux intrigues auxquelles cette vacance trop prolongée a donné naissance⁹⁰.

⁸⁸ Un peu d'amertume dans le commentaire de Louis Fatou qui, s'il connaissait mal le milieu mathématicien, avait bien compris que son frère n'était pas reconnu à sa valeur.

⁸⁹ Il n'est pas impossible qu'il ait existé une troisième version de la notice de Fatou, peut-être liée à une candidature. C'est ce qu'indique la pagination donnée par Montel dans une lettre que nous citerons ci-dessous (page 206). La bibliographie de [Alexander 1994] contient la mention d'une notice de 1929 sans plus d'indication. Cette version, si elle a existé, ne figure pas aujourd'hui dans le dossier Fatou aux archives de l'Académie des sciences.

⁹⁰ Registre des comités secrets, archives de l'Académie des sciences.

La raison de ce retard semble être qu'il fallait aussi choisir un directeur pour l'Observatoire de Paris⁹¹, que ce choix avait une chance de faire venir à Paris un astronome provincial qui, du coup, serait éligible au fauteuil de Puiseux (pour être élu académicien, il fallait habiter Paris). Ces messieurs ont rediscuté la question de la date de l'élection le 4 mars, puis, le 17 juin, ils ont reporté l'élection au 18 novembre. Ces manœuvres quant à la date de l'élection semblent montrer une volonté d'élire Esclangon et d'attendre pour cela qu'il ait quitté Strasbourg. La lecture des lettres de Picard à Lacroix⁹² semble confirmer qu'il n'était pas question de Fatou dans cette histoire (il y est question de l'élection, il n'y est jamais question de Fatou). Par exemple, le 25 juin, Picard annonce à son correspondant la nomination, la veille, d'Esclangon comme directeur de l'Observatoire, ce qui

simplifie la succession de Puiseux. Mais il reste Andoyer.

Ce qui pourrait donner la clé du mystère. Henri Andoyer vient de mourir, le 12 juin, laissant un nouveau fauteuil vacant dans la section d'astronomie. C'est bien Esclangon qui « devait » obtenir le fauteuil de Puiseux. Pourtant, Mineur, qui n'était pas académicien, avait l'air, dès août, très affirmatif sur les chances de Fatou. Il est vraisemblable que Picard a brièvement — entre le 25 juin, date de cette lettre à Lacroix, et la mort de Fatou le 9 août — imaginé une élection de Fatou, de préférence à un astronome classique, au fauteuil d'Andoyer. Voici en effet ce qu'il écrivit à Pierre Gauja le 22 août :

Le pauvre Fatou est mort à Pornichet, où il passait ses vacances. C'était un grand ami de M. Guillet, qui était aussi à Pornichet et a soigné Fatou dans ses derniers jours. Décidément l'astronomie française est mal en point ; on mettra, après M. Esclangon, des physiciens ou des mathématiciens dans la Section, si on ne veut pas de M. Jules Baillaud et de M. Salet.

L'élection au fauteuil de Puiseux aura lieu, le 25 novembre, et c'est bien Ernest Esclangon, le nouveau directeur de l'Observatoire, qui sera élu. Quant à l'élection suivante, au fauteuil d'Andoyer, elle n'a pas eu lieu « avant la fin de l'année », mais l'année suivante. L'Académie adjointra le nom de Charles Maurain — un physicien du globe — à ceux présentés par les astronomes et c'est lui qui sera élu (au premier tour) le 12 mai 1930.

⁹¹ Baillaud a pris sa retraite en 1926, Deslandres l'a remplacé pendant deux ans. C'est Ernest Esclangon, le directeur de l'Observatoire de Strasbourg, qui devient directeur en 1929. Ernest Esclangon est un de ceux qui ont eu l'idée de la fondation de l'AAPSO en 1909, il en a été le secrétaire en 1911 (quand Fatou était président) ; nous avons vu (chapitre I, note 53) qu'il avait mené des recherches sur le son pendant la première guerre mondiale ; avec Fréchet, il a été l'un des « missionnaires » envoyés à Strasbourg refonder l'université en 1919 ; il est aussi, entre autres, l'inventeur de l'horloge parlante. Signalons d'autre part qu'il avait été un condisciple de Paul Montel en mathématiques spéciales à Nice puis, avec un an de décalage, à l'ENS, et qu'ils étaient restés amis.

⁹² Dossier Picard, archives de l'Académie des sciences.

V.8 Fatou et les mathématiciens

Faisons ici le point de ce que nous savons des relations de Fatou avec ses collègues mathématiciens. Même s'il aimait la solitude, Pierre Fatou était un homme sociable, il avait des amis (voir encore [Bloch 1931]). Nous l'avons vu à propos de l'AAPSO, il participait à la vie sociale des astronomes. Il participait aussi à la vie sociale des mathématiciens. En tout cas en France.

Les congrès internationaux

Le nom de Pierre Fatou n'apparaît dans les listes de participants d'aucun des congrès internationaux qui se sont tenus pendant sa période d'activité, Heidelberg en 1904 (il est vrai qu'il était encore très jeune), Rome en 1908, Cambridge en 1912, Strasbourg en 1920, Toronto en 1924, Bologne en 1928. Nous avons pourtant vu qu'il aimait les voyages. C'est donc peut-être plus à cause de ses obligations d'astronome qu'à cause de sa santé précaire qu'il n'a participé à aucun de ces congrès. Peut-être aussi les voyages à Toronto ou Bologne étaient-ils trop onéreux. Il peut s'agir aussi d'une simple absence d'intérêt pour ce type de réunion un peu mondaine : Lebesgue non plus n'a participé à aucun Congrès international. Montel, par contre, était à Rome, à Cambridge, et à Strasbourg.

Les lieux de rencontre et de communication

Où se rencontraient les mathématiciens ? On allait écouter des cours au Collège de France, à la fin desquels on discutait. Paul Lévy [1970, p. 37] raconte par exemple une discussion qu'il a eue avec Humbert à la fin d'un de ses cours :

[...] quand, à la fin du troisième cours il me proposa un sujet de thèse sur son cours, je ne pus que refuser [...]. Ce n'est que l'hiver suivant⁹³ que je pus dire à Humbert que je travaillais à une thèse sur les fonctions de lignes⁹⁴. Fatou, qui assistait à l'entretien, dit : « C'est bien nuageux ; il n'y a guère de résultat précis. » Je répondis que je prétendais avoir des résultats très précis et en indiquai un. Humbert eut un mot aimable pour réparer la gaffe de Fatou.

On écoutait des conférences ici ou là, par exemple, nous savons que Montel, Fatou et Lebesgue (parmi d'autres) ont assisté à une conférence de Russell à l'École des Hautes études sociales le 22 mars 1911 [Lebesgue 1991, lettre du 23 mars 1911]⁹⁵.

⁹³ Vers 1908, d'après le contexte.

⁹⁴ Ce que l'on appellerait aujourd'hui l'analyse fonctionnelle.

⁹⁵ Cette conférence était organisée par la SMF, qui en a même publié le texte [Russell 1911].

Il n'y avait d'abord pas de séminaire à Paris. Celui d'Hadamard au Collège de France s'est tenu en 1913 puis à partir de 1920 (jusqu'au départ d'Hadamard à la retraite en 1937). Il serait bien étonnant que Fatou n'y ait jamais fait d'exposé, d'autant plus que, nous l'avons vu, Hadamard avait une haute estime pour son travail — mais nous n'avons trouvé aucune évidence qu'il en ait fait. Il serait encore plus surprenant qu'il n'y ait jamais assisté. Il est en tout cas avéré que Julia y a parlé. Il est plus que probable que tous les deux se sont rencontrés là.

Rappelons qu'à cette époque (et même encore longtemps après), il n'y avait pas de « laboratoires » de mathématiques, les mathématiciens n'avaient pas de bureau, ils travaillaient chez eux.

On se rencontrait moins, mais on s'écrivait plus. Témoins les lettres de Lebesgue [1991] et de Baire [1990] déjà citées. On pouvait aussi poursuivre par lettres une conversation commencée à la fin d'un cours (voir par exemple [Taylor & Dugac 1981]). Le fonds Borel aux archives de l'Académie des sciences ne contient qu'une lettre de Fatou (non datée, mais certainement de 1904), celle mentionnée au § V.5. Il a certainement correspondu avec Lebesgue mais celui-ci n'a pas gardé sa correspondance. Il a sans doute même écrit à Julia...

Les séances de la SMF

Ces années-là, la SMF palliait l'absence (l'inexistence) de séminaire par l'organisation de séances régulières dont nous avons déjà mentionné quelques traces publiées des exposés qui y étaient donnés. Après ces exposés aussi, l'on discutait. Écoutons encore une fois Paul Lévy, qui nous raconte (dans [1970, p. 21]) la discussion qui a suivi sa communication du 11 mars 1908 :

Fatou avait dit à peu près : « Vous ne semblez pas connaître la théorie de la mesure (ce qui était vrai) ; il n'y a qu'à dire que la propriété que vous indiquez est vraie sauf sur un ensemble de valeurs de t de mesure nulle. »

Il est remarquable que les deux discussions rapportées par Paul Lévy (plus de soixante ans après les faits) et répétées ici mettent Fatou en scène, confirmant la présence de ce mathématicien au sein de la vie de la communauté — et la pertinence de ses interventions.

L'activité de Pierre Fatou à la Société mathématique de France est avérée. Elle a été importante et constante. Pierre Fatou a été élu membre de la SMF le 15 décembre 1904, sa candidature avait été présentée par Désiré André⁹⁶ et

⁹⁶ Désiré André a été le premier trésorier de la SMF à sa création en 1873, il a présidé cette société en 1889. Hermite le mentionne comme un de ses élèves dans une lettre à Stieltjes (du 13 février 1886) [Baillaud & Bourguet 1905a]. Ce combinatoricien a laissé son nom à un principe de symétrie que tous les probabilistes d'aujourd'hui connaissent et utilisent. Après avoir enseigné à l'Université de Dijon, il a été professeur de mathématiques spéciales au Collège Stanislas de 1885 à 1900. Il y était « professeur honoraire » au moment de l'élection de Fatou et y a fait passer

Émile Borel. Il a aussitôt commencé à prendre part aux séances du jeudi⁹⁷. Cette seule année 1905, il a fait des communications le 5 janvier (sur les lignes singulières d'une fonction analytique, correspondant à sa note [1905a] du 6 février), le 19 janvier (sur les nombres premiers) et le 18 mai (caractères de convergence des séries trigonométrique) — celle-là est mentionnée dans [Lebesgue 1906, p. 62]. Nous avons déjà eu l'occasion de mentionner la communication du 26 novembre 1919 [Fatou 1919a].

Il a été un membre très actif de cette société, aux instances de laquelle il a participé sans interruption de 1907 à sa mort. Il a été un des vice-secretsaires de 1907 à 1917, puis l'archiviste⁹⁸ de 1918 à 1921, un des vice-présidents de 1922 à 1925. Il a été le président de la société en 1926. Les comptes rendus des séances publiés dans le volume 54 du *Bulletin* montrent que Fatou était présent à toutes les séances (il les a présidées) sauf à celle du 12 mai 1926 (c'est seulement en l'absence du président que la séance est présidée par un secrétaire, ici Chazy), ce qui est assez exceptionnel. Il a d'ailleurs présenté lui-même six communications cette année-là.

Dans ces instances, il a dû travailler souvent avec Paul Montel et Paul Lévy qui ont occupé le même genre de responsabilités que lui en même temps que lui. Il est certain que Montel était un de ses amis (pour Paul Lévy, nous n'avons pas d'indication).

Il y a aussi rencontré Gaston Julia, qui, après avoir été élu membre de la SMF le 13 mars 1919 (présenté, nous l'avons dit, par Painlevé et, sans surprise, Humbert), a été élu au conseil de la Société en 1924. Fatou, Julia et Montel étaient tous trois membres du conseil de la SMF en 1927 et 1928.

Le mandat de Fatou au Conseil devait expirer en 1930 d'après l'état de la société en janvier 1928 publié dans le volume 56 du *Bulletin*, mais nous manquons d'information sur 1929 puisque l'état de la société publié dans le volume 57 est celui de 1930 dans lequel, bien sûr, Fatou ne figure pas. Il apparaît pourtant dans ce volume, dans la liste des anciens présidents d'une part et dans le compte rendu de la séance du 23 octobre 1929 :

des colles au moins jusqu'en 1906. C'est probablement parce que Pierre Fatou l'a connu lorsqu'il était élève dans cette institution qu'il lui a demandé de le parrainer. Nous avons vu que Fatou n'a pas été l'élève de Désiré André, qui était professeur de la « section verte » mais celui, dans la classe parallèle, la « section bleue », de Charles Biehler. Désiré André lui a certainement fait passer des colles. Et Charles Biehler n'a jamais été membre de la SMF, peut-être parce qu'il était religieux. Encore une fois merci à Nicolas Lecervoisier pour les renseignements sur le Collège Stanislas.

⁹⁷ Dans les années 20 et 30, c'est le mercredi que se tiendront les séances.

⁹⁸ Un commentaire irrésistible. La SMF avait un archiviste ! Et elle en avait un depuis sa création ! Voilà une société savante consciente de l'importance de son histoire... En réalité, il nous reste peu (ou pas) d'archives de cette société, comme s'en plaignait déjà Hélène Gispert au début de son livre [1991].

M. le Président fait part de la perte que vient de subir la Société en la personne de M. Fatou, ancien président, et adresse à la famille⁹⁹ de M. Fatou les unanimes regrets de la Société.

Ce sera l'unique hommage rendu à Fatou dans les publications mathématiques françaises...

V.9 Mort de Fatou

Pierre Fatou est mort soudainement, le 9 août 1929 à 20 heures, à Pornichet où il était en villégiature, à la villa Brise-Lames, avenue Léon-Dubas, au bord de la mer. Il avait cinquante-et-un ans. Ces indications sont celles portées sur son acte de décès. Sans doute Pierre Fatou était-il en vacances à l'hôtel puisque Robert Fatou (qui était alors en Australie) pensait que son oncle s'était « éteint dans une chambre d'hôtel de Pornichet ».

C'est Florian La Porte¹⁰⁰, ingénieur hydrographe en chef de la marine, domicilié à Lorient, qui a déclaré son décès à l'état-civil¹⁰¹ le lendemain après-midi. Florian La Porte était un cousin de Fatou (leurs mères étaient cousines germaines). Il était sans doute lui aussi en vacances à Pornichet avec sa famille. D'autres amis de Fatou, les Guillet¹⁰², étaient présents à Pornichet et étaient probablement les occupants de la villa Brise-Lames où Fatou est mort.

Bloch ne dit même pas précisément, dans ce que nous avons qualifié de biographie intellectuelle, quelle a été la cause de la mort de Fatou, mentionnant une « dernière et foudroyante maladie ». Deux traditions contradictoires coexistent dans sa famille quant à la cause de sa mort :

– du côté des neveux, on pense qu'il a été empoisonné par une boîte de sardines avariées, alors que

⁹⁹ Nous le savons, Pierre Fatou avait un frère, deux sœurs, des neveux et nièces, et de très nombreux cousins et cousines.

¹⁰⁰ Florian La Porte était un ancien polytechnicien. La ville de Lorient a donné son nom à une de ses rues en 1949, comme « auteur de travaux remarquables et avocat incessant du port de Lorient. »

¹⁰¹ Pierre Fatou n'a décidément pas de chance avec son prénom (voir la note 86) : sur son acte de décès, il apparaît sous le nom de René Joseph Louis Fatou, une erreur de lecture d'un employé, un « Pierre » manuscrit devenu « René ».

¹⁰² Léon Guillet (1873–1946), métallologue, un des inventeurs, au début du xx^e siècle, de ce que l'on appelle aujourd'hui l'acier inoxydable, directeur de l'école centrale de 1923 à 1944, membre de l'Académie des sciences depuis le 22 juin 1925, était un ami proche de Pierre Fatou, comme nous avons vu Picard le mentionner dans la lettre à Gauja citée page 166. Comme nous l'avons déjà signalé, le réseau de connaissances de Fatou auquel appartenait Guillet ne nous est pas connu. Guillet avait cinq ans de plus que Fatou, ils ne sont donc pas des camarades d'études. En tout cas, Guillet était un ancien élève de Picard à l'école centrale. Sur Léon Guillet, voir la notice nécrologique d'Élie Cartan [1946].

– du côté des petits-cousins, c'est un bain de soleil trop prolongé associé à un ulcère à l'estomac qui aurait provoqué une hémorragie interne puis la mort.

Voici ce que savait le frère aîné de Pierre Fatou, le 2 septembre 1929, lorsqu'il écrivit à son cousin Étienne¹⁰³ la lettre dont un passage a déjà été cité ci-dessus :

Mon cher Étienne,

Je n'ai pas encore pu savoir moi-même — n'ayant pas eu l'occasion de rencontrer à Pornichet le médecin de St-Nazaire (Dr. Ozzo, je crois) qui l'avait soigné — (ses soins ne consistant d'ailleurs qu'en deux visites) à quoi exactement avait succombé mon malheureux frère.

Je lui avais trouvé bien mauvaise mine le 12 juillet à son départ de Paris et frappé en particulier de son teint jaune, je lui avais conseillé de se faire examiner le foie — naturellement insouciant comme il l'était de sa santé et ne ressentant d'ailleurs aucun symptôme insolite — en dehors de ceux auxquels il s'était habitué du côté de l'intestin — il n'avait fait nul cas de ma recommandation.

J'ai su que le mercredi 7 août seulement, il avait été pris de violents vomissements de bile noire. Que le médecin a pu qualifier sans grand effort d'imagination de « vomito negro ». Celui-ci était revenu dans la journée de vendredi — et voyant que le malade ne souffrait plus, il avait pensé que si l'état général était loin d'être satisfaisant, la crise grave était du moins conjurée et qu'il n'y avait pas lieu d'alarmer la famille. Le pauvre Pierre est mort quelques heures plus tard, tout doucement m'a-t-on affirmé — et entouré par ses parents La Porte et ses amis Guillet, des soins que hélas je n'ai pas pu moi-même lui apporter — puisque je n'ai été prévenu que lorsque tout était fini.

[...]

Sous la peau parcheminée de cet astronome silencieux, gauche, timide, distrait — il y avait un bien bon cœur et, je crois, derrière son front — un cerveau de premier ordre. Tous ses collègues me paraissent unanimes à lui rendre cette justice [...]

Une consultation médicale

D'après le Docteur Pierre Marinelli, qui a lu dans les documents cités ici les symptômes présentés par Fatou et la lettre de son frère, les symptômes décrits évoquent en effet un ulcère à l'estomac. Un ulcère provoque des saignements qui entraînent une anémie et donc une fatigue progressive, comme celle qu'ont notée les témoignages que nous avons cités. Ce sang est digéré par le malade, d'où des problèmes intestinaux (semblables à ceux qu'avait Pierre Fatou) et même hépatiques (dont le teint jaune remarqué par Louis Fatou pouvait être

¹⁰³ Étienne Fatou était un cousin (issu de germain) de Louis et Pierre Fatou, un médecin cardiologue, petit-fils de l'oncle pharmacien. Et encore merci à Gladys Sérieyx pour la transcription de cette lettre adressée à son père.

une manifestation). Lorsque les saignements deviennent trop importants, le malade ne peut plus digérer le sang et le vomit. Le « vomito negro » est souvent du sang en partie digéré. Le saignement important provoque aussi une baisse de la tension artérielle et le malade, anémié, s'éteint doucement, ce qui correspond bien à ce que Louis Fatou raconte dans sa lettre¹⁰⁴.

Le Docteur Marinelli nous a signalé aussi que, ces années-là, l'hémorragie digestive due à un ulcère à l'estomac était une cause importante de mortalité. Même si l'on sait aujourd'hui qu'une bactérie est cause de l'ulcère, le stress et le tabac (et Fatou fumait la pipe) sont des facteurs aggravants. La relation avec le bain de soleil semble moins claire.

Voici la conclusion de l'article [1932] de Chazy. N'étant pas lui-même un observateur, il s'excuse auprès de ceux qui ont fait des observations avec Fatou, et :

Mais je puis rappeler que, moi aussi, j'ai collaboré avec lui : souvent, dans des causeries commencées ou terminées à la bibliothèque de l'Observatoire, nous avons lui et moi discuté des Ouvrages et des Mémoires mathématiques, et j'apporte un témoignage direct de la pénétration de son esprit, de son sens critique et de sa vaste culture scientifique.

Malgré cinq années les amis de Fatou n'ont oublié en rien l'homme qu'il était, son élégance morale, sa franchise, la réserve d'abord de sa conversation, puis l'originalité de ses points de vue, son goût pour la musique, pour les grands spectacles de la nature, son amour fidèle de la Bretagne, où il retournait fréquemment, et où, jeune encore, la mort est venue le surprendre.

Et, pour que toute cette histoire de Pierre Fatou n'apparaisse pas comme une digression, voici comment et par qui Léon et Eugène Bloch ont appris la mort de leur ami. Par hasard, revenant d'une course en montagne :

Au détour du sentier, à cent pas du village, une silhouette se dessinait devant nous, c'était celle de notre ami Montel. À nos exclamations de surprise et de joie, il ne répondit que par cette phrase : « vous connaissez les nouvelles de Paris ? » « Quelles nouvelles ? », fis-je d'un air inquiet. « Fatou est mort ». Et c'est ainsi que j'ai appris la perte de mon meilleur ami, l'immense désastre porté à la science française.

Don Fatou

Après la mort de Pierre Fatou, quelques tirés-à-part (ceux de sa thèse [1906c] et ceux de ses articles et notes [1910 ; 1922b ; 1922d ; 1922e ;

¹⁰⁴ Il est certain en tout cas que ce n'est pas l'ennui mathématique qui a tué Pierre Fatou, comme le suggérait Alain dans le texte cité ci-dessus. Le neveu lui-même n'y croyait pas :

Rien [...] ne me paraît moins certain, car je n'ai jamais eu l'impression que mon oncle ait éprouvé le mal de vivre. Il avait simplement trouvé dans l'existence des joies différentes de celles du commun.

1924b ; 1926]) ainsi que plusieurs livres ont été donnés à la bibliothèque de l'Observatoire (don Fatou du 21 octobre 1929). Ses autres livres ont dû être donnés à la bibliothèque de l'ENS (il y a peu de livres et surtout peu de livres de mathématiques dans le don Fatou à l'Observatoire, or nous savons, par la lecture de [Lebesgue 1991], qu'il possédait, entre autres, des volumes de la *Collection de monographies*), comme l'indique une lettre de Louis Fatou à Paul Montel¹⁰⁵ :

Paris Hôtel de l'Avenir, 65 rue Madame 6^e

Le samedi 12 octobre [1929 et (Littre 84-54) ajoutés par Montel]

Cher Monsieur

M'étant laissé absorber plus que de raison par les tristes devoirs dont je suis venu m'acquitter à Paris je n'ai pas pu vous dire avec tout l'empressement que j'aurais voulu y mettre combien j'ai été sensible aux sympathies qu'en termes si affectueux et élogieux pour lui vous avez eu l'aimable attention de m'exprimer à l'occasion de la mort de mon frère. Je ne désespère d'ailleurs pas de réussir avant mon départ à aller vous en remercier de vive voix. Car ce m'est un grand réconfort dans l'épreuve que je traverse d'entendre parler de lui par les hommes de haute valeur qui voulaient bien lui accorder leur estime et l'entourer de leurs conseils et de leur amitié. J'ai pu constater en dépouillant la correspondance de mon frère que vous étiez tout particulièrement de ce nombre. Je sais qu'il vous en gardait une profonde reconnaissance. Veuillez être persuadé que j'en accepte bien volontiers l'héritage et agréer cher Monsieur avec l'assurance de ma haute considération l'expression de mes sentiments les plus cordialement dévoués.

L. Fatou

Je ne manquerai pas de me conformer à l'avis que Monsieur Bloch a eu l'amabilité d'aller solliciter de vous au sujet de la meilleure destination à donner aux ouvrages scientifiques que j'ai trouvés dans la bibliothèque de mon frère.

Toutefois ayant constaté après une visite à l'Observatoire qu'un grand nombre des tomes qui manquaient pour certains d'entre eux se trouvaient dans son ancien bureau et manquant de temps et de moyens pour recommencer les classements que j'avais entrepris, j'ai dû me décider à prier deux de ses collègues (M^r Mineur et M^{lle} Bonnet) de vouloir bien faire prendre ce que j'ai recueilli au domicile de mon frère, reconstituer les collections et ensuite les adresser à l'École normale après avoir prélevé les livres qu'ils désireraient conserver à titre de souvenirs.

Il y a bien eu un don Fatou à la bibliothèque de l'École normale supérieure, où l'on trouve par exemple un exemplaire du livre de Baire [1905]¹⁰⁶, ainsi que des exemplaires des thèses de Paul Flamant et de Philippe Le Corbeiller,

¹⁰⁵ Fonds Montel, archives de l'Académie des sciences.

¹⁰⁶ J'ai trouvé cet exemplaire... en ouvrant tous les volumes du rayon : heureusement les ouvrages de la *Collection de monographies* de Borel sont rangés ensemble dans

qui ont appartenu à Pierre Fatou. Malgré l'aide d'Odile Luguern et de ses collègues, il n'a pas été possible de faire un inventaire exhaustif de ce don : il semble que cette bibliothèque n'ait pas pratiqué le registre d'inventaire et, si la mention « don Fatou » a figuré sur les fiches bristol, elle n'a pas été préservée lors de l'informatisation du fichier.

Nous n'avons trouvé aucune trace des papiers¹⁰⁷, ni des albums photographiques de Pierre Fatou. Cette lettre nous montre pourtant que Fatou avait conservé sa correspondance, ou au moins une partie de celle-ci.

Notices sur Fatou



Fig. V.3. Le début de l'article [Chazy 1932]

On aura pu s'étonner que l'article de Chazy, paru dans un journal daté de 1932, mentionne quatre années écoulées depuis la mort de Fatou. Cet article a dû être écrit en 1934 et le journal dans lequel il est paru était peut-être en retard. Il semble que Chazy ait attendu Lebesgue. En effet, Lebesgue a parlé d'écrire une notice sur Fatou pour le *Bulletin des sciences mathématiques*, Chazy lui a fourni de la documentation (il connaissait bien les travaux de

la bibliothèque — on y trouve d'ailleurs des volumes ayant appartenu à d'autres personnes mentionnées dans ce livre, un (autre) exemplaire de [Baire 1905] sur lequel figurent les noms de Paul Flamant et de Gaston Julia, un exemplaire de [Borel 1901] ayant appartenu à Paul Lambert...

¹⁰⁷ Nous l'avons vu, ses papiers mathématiques, ceux du moins qui étaient terminés, ont été publiés, probablement par Henri Mineur et Rose Bonnet.

mécanique céleste de Fatou). Lorsque Chazy s'est inquiété de la publication de cette notice auprès du secrétaire de l'Académie des sciences, Picard lui a fait répondre qu'il n'en avait jamais entendu parler. En novembre 1933, Lebesgue a dit ne pas être encore prêt et a conseillé à Chazy de ne pas l'attendre. Quant à Picard, il était peu disposé à publier une notice dans le *Bulletin des sciences mathématiques* si longtemps après la mort de Fatou¹⁰⁸. Trop tôt pour Lebesgue, trop tard pour Picard... Chazy a écrit son article et l'a fait paraître dans un journal d'astronomie.

Il semble bien qu'aucun journal mathématique n'ait publié de notice nécrologique sur Pierre Fatou.

¹⁰⁸ Pour tout ce paragraphe, correspondance de Chazy avec le secrétaire de l'Académie des sciences, dossier Fatou, archives de l'Académie des sciences.

VI

Cicatrices de l'histoire — une polémique scientifique... en 1965

Julia a réclamé la priorité sur l'itération et l'a obtenue, Fatou est mort, sans savoir qu'il aurait peut-être enfin été reconnu à hauteur de sa valeur scientifique, les mathématiciens allemands ont, tant bien que mal, été réintégrés dans la communauté scientifique internationale, Julia, puis Montel, ont été élus académiciens des sciences, la science allemande a été décimée (ce que nous avons aperçu ici à travers le suicide de Hausdorff et le départ de Siegel pour les États-Unis, où il publie l'article [Siegel 1942] mentionné ci-dessus), prélude au déclenchement d'une nouvelle guerre qui a éprouvé et divisé les mathématiciens français comme elle a éprouvé et divisé la population. Après la Libération, la communauté s'est reformée, n'oubliant pas ses antagonismes, mais n'en parlant plus, de sorte qu'ils sont aujourd'hui ignorés. Cette communauté n'est pourtant pas, n'a pourtant jamais été monolithique.

En nous concentrant toujours sur nos protagonistes survivants, Julia et Montel, nous allons voir que les cicatrices des animosités datant de l'époque de la Grande guerre et du Grand prix dont il a été question dans les premiers chapitres de ce livre, que ces cicatrices étaient encore susceptibles de s'ouvrir... un demi-siècle plus tard.

Nous l'avons vu, le premier ensemble de Julia est apparu dans la note [1906d] de Fatou, alors que Julia avait 13 ans et que les familles normales n'avaient pas encore été inventées. Après quoi, l'ensemble de Julia a été imaginé plus généralement (comme ensemble de ce que Montel, avait, pour sa part, appelé des points irréguliers) dans les travaux indépendants de Fatou et de Julia en 1917.

On entend parfois dire que c'est Mandelbrot qui a assuré l'immortalité au nom de Julia en baptisant l'ensemble qui porte aujourd'hui son nom. Il est vrai qu'on aurait pu l'appeler « ensemble de Fatou » et son complémentaire « ensemble de Julia » au lieu de l'inverse. Mais la terminologie semble avoir été fixée bien avant l'invention des fractales. Elle a fait l'objet d'une polémique, mais entre Julia et Montel, assez tardivement mais toujours avant l'invention des fractales.

Une question (déjà soulevée à la fin du chapitre II et à nouveau évoquée au § V.8) reste posée, à laquelle nous n'avons pas répondu : nous ne savons rien des relations entre Fatou et Julia. Nous en savons un peu plus de celles de Julia et Montel. C'est ce qui est raconté ici. Ici comme aux chapitres I et II, l'Académie des sciences sera le lieu principal de notre étude.

Nous commençons par évoquer les trajectoires de Julia et Montel (entre 1918 et 1965), nous envisageons ensuite leurs relations, à travers, d'une part, une discussion scientifique, en 1932, dont nous restent des traces écrites, de l'autre leur affrontement lors de l'élection à l'Académie des sciences de 1934 — à ce sujet, nous évoquerons le pouvoir d'Émile Picard, les révoltes d'Henri Lebesgue et les succès surprenants de René Garnier. Ce cadre étant posé, nous en viendrons à la polémique de 1965, provoquée par le texte que doit écrire Paul Lévy pour le tricentenaire, en 1966, de l'Institut de France. Le sentiment, que nous avons pu éprouver, que la carrière et la reconnaissance de Julia avaient été favorisées par son statut de héros mutilé, va ici trouver des sources explicites.

VI.1 Les protagonistes, de 1918 à 1965

Gaston Julia

Après le Prix Bordin de 1917 et le Grand Prix des sciences mathématiques de 1918, Julia a encore été récompensé par trois prix de l'Académie des sciences, le Prix Franceur en 1926, le Prix Poncelet en 1928 et le Prix Petit d'Ormay en 1931. Il a été élu académicien des sciences en 1934. Il était déjà membre de l'Académie pontificale¹.

Parenthèse (Julia à *Zentralblatt* et à *Compositio*). Julia a aussi été membre du comité de rédaction de *Zentralblatt für Mathematik*, depuis sa fondation en 1931 jusqu'à la fin de la guerre et au-delà², sans aucune interruption même après que, à la suite de l'éviction de Levi-Civita, rédacteur italien au nom trop juif, en 1938, Neugebauer ait demandé et obtenu la démission de (presque) tous les rédacteurs non-allemands, Harald Bohr, Hardy, Tamarkin, Veblen, etc. et de recenseurs comme Davenport. Voir [Remmert 2000].

Il a été membre du (pléthorique) comité de rédaction de *Composition mathematica*, « ce périodique foncièrement international », et un de ses quatre « administrateurs », dès son premier numéro en 1935, là aussi encore au-delà de la reparution du journal après la guerre (même après que Doetsch, Feigl et

¹ Voir le § VI.4 pour des remarques sur la difficulté à écrire une biographie de Gaston Julia.

² Sur la collaboration de Julia à *Zentralblatt* pendant la guerre, voir [Audin & Schappacher 2009].

Süss l'aient quitté, n'acceptant plus de participer à une entreprise pas complètement aryenne). Voir [van Dalen & Remmert 2006] pour l'histoire de ce journal.

Parenthèse (Le séminaire Julia). Julia a donné son nom à un séminaire mythique (voir ce dont se souviennent Chevalley [1961], Dubreil [1950, p. 151] et Garnier [1978]), dans lequel certains voient un « proto »-séminaire Bourbaki [Weil 1991, p. 101]). À noter qu'un autre membre historique de Bourbaki, Szolem Mandelbrojt [1985], considère que c'est le séminaire Hadamard qui a donné naissance au séminaire Bourbaki. Signalons par ailleurs qu'il n'est pas impossible que le « thé », une cérémonie post-séminaire à laquelle les mathématiciens sont aujourd'hui très attachés, ait été inventé avec ce séminaire. Sur le séminaire Julia, voir aussi notre article [2009a].

L'activité de recherche de Julia (en tout cas telle que mesurée par son rythme de publication) s'est un peu calmée après le point sur l'analyse complexe et plus précisément sur les fonctions d'une variable complexe fait dans son exposé [1932]³ du Congrès international de Zürich. Il s'est ensuite (à partir de 1938) consacré aux opérateurs sur les espaces de Hilbert, sur lesquels il a publié une impressionnante liste de notes aux *Comptes rendus*, voir la liste des publications dans [Julia 1968] (des travaux qui sont un peu tombés dans l'oubli).

Il a bien eu quelques ennuis à la Libération⁴ en 1944, à cause de ses relations suivies avec l'occupant, de conférences qu'il a données en Allemagne en 1942 et de la publication d'un de ses articles [1943] dans une revue allemande⁵. Mais ces ennuis n'ont pas été très sérieux, une suspension de quelques semaines (du 21 septembre au 10 novembre 1944) suivie d'aucune sanction, le comité d'épuration ayant été (à l'unanimité...) trop impressionné par le fait qu'il était une « gueule cassée » pour donner suite (voir [Singer 1997, p. 283]).

Il a ensuite repris normalement ses activités, professeur à la Sorbonne et à l'École polytechnique, a été président de l'Académie des sciences en 1950, etc. Entre autres cérémonies en son honneur, son jubilé scientifique s'est déroulé avec faste en 1961 (cinquante ans après sa réussite aux concours) sous

³ Les éditions Gauthier-Villars ont publié cet exposé en fascicule séparé.

⁴ Comme le remarque Singer dans son livre [1997], on connaît les noms de beaucoup d'hommes (et femmes) de lettres ou de spectacle collaborationnistes (Germaine Lubin, Céline...) mais de peu de scientifiques. Comme Ludovic Zoretti est déjà apparu dans ce texte, mentionnons l'itinéraire singulier de cet universitaire, militant syndicaliste CGT, pacifiste devenu membre du Rassemblement national populaire de Déat (un normalien de la promotion 1914, lui, et qui n'a intégré l'école qu'après avoir fait la guerre, qui a été ensuite dirigeant de la SFIO — le parti socialiste — avant de fonder en février 1941 ce mouvement politique collaborationniste)... et qui a eu, lui, Zoretti, des ennuis vraiment sérieux à la Libération.

⁵ Il s'agit d'une série de mémoires de l'Académie prussienne des sciences, collection dirigée par Bieberbach et dans laquelle les rares étrangers qui ont publié étaient ressortissants de pays de l'Axe, japonais ou bulgares — à part Julia.

le parrainage d'une impressionnante liste de mathématiciens, parmi lesquels on pourra s'étonner de trouver les noms d'Hadamard et de Siegel, entre (de nombreux) autres : les mathématiciens pratiquent l'esprit de corps et le « n'en parlons plus ».

À part ses travaux sur l'itération et plus généralement l'analyse complexe, l'apport le plus important de Julia aux mathématiques de son siècle aura peut-être été la façon magistrale dont il a « tapé » les anciens élèves de l'x pour financer l'achèvement de la publication (par l'Académie des sciences) des Œuvres complètes de Poincaré (voir les informations à ce sujet dans [Julia 1970]).

Remarque. La notice que Julia a produite pour sa candidature à l'Académie des sciences (reproduite dans [Julia 1968]) est rédigée de façon à mettre en valeur les travaux de son auteur (c'est son rôle) mais elle est aussi destinée à montrer sa supériorité sur son concurrent Montel. On y lit par exemple :

[...] développant logiquement les conséquences de ces principes que les points singuliers d'une fonction la déterminent dans une mesure plus ou moins grande, j'ai recherché la notion correspondante pour les familles et j'ai introduit en Analyse la notion générale de *points singuliers des familles de fonctions d'une ou de plusieurs variables*, que d'éminents géomètres ont bien voulu appeler *points de Julia* ou points *J*. Ce concept, aujourd'hui classique, est exposé avec plus moins de détails [...] dans les monographies [...] de MM. Montel et Valiron sur les familles normales.

Beaucoup des assertions que fera Julia sur les points *J* en 1965 viennent de cette notice.

Malgré les séquelles de ses blessures et la mauvaise santé dont il se plaignait, il vivra jusqu'à l'âge de quatre-vingt-cinq ans, et sera enterré, après une messe et une cérémonie militaire à l'église Saint-Louis des Invalides, en 1978.

Paul Montel

Pour des détails⁶ sur la vie de Montel, voir la vivante biographie [Beer 1966]. Il s'était présenté à l'Académie des sciences en même temps que Julia, mais n'y a été élu qu'en 1937. Visiblement, le fait que Julia lui ait été préféré a coûté à Montel (voir ci-dessous comment s'est déroulée l'élection)⁷.

⁶ Détails succulents, comme le brochet au beurre blanc et son muscadet nantais, pittoresques ou odorants, comme le jus d'ail que son père utilisa pour guérir le jeune Montel du choléra...

⁷ Dans le même dossier Paul Lévy d'où sont issues les lettres présentées ici, est conservée une lettre que Montel a écrite à Paul Lévy juste après que l'Académie des sciences lui ait préféré Garnier (qui était d'ailleurs soutenu par Julia) le 3 mars 1952, et dans laquelle, pour consoler Paul Lévy, il lui parle du « couple Garnier-Lévy » et du « couple Julia-Montel ». Sur Garnier, voir page 189.

Il a exercé une influence importante sur les jeunes mathématiciens entre les deux guerres, que l'on peut mesurer au nombre de rapports de thèse qu'il a écrits (voir [Mandelbrojt 1975]). D'après [Beer 1966, p. 70], il a dirigé une vingtaine de thèses entre les deux guerres.

Montel était un ami proche d'Émile et Marguerite Borel, d'Albert Mathiez, de Paul Langevin et de Lebesgue. Plutôt un homme « de gauche », donc.

Pendant les premiers mois de la guerre de 1939–40, il a dirigé, à la demande de son ami Raoul Dautry, qui était alors ministre de l'armement, une mission scientifique franco-britannique⁸. Il a été le doyen de la Faculté des sciences de Paris de 1941 à 1946.

Parenthèse (Doyen pendant l'Occupation). Paul Montel a donc été le doyen de la Faculté des sciences de Paris de 1941 à 1946 (année où, à l'âge de soixante-dix ans, il a pris sa retraite), ce qui inclut la plus grande partie de la période de l'occupation allemande. Il a été nommé à ce poste par le ministère de Vichy (et son représentant Jérôme Carcopino) puisque, sous Vichy, les doyens étaient nommés. Mais il y avait eu aussi un vote de ses pairs en sa faveur, comme cela se faisait avant Vichy (et se fait toujours)⁹. Il est certain que la position de doyen devait être difficile à tenir et il n'est pas étonnant que son attitude ait pu être qualifiée d'« ambiguë » par un résistant combattant comme René Zazzo [Pinault 2000, p. 248 et note 35]¹⁰.

Nous disposons pourtant, en faveur de l'attitude de Montel, de témoignages de diverses sources. Son dossier biographique aux archives de l'Académie des

⁸ Cette mission s'est notamment occupée d'une politique commune de l'atome. Elle a été à l'origine de ce que l'on a appelé la « bataille de l'eau lourde ».

⁹ Montel a conservé (Archives de l'Académie des sciences, fonds 72J) une coupure de presse du 21 août 1941, sans doute lue dans le quotidien de Déat *l'Œuvre*, qui rapporte son élection en ces termes :

L'élection du doyen de la faculté des sciences fut réglée selon la tradition républicaine. Première sélection : majorité écrasante au noble Darmois., physicien et mathématicien éminent, adversaire du triste Perrin, de mémoire front popu !

Alors, pour faire nommer Montel, sang mêlé, la grâce de Carco aidant (et celle de Verrier, iconoclaste) on envoya Borrel [*sic*] recueillir jusque dans les endroits les plus discrets de la docte maison les vœux et les voix de tout le petit personnel.

Le « noble Darmois » dont il est question dans ce « torchon » (que l'on veuille bien me passer l'expression — et l'inévitable prise de position) n'est pas Georges Darmois, réputé avoir été un résistant de la première heure, mais son frère Eugène Darmois, engagé en faveur de Vichy. Le fonds Fréchet des archives de l'Académie des sciences conserve une lettre datée du 22 juillet dans laquelle Valiron raconte à Fréchet la première étape de ce vote, la veille.

¹⁰ Parmi les documents que Montel a conservés et que l'on trouve aujourd'hui dans le fonds 72J des archives de l'Académie des sciences, les numéros du journal clandestin (résistant) *l'Université libre* dans lesquels il était (parfois violemment) mis en cause.

sciences contient par exemple des cartes qu'il a envoyées au Secrétaire perpétuel pour le prévenir des arrestations de Langevin, Borel ou d'autres, en octobre 1941, et le fonds Montel contient des notes des rencontres, avec Carcopino ou d'autre politiques, au cours desquelles Montel a évoqué ces arrestations. Dans ses souvenirs [1968], Camille Marbo rapporte qu'il a essayé (en vain) de pousser à une démarche de l'Académie des sciences pour faire libérer Borel et ses amis. Voici ce que Borel lui-même a déclaré, peu de temps après les faits, lors du jubilé scientifique de Montel [Borel 1947] :

Je vous suis particulièrement reconnaissant d'avoir, à une époque où j'avais dû quitter Paris pour échapper à la surveillance de la police allemande, accepté de me suppléer à la présidence de l'Aide à la Recherche scientifique et largement contribué, avec un courage tranquille, à aider des professeurs et des chercheurs persécutés par l'occupant et ses complices.

Dans le livre [MathNiçois 1966] d'hommage à Montel, René Cassin écrit [Cassin 1966, p. 21] :

Pendant toute la durée de l'occupation ennemie, le grand savant rivé à son poste veille jalousement sur l'indépendance de la Sorbonne menacée à tout instant par l'occupant et ses serviteurs. Tout ce qu'il peut faire pour assurer la protection de ses collègues ardents à la Résistance et pour donner à ses étudiants une chance d'échapper au service du travail obligatoire, il l'accomplit simplement avec une fermeté et une souplesse dont, en haut lieu, les Abel Bonnard et autres déliquescents enragent¹¹.

Une fermeté et une souplesse qui ne sont pas absolument contradictoires avec le reproche d'« ambiguïté », et qui vont bien avec ce qu'écrit Dieudonné [1990] (traduit par moi) dans son article sur Montel dans le DSB :

Pendant l'occupation allemande, il était doyen de la Faculté des sciences et il a réussi à maintenir la dignité de l'université française en dépit de l'arrogance des occupants et de la servilité de leurs collaborateurs.

Les textes cités ici peuvent être classés dans la catégorie « éloge académique ». Pourtant, rien n'obligeait Robert Debré, même dans son article [1966] dans [MathNiçois 1966] à évoquer des souvenirs un peu plus précis :

Et puis, plus tard¹², sous l'occupation de Paris, des rencontres clandestines et furtives avaient pour motif nos efforts, mêlés à ceux de nos amis de la Résistance. Aux éloges de ceux qui admirent Paul Montel, je puis joindre le témoignage de son fier courage.

¹¹ Il semble que Montel ait même fait l'objet d'un blâme de son ministre :

En 1941 [...] vous accédez au Décanat. Les épreuves des lois odieuses de Vichy ne vous ont pas été épargnées. Et vous avez même l'honneur de mériter un blâme, signé Abel Bonnard [Roussy 1947].

Ce blâme ne semble pas se trouver dans les papiers conservés dans le fonds Montel.
¹² Avant ce « plus tard », il est question de l'amitié de l'oncle et de la tante Hadamard de Debré pour Montel.

Voici un témoignage un peu moins récent (toujours le jubilé [JubiléMontel 1947] du 18 mars 1947) de ce que les services de la Faculté des sciences ont pu faire pendant l'Occupation [Cabannes 1947]¹³ :

En octobre 1941, vos collègues de la Faculté des Sciences ont à élire leur doyen, les suffrages se portent sur votre nom et vous avez le redoutable honneur de succéder à M. Maurain aux heures critiques de l'occupation allemande. Il fallait à la fois sauvegarder la dignité de l'Université de Paris et soustraire les étudiants à l'ennemi.

Votre Secrétariat fait silencieusement son devoir. Pour éviter aux jeunes gens le travail obligatoire en Allemagne, on les immatricule comme étudiants en dehors des dates fixées par les instructions ministérielles et on leur délivre des certificats antidatés ; on inscrit pour les examens des candidats porteurs de fausses cartes d'identité ; on retire des dossiers les fiches des Alsaciens et des israélites. Les registres sont sabotés ; jamais on n'avait connu tel désordre et pareille incurie. À la veille de la libération, dans les caves de l'Institut de Chimie, s'amassent les bouteilles incendiaires destinées aux combats de rues contre les chars allemands. Sans doute Monsieur le Doyen ignore-t-il cette lutte sourde qui dure depuis trois ans, mais Paul Montel la connaît, l'approuve et l'encourage. Vous avez trouvé, mon cher collègue, la meilleure des récompenses dans votre réélection triomphale au lendemain de la libération.

Et en effet, le fait que Montel soit resté en fonction jusqu'en 1946 semble être le témoignage le plus probant en sa faveur¹⁴ puisqu'il a vécu sans problème la période de la Libération (et de l'épuration). Au moment de son départ à la retraite en 1946, il a distribué à ses collègues un texte dans lequel il disait :

Je garde la fierté d'avoir été désigné par mes Collègues en des heures troubles et difficiles. Leur confiance et leur appui m'ont aidé à les traverser sans que notre Faculté, meurtrie dans sa liberté et dans sa chair, fût atteinte dans sa dignité.

Il semble bien qu'il ait réussi à tenir la position sans compromission.

Il a pris la direction du *Bulletin des sciences mathématiques* à la mort de Picard en décembre 1941 et il en est resté directeur jusqu'à sa propre mort en 1975. Il a dirigé l'IHP après la mort de Borel, a été président d'une commission de l'UNESCO, et président de l'Académie des sciences en 1958¹⁵.

¹³ Des témoignages allant dans le même sens, et dont Cabannes, successeur de Montel au décanat, a pu s'inspirer, figurent dans le fonds Montel des archives de l'Académie des sciences.

¹⁴ Comme me l'a fait remarquer Jacques Roubaud, le simple fait que François Le Lionnais ait accueilli un article d'un auteur dans son livre [1948] garantit, en lui-même, que cet auteur n'a pas été un collaborateur. C'est le cas de Montel avec son texte sur le rôle des familles de fonctions dans l'analyse [Montel 1948].

¹⁵ Pour que cette évocation de Montel soit complète, il convient d'y mentionner les commentaires négatifs et désabusés que fait Lucienne Félix [Félix 2005, p. 66-67] sur l'amitié de Montel pour Lebesgue (notamment après la mort de ce dernier).

VI.2 Relations entre Julia et Montel, années 1930

Atmosphère encore cordiale, 1932

En 1932, l'atmosphère semble encore relativement cordiale entre Julia et Montel. Cette année-là, Julia qui est le président de la SMF, donne de sa personne en faisant plusieurs communications au cours des séances du mercredi. Le 14 décembre¹⁶, c'est même une conférence qu'il donne au cours d'une de ces séances. Montel n'y assiste pas, mais Hadamard y est (il y fait d'ailleurs une communication sur une note d'Ahlfors), et il rapporte à Montel ce que Julia a raconté. Montel écrit à Julia à ce sujet¹⁷, il a conservé un brouillon daté du 15 décembre, une première réponse de Julia, du 20, sur laquelle il a indiqué qu'il avait répondu le 21, et une deuxième réponse de Julia datée du 26.

La question mathématique est la suivante : Montel a déjà considéré dans [1931a ; 1931b]¹⁸ des fractions rationnelles « à termes entrelacés », c'est-à-dire qui se mettent sous la forme P/Q où les zéros de P et de Q alternent sur un cercle. En utilisant une homographie, on peut supposer que ce cercle est l'axe réel et que P et Q sont des polynômes réels de même degré k . Ainsi

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = A - \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{z - a_i},$$

où $A, A_1, \dots, A_k, a_1, \dots, a_k$ sont réels, disons que les racines a_i de Q sont rangées dans l'ordre croissant $a_1 < \dots < a_k$. Notons que

$$P(z) = AQ(z) - \sum_{i=1}^k A_i \prod_{j \neq i} (z - a_j),$$

de sorte que

$$P(a_i) = -A_i \prod_{j \neq i} (a_i - a_j).$$

L'hypothèse d'entrelacement est donc équivalente au fait que tous les A_i ont le même signe. Montel avait notamment remarqué que cette hypothèse est stable par composition, en particulier que les itérées d'une fraction rationnelle à termes entrelacés sont des fractions rationnelles à termes entrelacés. Montel revient sur ces fractions rationnelles et sur les fonctions méromorphes qui sont

¹⁶ Le fascicule « Vie de la société » du *Bulletin* indique la date du 19 décembre mais c'est une erreur : c'est bien le 14 décembre qui était un mercredi et la lettre de Montel dont il va être question est datée du 15.

¹⁷ Pour ce paragraphe, dossier Montel, archives de l'Académie des sciences. C'est dans un tiré-à-part de son article [1931b] que Montel a conservé ces papiers.

¹⁸ Montel avait déjà à l'époque et a gardé toute sa vie de nombreux contacts en Roumanie. On ne s'étonnera donc pas qu'il publie dans un journal de Cluj.

limites uniformes de telles fractions dans une note aux *Comptes rendus* [Montel 1932] parue le 17 octobre 1932, quelques semaines avant la conférence de Julia. Ce que Julia fait remarquer à Montel, dans sa lettre du 26 décembre, c'est que l'hypothèse d'entrelacement est aussi équivalente au fait que la fonction R préserve le demi-plan supérieur¹⁹, ce qui est vrai quand tous les A_i sont positifs, en effet :

$$\operatorname{Im} R(z) = - \sum_i \operatorname{Im} \frac{A_i}{z - a_i} = \left(\sum \frac{A_i}{|z - a_i|^2} \right) \operatorname{Im} z.$$

Les fractions rationnelles satisfaisant à la condition d'entrelacement de Montel sont donc des fractions à cercle fondamental, celles dont l'itération a été étudiée par Fatou dans la note [Fatou 1917b] (voir ici page 54) — juste avant, on s'en souvient, qu'il ait eu l'idée d'utiliser les familles normales de Montel.

On pourra s'étonner que Julia ait mentionné ce fait dans une conférence à laquelle Montel n'assistait pas, apparemment sans lui avoir signalé cette remarque auparavant. Ce qui n'empêche pas la lettre que Montel lui a envoyée d'être très cordiale (c'est au moins le cas du brouillon qu'il a conservé).

Montel écrit en effet dans ce brouillon :

15 déc. 32

Mon cher Julia

M. Hadamard me dit que, dans votre conférence de hier soir, vous avez signalé que les résultats que j'ai publiés sur les fonctions méromorphes à termes entrelacés avaient été obtenus antérieurement par vous et par Fatou. Comme j'ai à la composition un travail sur cette question²⁰, je désire faire les restitutions de priorité nécessaires et éviter les redites.

Je me suis occupé de la constitution [composition ?] des fonctions méromorphes transcendentes limites de fractions rationnelles à termes entrelacés. J'ai indiqué en particulier les résultats de l'itération de ces fonctions qui ne diffèrent pas de ceux relatifs aux fonct. rationnelles du même type. Existe-t-il sur ces fonctions méromorphes un travail antérieur de vous ou de Fatou ?

En ce qui concerne les fractions rationnelles elles-mêmes, j'en ai fait une étude intrinsèque et j'ai donné incidemment les résultats de leur itération. ces derniers ont été obtenus antérieurement par Fatou dans son chapitre sur les fract. à cercle fondamental et vous en parlez aussi dans votre mémoire couronné. Existe-t-il d'autres points communs ?

Bien cordialement à vous

¹⁹ Quant aux fonctions méromorphes limites de ces fractions, il semble à Julia que Fatou les a étudiées et que leur itération n'est pas différente de celle des fractions à cercle fondamental. Il lui semble aussi que Montel utilise la même méthode que lui (généralisation du lemme de Schwarz) que lui, Julia, a utilisée et il indique ses articles sur le sujet.

²⁰ L'article de Montel qui est à la composition est [Montel 1933], qui va paraître dans le fascicule de juin 1933 des *Annales de l'École normale supérieure* et dont [Montel 1932] annonçait les résultats. Montel indique en effet la référence à [Fatou 1917b] dans cet article.

Ce brouillon se complète de quelques lignes dans lesquelles Montel fait la liste de ce qui est connu. Plus précisément, il relève dans le « mémoire couronné » [Julia 1918f], toutes les mentions du fait que c'est Fatou qui a étudié les fractions rationnelles à cercle fondamental²¹ :

Dans le mémoire couronné sur l'itération, Julia attribue à Fatou l'introduction des fractions à cercle fondamental

- p. 72 « les fract. à cercle fond. de M. Fatou »,
- p. 110 « les fract. que M. Fatou a signalées dans une note des C. R. »,
- p. 179 « les fract. à cercle fond. que M. Fatou considère dans une note des C. R. »
- p. 216 « revenons aux exemples de M. Fatou dans sa note de 1917 ».

Pour conclure ce paragraphe, signalons que les fractions à termes entrelacés font encore l'objet du dernier chapitre du dernier livre de Montel [1957].

Si la conférence de Julia et le soin que Montel a mis à ne pas le citer dans son article [1933] laissent percevoir quelques tensions malgré le ton aimable de cet échange, il semble que la situation va se dégrader, en particulier à l'occasion de l'élection à l'Académie des sciences de 1934.

Élections à l'Académie des sciences

Après la mort de Paul Painlevé le 29 octobre 1933, l'Académie des sciences procède à son remplacement.

La dernière élection d'un membre de la section de géométrie a eu lieu le 9 mars 1931, il s'agissait alors de remplacer Paul Appell. La section s'était réunie (en comité secret) le lundi précédent et elle avait classé ses candidats, en première ligne Élie Cartan, en deuxième ligne, ex-aequo, Denjoy, Julia, Montel et Vessiot. Les cinquante-quatre académiciens présents lors de l'élection avaient ensuite suivi sagement l'avis de la section, Cartan obtenait 51 voix, Vessiot 2 et Montel 1. Une élection ordinaire.

Le rituel bien établi se renouvelle pour le remplacement de Painlevé. Le 19 février 1934, Julia a annoncé sa candidature, le 26 février, la section, constituée de Hadamard, Goursat, Borel, Lebesgue et Cartan²², se réunit en comité secret (près de deux heures, donc assez longuement, signe que les choix n'étaient pas simples)²³. Élie Cartan expose les raisons pour lesquelles il votera pour Montel — il fait également l'éloge des travaux de Julia. Picard place Julia en première ligne ; Lebesgue place Montel en première ligne. Hadamard, Goursat et Borel interviennent dans la discussion.

²¹ Ces lignes semblent avoir été ajoutées après que Montel ait reçu la réponse de Julia et justifient le fait que Julia ne soit pas mentionné dans [Montel 1933].

²² Picard, depuis qu'il est Secrétaire perpétuel, n'est plus membre de la section (il a été remplacé par Goursat).

²³ Pour ce paragraphe, registre des comités secrets, archives de l'Académie des sciences.

Il est vraisemblable qu'Hadamard a lui aussi voté pour Montel, une discussion qui a eu lieu quelque temps auparavant l'indique. Le 14 novembre 1932, l'Académie des sciences a discuté en comité secret du prix Albert I^{er} de Monaco et en particulier, à la suite de Picard, s'est demandée à quel géomètre elle pourrait décerner ce prix. Il a été question de Julia, de Montel, de Vessiot et de Denjoy. Lebesgue a déclaré que, s'il s'agissait d'une élection dans la section de géométrie, il voterait pour Montel et Hadamard a exprimé la même opinion²⁴.

Finalement, la section propose

- en première ligne, Paul Montel,
- en deuxième ligne, Gaston Julia,
- en troisième ligne, Arnaud Denjoy,
- en quatrième ligne, ex-aequo, Maurice Fréchet²⁵, René Garnier et Paul Lévy.

Cette fois les académiciens ne suivent pas l'avis de la section puisque, le 5 mars, les cinquante-quatre présents élisent Julia, avec 32 voix contre 21 à Montel (et un bulletin nul). Il est certain que le fait que Julia ait été un grand blessé de la grande guerre a joué en sa faveur. Voici quelques exemples de situations analogues : le 26 mai 1919, lors d'une élection pour la section de chimie, Hadamard explique qu'il « votera pour M. Béhal à cause du rôle de premier plan qu'il a joué dans les fabrications chimiques de guerre » ; le 4 avril 1921, les services rendus par Borel à la défense nationale pendant la guerre ont été exposés en faveur de son élection ; les trois notes publiées en 1916 par Esclangon (et signalées dans la note 53 du chapitre I) seront utiles lors de son élection en 1929 [Saint-Martin 2008, p. 139] ; encore en 1942, lorsqu'il s'agira de remplacer Lebesgue, un académicien écrira à Fréchet que le fait qu'il soit ancien combattant jouera en sa faveur (lettre citée dans [Taylor 1985, p. 365]).

Un tel renversement (en tout cas lors de l'élection d'un géomètre) est assez rare²⁶. Dans les cinquante années précédentes, il y a eu treize élections de géomètres et une seule fois, les académiciens n'ont pas suivi la section, le 19 mai 1919, où ils ont préféré Goursat à Borel, avec un score assez semblable : 29 pour Goursat soutenu, d'après le registre des comités secrets, par Picard et Jordan, contre 23 pour Borel, soutenu par Humbert et Painlevé. Dans la plupart des cas, comme dans celui de l'élection de Cartan, la majorité obtenue par

²⁴ Le prix Albert I^{er} a finalement été décerné à Louis de Broglie.

²⁵ Fréchet était présenté par Hadamard, voir [Taylor 1982].

²⁶ Pendant la période de l'entre-deux-guerres, l'Académie des sciences a recruté plusieurs membres pour la section de mécanique, de façon un peu plus mouvementée :

- Jules Drach en 1929, qui avait été rajouté (sur proposition de Lebesgue, d'après le registre des comités secrets, 3 juin 1929) par l'Académie à la liste proposée par la section et élu avec une majorité confortable,
- Jouguet, Villat et Louis de Broglie en 1930, 1932, 1933, sans problème,
- Alfred Caquot en 1934, passé devant Vessiot (renversement de la proposition de la section) et au second tour.

l'heureux élu est très confortable (Darboux obtient 47 voix sur 53, Appell 52 sur 53, Humbert 54 sur 58...) mais il y a eu des élections plus difficiles, comme celles de Poincaré (qui a obtenu 31 voix contre 24 à Mannheim, un géomètre un peu oublié aujourd'hui) le 31 janvier 1887, ou même celle d'Hadamard (36 voix contre 21 à Goursat)²⁷ le 9 décembre 1912.

Montel sera élu le 31 mai 1937, lors de l'élection suivante, en remplacement de Goursat, et plutôt triomphalement puisque la réunion en comité secret du 24 mai n'aura besoin que de quinze minutes pour établir la liste

- en première ligne, Paul Montel,
- en deuxième ligne, Arnaud Denjoy,
- en troisième ligne, ex-aequo, Maurice Fréchet, René Garnier, Paul Lévy et Georges Valiron,

et que le vote donnera 51 voix à Montel, 1 à Garnier, 1 à Paul Lévy... et rien à Denjoy, qui sera le prochain élu²⁸, en 1942, bien avant Garnier (1952), Fréchet (1956) et Lévy (1964).

Quant à Garnier... L'élection a lieu le 3 mars 1952, il s'agit de remplacer Élie Cartan décédé l'année précédente. La section de géométrie s'est réunie (pendant une heure et demie) en comité secret le 25 février. Borel, Hadamard, Denjoy et Montel veulent placer Fréchet en première ligne, Julia veut Garnier (il reste sur cette affaire une documentation précise, citée dans [Taylor 1985, p. 366]), ce que Denjoy qualifiera de « caprice saugrenu » (même source)²⁹. Le comité secret classe donc

- en première ligne, Maurice Fréchet,

²⁷ Picard soutenait déjà Goursat contre Painlevé en 1900 (voir la lettre de Painlevé à Mittag-Leffler du 10 juin 1900 citée dans [Painlevé 1975, p. 811]). Après Painlevé, Humbert et Hadamard ont été préférés à Goursat par les académiciens. Les clivages politiques ont joué leur rôle ici aussi. Dans le cas de Jacques Hadamard, il est assez vraisemblable que, quelques années après la conclusion de l'Affaire Dreyfus, les anti-dreyfusards ont voté contre un candidat qui, non content d'être juif, avait été un dreyfusard très actif et était toujours militant de la « Ligue des droits de l'Homme ». La correspondance de Picard conservée aux archives de l'Académie des sciences le montre abondamment : Picard détestait Hadamard, notamment parce qu'il était juif. Il est difficile de comprendre pourquoi ce type de remarque n'apparaît pas à propos de cette élection à l'Académie des sciences dans la biographie [Maz'ya & Shaposhnikova 2005] — peut-être encore une manifestation de l'esprit de corps.

²⁸ Denjoy n'avait pas actualisé sa notice pour l'élection au fauteuil de Goursat en 1937 parce qu'« il y avait unanimité des académiciens pour Montel » (dossier Denjoy, archives de l'Académie des sciences).

²⁹ Voir aussi la lettre de Paul Lévy à Maurice Fréchet du 2 juillet 1951 dans [Lévy & Fréchet 2004] :

Julia fait une campagne active contre nous, ce qui n'est pas dans les usages de l'Académie.

- en deuxième ligne, ex-aequo, René Garnier, Paul Lévy et Georges Valiron,
- en troisième ligne, ex-aequo, Henri Cartan et Szolem Mandelbrojt.

Et l'Académie des sciences suit Julia, sans enthousiasme puisqu'il lui faudra deux tours pour élire Garnier. Depuis 1884 (nous ne sommes pas remontés plus loin), c'est la première fois qu'un géomètre n'est pas élu au premier tour. Ce que Julia qualifie de « brillante élection » est un résultat plus brillant pour lui que pour Garnier.

Parenthèse (À propos de Garnier (et de Fatou, Julia et Picard)).

On pourra s'étonner d'un tel succès pour René Garnier (1887–1984), préféré à Fatou, si l'on en croit Weil³⁰, pour une charge de cours à la Sorbonne en 1927 où il a été élu sur proposition de Picard, et à Maurice Fréchet et Paul Lévy pour un fauteuil à l'Académie des sciences en 1952, « après une brillante élection dont j'ai quelques raisons de me souvenir », dira Julia [1970, p. 382]. René Garnier, lauréat du Grand prix des sciences mathématiques en 1912 (avec Boutroux et Chazy) était un des disciples de Painlevé, dont celui-ci aurait dit (cité par Julia dans [1970, p. 281]) :

Et puis il y a Garnier. Ce qu'il a fait n'est pas facile, ni très amusant, mais c'est solide.

Une opinion qui aujourd'hui stopperait net la carrière d'un mathématicien. Sur cette base, Julia a pourtant toujours défendu et toujours réussi à faire passer, finalement, Garnier. Dans l'histoire de la charge de cours dont il est question ici, Julia (qui était professeur à la Sorbonne depuis 1925 après y avoir été chargé de cours en 1920 et maître de conférences en 1922) a certainement pesé lui aussi pour Garnier (qui était à Poitiers³¹ depuis 1913, d'abord comme maître de conférences puis comme professeur) contre Fatou, puisqu'il dit, en s'adressant à Garnier lors de son jubilé [1970, p. 281] :

J'ai été ainsi conduit en diverses occasions à soutenir vos diverses candidatures³² [...] Je fus de vos campagnes pour la Sorbonne.

³⁰ Voir ici page 163. Weil, dont la réputation de mauvaise langue n'est plus à faire, dit de Garnier [Weil 1991, p. 58] :

J'eus donc un rapporteur, consciencieux autant que bienveillant ; il ne remarqua pas quelques lacunes dans les démonstrations mais me donna d'utiles conseils pour les virgules.

³¹ En ce temps-là, on pouvait quitter un poste de professeur à Poitiers pour une charge de cours à la Sorbonne : il y avait deux cadres d'enseignement supérieur, celui de Paris et celui de la province (voir par exemple [Lebesgue 1991, note 856]).

³² René Garnier a aussi fait les « petites classes » de Julia à l'x à partir de 1943, voir [Julia 1970, p. 282]. Il n'est pas inintéressant de lire les dédicaces que Garnier a écrites sur les exemplaires de ses livres destinés à Gaston Julia. En 1940 et 1941, il écrit « À Gaston Julia, très cordialement », en 1945 et 1951 « affectueux hommage », en 1935, il avait été un peu plus précis « À Monsieur G. Julia, en

On ne s'étonnera pas que Julia ait joué contre Fatou...

Ceci évoque la fin de la notice nécrologique [1942] que Szolem Mandelbrojt a consacrée à Picard : après une rapide mais impressionnante description de ses travaux et de la reconnaissance qu'ils lui ont valu, il conclut en évoquant l'« attitude olympienne » de Picard. C'est que ce tout-puissant avait des exécuteurs !

Pour une évocation de la carrière de René Garnier, qualifié finalement de « chrétien convaincu », voir [Malliavin 1989].

Parenthèse (À propos d'Émile Picard et de son pouvoir). Le paragraphe de Weil cité ci-dessus page 163 est extrait d'un passage de son livre [1991] dans lequel il démontre la toute-puissance de Picard. Et, en effet, en 1928 (pour prendre l'exemple de l'année dont parle Weil), Picard était membre de l'Académie française (depuis 1924³³), Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences³⁴, membre du Bureau des longitudes, membre du Conseil de l'Observatoire (depuis la mort de Poincaré en 1912), président du Conseil de l'École centrale, professeur à la Faculté des sciences, à l'École centrale et à l'École de Sèvres, directeur des *Annales de l'École normale supérieure*, rédacteur (avec Appell) du *Bulletin des sciences mathématiques* et il collaborait au *Journal de mathématiques pures et appliquées* que dirigeait Henri Villat. Nous avons vu qu'il était président du Conseil des recherches. Il était aussi membre honoraire du bureau de la SMF dont il avait été président deux fois, dans sa jeunesse, en 1884, puis en 1897. Et il présidait l'« Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure » (depuis 1922 et jusqu'à 1929) ainsi que la Société des Amis des Sciences. À la fin de sa carrière, son cours à la Sorbonne aura été suivi (plus ou moins) par quarante-six promotions de normaliens³⁵ — sans compter les sévriennes³⁶.

souvenir bien reconnaissant » — il devait se sentir redevable à Julia (fonds Julia de la bibliothèque du CIRM).

³³ Dans une lettre à Lacroix conservée aux archives de l'Académie des sciences, il dit lui-même à propos de son élection à l'Académie française être le candidat du parti catholique.

³⁴ Dont il est membre depuis l'âge de 33 ans — même s'il n'a été élu qu'à sa sixième tentative, après qu'on lui ait préféré successivement Jordan, Darboux, Laguerre, Halphen et enfin Poincaré.

³⁵ Parmi lesquelles celles de Lattès, Montel, Fatou et Julia.

³⁶ Agacé par la dévotion des sévriennes à l'égard de Picard (que ces demoiselles surnommaient d'ailleurs « Roméo » — ce que Lucienne Félix a évité de mentionner dans son discours pour le centenaire de Picard [Félix 1956]), Lebesgue aurait dit [Félix 1974, p. 10] : « Picard ! Picard ! enfin, ce n'est pas Archimède ». Il avait, bien longtemps auparavant, écrit à Borel [1991, p. 250] : « Picard me semble un hurluberlu ». On l'aura compris, Lebesgue, fils d'ouvrier typographe, n'appartenait pas au même milieu que Picard, ni à sa coterie. Voir aussi la parenthèse sur ses révoltes page 193.

Un exemple rare d'accumulation de ce que Bourdieu³⁷ appelle le « capital universitaire ».

À part peut-être Joseph Bertrand (1822–1900), sur lequel on pourra consulter [Zerner 1991], qui était moins bon mathématicien et dont Picard était un neveu par alliance (Madame Picard était la fille de Madame Hermite, qui était la sœur de Bertrand), personne n'a jamais eu autant de pouvoir dans cette communauté, même pas son prédécesseur Darboux, de la toute-puissance duquel se plaignait tant Lebesgue [1991].

Nous l'avons vu (par exemple sous la plume de Louis Fatou page 165), Picard était un « pontife » — un mot qui a un peu disparu du lexique universitaire, remplacé (environ depuis 1968) par le mot « mandarin », qui me semble comporter moins de globalité que le pontificat.

Une digression, à propos de l'UMI

Puisqu'il a été question du « Conseil des recherches ». Une autre des séquelles de la première guerre mondiale a été, nous l'avons signalé plusieurs fois, l'exclusion de l'Allemagne et de ses alliés de la vie mathématique internationale, exclusion dont certains mathématiciens français, comme Émile Picard, ont été de chauds partisans (voir par exemple son discours [1921] au Congrès de Strasbourg)³⁸.

Le premier congrès international auquel a participé une délégation allemande (conduite par Hilbert) a été celui de Bologne en 1928 (déjà mentionné ici page 79). Cette participation n'est pas allée de soi, ni du côté allemand (voir [Segal 2003] par exemple, pour les positions divergentes de Hilbert et de Bieberbach) ni du côté français puisque Picard, qui était président du très anti-allemand *International Research Council*, a refusé, en tant que tel, d'y participer (voir les rapports sur la préparation du congrès [Pincherle 1929b]).

Celui de Zürich en 1932 a plus ou moins dissout l'UMI (la mettant en liquidation jusqu'au prochain congrès) et nommé une commission pour étudier la question générale d'une collaboration internationale entre mathématiciens, commission à laquelle Julia appartenait, et qui rendit compte au congrès d'Oslo en 1936, un constat d'échec. Pourtant, Julia croyait encore à l'UMI puisqu'il écrivait à Picard (lettre du 5 février 1936, déjà mentionnée page 28)

³⁷ Il n'est pas anachronique, et probablement pas déplacé non plus, de citer ici une analyse de Pierre Bourdieu [1984, p. 114] :

Ici aussi, le capital va au capital, et l'occupation de positions qui confèrent du poids social détermine et justifie l'occupation de nouvelles positions, elles-mêmes fortes de tout le poids de l'ensemble de leurs occupants.

Le cas de l'historien Pierre Renouvin (un mutilé de la guerre de 1914–18 lui aussi), invoqué par Bourdieu à l'appui de cette analyse, évoque bien, *mutatis mutandis* une génération après, le cas de notre Picard.

³⁸ On trouvera des renseignements sur l'UMI dans [Lehto 1998].



Fig. VI.1. Gaston Julia et Charles de la Vallée Poussin photographiés par George Pólya lors du dîner (à Ravenne) du Congrès de Bologne en 1928

[...] vous pouvez répondre que l'Union internationale existe encore et qu'il y a lieu de continuer à verser la subvention habituelle.

La Commission internationale qui la régit doit se réunir avant le Congrès d'Oslo, à une date que M. Severi (président) fixera, mais qui sera certainement antérieure à juillet, puisque le Congrès est fixé au 13-18 juillet prochain. Le Congrès d'Oslo seul, auquel la question sera posée de façon nette, pendra la décision de dissoudre ou de maintenir l'Union.

Je vous donnerai d'autres détails sur la question lorsque je vous verrai, si cela vous intéresse.

Il a rendu compte après Oslo, et Picard pourra écrire à Lacroix dans une lettre du 29 août 1936 :

Si l'union de géodésie et de géophysique ne va pas très bien, l'Union internationale de mathématiques a été enterrée définitivement à Oslo, à la fin de juillet, au Congrès international de mathématiques. Les Américains ont été les plus enragés pour la suppression. La France, la Pologne et l'Espagne étaient seules favorables au maintien, et encore Borel a-t-il joué là un rôle assez ambigu. C'est Julia qui m'a donné récemment des détails sur les interminables discussions du Congrès d'Oslo³⁹.

Parenthèse (Pouvoir de Picard... et révoltes de Lebesgue). Mais revenons, puisqu'il a été question de Lebesgue, aux élections à l'Académie des sciences. Lucienne Félix [1974] rapporte, à propos de Lebesgue :

À l'Académie [...] il s'indigna qu'on tint compte pour les élections, d'autres éléments que la valeur scientifique [...] Il alla, paraît-il, jusqu'à tenir tête au grand Maître et Secrétaire perpétuel Émile Picard, et pendant un certain temps, cessa d'aller aux Séances.

D'autres éléments que la valeur scientifique sont toujours pris en compte. Lebesgue, qui a écrit des dizaines de lettres à Borel pour s'en plaindre au début de sa carrière (voir [Lebesgue 1991]) le savait bien. Voici comment il racontait, dans une lettre à Montel⁴⁰, le choix de maîtres de conférences à la Sorbonne en 1922 :

Math : maîtrise de conférences, 32 votants (17 majorité absolue), 9 Denjoy, 22 Julia, 1 blanc. [...]

Ce résultat est exactement celui que je t'avais annoncé ce matin : j'avais dit 9 voix.

Picard a fait le laïus patriotique, il a parlé de la mutilation de Julia, de son lit de douleur, etc. Il a parlé de ces études subtiles que l'on aurait poussé trop loin et qu'il était utile d'enrayer⁴¹. Il a feint l'indignation contre l'ajournement des baccalauréats et il a osé dire que Julia était sans fortune, qu'il avait deux enfants et que c'était pour les nourrir qu'il était obligé de faire des examens à l'x au lieu de faire des bachots.

Voilà !

H. Lebesgue

³⁹ Dossier Picard, archives de l'Académie des sciences.

⁴⁰ Fonds Montel, archives de l'Académie des sciences. Lebesgue n'était pas homme à taire les dissensions entre ses collègues. Par exemple, le 31 mai 1923, il écrivit une lettre à Villat dans laquelle il commentait ce qu'avait fait chacun de ses collègues lors de l'élection de Villat comme membre correspondant de l'Académie des sciences (fonds Villat 61J).

⁴¹ Moins passéiste que Hermite dont nous avons cité quelques épistolaires bêtises (pages 17 et 73) mais formé à son école, Picard a émis quelques réserves sur l'intérêt, par exemple, des travaux de Baire (voir la fin de son rapport sur la thèse de ce dernier dans [Gispert 1991, p. 375]). On peut imaginer qu'il a exprimé ce jour-là des réserves analogues quant à Denjoy.

On ne voit pas pourquoi ce n'aurait pas été le cas à l'Académie des sciences. Sans remonter à l'Affaire Dreyfus et à ses suites (voir la note 27), souvenons-nous, dans cette histoire, avant même que Lebesgue entre à l'Académie des sciences, de l'élection en 1916 d'un professeur de Louvain comme membre correspondant à la place de Klein, lui-même exclu pour avoir signé un texte où il était question de la guerre à Louvain (voir page 37)⁴².

Mais revenons à Lucienne Félix. Comme une digne membre du corps des mathématiciens, elle ne dit évidemment pas à quoi exactement elle fait allusion. On ne peut pas s'empêcher d'essayer de deviner. S'agit-il de l'élection d'un géomètre ? Si oui, il n'y en a pas eu tellement entre celle de Lebesgue en 1922 et son décès en 1941 (Cartan en 1931, Julia en 1934, Montel en 1937). Si Lebesgue s'est heurté à Picard, c'est qu'il ne s'agissait pas d'un vote quasi-unanime. On peut penser que Picard a pesé en faveur de l'élection de Julia. Etc., etc. Mais il pouvait s'agir aussi d'une élection pour la section de mécanique (Jules Drach, Émile Jouguet, Henri Villat, Louis de Broglie, Alfred Caquot). Ou pour une autre section encore⁴³. La réponse à ces interrogations est donnée par Montel lui-même, assez tardivement encore une fois, entre quelques anecdotes légères [Montel 1966] :

Henri Lebesgue, grand mathématicien du début de ce siècle ; pour moi, l'ami le plus généreux, le plus sûr et le plus loyal.

En 1934, je posais ma candidature à l'Académie des Sciences. Je ne fus pas élu, les suffrages étant allés à un grand mutilé de la guerre de 14. Lebesgue considéra qu'une injustice avait été commise et refusa, pendant trois ans, de paraître aux séances.

Il n'y retourna qu'en 1937, qu'après mon élection, qui fut obtenue par un nombre élevé de voix [...]

On trouvera aussi dans [Lebesgue 2004, note 555]⁴⁴ l'information suivante :

Henri Cartan nous a indiqué qu'il possède une lettre de Lebesgue à Élie Cartan où Lebesgue l'attrape parce qu'il a soutenu Julia contre Montel.

Le registre des comités secrets (voir page 186) nous avait pourtant donné l'information inverse. Peut-être, Cartan ayant fait l'éloge des deux candidats, Lebesgue n'a-t-il pas compris. Marguerite Borel, qui le connaissait bien pour avoir dirigé avec lui l'Hôpital 103, a décrit Élie Cartan [1968, p. 171] comme un « mathématicien transcendant, très courageux, très doux, mais d'un caractère hésitant », il n'est pas impossible qu'il ait changé d'avis au moment du vote.

Si Lebesgue s'est révolté et s'est exprimé explicitement dans la lettre à Montel de 1922 citée ci-dessus comme dans la lettre à Élie Cartan que mentionne Henri Cartan et qui date sans doute de 1934, les raisons de cette révolte

⁴² Les qualités du mathématicien en question (de la Vallée Poussin) ne sont pas en cause.

⁴³ Sur les élections de membres à l'Académie des sciences, voir ci-dessus.

⁴⁴ Une version plus récente de [Lebesgue 1991]. Apparemment Henri Cartan a retrouvé une à une quelques lettres de Lebesgue à son père (voir la note 46).

ont été pudiquement voilées⁴⁵ — par sa biographe Lucienne Félix mais aussi par les autres. Le texte de Montel identifiant les « autres éléments que la valeur scientifique » comme étant la blessure de guerre de Gaston Julia date de 1966 ; Henri Cartan n'a découvert l'existence de la lettre de Lebesgue à son père que très tardivement : il n'en connaissait visiblement pas l'existence lors de la publication⁴⁶ de [Lebesgue 1991] en 1991.

Nous allons voir que la polémique de 1965 va aussi susciter des révélations.

VI.3 Le troisième centenaire de l'Institut de France

En 1966, l'Institut de France (c'est-à-dire l'ensemble des cinq académies) fête son tricentenaire. Pour cette occasion, l'Académie des sciences publie deux volumes dans lesquels ses sections font l'historique de ces trois cents années, chacune pour sa discipline, en mettant l'accent sur l'apport des académiciens (de ceux qui sont devenus membres de l'Académie, de ceux qui ont été lauréats de prix de cette institution,...). La section de géométrie⁴⁷ a confié ce travail à Paul Lévy.

Durant l'année 1965, Paul Lévy fait relire son projet par plusieurs mathématiciens et reçoit une correspondance abondante à ce sujet, des lettres de Denjoy, de Fréchet et, pour ce qui nous intéresse ici, trois lettres de Montel, deux lettres de Julia, une de Milloux et une d'Ostrowski⁴⁸. Certains de ces mathématiciens ont reçu directement le projet par l'Académie des sciences (c'est le cas de Fréchet). D'autres ont répondu à une demande de Paul Lévy.

⁴⁵ Ce qui n'est pas sans évoquer l'allusion énigmatique faite par Schwartz dans son livre [1997, p. 152] à un professeur de l'école polytechnique à la fois collaborateur et membre de l'Académie des sciences :

Certains des professeurs [de l'x] étaient des collaborateurs. L'un d'eux fit tout pour que l'x reste dans Paris occupée ; le même, après qu'Hadarnard fut parti aux États-Unis, demanda, sans succès heureusement, qu'il fût exclu de l'Académie des sciences parce qu'il ne participait plus jamais aux séances.

⁴⁶ Il est amusant de suivre la découverte des lettres de Lebesgue à Élie Cartan dans les notes de [Lebesgue 1991], un texte dactylographié sans système automatique de références internes :

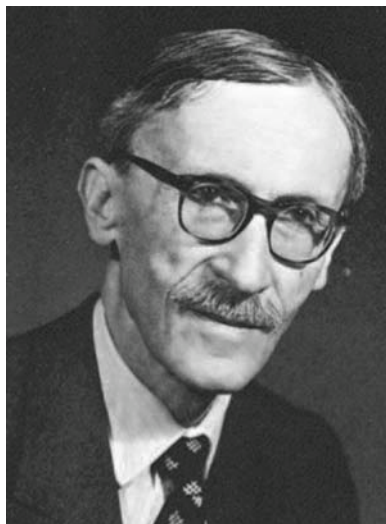
– note 900, p. 430, le 1^{er} octobre 1990, Henri Cartan informe les éditeurs qu'il possède des lettres de Lebesgue à son père,

– note 977, p. 439, il communique la seule lettre qu'il possède (à propos de la thèse de de Rham, en 1930),

– note 1064, p. 453, il a trouvé encore une lettre (de 1925, à propos de Dautry).

⁴⁷ À cette époque, il y avait à l'Académie des sciences des mathématiciens dans les « sections » de géométrie, de mécanique et même d'astronomie. La section de mécanique a confié la rédaction de son texte à André Lichnerowicz.

⁴⁸ Les lettres de Denjoy et celle d'Ostrowski ont été publiées dans [Denjoy 1980].



Paul Lévy (1886–1971)

Le dossier dans lequel ces lettres sont conservées contient aussi un résumé (une page dactylographiée) de l'œuvre de Julia, que Julia a dû joindre à l'une de ses lettres.

Une querelle de priorité

Paul Lévy est ici placé en position d'arbitre dans une querelle de priorité qui éclate, à ce moment-là, en 1965, entre deux académiciens, vivants tous les deux, à propos de travaux remontant à environ cinquante ans. Ce sont nos deux vieilles connaissances Julia et Montel. Gaston Julia a 72 ans, Paul Montel 89 ans. Tous deux assez âgés, donc⁴⁹. Avec des discussions de priorité anciennes — nous en avons vu des traces écrites dès 1932 (au § VI.2) et nous allons voir que le problème de fond est encore plus ancien.

Comme l'écriture ferme de ses lettres le montre, Montel est, malgré son grand âge, tout sauf sénile. L'écriture de Julia est plus tremblée mais il avait certainement des problèmes d'arthrite.

Il est question dans ces lettres de ce que l'on appelait « points de Julia » ou « points irréguliers » d'une famille de fonctions de fonctions holomorphes⁵⁰. La question en débat est : pourquoi avoir nommé « points de Julia » des points que Montel avait, depuis longtemps, nommés « irréguliers » ? Les travaux que cite Montel sont anciens : deux notes [1903 ; 1904] aux *Comptes rendus* en

⁴⁹ Paul Lévy, né en 1886, est lui-même âgé de soixante-dix-neuf ans.

⁵⁰ Dans le cas de l'itération d'une fraction rationnelle, les points de Julia sont ceux de l'ensemble $\mathcal{F}$ du § III.2 — c'est-à-dire ceux de ce que l'on appelle, depuis les années 1980 au moins, l'ensemble de Julia.

1903 et 1904 et sa thèse [1907]. Ceux de Julia datent de 1917–18, puis 1919–20 et sont regroupés dans le mémoire [1918f] sur l'itération des fonctions qui lui a valu le Grand Prix des sciences mathématiques en 1918 pour les premiers et dans son livre [1924a] pour les autres.

Il est étonnant, quand on a pris connaissance de ce qui s'est passé fin 1917, de constater que l'on discute une question Julia/Montel. Paul Montel a inventé les familles normales, il a montré que la propriété « être normale en z » est une propriété locale, il a nommé « irréguliers » les points où une famille n'est pas normale (c'est donc un fermé). Ce sont ensuite Fatou et Julia, dans leurs travaux sur l'itération, qui ont étudié les propriétés de l'ensemble des points irréguliers dans le cas de la famille des itérées d'une fonction.

On pourra penser que cette polémique est une dispute de vieillards entêtés, qui, d'ailleurs, ne se parlent même pas, et qu'elle ne présente pas un grand intérêt. D'autant plus qu'elle porte sur des sujets mathématiques eux aussi un peu vieillots. Pourtant, nous allons voir apparaître au détour de deux de ces lettres des informations (ou, au moins, des affirmations) qui n'avaient jamais été explicitement formulées, en tout cas pas publiquement.

Voici donc (une partie de) ces lettres. Les soulignements manuscrits ont été remplacés par des italiques. Insistons sur le fait que toutes les lettres présentées ici ont été adressées à Paul Lévy. Il n'est même pas certain que chacun des protagonistes savait ce que l'autre écrivait. Montel est très cordial, voire amical, avec Paul Lévy, le ton de ses lettres le montre. On appréciera par exemple la délicatesse avec laquelle il lui explique : ce n'est pas que vous vous citez trop, c'est que vous ne citez pas assez les autres... Il est pourtant très ferme — et assez en colère — sur les questions de priorité qu'il soulève.

Le style de Julia est direct, presque brutal, pas spécialement amical⁵¹. Il est visiblement fort énervé. La transcription ne donnerait qu'une très faible idée de l'aspect de ses lettres (soulignement, double soulignement, une version manuscrite de la surabondance d'italiques déjà remarquée au § III.1 dans son article [1918f]). Ces lettres de Julia ne sont donc pas reproduites ici *in extenso* — elles ne donnent d'ailleurs pas d'information vraiment nouvelle⁵².

Dans cette partie, le texte d'accompagnement est en plus petit, comme ça, alors que le texte des lettres est en format normal (et pas indenté comme dans le reste de ce livre).

⁵¹ Gaston Julia et Paul Lévy ont été collègues à l'x pendant de nombreuses années. Quant à savoir quels étaient leurs rapports...

⁵² Nous avons demandé l'autorisation de publier ces lettres aux ayant-droits de Paul Lévy (sa fille Marie-Hélène Schwartz et sa petite-fille Claudine Schwartz). La lettre d'Ostrowski a déjà été publiée. N'ayant pas eu connaissance d'ayant-droits pour Montel et Milloux, nous n'avons pas demandé d'autre autorisation.

Montel-Lévy, 9 juillet 1965

La première est une lettre de Paul Montel à Paul Lévy. Elle est datée du 9 juillet 1965. Elle répond visiblement à une question de Paul Lévy, qui avait dû lui demander d'où venaient les points irréguliers (Montel va en donner lui-même la définition).

9 [6 ?] juillet 1965

Mon cher Confrère & Ami,

J'ai fait quelques recherches bibliographiques.

Dans ma Thèse (1907), on lit p. 3⁵³ :

« Un point autour duquel la convergence n'est pas uniforme est appelé *irrégulier* ; je fais voir que l'ensemble des points irréguliers est parfait, continu, non dense et d'un seul tenant avec la frontière du domaine, et j'étudie comment se comporte la série dans le voisinage d'un de ces points.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans des notes insérées aux *Comptes-rendus de l'Académie des sciences* (février 1903 et juin 1904)⁵⁴. »

Dans ma Notice scientifique, on lit p. 23 : « Le problème (de l'itération) a été complètement résolu dans deux mémoires de première importance dont l'un est dû à P. Fatou et l'autre à M. Julia⁵⁵. Tous deux ont utilisé cette théorie (celle des familles normales) comme instrument de travail. "Nous avons fait exclusivement usage dans nos recherches des propositions de M. Montel, écrit P. Fatou⁵⁶. Nous avons ainsi reconnu que la limitation des domaines de convergence des itérées d'une fraction rationnelle est liée à l'étude d'un ensemble parfait que nous définissons comme l'ensemble des points où les itérées ne forment pas une suite normale." M. Julia écrit, de son côté au sujet de l'ensemble E des points fixes répulsifs qu'il se propose d'étudier : "C'était un ensemble dénombrable. Les travaux de M. Montel sur les suites normales donnent immédiatement des propriétés simples pour tout point P de E ."] »]

Julia avait introduit dans les Comptes Rendus un ensemble qu'il déclarait à tort parfait. Fatou le lui fit remarquer. Il rectifia sans citer Fatou⁵⁷.

Julia avait établi l'existence des droites que j'ai appelées⁵⁸ J en supposant que la fonction avait une valeur asymptotique. Quand il vint me voir, je lui

⁵³ Dans la version publiée [1907] de la thèse de Montel aux *Annales de l'École normale supérieure*, la définition des points irréguliers est donnée p. 320. La démonstration de la perfection suit. Les autres propriétés sont montrées page 334.

⁵⁴ Les notes de Montel [1903 ; 1904] datent en fait du 25 mai 1903 et du 22 février 1904 respectivement.

⁵⁵ P. Fatou et M. Julia, jamais M. Fatou et M. Julia, encore moins G. Julia et P. Fatou. Montel était un ami de Pierre Fatou, pas de Gaston Julia.

⁵⁶ On reconnaît ici une citation de l'introduction de [Fatou 1919b] déjà reproduite ici page 83.

⁵⁷ Il s'agit probablement de l'ensemble E' et d'un souvenir déformé de la faute (corrigée) signalée dans la remarque III.1.2.

⁵⁸ On se souvient (voir le §IV.3) que les droites J (dont Montel pense même les avoir nommées lui-même), n'ont rien à voir avec les points J .

montrai aussitôt que cette hypothèse était inutile⁵⁹. Il publia donc le résultat général, sans me citer.

Je vous apporterai lundi⁶⁰ la Thèse & la Notice et peut-être les Notes de 1902 et 1903[9 ?].

Cordialement
Paul Montel

On lit aussi dans la Notice p. 17 : « J'avais déjà rencontré l'ensemble de ces points (irréguliers⁶¹) dans ma thèse en 1907 et dans mon mémoire de 1912. Mais c'est P. Fatou qui, le premier, dans ses recherches sur l'itération, a introduit systématiquement l'ensemble des points où une famille n'est pas normale et en a fait voir l'importance qui devait s'accroître encore par les travaux de M. Julia et de M. Ostrowski.[»] PM

Après quoi, vraisemblablement le 18 juillet (voir ci-dessous), Paul Lévy a dû leur envoyer, à lui et à Julia, une rédaction préliminaire de son texte.

Montel-Lévy, 31 juillet 1965

Nouvelle lettre de Montel, écrite le 29 juillet. Il doit l'apporter à l'Académie des sciences le 2 août pour la donner à Paul Lévy et, celui-ci n'étant pas là, l'envoyer par la poste (les enveloppes n'ont pas été conservées).

31 juillet 1965
Mon cher confrère & ami,

J'ai lu sans tarder votre travail. Je le trouve excellent, très clair et fort instructif.

Vous craignez de vous être trop cité. Vous énoncez des faits nécessaires à l'exposé. Mais la lecture de votre nom nous frappe plus que celle des autres. En revanche, les auteurs vivants trouveront peut-être qu'ils n'ont pas assez été cités moins par orgueil qu'à cause de la connaissance approfondie du domaine qu'ils ont exploré.

[...]

Pour les familles normales p. 22 vous citez avec raison Julia, A. Bloch, Valiron ; il y a aussi de beaux travaux de Mandelbrojt, Dieudonné, Baganas, Marty⁶², Dufresnoy, Fatou, Ostrowski, etc.

⁵⁹ Il va nous donner sa démonstration plus bas (voir page 201).

⁶⁰ Montel et Lévy se voient le lundi à l'Académie des sciences.

⁶¹ Remarque tout aussi irrésistible que celle contenue dans la note 50 du chapitre II : dans ses souvenirs [1985] recueillis par son neveu, Szolem Mandelbrojt raconte : « C'est moi qui ai eu l'idée des points irréguliers, qui ont été utilisés par Montel » (Szolem Mandelbrojt est arrivé à Paris en 1920...).

⁶² Frédéric Marty, entré à l'ENS en 1928, a écrit entre 1931 et 1937 plusieurs articles sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe, les fonctions algébriques

La première utilisation des points irréguliers est due à Fatou dans son travail sur l'itération et, plus tard Ostrowski, Milloux, de la Vallée-Poussin, Miranda (cf. Bulletin de Liège, p. 264⁶³).

D'autre part, j'ai signalé dès le début qu'un point irrégulier a les mêmes propriétés qu'un point singulier essentiel⁶⁴ dans le cas où la famille se réduit à une fonction unique (cf. p. 23, in fine, dans P. Lévy).

Excusez ce plaidoyer pro domo.

[...]

Je signale enfin qu'il n'y a pas identité entre famille normale et famille compacte⁶⁵.

Dans ce dernier cas, la fonction limite appartient à la famille, mais non dans le premier.

Cordiales amitiés

Paul Montel

[ajouté en marge] Je pensais vous voir à l'Académie aujourd'hui 2 août. Bonnes vacances !

Montel-Lévy, non daté

Probablement accompagnant la lettre précédente (mais il n'y a pas de date sur ce document), deux pages de Montel (liste de résultats), une re-rédaction par Paul Lévy sur une troisième page, et les commentaires de Montel sur cette re-rédaction, sur cette même page.

Dans ma thèse de 1907 "Sur les suites infinies", on lit dans l'Introduction, p. 3.

« un point autour duquel la convergence n'est pas uniforme est appelé *irrégulier*. »

—

Une note aux Comptes-Rendus du 25 novembre 1907, intitulée "Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques" contient les

et les revêtements, il était un des fidèles du séminaire Hadamard, il a aussi rédigé deux exposés du séminaire Julia. Il est l'auteur d'un critère de normalité que l'on trouvera énoncé dans [Ahlfors 1978, p. 226] et qui lui donne toute sa place dans ce texte. Il était maître de conférences à Marseille. Lieutenant dans l'aviation, il a été tué en 1940, avant d'avoir 30 ans, un des normaliens « morts pour la France » de la deuxième guerre mondiale qui n'est pas mort en déportation et qui n'a pas non plus été assassiné comme résistant. Son père, Joseph Marty, mathématicien lui aussi, normalien de la promotion de 1905, avait été tué en 1914.

⁶³ Il y a un article de Carlo Miranda dans le *Bulletin de la société royale des sciences de Liège* en 1962, mais il n'a pas de page 264, nous n'avons d'ailleurs trouvé aucun article de Miranda possédant une page 264.

⁶⁴ Pour les analogies points irréguliers/singularités essentielles, voir ici le § I.5. Dans l'article [Montel 1907], c'est ce qui est démontré au bas de la page 327.

⁶⁵ Montel signale ici qu'une famille normale n'est que relativement compacte.

lignes suivantes : « Ces points irréguliers possèdent, par rapport à la famille des fonctions $f_n(z)$, des propriétés qui s'énoncent de la même manière que certaines propriétés des points essentiels isolés des fonctions analytiques. »

Dans le Mémoire de 1912 aux Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, la définition des points irréguliers est donnée dans le cas général et étudiée.

Enfin, dans la Notice sur les Travaux scientifiques de 1933, voir Introduction p. 17, des indications bibliographiques sont données.

C'est par l'utilisation du point irrégulier que j'ai donné à Julia la démonstration générale de l'existence de ce que j'ai appelé « droite de Julia ».

TSVP

Julia est venu me trouver un jour pour m'énoncer sa proposition sur l'existence d'une droite d'accumulation des valeurs d'une fonction entière pourvue d'une valeur asymptotique.

Je lui ai indiqué aussitôt une démonstration s'appliquant à tous les cas et montrant que la présence d'une valeur asymptotique est inutile.

Soit $f(z)$ la fonction entière, la suite de fonctions $f_n(z) = f(nz)$, $n = 1, 2, \dots$ prend⁶⁶ dans le cercle unité $|z| < 1$ les valeurs de $f(z)$ dans les cercles $|z| < n$. Cette famille ne peut être normale dans $|z| < 1$ car dans ce cas, comme $f_n(0) = a_0$, la fonction $f(z)$ serait bornée. Il existe donc un point z_0 du cercle-unité qui est irrégulier autour duquel toute fonction $f_n(z)$ prend n'importe quelle valeur pour n assez grand. La droite portant les points nz_0 répond à la question⁶⁷.

Je voulais publier ce résultat mais Borel m'a dit qu'il fallait aider Julia mutilé⁶⁸.

Julia n'a jamais parlé de cette démonstration et, en genre de remerciements, a changé le nom du point irrégulier pour introduire le sien⁶⁹.

Voilà un ensemble d'indications. Avec mes cordiales amitiés.

Paul Montel

Une troisième page est écrite, d'abord de la main de Paul Lévy :

⁶⁶ Montel avait d'abord écrit $f(nz)$, puis barré le z et écrit $f(z/n)$. De même, le $|z| < n$ à venir remplaçait un $|nz| < 1$ barré.

⁶⁷ Il faut encore assurer qu'il existe un tel point z_0 qui n'est pas 0. Il suffit pour cela, comme le fait Montel dans son livre [1927], de considérer une couronne à la place du disque unité.

⁶⁸ C'est à ma connaissance le seul endroit où il soit dit explicitement par un mathématicien que Julia ait eu un traitement particulier parce que gueule cassée. En 1927, lorsqu'il écrit son livre [1927], Montel ne mentionne pas qu'il est lui-même l'auteur de cette démonstration.

⁶⁹ Nous avons vu que c'est Ostrowski qui est responsable de la terminologie.

p. 22, 3^{ième} alinéa. Nouvelle rédaction.

On doit aussi à Montel la belle théorie des *familles normales*, qui sont des ensembles de fonctions holomorphes [entouré] dans un domaine D et y vérifiant une condition analogue à celle qui caractérise les ensembles compacts[×]. Cette théorie se rattache au théorème de Schottky mentionné ci-dessus, qui donne des conditions suffisantes pour qu'une famille soit normale. Elle repose aussi sur un théorème de Montel, d'après lequel si une famille n'est pas normale, il existe au moins un point a de D qui est responsable de ce fait, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun point de a où elle soit normale. Les points ayant cette propriété sont appelés *points irréguliers*. Ce théorème de Montel a d'importantes applications, qui ont été étudiées d'abord par P. Fatou, puis par Ostrowski, Milloux, de la Vallée-Poussin, et Julia. On appelle demi-droite de Julia toute demi-droite...

suite sans changement.

—

[×] Je ne pense pas utile de préciser davantage. Il ne s'agit que de vulgarisation. Il faudrait 2 ou 3 lignes de plus pour donner une définition précise. Pensez-vous que ce soit utile ?

À quoi Montel répond, sur le même feuillet :

Ma lettre du 31 juillet s'adressait à M. Paul Lévy à toutes fins utiles ou inutiles. Il en tirera le parti qu'il jugera utile.

La théorie des familles normales ne concerne pas les fonctions holomorphes seules mais toute famille de fonctions continues. Elle est liée aux travaux d'Ascoli et d'Arzelà et ne se relie au th. de Schottky que dans le cas particulier des fonctions analytiques.

Julia-Lévy, 16 septembre 1965

Julia répond tardivement à la demande de Paul Lévy, le 16 septembre.

Il fait dans cette longue lettre une suite d'affirmations, numérotées de 1 à 7, que l'on peut simplement résumer ainsi : Montel a inventé les familles normales, mais c'est Julia qui a utilisé les points où la famille n'est pas normale — que Montel avait nommés irréguliers — et que l'on appelle donc points J ou points de Julia. Julia conclut sa lettre en proposant à Paul Lévy de modifier très légèrement son texte pour dire ceci :

« *Les points ayant cette propriété sont appelés par les uns points de Julia ou points J , par les autres points irréguliers* »

Sur cette lettre, trois remarques :

- (1) Le nom de Fatou n'y apparaît pas.
- (2) L'affaire des points O /points J discutée ici au §IV.3 n'est pas mentionnée.
- (3) Il y est fait mention d'une lettre d'Ostrowski qui « n'est pas une rectification spontanée ; elle a été écrite sous la pression de Lebesgue » dont nous n'avons pas vu mention ailleurs.

Ce sont sans doute des traces de cette polémique que l'on trouve, sous forme d'indications au crayon, dans l'exemplaire de Julia des actes du Congrès international de Zurich (à la bibliothèque du CIRM) : il y a coché les endroits où ses travaux étaient cités, par Nevanlinna et surtout dans la conférence de Valiron.

Lévy-Fréchet, 19 septembre 1965

Intercalons ici un extrait d'une lettre de Paul Lévy à Maurice Fréchet, issue de [Lévy & Fréchet 2004].

[...] Je suis plus préoccupé du fait que j'ai réveillé la vieille querelle Julia Montel pour les familles normales. Je ne peux pas, dans un exposé fait un peu au nom de l'Académie, me poser en arbitre ; ni supprimer toute allusion aux familles normales. Je crains de les mécontenter tous les deux. [...]

Ostrowski-Lévy, 24 septembre 1965

Sans doute à la réception de la lettre de Julia précédente, Paul Lévy, qui devait être bien embêté, écrit à Milloux et à Ostrowski pour leur demander leur avis.

Voici la réponse d'Ostrowski (cette lettre a été publiée dans [Denjoy 1980], nous rétablissons les jolies tournures françaises et l'orthographe originelles d'Ostrowski) :

Le 24 septembre 1965

Mon cher collègue,

De retour à Montagnola⁷⁰, j'ai trouvé ici votre lettre du 19 septembre et je me dépêche de vous répondre la veille de mon départ pour les États-Unis (je vais passer trois mois auprès du Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin).

Puisque c'était moi qui avais introduit les noms des points et des lignes de Julia, il me faut expliquer d'abord comment le mémoire en question a pu m'échapper. M. Montel a eu la bonté de m'envoyer tous ses écrits sur la théorie des fonctions, sauf un seul — et c'était le mémoire des AENS⁷¹ ou [*sic*] il mentionne l'existence des points irréguliers. D'autre part, la bibliothèque du séminaire de Göttingen ne possédait pas la série des AENS. De cette façon, c'était le seul des mémoires de M. Montel que je n'avais pas étudié.

Toutefois, le fait en question n'est pas exprimé l.c. d'une manière trop nette. Quand M. Montel avait attiré mon attention à son mémoire j'ai pu trouver l'endroit en question, mais je savais ce que je cherchais. Il est difficile de le dire avec l'assurance, mais j'ai l'impression que même si je connaissais le mémoire en question, cet endroit aurait très bien pu échapper à mon attention.

⁷⁰ Montagnola se trouve près de Lugano, dans le Tessin, au bord du Lac Majeur.

Ostrowski, en retraite de l'Université de Bâle, vivait (et est mort) à Montagnola.

⁷¹ Il s'agit des *Annales de l'École Normale Supérieure* et de l'article [Montel 1916].

M. Julia a découvert indépendamment cette remarque et en a fait le point de départ des résultats d'une extrême brillance que j'ai admiré [*sic*] beaucoup quand je lus ses notes dans les C.R.

Il est naturellement incontestable que M. Montel a été le premier à publier le fait en question. Toutefois, je ne suis pas sûr que même en connaissance de ce fait je n'attribuerais pas le nom de Julia aux points et lignes dont il s'agit.

D'ailleurs, ça me rappelle un fait analogue qui se produisit il y a longtemps. Après une conférence devant la Deutsche Mathematiker Vereinigung dans laquelle je parlais avec beaucoup d'admiration du théorème de choix de M. Montel, feu Frédéric Riesz attira mon attention au théorème d'Arzelà sur les familles des fonctions uniformément bornées dans leur ensemble, dont le théorème de choix de Montel est une conséquence immédiate. Je me rappelle vivement que j'avais trouvé presque bizarre l'idée d'attribuer une partie de la paternité de la belle théorie des familles normale [*sic*] que M. Montel a sue [*sic*] développer avec tant d'esprit et d'imagination, à d'Arzelà.

Il m'est très pénible d'avoir à me prononcer sur les mérites comparés de deux mathématiciens que j'admire tous les deux et à l'influence des quels je dois l'inspiration de quelques travaux que des collègues bienveillants m'ont indiqué [*sic*] comme étant parmi les plus importants de mes contributions à notre science.

En particulier, comme j'ai écrit une fois à M. Julia, je me rends parfaitement compte que si j'ai pu, moi, obtenir dans cette théorie quelques résultats importants, ce n'était que parce que j'ai pu monter sur les épaules de M. Julia.

Toutefois, il me faut dire que tout ce que je viens d'écrire est pris de ma mémoire. Or, étant donné mon âge (je serai demain 72) je me suis habitué de ne citer un fait qu'après l'avoir vérifié. Malheureusement, il ne m'est pas possible de le faire dans ce cas.

Je voudrais espérer, mon cher collègue, que votre finesse et votre tact vous permettront de trouver une solution satisfaisante pour les deux savants qui ont tellement enrichi la gloire scientifique de la France.

Si vous trouvez désirable de montrer cette lettre à d'autres personnes, vous y êtes autorisé [*sic*].

Croyez, mon cher collègue, à l'expression de mes sentiments très cordialement dévoués.

A. Ostrowski

Milloux-Lévy, 30 septembre 1965

Voici ce que répond Milloux⁷² à la demande de Paul Lévy :

⁷² Henri Milloux (1898–1980), un spécialiste de fonctions holomorphes, professeur à Bordeaux, membre non-résident de l'Académie des sciences depuis 1959 et dont nous avons déjà rencontré la thèse [Milloux 1924] au §IV.1.

Caudéran (Gironde) le 30 sept. 1965

10 rue Lenotre

Cher Monsieur,

Excusez-moi de ne pas avoir répondu plus tôt à votre lettre du 19 septembre, dont je n'ai pu prendre connaissance qu'hier, à mon retour de voyage.

Je pense que le passage auquel vous vous réferez est le 2^e alinéa de la page 288. C'est une question bien épineuse, qui fait fortement regretter que deux savants très éminents se heurtent avec passion.

Le premier qui ait tiré des conséquences importantes des points J est sûrement M. Julia, dans son premier mémoire, datant de 1919 [*sic*]. C'est dans ce mémoire qu'il établit l'existence de ce qu'on a appelé ultérieurement droites (ou directions) de Julia⁷³.

En ce qui concerne les points J eux-mêmes, il faudrait trouver une référence dans les travaux antérieurs de M. Montel ; d'une façon précise, dans ceux qui ont été publiés entre 1916 et 1919.

Aussitôt que je serai libéré des tâches de la 2^e session d'examens de licence, assez lourds à Bordeaux, c'est-à-dire vers la fin d'octobre, je ferai des recherches bibliographiques ; de toute façon, qu'elles soient négatives ou positives, je vous mettrai au courant.

Le mémoire de M. Montel "Sur les familles normales de fonctions analytiques", datant de 1916, a paru dans les Annales de l'École normale supérieure (t. XXXIII, oct. 1916, p. 224-302). Dans l'Introduction, on ne voit pas apparaître la notion de points irréguliers. En feuilletant superficiellement le mémoire lui-même, je n'ai rien vu qui y ressemble. Mais je me propose de le lire lentement pour ne rien laisser échapper, ainsi que d'autres mémoires.

D'autre part, je crois me rappeler que M. Valiron attribuait à M. Julia la "remarque" (c'est sa propre expression) de l'existence d'un point singulier (ou J) au moins dans un domaine où une famille n'est pas normale.

Mais on ne peut se baser que sur les textes. En particulier, il est impossible de tenir compte de certains récits qui paraissent bien hasardeux⁷⁴, tel que le suivant, que je tiens d'un collègue très lié avec M. Montel : au cours d'une entrevue entre celui-ci et M. Julia, datant d'avant 1919, M. Montel aurait fait part à M. Julia de la "remarque" qui vient d'être rappelée. C'est alors que M. Julia aurait pensé à utiliser cette remarque.

En attendant de vous mettre au courant de mes investigations, je vous prie d'agréer, Cher Monsieur, l'expression de mes sentiments dévoués et déferents.

H. Milloux

⁷³ Nous savons que les droites J ne sont pas dans le mémoire sur l'itération.

⁷⁴ Le récit est hasardeux, l'histoire appartient à la tradition orale, la source n'est pas nommée, mais le récit est cité quand même. Sans doute parce que Milloux y croit. Le commentaire de Borel comme quoi il fallait aider Julia mutilé n'est cependant pas arrivé jusqu'à cette lettre.

Montel-Lévy, 5 octobre 1965

[2, barré] 5 octobre 1965
 Mon cher Confrère & Ami

On lit dans ma Notice scientifique de 1933, p. 17.

« La propriété pour une famille de fonctions d'être normale est une propriété locale : j'ai démontré dès mon mémoire de 1916 (p. 227) qu'une famille normale en chaque point d'un domaine est normale dans ce domaine. Il existe donc, quand une famille n'est pas normale, un point *irrégulier* en lequel elle cesse de l'être. J'avais déjà rencontré l'ensemble de ces points dans ma Thèse en 1907, et dans mon mémoire de 1912, mais c'est P. Fatou qui le premier, dans ses recherches sur l'itération a introduit systématiquement l'ensemble des points où une famille n'est pas normale et en a fait voir l'importance qui devait s'accroître encore par les travaux de M. Julia et M. Ostrowski.

J'ai montré que les points irréguliers jouent, par rapport à la collection de fonctions, le rôle que jouent les points essentiels par rapport à une fonction unique. »

On lit dans ma Thèse (1907) p. 3

« Un point autour duquel la convergence n'est pas uniforme est appelé *point irrégulier* : je fais voir que l'ensemble des points irréguliers est parfait, continu, non dense et d'un seul tenant avec la frontière du domaine...

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans des Notes insérées aux Comptes-rendus de l'Académie des sciences (février 1903 et juin 1904). »

(Cf. la note aux C. Rendus du 25 nov. 1907 intitulée :

« Sur les points irréguliers des séries convergentes d'une fonction analytique ») [*sic*, il s'agit des séries convergentes de fonctions analytiques]

Tous les mathématiciens de Théorie des fonctions partagent l'avis de Ostrowski. Fatou, dans la Notice de ses travaux scientifiques⁷⁵ dit (p. 18) à propos de ses travaux sur l'itération :

« ... on est conduit à considérer un ensemble particulier : l'ensemble des points *irréguliers* où ses itérées cessent de former une suite normale au sens de M. Montel, ... ».

Votre bien affectueusement dévoué
 Paul Montel

⁷⁵ La notice sur les travaux scientifiques de Pierre Fatou de 1921 dit précisément, à la page 12 :

on est conduit à considérer un ensemble particulier : l'ensemble des points où ces itérées cessent de former une suite normale au sens de M. Montel.

Julia-Lévy, 11 octobre 1965

Cette lettre est beaucoup plus brève : Paul Lévy lui a demandé de rédiger deux additions, ce qu'il fait. Voici la première

1° « Après avoir étudié *l'itération des fractions rationnelles*, M. Julia l'a appliquée à l'étude de leur *permutabilité* $\{R_1[R_2(z)]\} = \{R_2[R_1(z)]\}$, et de leur *semi-permutabilité* $\{G[R_1(z)]\} = \{R_2[G(z)]\}$, pour R_1 et R_2 rationnelles et G méromorphe. »

La deuxième concerne les travaux plus récents de Julia sur les opérateurs sur les espaces de Hilbert. Julia, qui a déjà écrit plusieurs pages d'argumentaire sur ce thème trois semaines plus tôt, ne peut pas s'empêcher d'ajouter :

NB Pour les points J : il n'est pas contestable que j'en ai trouvé les *premiers exemples d'existence* dans l'itération dans les fonctions entières et méromorphes, et que j'en ai le premier *vu l'intérêt et étudié les propriétés* et certaines applications.

... Puisque la querelle de priorité a lieu entre Julia et Montel, le premier des deux à s'être servi des points irréguliers dans l'itération est Julia, incontestablement. Mais... n'a-t-on pas oublié Fatou ?

Finalement, le texte de Paul Lévy

Voici finalement la partie concernée du texte publié de Paul Lévy (en principe les noms des académiciens apparaissent en petites capitales et ceux des mathématiciens qui ont reçu des prix de l'académie en italiques, mais il y a des erreurs, par exemple le nom de Fatou, qui n'a décidément pas de chance, devrait être en italiques) :

[...] On doit aussi à MONTEL la belle théorie des *familles normales*. Ces familles sont des ensembles de fonctions analytiques définies dans un domaine D tels que, de tout sous-ensemble infini, on puisse extraire une suite de fonctions qui tendent vers une limite, au sens de la convergence uniforme dans le plan complexe fermé. MONTEL s'est en particulier intéressé aux cas des fonctions holomorphes qui admettent dans D deux valeurs exceptionnelles et à celui des fonctions méromorphes qui en admettent trois. Il a été ainsi conduit à une nouvelle démonstration des théorèmes de PICARD et de Schottky, qui complète heureusement les travaux de BOREL sur le premier de ces théorèmes.

MONTEL a aussi, dès 1914, démontré que, si une famille est normale en tout point de D (c'est-à-dire que chaque point a un voisinage où elle est normale), elle est normale dans D ⁽¹⁾. Si donc elle n'est pas normale, c'est qu'il y a dans D au moins un *point irrégulier* où elle n'est pas normale. Ce fait, et l'importance des points irréguliers ont été bien mis en évidence dans des travaux apparemment⁷⁶ indépendants de Fatou et de JULIA sur l'itération des fonctions rationnelles. Le beau mémoire de JULIA, couronné par l'Académie en 1918, a été la base des travaux de MILLOUX et d'Ostrowski, et ce dernier a

⁷⁶ Que fait l'adverbe « apparemment » ici ?

donné aux points irréguliers le nom de *points de JULIA*. JULIA a appliqué ses résultats à l'étude des conditions de permutabilité de deux fractions rationnelles⁷⁷. Il a enfin appliqué les points irréguliers au théorème d'existence des *droites de JULIA* : pour toute fonction entière $f(z)$ qui ne se réduit pas à un polynôme, il existe au moins une demi-droite telle que, dans

 (1) La priorité de MONTEL étant souvent oubliée, précisons que cet énoncé se trouve à la page 227 de son mémoire de 1914 imprimé [en ?] 1916 (*Ann. Éc. Norm. Sup.* 33, p. 223-302). Rappelons d'autre part que MONTEL est aussi l'auteur de beaux travaux sur les séries de polynômes.

tout angle la contenant, $f(z)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs non exceptionnelles. Une droite contenant une telle demi-droite est appelée *droite de JULIA*. Naturellement, toutes les droites qui lui sont parallèles ont la même propriété; on peut parler des *directions de JULIA*.

[...]

Dans un ordre d'idées encore voisin de celui de PICARD, mentionnons les beaux travaux de R. Nevanlinna sur les fonctions méromorphes, poursuivis par G. JULIA, G. Pólya, G. Valiron et MILLOUX, et aussi par L. Ahlfors, qui a démontré l'exactitude d'une hypothèse d'A. DENJOY : une fonction entière d'ordre α a au plus $(2\alpha + 1)$ valeurs asymptotiques.

[...]

Et Pierre Fatou ?

Paul Montel était un ami de Pierre Fatou ; lui et Paul Lévy ont forcément beaucoup fréquenté Fatou dans les années 1910 et 1920 puisque tous siégeaient dans les instances de la SMF⁷⁸. En ce temps-là nous l'avons dit, la SMF organisait beaucoup de « séances » où l'on parlait de mathématiques. Il est un peu étonnant qu'aucun des deux ne se soit souvenu des travaux de Fatou — qui n'était plus là pour se défendre. Déjà en 1921, pour conclure le rapport⁷⁹ chaleureux qu'il écrivait sur les travaux de Fatou, Hadamard avait noté :

Une œuvre aussi suggestive a peut-être été trop souvent perdue de vue et mérite tout l'intérêt de ceux qui s'attachent à la science mathématique dans notre pays.

⁷⁷ Et, comme aucun de ses correspondants ne les lui a rappelés, Lévy ne signale pas ici les travaux de Fatou sur la permutabilité.

⁷⁸ Pour Fatou et la SMF, voir le § V.8. En 1909, Fatou et Montel sont vice-secrétaires ; en 1910, Montel est secrétaire, Lévy et Fatou sont vice-secrétaires ; en 1915, Lévy et Montel sont secrétaires, Fatou est vice-secrétaire ; en 1922, Fatou, Lévy et Montel sont tous les trois vice-présidents.

⁷⁹ Toujours dossier Fatou, archives de l'Académie des sciences.

Ressentiment

Il me semble que Montel était parfaitement capable de comprendre, et même d'accepter le fait que oui, lui, Montel, avait inventé la notion de point irrégulier, mais que Julia en avait fait un si bel usage que la terminologie « points J » n'était pas vraiment scandaleuse — c'est ce qu'exprime gentiment Ostrowski dans sa lettre. Il me semble que ce que cette polémique montre, c'est plutôt le ressentiment accumulé par Montel contre Julia. Pour une raison ou pour une autre, en 1965, il décide enfin de dire que le jeune Julia ne s'est pas toujours comporté très correctement et que cela a été accepté par la communauté des mathématiciens à cause de ses blessures de guerre.

VI.4 Pour conclure : pour une biographie de Gaston Julia

On l'aura compris en lisant ce texte, Gaston Julia, enfant chéri de la génération « parentale » à la sortie de la première guerre mondiale, icône visible et inoubliable — comme « gueule cassée » — de la génération sacrifiée dont il était à la fois un des plus brillants représentants et un des rares survivants, travaillant dans une durable atmosphère d'hystérie patriotique anti-allemande, a accumulé les récompenses, les promotions, les honneurs et les signes de reconnaissance

- cinq prix de l'Académie des sciences de 1917 à 1921,
- deux cours Peccot⁸⁰,
- des postes à l'École polytechnique, à l'ENS, à la Sorbonne,...
- un exposé (un des *grosse Vorträge*) au Congrès international de Zürich,
- une élection rapide à l'Académie des sciences,
- ...

S'il n'y a aucun doute qu'après avoir été un élève extrêmement doué, rapide et brillant, Julia était devenu un très bon mathématicien, les honneurs ont peut-être été un peu excessifs — et le poids des espoirs qu'une partie de la communauté mathématique mettait en lui n'a pas dû être toujours très facile à porter.

Il semble évident que Julia n'a pas toujours été très aimable avec ses collègues (voir le ton de sa lettre [1917]). Il aura pourtant fallu la disparition de la génération que nous avons qualifiée de parentale (Hadamard, Borel, ...et

⁸⁰ Un cours Peccot est une distinction honorifique, mais aussi, à l'époque, un poste avec un salaire, 3 000 F quelques années auparavant quand Lebesgue a donné les siens, environ la moitié du salaire annuel d'un professeur de province. Voir [Lebesgue 1991].

Les premiers bénéficiaires de cette manne ont été Borel (trois fois de suite), Lebesgue, Baire, Lebesgue à nouveau, Servant, Boutroux (deux fois de suite), Zoratti...

surtout Picard), il aura surtout fallu une autre guerre au cours de laquelle le patriotisme exacerbé de la précédente a pu se réincarner en collaborationnisme, pour que la possibilité se fasse jour de signaler le côté excessif de ces honneurs. Publiquement, personne ne s'est exprimé (c'est ce que nous avons appelé l'« esprit de corps »). C'est dans ces lettres, qui n'étaient d'ailleurs pas non plus destinées à la publication, que certains contemporains de Julia ont fini par écrire que, oui, les atroces blessures de guerre de Julia lui avaient donné des droits que l'on n'aurait accordés à personne d'autre⁸¹.

On ne saurait mieux évaluer aujourd'hui les travaux concurrents sur l'itération de Fatou et Julia que ne le fait Milnor [2006a, p. 40] :

*The most fundamental and incisive contributions were those of Fatou himself. However, Julia was a determined competitor and tended to get more credit because of his status as a wounded war hero*⁸².

Difficultés pour le biographe

Les éléments biographiques dont nous disposons sur l'enfance et la jeunesse de Gaston Julia relèvent d'une sorte de geste héroïque menant vers la glorieuse blessure de 1915. Le fils de mécanicien envoyé au lycée d'Oran, ses succès scolaires, la façon notamment dont il aurait appris l'allemand en classe de 5^e, son excellence en mathématiques, le problème d'agrégation dont il a rédigé une solution avant même d'avoir passé son baccalauréat, la typhoïde qui a retardé son entrée au lycée Janson de Sailly (et qui, telle la blessure à venir qu'elle semble préfigurer, n'a pas entravé son travail), cette unique année préparatoire écourtée le menant au succès le plus brillant puisqu'à dix-huit ans il était reçu premier aux deux concours de l'ENS et de l'École polytechnique — il est difficile sous ces images d'Épinal d'imaginer qui était le jeune homme de vingt-et-un ans qui n'avait pas encore reçu l'horrible blessure qui domine le reste de sa vie, au point qu'il la présentera comme une « seconde naissance⁸³ ».

Les lettres de Julia soldat à Borel de 1914⁸⁴ montrent pourtant un jeune mathématicien surtout préoccupé de terminer et de publier au plus vite les rédactions de cours engagées pour la *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*.

Dès les années 1930, l'histoire de Gaston Julia était figée. Les discours rassemblés dans [Julia 1970] vont répéter encore et encore la même histoire héroïque, du cours d'allemand en 5^e et des concours de 1911 à la blessure de

⁸¹ Il représentait « une génération fondée à la fois sur la conscience de soi et sur le regard des autres, plus jeunes ou plus âgés » [Sirinelli 1992].

⁸² Les contributions les plus fondamentales et incisives ont été celles de Fatou lui-même. Pourtant, Julia était un concurrent déterminé et on a eu tendance à lui accorder davantage de crédit en raison de son statut de héros de guerre blessé.

⁸³ Par exemple dans l'article [1942–1950] qu'il a consacré à Lagrange, né un 25 janvier... date de cette seconde naissance.

⁸⁴ Toujours fonds Borel, archives de l'Académie des sciences.

guerre et à la citation à l'ordre de l'armée pour écouter laquelle on fait se lever les jeunes auditeurs [Favard 1961, p. 239]⁸⁵.

Le jeune mathématicien de vingt-et-un ans, envoyé au combat et épouvantablement mutilé s'est métamorphosé en héros glorieux pour lequel on doit éprouver du respect et de l'admiration, pour lequel il est devenu difficile d'éprouver de la compassion. Julia et son masque de cuir sont devenus une icône, intouchable, nous l'avons dit — mais aussi inaccessible.

⁸⁵ Après toute cette gloire, il est peu probable que resurgisse un jour le témoignage d'un neveu évoquant les rapports du héros avec un perroquet ou son apprentissage du tango.

Appendices

Le rapport d'Hadamard

[Il s'agit d'un rapport manuscrit de quatre pages et demie, écrit par Hadamard pour une réunion en Comité Secret de l'Académie des sciences, durant laquelle il a sans doute été prononcé, le 4 juillet 1921. Cette réunion préparait le vote du 11 juillet 1921, au cours duquel l'Académie des sciences devait proposer Lebesgue en première ligne et Fatou en seconde pour une chaire au Collège de France.]

Comité secret
du 4 juillet 1921

M. *Fatou*¹, astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris, a travaillé sur les parties les plus élevées et les plus difficiles des Mathématiques actuelles et, chaque fois, il a donné aux études [auxquelles, biffé] qu'il abordait une impulsion importante et féconde.

Ce fut tout d'abord le cas pour la thèse de la *série de Taylor*. Dans ce sujet où il reste tant d'obscurités à dissiper, il semble que nous ayons encore constamment besoin de recherches qui orientent la science et qui non seulement lui apportent des résultats, mais lui montrent les directions utiles à suivre. C'est ce qu'il fut donné à Fatou de faire dès sa Thèse. Il s'y consacre tout d'abord à l'examen des valeurs limites vers lesquelles peut tendre la fonction lorsqu'on s'approche d'un point du cercle de convergence.

Mieux [que l'énoncé, biffé] qu'en énonçant les théorèmes auxquels il a été conduit nous en ferons prendre l'importance en disant qu'ils ont servi aux travaux d'un Carathéodory sur la représentation conforme, d'un F. et d'un M. Riesz sur la définition d'une fonction par des constantes de Fourier.

Que, d'autre part, M. Fatou s'attaque à la question de la convergence de la série, et il aboutit à l'énoncé suivant, devenu immédiatement classique par sa magnifique supériorité : « La condition nécessaire et suffisante pour que

¹ Nos *italiques* remplacent les soulignements du manuscrit d'Hadamard.

la série $\sum a_n z^n$ converge en tout point régulier du cercle de convergence est que la limite de a_n soit nulle ». Ici encore, comme ceux dont nous parlions il y a un instant, cet énoncé a ouvert la voie à des recherches nouvelles de MM. F. et M. Riesz, pendant qu'un autre énoncé obtenu par l'auteur en combinant ses propres points de vue avec ceux qui ont été introduits dans la science par M. Lebesgue provoquait entre autres celles même d'un Hermann Weyl.

L'histoire de l'œuvre de Fatou dans la question de l'itération n'est pas moins démonstrative. [Les fondements, biffé] [C'est on le sait notre confrère M. Koenigs qui a posé et résolu ce problème dans, biffé] Il s'agit on le sait de la disposition des quantités z_n déduites les unes des autres par l'équation de récurrence $z_n = \varphi(z_{n-1})$, la fonction φ étant donnée (p. ex. une fonction rationnelle). C'est on le sait également notre confrère M. Koenigs qui a posé et résolu ce problème dans le domaine local, c'est-à-dire un voisinage d'un point double de la substitution, càd d'une racine de l'équation $\varphi(z) = z$.

Personne n'avait osé aborder la même question dans l'ensemble du plan lorsque, dès 1906, [M. Fatou, biffé] dans une courte note aux *Comptes Rendus*, M. Fatou, par l'exemple des résultats extraordinaires qu'on y rencontre, en montrait à la fois l'intérêt et la haute difficulté. La substitution choisie était bien simple ($z_1 = \frac{z + z^2}{2}$) ; [cependant, déjà, biffé] dès ces cas simples cependant, les singularités les plus bizarres apparaissent : les *domaines* des deux points limites, c'est-à-dire les régions où il faut prendre le point de départ des substitutions successives pour aboutir finalement soit à l'un soit à l'autre des deux points doubles, sont séparés par une courbe non analytique.

Notre Académie a jugé que de telles [résultats, biffé] recherches méritaient d'être poursuivies et [quelques, biffé] récemment a mis la question au Concours. Elle a ainsi obtenu des travaux de premier ordre de M. Julia et aussi de M. Lattès, qui ont constitué pour la Science mathématique française un grand succès, surtout au lendemain de la guerre, qu'elle n'avait [rien perdu de, biffé] gardait sa vitalité et sa puissance. Non seulement on ne saurait oublier que ces conquêtes [peuvent, biffé] doivent leur origine à [biffé illisible] l'initiative de M. Fatou, mais celui-ci, que son état de santé avait empêché de participer en temps utiles au Concours, a [publié, biffé] obtenu peu après par des méthodes souvent plus simples, une série de résultats plus décisifs encore que les précédents. Citons celui-ci : *des cas exceptionnels* (et aisément reconnaissables) *exceptés, la frontière des domaines en question n'a de tangente en aucun point.*

Une fois de plus, on le voit, après l'exemple [donné, biffé] fourni par le cas des fonctions Kleinéennes dans l'œuvre de Poincaré, les notions les plus délicates [biffé illisible] et les plus subtiles de la théorie moderne des ensembles et des fonctions de variables réelles apparaissent nécessairement dans des problèmes d'énoncé très simple. Si [les géomètres, biffé] nos prédécesseurs n'en avaient pas reconnu l'intervention, c'est qu'ils la fuyaient sans s'en rendre

compte, en évitant les problèmes difficiles où ils auraient été exposés à [la renco, biffé] s'y heurter.

Nous pourrions multiplier les exemples, soit dans les deux théories dont nous venons de parler, soit dans d'autres questions accessoirement par le même auteur, [comme celle des séries de Taylor, biffé] y compris celles qui combinent les deux premières (comme l'étude des séries de Taylor dont les coefficients se déduisent les uns des autres par itération). Ceux qui précèdent suffisent à montrer que M. Fatou a été essentiellement un novateur. Comme on a pu le voir, la liste des géomètres qui se sont inspirés de lui est relativement [cet adverbe rajouté au dessus de la ligne] longue et comprend, pour une large part, celle des jeunes chercheurs les plus en vue tant en France qu'à l'étranger.

Une œuvre aussi suggestive a peut-être été trop souvent perdue de vue et mérite tout l'intérêt de ceux qui s'attachent à la Science mathématique dans notre pays.

[signé] J. Hadamard

Deux lettres de Fatou à Fréchet

[Nous avons trouvé deux lettres de Fatou à Fréchet dans le fonds Fréchet aux archives de l'Académie des sciences, il y en a peut-être d'autres (immense, ce fonds n'est que très partiellement inventorié). Elles ne sont pas datées, mais le contenu en donne la date (quelques jours avant et le jour de la soutenance de la thèse de Fatou). Fréchet et Fatou sont tous les deux nés en 1878, ils ont été condisciples à l'ENS, même si Fréchet n'y est entré qu'en 1900, après avoir fait son service militaire. Élève de et très lié à Hadamard, Fréchet a passé sa thèse en 1906. Fatou lui écrit des mathématiques, au moment où il soutient la sienne.]

Dimanche soir [10 février 1907]

Mon cher ami

On a² :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{x} \\ &= -\frac{x}{2} + \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt \right) dt \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = -\frac{x}{2} + \int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t} dt \end{aligned}$$

² Ce début abrupt indique que cette lettre répond à une question posée par Fréchet, peut-être liée à la parution de sa note [Fréchet 1907] le 21 janvier, peut-être accompagnée d'un tiré-à-part de cette note (une note pouvait être imprimée très rapidement, dans la semaine suivant sa présentation).

$$(k = 2n + 1, \quad 0 < x < \pi, \quad \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2})$$

$$\int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t} dt = \underbrace{\int_0^{\pi/k}}_{j_0} + \underbrace{\int_{\pi/k}^{2\pi/k}}_{j_1} + \underbrace{\int_{2\pi/k}^{3\pi/k}}_{j_2} + \cdots + \int_{h\pi/k}^{x/2}$$

En faisant la substitution $(x, x + \frac{\pi}{k})$, on voit que :

$$j_r j_{r+1} < 0, \quad |j_r| > |j_{r+1}|$$

Donc $\int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t} dt$ est compris entre j_0 et 0. Or on a :

$$j_0 = \int_0^{\pi/k} \frac{\sin kt}{\sin t} dt < \frac{\pi}{k} \times \text{maximum} \left| \frac{\sin kt}{\sin t} \right|$$

donc $j_0 < \frac{\pi}{k} \times k = \pi$. On a donc, pour x compris entre 0 et π :

$$S_n(x) > -\frac{x}{2}$$

$$S_n(x) < \pi - \frac{x}{2}$$

Par suite dans tous les cas

$$|S_n(x)| < \pi$$

La même chose a lieu pour la série de Fourier de toute fonction à variation bornée (on la considérera comme la différence de 2 fonctions positives décroissantes et on appliquera le même raisonnement).

Tout cela découle immédiatement comme tu le vois du raisonnement classique de Dirichlet.

Cela n'est pas sans intérêt, comme tu parais le croire, et susceptible d'applications, mais ce n'est pas très neuf.

J'ajouterais que pour une série de Fourier d'une fonction bornée quelconque, on a seulement la limitation :

$$|S_n(x)| < C \log n$$

Je t'enverrai sans tarder un exemplaire de ma thèse que je passerai jeudi prochain³. Je dois te préciser qu'elle est assez mal rédigée et aurait besoin d'être revue et corrigée.

³ Cette indication confirme que la thèse de Fatou a bien été soutenue le 14 février 1907, qui était en effet un jeudi... et permet de dater cette lettre, le dimanche précédent était le 10 février.

J'ai reconnu dernièrement qu'on pouvait introduire comme facteur de convergence⁴ d'une série de Fourier, au lieu de r^n (ce qui ramène à l'intégrale de Poisson), le facteur $n^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$).

On a en effet, si :

$$f(x) \text{ (fonction bornée intégrable)} \\ \sim a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

(le signe $\sim$ signifiant que le deuxième membre est la série de Fourier de $f(x)$), les propositions suivantes :

Si $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^\alpha} = \psi(x, \alpha)$ est uniformément convergente entre 0 et 2π et il en est de même de la série conjuguée $\sum \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n^\alpha}$.

On a en second lieu $\lim_{\alpha=0} \psi(x, \alpha) = f(x)$, en tout point de continuité de $f(x)$ et plus généralement chaque fois que

$$\lim_{r=1} [a_0 + r(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + r^n(a_n \cos nx + b_n \sin nx)] = f(x)$$

c'ad que ce second procédé de sommation st au moins aussi général que celui de Poisson.

Il serait intéressant de faire une étude complète de ces divers facteurs de convergence c'ad de trouver quelles sont les expressions

$$\psi(x, \alpha)$$

jouissant des propriétés suivantes :

- (1) $\psi(x, \alpha_0) = 1$
- (2) Toute série de Fourier $A_0 + A_1 + \cdots + A_N + \cdots$ devient uniformément convergente si on multiplie son terme général par $\psi(n, \alpha)$ (pour $\alpha > \alpha_0$ par exemple)
- (3) $\lim_{\alpha=\alpha_0} |A_0 + A_1 \psi(1, \alpha) + \cdots + A_n \psi(n, \alpha) + \cdots| = f(x)$ lorsque $f(x)$ est continue

Il me semble que le choix de ces multiplicateurs doit comporter beaucoup d'arbitraire.

Outre ces petits compléments à la théorie des séries de Fourier j'ai fait des recherches plus étendues sur l'itération ; mais il me manque le courage pour rédiger tout cela ainsi que quelques recherches arithmétiques déjà anciennes.

Ma santé s'est améliorée depuis quelques mois ; j'ai pu reprendre mon service à l'Observatoire. Je suis heureux de voir que ta classe te laisse le temps de faire encore un peu de math.

Bien cordialement à toi

P. Fatou

⁴ Fatou explique dans la lettre de quoi il s'agit.

Vois-tu quelquefois M. Lebeuf directeur de l'Observatoire? C'est un excellent homme qui pourrait être une ressource pour toi⁵.

Jeudi soir [14 février 1907]

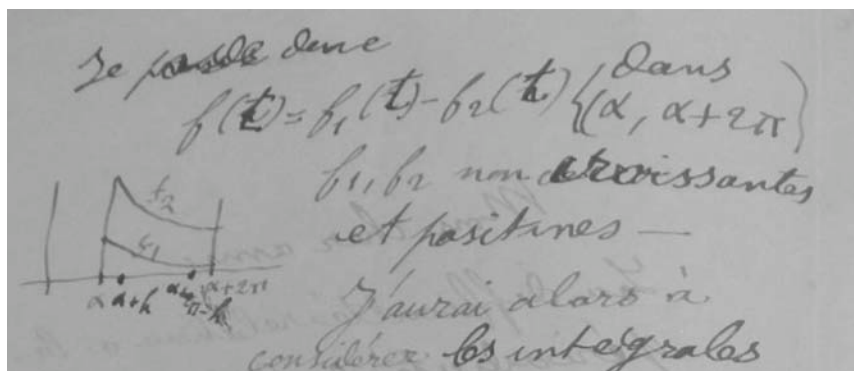
Mon cher ami

La difficulté relative à la périodicité⁶ de $f(x)$, pour démontrer que

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} f(t) dt$$

reste bornée si f est à variations bornées n'est pas bien considérable. En effet il n'y a de difficulté que pour la partie de l'intégrale relative à l'intervalle $(x-h, x+h)$, h ayant une valeur finie quelconque : $h = \frac{\pi}{10}$ par exemple, car

pour t extérieur à cet intervalle la fonction à intégrer sera $<$ que $\left| \frac{f(t)}{\sin \frac{\pi}{10}} \right|$.



© Archives de l'Académie des sciences

Fig. A.1. La figure de la lettre du 14 février

[figure] Je pose donc $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ (dans $(\alpha, \alpha + \pi)$) f_1, f_2 non croissantes et positives. J'aurai alors à considérer les intégrales

$$\int_{x-h}^{x+h} \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin \frac{x-t}{2}} f_1(t) dt \quad \int_{x-h}^{x+h} \dots f_2(t) dt$$

⁵ Auguste Lebeuf était le directeur de l'Observatoire de Besançon, ville dans le lycée de laquelle enseignait Fréchet à ce moment-là.

⁶ La lettre du dimanche soir a dû être postée le lundi, arriver à Besançon le mardi, de sorte que Fréchet a pu soulever une nouvelle question dans une lettre arrivée à temps pour que Fatou puisse y répondre le jeudi soir.

auxquelles s'appliqueront [*sic*] le raisonnement de Dirichlet ; on devra toutefois supposer x compris entre $\alpha + h = \alpha + \frac{\pi}{10}$ et $\alpha + 2\pi - h = \alpha + 2\pi - \frac{\pi}{10}$. Mais cela n'a aucune importance puisque α est arbitraire, et pour les valeurs de x congrues (mod. 2π) aux valeurs que nous venons d'exclure il suffira de prendre une autre valeur de α , par exemple : $\alpha + \pi$ (éventuellement d'autres fonctions f'_1, f'_2).

Je serais embarrassé de te donner un renseignement bibliographique exact : cela se trouve en quelque sorte implicitement dans Dirichlet et dans tous ceux qui après lui ont étudié les séries de Fourier, mais je ne me rappelle pas avoir vu cette remarque exprimée explicitement dans les ouvrages que j'ai consultés. Il n'en est pas question dans ma thèse ni dans les Leçons de Lebesgue. Mais pour des choses aussi classiques dans le fond, il n'est pas nécessaire de donner tant de renseignements, tu peux dire simplement qu'il résulte de l'analyse classique de Dirichlet que etc. en ajoutant si tu y tiens, que tu me dois cette remarque, mais sans insister car cela est facile et je ne suis d'ailleurs pas certain d'avoir la priorité⁷.

Je te conseille vivement d'étudier les choses essentielles de la théorie des séries de Fourier, cela ne te demandera pas beaucoup de peine et il est toujours dangereux d'utiliser des résultats sans savoir d'où ils viennent, car on risque de les interpréter de travers.

Tu trouveras ce qu'il y a de plus important à savoir dans les traités d'analyse de Jordan ou Picard. Si tu veux étudier les choses plus à fond, il y a les leçons de Lebesgue.

J'ai soutenu ma thèse ce matin devant un jury des plus bienveillants⁸ ; heureux d'en avoir fini.

Je serai toujours très heureux de te donner des renseignements dans les rares matières où j'ai quelque compétence ; tu peux m'en demander sans hésiter.

Bien cordialement à toi
P. Fatou

Le théorème de Féjer [*sic*] est en effet très élégant, il a la supériorité sur les autres procédés de sommation de ne donner lieu qu'à des suites finies de Fourier, mais cela ne constitue pas un progrès si considérable que l'on pourrait le croire. D'ailleurs il y a toujours loin de la sommabilité par un procédé quelconque à la convergence ordinaire.

⁷ Dans la note [Fréchet 1907], comme dans l'article [Fréchet 1908] qui suivra, il s'agit d'approcher une fonction continue par une somme trigonométrique (finie), ce qui pose la question de la convergence de la suite de fonctions ainsi définie. Dans l'article [Fréchet 1908], postérieur aux lettres présentées ici, les questions soulevées ne sont pas mentionnées, ni Fatou, ni même Dirichlet, n'apparaissent (mais Fréchet cite [Lebesgue 1906]).

⁸ Rappelons que ce jury était composé d'Appell, Painlevé et Borel. Les soutenances de thèse devaient être moins festives à l'époque qu'elles ne le sont aujourd'hui... Fatou soutient sa thèse, rentre chez lui, et répond à une lettre mathématique.

Lettres de Fatou à Montel

[Montel a conservé seize lettres ou cartes, plus un fragment de lettre, écrits par Fatou, ainsi que le brouillon d'une lettre qu'il lui a adressée. La plupart des lettres de Fatou ne sont pas datées, parfois Montel a ajouté une date. Pour fixer la chronologie de ces lettres, nous disposons de leur contenu et de la nature du papier utilisé : on peut penser que Fatou a terminé sa boîte de papier à lettres bleu avant de recourir à un autre support...

Il s'agit de lettres amicales, dans lesquelles il est bien clair que ce qui intéresse le plus Fatou, ce sont les mathématiques : il propose des sujets de recherche à son ami, critique tel ou tel détail des démonstrations de ses articles, et se montre plein de fantaisie et d'humour.]

Paris, 29 novembre 1906

Mon cher ami,

Je suis passé ce matin au secrétariat de la Faculté des sciences, mais Guillet m'a déclaré que ton manuscrit n'avait pas été rapporté par Painlevé ; il est vrai qu'il y a pas mal de désordre dans son cabinet et qu'il a remué un certain nombre de thèses entassées pêle-mêle sur sa table avant de me donner l'assurance qu'il était encore entre les mains de ce dernier. Tu feras donc bien de t'adresser à Painlevé pour savoir ce qui en est. Je dois dire cependant que ta thèse n'était pas marquée sur le registre du secrétariat, parmi celles qui ont été rapportées.

Pour moi, je ne suis pas encore fixé sur la date de ma soutenance, n'ayant pas reçu d'épreuves depuis le mois de septembre. Il y a si longtemps que cela dure que j'ai fini par me lasser d'y penser et cette attente ne m'agite pas du tout.

Je continue de travailler un peu de temps en temps sur l'itération. J'ai obtenu incidemment un résultat sur les séries de Taylor que j'ai communiqué l'autre jour à la Société mathématique et qui a plu à Hadamard⁹. Voilà de quoi il s'agit. Suppose une série de Taylor

$$(1) \quad u + u_1x + \cdots + u_nx^n + \cdots$$

dont les coefficients sont déterminés par la loi de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(f fonction analytique). Si l'on ne précise pas davantage, on ne peut rien dire car toute série de Taylor s'obtient de cette façon.

Mais supposons que la substitution ($u \sim f(u)$) possède un point limite régulier c'à-d un point racine α de l'équation

$$u - f(u) = 0 \text{ avec } |f'(\alpha)| < 2$$

⁹ Voir la note 53 du chapitre V.

(f holomorphe en α). Si la valeur initiale u se trouve dans le domaine de convergence relatif au point α , la série (1) représente une fonction méromorphe qui est le *quotient de 2 fonctions entières de genre zéro et d'ordre zéro*, la fonction entière du dénominateur étant

$$(q = f'(\alpha)) \quad (1-x)(1-qx)(1-q^2x) \cdots (1-q^nx) \cdots$$

fonction que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques.

Ce résultat est assez curieux, comme tu le vois, il donne un résultat précis sur le prolongement analytique d'une classe étendue de séries de Taylor données par la loi de leurs coefficients, cette loi n'étant pas en général analytique (c'ad n'étant pas de la forme $a_n = \varphi(n)$ où φ est une fonction analytique donnée.

Je suis régulièrement le cours de Poincaré qui est assez intéressant : il traite des travaux des astronomes entrepris pour faire disparaître certaines divergences entre les observateurs et les tables, et passe en revue les modifications que l'on a essayées [*sic*] d'apporter à la loi de Newton ; à la fin de son cours, il parlera de l'application à l'astronomie de la mécanique des électrons, je serai curieux¹⁰ de savoir ce qu'il fera sur ce sujet tout à fait nouveau.

Je te remercie beaucoup de la peine que tu t'es donnée pour fournir à ma sœur des renseignements sur Nice qui lui seront fort utiles ; elle m'a priée [*sic*] elle-même de te remercier ce que j'aurais fait plutôt [*sic*] si mes bonnes intentions n'étaient si souvent gâtées par ma flemme épistolaire.

Si tu veux que j'aille trouver Painlevé pour toi, envoie-moi un mot.

Bien cordialement à toi et à bientôt

[signé] P. Fatou

Samedi 13 février [1915]

[La date 13/2 a été ajoutée au crayon par Montel. Il est question dans cette lettre d'un article paru en 1912. Les années postérieures à cette date où le 13 février est un samedi sont 1915 et 1926. La deuxième semble un peu tardive : en 1926, Fatou avait certainement lu depuis longtemps l'article en question. Dans cette lettre, nous voyons Fatou évoquer les lignes singulières des fonction kleinéennes — entre la note [Fatou 1906d] et le mémoire sur l'itération.]

Mon cher ami

En te remerciant de ton mémoire que j'ai parcouru avec beaucoup d'intérêt, je suis obligé de te signaler un raisonnement qui me paraît défectueux, ce qui n'a d'ailleurs qu'une importance minime à ton point de vue, puisque tu parviens à démontrer des propositions beaucoup plus générales par une voie tout à fait correcte, mais mon attention s'est portée là-dessus pour des raisons que je t'indiquerai.

¹⁰ Les lecteurs curieux pourront consulter [Poincaré 1905].

Tu considères (p. 495)¹¹ la fonction

$$\varphi(x) = \log \frac{f(x) - a}{f(x) - b}$$

$f(x)$ ne prenant pas les valeurs d'un continu linéaire d'extrémités a, b et tu conclus que la partie imaginaire de $\varphi(x)$ varie entre -3π et $+3\pi$. Or ton raisonnement est évidemment inexact si tu envisages un continu linéaire *quelconque*. Suppose en effet que la coupure ab (ou 0∞) ait la forme d'une spirale à l'une de ses extrémités; pour aller de m en m' *sans traverser la coupure*, tu dois tourner autour de 0 un certain nombre de fois d'autant plus grand que m est plus rapproché de 0 et l'argument varie de $2k\pi$, k pouvant croître indéfiniment.[figure]

Or tu peux imaginer des continus linéaires ayant un ensemble dense de points asymptotes (lignes singulières des fonctions kleinéennes).

Il est donc imprudent d'appliquer ce mode de raisonnement si l'on ne suppose pas que le continu est à peu près rectiligne.

Voici maintenant ce qui m'a conduit à cette critique : j'ai essayé d'appliquer ta transformation pour généraliser les propriétés que j'ai obtenues dans ma thèse pour les fonctions analytiques bornées dans un cercle et pour cette histoire là la fonction modulaire ne donne aucun résultat, tandis que le logarithme marcherait très bien sans la difficulté que je t'ai signalée. Je n'ai pas encore trouvé le moyen de m'en tirer.

Dis-moi si tu es bien de mon avis, et si tu vois le moyen de déduire d'une fonction qui ne prend pas les valeurs d'un continu linéaire une autre qui soit bornée en n'employant que des transformations simples.

Bien cordialement à toi

[signé] P. Fatou

[Note ajoutée par Montel sur la lettre : il s'agit d'une courbe & non d'un continu linéaire. Il faut, même pour une courbe, remplacer $-3\pi, 3\pi$ par $-k\pi, k\pi$; ou bien prendre pour la courbe deux points assez rapprochés (a', b') remplaçant les points a et b .]

Sans doute fin 1919

Mon cher Montel,

J'accepte volontiers la solution que tu me proposes, car je crois aussi qu'il vaut mieux commencer dès maintenant cette publication. Je tâcherai cependant de te remettre les ch. VI et VII dans un délai assez rapproché, quitte à te donner plus tard quelques notes supplémentaires.

¹¹ Le mémoire en question est [Montel 1912].

J'ai vu que Julia a commencé la publication de son mémoire sur les fonctions entières¹² et qu'il annonce celui relatif à l'itération ; voilà près d'un an que ce dernier est à l'impression ; je pense qu'il a eu à le remanier pas mal, car je lui ai autrefois signalé des fautes qui apparaissaient dans ses notes des C.R. Tout cela n'est pas très facile à mettre au point et il dû s'en apercevoir malgré sa hâte de publier.

Je te communique une lettre de Lémeray à laquelle je suis fort embarrassé de répondre, malgré mon titre d'archiviste¹³.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Mardi [6 janv. 1920]

[La date est de la main de Montel. Fatou utilise pour la première fois pour cette lettre un papier à lettres bleu (un cadeau de Noël?).]

Mon cher Montel

Si au lieu d'effectuer sur z les substitutions du groupe $(z|k^{\pm n}z)$ tu effectues les substitutions $(z|z + p\omega + q\omega')$ où p et q désignent tous les entiers et (ω, ω') deux nombres quelconques, et que tu considères les fonctions

$$F_{pq}(z) = F(z + p\omega + q\omega')$$

où F est une fonction entière ou méromorphe, tu dois parvenir à des résultats nouveaux et intéressants. Il semble que Julia n'y ait pas songé, car il n'aurait pas manqué de le publier *urbi et orbi*¹⁴. Quant à moi, j'ai pensé à cela depuis un ou deux jours, mais je ne désire pas après l'effort que je viens de faire m'absorber de nouveau dans un travail qui demanderait beaucoup de réflexion. Je te transmets donc les quelques remarques que j'ai faites à ce sujet. Tu en feras ce que tu voudras, mais étant familier avec ces sortes de sujets, tu pourrais si tu avais quelque loisir pour te livrer à des recherches de ce genre, en tirer des choses intéressantes.

1) Il existe des fonctions pour lesquelles les $F_{pq}(z)$ forment une famille normale dans tout domaine borné quels que soient les ω et ω' (on ne diminue pas la généralité en supposant ω et ω' non nuls et ω/ω' imaginaire).

¹² Le mémoire sur les fonctions entières de Julia est formé de trois articles [Julia 1919c ; 1920b ; 1921a] qui paraissent aux Annales de l'École Normale Supérieure. D'après ce qu'on lit dans le deuxième de ces trois mémoires, le premier, dont il est question ici, date d'avril 1919.

¹³ Nous avons vu que Fatou était archiviste de la SMF entre 1918 et 1921. Le fait que l'article de Julia sur l'itération soit à l'imprimerie depuis presque un an date cette lettre au plus tôt à la fin de 1919.

¹⁴ Fatou propose cette question, sur laquelle Julia ne publie pas, à Montel, mais apparemment elle sera traitée dans les leçons sur les fonctions uniformes [Julia 1924a].

Exemples : parmi les fonctions méromorphes les fonctions elliptiques et les combinaisons linéaires à coefficients constants de fonctions elliptiques à périodes distinctes ou non.

Parmi les fonctions entières e^z et les fonctions périodiques ou quasi périodiques représentées par le développement *limité* $\sum A e^{\alpha z}$ où les α sont réels.

On trouve facilement des conditions nécessaires pour qu'une fonction rentre dans cette catégorie : par exemple, si $z, z', z'' \dots$ tendent vers l'infini et si $F(z), F(z'), F(z'') \dots$ forme une suite bornée, il doit en être de même dans des cercles de rayon constant ayant pour centres $z, z' \dots$ tant pour la fonction elle-même que pour ses dérivées. Si au contraire les nombres $F(z'')$ tendent vers l'infini et $\left(\frac{1}{F(z)}\right)^{(q)}$ vers zéro dans la même suite de cercles. Etc.

Il paraît plus difficile de trouver des conditions suffisantes. Je ne connais pas d'autres exemples que ceux mentionnés plus haut (probablement les fonctions de Painlevé Boutroux : $y'' = 6y^2 + x$ — il faudrait voir la chose de près).

Les fonctions limites Φ des F_{pq} sont elles-mêmes des fonctions méromorphes ou entières pouvant se réduire à des constantes, parmi lesquelles il y a toujours les valeurs asymptotiques, notamment l'infini si $F(z)$ est entière ; dans ce dernier cas il y a toujours une infinité de fonctions limites distinctes. Je pense que dans tous les cas les fonctions limites ne peuvent pas être toutes des constantes mais je ne sais pas le démontrer.

2) Si une fonction ne rentre pas dans la catégorie précédente, il existe au moins un couple de nombres (ω, ω') et au plus deux nuls [?] et un domaine D où les fonctions F_{pq} ne forment pas une suite normale, donc un point z_0 où la suite n'est pas normale ; la fonction F prend ainsi toutes les valeurs sauf deux au plus dans des cercles de rayon constant et aussi petit qu'on le veut ayant pour centres les points congrus à $z_0 \pmod{\omega, \omega'}$.

Il semble que presque toutes les fonctions entrent dans cette catégorie ; exemples e^{z^2} , $z + e^z$, $\sin(z^2)/z$ (on voit en effet ou bien que $F'(z)$ ne reste pas bornée dans l'ensemble des points racines de $F(z) = a$, ou que $F'(z)$ ne tend pas vers zéro sur un chemin asymptotique de détermination finie etc)

Autre exemple : les fonctions périodiques entières représentées par un développement *illimité*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{2n\pi z/\omega}$$

car en posant $e^{2i\pi z/\omega} = y$, on obtient une série de Laurent $\Phi(y) = \sum A_n y^n$ qui représente une fonction avec les deux points singuliers essentiels 0 et ∞ . En prenant pour ω la période précédente et un nombre $\omega' = i\omega$ p. ex on est ramené à prouver que les fonctions $\Phi(k^q y)$ ne forment pas une suite normale dans une couronne convenable, ce qui est précisément ton théorème. Si l'on prend les fonctions méromorphes ou entières qui vérifient l'équation fonctionnelle

$$\varphi(u + \omega) = R(\varphi(u)), \quad (R \text{ rationnelle})$$

j'ai démontré dans mon mémoire qu'elles sont continues à l'infini lorsque l'on supprime du plan une certaine demi-bande de longueur infinie ; à l'intérieur de cette demi-bande il en existe d'autres aussi minces que l'on veut où $\varphi(u)$ prend toutes les valeurs sauf une au plus. [la lettre contient un dessin de la bande]. La suite $\varphi(u + p\omega + q\omega')$ est donc normale en certains points et pas en d'autres.

Si tu veux une fonction telle qu'aucune suite extraite des fonctions F_{pq} ne soit normale en aucun point du plan, c'est encore plus facile. Ex : je prends la fonction qui a pour zéros

$$z_{kn} = \sqrt{n} e^{2ik\pi/n}$$

et pour pôles

$$\varpi_{kn} = \sqrt{n} e^{\frac{2ik\pi}{n} + \frac{\pi}{n}}$$

($k = 0, 1, 2 \dots n-1$, $n = 2, 3, \dots \infty$). Comme $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0$ ainsi que $|z_{kn} - \varpi_{kn}|$ tu vois que tout domaine congruent à un domaine donné et qui s'éloigne à l'infini finit par comprendre des zéros et des pôles de plus en plus nombreux ayant pour points limites tous les points du domaine.

Tout cela est facile. Mais ce sont les fonctions de la 1^{re} catégorie qu'il faudrait arriver à caractériser un peu mieux de manière à obtenir ainsi une théorie générale des fonctions quasi doublement périodiques.

J'ai déposé mon mémoire (ch VI et VII) chez ta concierge vendredi dernier¹⁵. J'espère qu'il n'est pas perdu.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

On pourrait peut-être aussi essayer une classification de certaines fonctions à domaine d'existence limité et définies par ex. dans un cercle au moyen des fonctions $F(S(z))$, les $S(z)$ étant les substitutions d'un groupe fuchsien.

Ton idée de remplacer l'étude d'une fonction par celle d'une suite de fonctions obtenues par les substitutions d'un groupe linéaire effectuées sur la variable est peut-être l'une des plus heureuses que tu aies eue [*sic*]. Tu devrais en profiter.

Dimanche [21 ?] [1920 ?]

Mon cher Montel

Je réponds à tes différentes questions. Pour ma note sur les fonctions invariantes, il me paraît préférable qu'elle paraisse dans le Bulletin¹⁶ pour 1921.

¹⁵ Cette lettre est donc écrite juste après l'envoi par Fatou de son troisième mémoire sur l'itération. Ce qui justifie l'allusion à l'effort qu'il vient de faire, au début de la lettre.

¹⁶ Il s'agit du court article [Fatou 1922f], qui paraîtra bien dans le *Bulletin*, mais en 1922.

Je ne connais pas l'amiral Thomine et n'ai jamais entendu parler de lui par mon frère ; je suppose donc qu'ils ne se connaissent pas beaucoup. Comme d'ailleurs mon frère est à Berlin et que les communications avec lui ne sont pas rapides, je verrai plutôt si je peux te faire recommander par mon cousin le capitaine de vaisseau¹⁷ dont tu as reçu le fils à l'école navale cette année.

Je ne connais guère Hamy avec qui j'ai échangé une dizaine de mots en tout depuis 19 ans que je suis à l'Observatoire¹⁸. Comme c'est plutôt un « sauvage », je ne vois pas trop qui pourrait avoir de l'influence sur lui. Simonin le connaît mieux que moi, mais Simonin...

J'ai réfléchi de mon côté à la question du Collège de France, qui se posera probablement dans peu de temps car, d'après ce que m'a dit Julia, Humbert qui reprend son cours cette année reste toujours très fatigué ; il va essayer de faire son cours en trois fois en se reposant un mois après un mois de cours. Voici l'hypothèse très vraisemblable que j'envisage ; Humbert ne pouvant plus, d'ici quelque temps, continuer son cours se fera remplacer par Julia et attendra pour prendre sa retraite que ce dernier ait l'âge canonique pour lui succéder. La candidature de Julia sera appuyée par Humbert, par Picard, par tous les représentants à l'Institut de la « bienpensance » et quelques autres encore. Dans ces conditions, seule la candidature de Lebesgue pourrait faire échec à celle de Julia, et ce n'est même pas certain, car la cote de Julia ne fera que croître et embellir pendant quelques années. Ma candidature à moi, même avec l'appui de Hadamard dont je ne suis pas sûr, n'aurait que des chances infimes, surtout avec les autres candidats assez intrigants que tu connais qui se présenteront certainement.

Comme d'autre part, ces considérations mises à part, Lebesgue serait à cette chaire le right man dans le right place, il n'y a aucune raison suffisante pour le dissuader d'être candidat¹⁹.

Quant à moi qui suis résigné d'avance à ne jamais arriver, je continuerai tranquillement mon métier de sous-ordre de Simonin en attendant que ce soit du fils Baillaud ; c'est peu glorieux, mais ma philosophie s'en accomode [*sic*], et cela ne m'empêchera pas de continuer à faire des math. dans la mesure de mes moyens. Je ne t'en suis pas moins reconnaissant de l'effort que tu fais pour me trouver une situation meilleure.

Quelques mots maintenant sur des questions mathématiques qui, je pense, t'intéressent ; j'ai découvert dans un lot de brochures reçues cette année de Scandinavie un article de Lindelöf « Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle » (Extrait des C.R. du congrès de Stockholm 1916) qui est beaucoup plus clair que le mémoire du même

¹⁷ Il serait vain de prétendre s'y retrouver parmi les capitaines de vaisseau ou autres officiers de marine figurant dans l'arbre généalogique de la famille Fatou. Comme Julia, Montel était examinateur à l'École navale.

¹⁸ Fatou est à l'Observatoire depuis 1901, ce qui date la lettre de 1920, au plus tard du début 1921.

¹⁹ Nous le savons, après la mort d'Humbert en 1921, c'est bien Lebesgue qui sera élu pour le remplacer.

auteur des *Acta Societatis Fennica*. Le problème intérieur y est traité d'une manière fort élégante et simple, en simplifiant une méthode de Carathéodory. Comme tu dois faire un exposé didactique sur cette question, tu aurais intérêt à consulter cette brochure que je tiens à ta disposition si tu ne l'as pas.

Autre chose dans des ordres d'idées voisins. Tu te souviens peut-être d'une note de Denjoy [Montel a ajouté en marge au crayon (1918 CR)] où il énonce en généralisant un peu et sans me citer un théorème de moi sur les valeurs limites des fonctions analytiques sur un contour. Eh bien, cette généralisation même se trouve dans une communication de M. Riesz au même congrès (1916) « Über die Randwerte einer analytischer Funktion » qui contient d'ailleurs d'autres choses intéressantes et que je te recommande également²⁰.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Je ne vois aucun inconvénient à ce que tu fasses part de mes réflexions à Lebesgue.

6 décembre 1920

Mon cher Montel

J'ai fait ces jours derniers un petit travail sur certaines fonctions uniformes et ai rédigé là dessus une note que je comptais primitivement donner aux C.R. Mais comme cela dépassait notablement les limites permises, pour ne pas avoir à refaire une note succincte et faire ensuite un article détaillé, j'ai trouvé expédient de te donner cette note pour le BSM, en la faisant suivre de quelques applications, détails de calcul et de démonstration. Ce mode d'exposition a d'ailleurs en soi quelques avantages et peut-être a-t-on plus de chances d'être lu de cette manière. Tu voudras bien remettre tout cela à Galbrun²¹.

Si tu vas à la Société mathématique mercredi prochain, ce que je ne puis faire moi-même, ayant ma soirée prise, je te serais reconnaissant de donner lecture de cette note, bien entendu sans les notes explicatives de la fin et même au besoin en sautant quelques passages du § II. Si cela t'embête et si tu penses que cela embêtera tout le monde, tu peux aussi t'en dispenser.

²⁰ Autrement dit, Fatou s'aperçoit, en 1920, qu'un résultat de Denjoy paru dans les *Comptes rendus* en 1918 (c'est [Denjoy 1918]) figurait déjà dans un article de Riesz de 1916 (c'est [Riesz & Riesz 1916]) : si nous avons noté, au chapitre II, la rapidité de la communication par les *Comptes rendus*, d'autres publications étrangères peuvent mettre plus longtemps à être connues des mathématiciens français.

²¹ Voir les notes page 134. Si la référence à Galbrun indique clairement que « BSM » désigne le *Bulletin* de la SMF, c'est au *Bulletin... des sciences mathématiques*, nous l'avons dit, que l'article correspondant à la communication est paru (c'est [Fatou 1921c]). La description d'un article constitué d'une note et de détails de calculs correspondrait plutôt à [Fatou 1923b], qui est bien paru dans le *Bulletin* de la SMF, et dont Fatou nous parlera dans une lettre plus tardive (voir la note 28).

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Note pour l'histoire des mathématiques : le § III a été trouvé à Bullier.

Note complémentaire : il est inutile de donner lecture de la note précédente à la SM.

Samedi soir [1921]

Mon cher ami

J'ai été avisé par le Crédit Lyonnais d'un versement de 400^f fait par toi à mon compte ; je te remercie et je proteste en même temps, cette somme excédant de 20^f celle que tu me dois ; nous réglerons cela quelque jour. D'autre part, as-tu pu te faire rembourser les 20^f qui ont été escamotés ? S'il en était autrement, tu aurais touché une somme négative pour tes conférences de février, ce qui me paraît inadmissible, et je suis d'avis que je devrais te rembourser.

J'ai reçu la lettre de Lebesgue à laquelle tu as collaboré. J'ai été voir Picard ce matin à la sortie de son cours, comme j'y étais d'ailleurs décidé. Il m'a fait le meilleur accueil et paraît décidé à me soutenir ; je lui ai exposé que j'avais quelques hésitations à demander cette place pour des raisons de santé ; il m'a dit que c'était en effet à considérer, mais qu'à part cela ma place était à la Sorbonne et non à l'Observatoire²². Il m'a dit d'autre part que la candidature de Denjoy avait des partisans, mais qu'il ne connaissait pas l'opinion de certains de ses collègues, notamment de Vessiot et m'a engagé à les voir. Je vais donc faire une tournée de visites pour tâter le terrain ; je ne serai candidat que s'il y a une majorité très nette en ma faveur, et une certaine bienveillance même de la part de ceux qui ne voteraient pas pour moi, de façon à pouvoir réclamer un service qui ne soit pas trop pénible, sinon j'abandonne la partie. Si tu peux savoir l'opinion de gens comme Drach, Cartan, Vessiot, Koenigs, je te serais reconnaissant de me la faire connaître.

Voici encore une propriété de tes fonctions $f(z)$ univalentes dans le cercle $\mathcal{C}$ et égales à $a, b, c, \dots$ en $a, b, c, \dots$; on peut en trouver une qui représente $\mathcal{C}$ sur un domaine dont le contour se compose 1° d'un arc quelconque $mpn < 2\pi$ de $\mathcal{C}$; 2° d'un arc de courbe $mrsn$ passant aussi près que l'on veut d'un point q du plan extérieur à $\mathcal{C}$. Je trace un arc de courbe simple mqn contenant q et extérieur à $\mathcal{C}$ et je fais une représentation conforme auxiliaire du domaine mnp ($> \mathcal{C}$) sur le demi-plan supérieur du plan des Z , de manière que q ait pour image le point à l'infini ; le cercle $\mathcal{C}$ aura pour image le domaine borné MKN .

²² Il est donc bien question dans cette lettre d'une candidature à la Sorbonne.

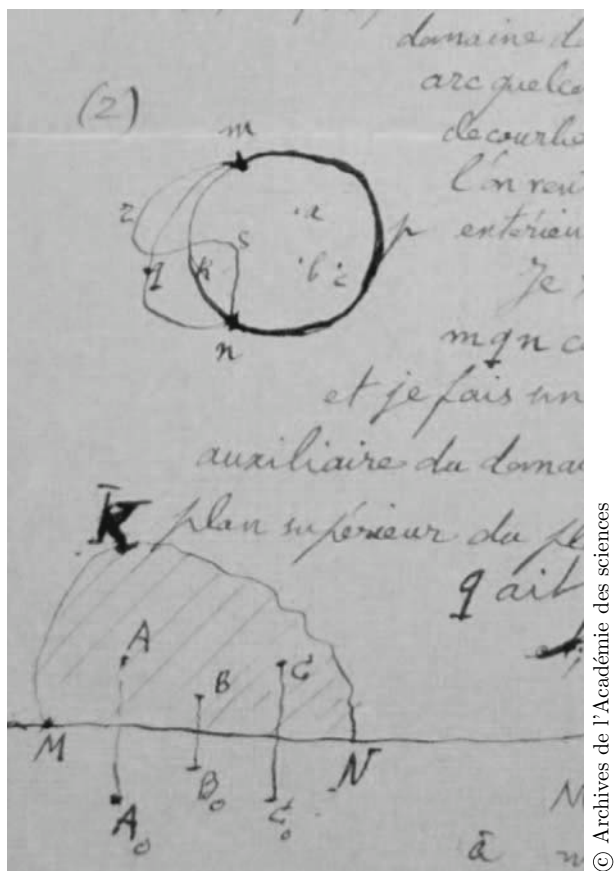


Fig. A.2. Les figures de la lettre du « samedi soir »

A_0, B_0, C_0 sont les symétriques de A, B, C par rapport à l'axe réel²³. Je pose

$$Z = R(Z) = Z + \varepsilon P(Z)$$

$$P(Z) = (Z - M)(Z - N)(Z - A)(Z - A_0)(Z - B) \cdots (Z - C_0)$$

Je prends ε réel et petit et je choisis son signe de manière que

$$|R'(A)| = |2 + \varepsilon P'(A)| > 1$$

ce qui est possible si $P(A) \neq 0$. La transformation $Z' = R(Z)$ transforme le domaine MKN ou Γ en un autre également simple si ε est très petit et dont la frontière contiendra le segment MN . De plus le transformé Γ_1 sera au

²³ Voir la figure A.2.

dessus de l'axe réel, car

$$Y' = Y + \varepsilon Y H(X, Y) \quad \begin{cases} Z = X + iY \\ Z' = X' + iY' \\ H = \text{polynome.} \end{cases}$$

On n'a pas $Y' = 0$ pour $Y \neq 0$ car cela donnerait $1 + \varepsilon H = 0$; impossible pour ε petit.

On emploie ensuite mon premier procédé de démonstration : on fait l'itération du polynome $R(Z)$ et on considère le dernier conséquent Γ_n de Γ qui soit à la fois simple et au-dessus de l'axe réel. Le domaine $\Gamma_n^{(\varepsilon)}$ ne reste pas borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (voir ma 1^{re} démonstration). En revenant au plan des z on a le résultat annoncé.

Je n'ai pas trouvé autre chose.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

La démonstration prouve aussi qu'il y a des fonctions $f(z)$ de ta famille qui laissent invariantes l'axe réel ou encore, si $\mathcal{C}$ est non circulaire, mais pourvu d'un axe de symétrie, cet axe de symétrie.

Samedi [1921 ?]

Mon cher Montel

Voici quelques renseignements complémentaires²⁴ au sujet des fonctions $f(z)$ qui sont holomorphes et simples (schlicht) dans un domaine C et telles que $z = f(z)$ laisse invariants $a_1, a_2 \dots a_p$. Je considère spécialement les fonctions

$$f(z) = z + \varepsilon P(z) = z + \varepsilon(z - a_1) \cdots (z - a_p).$$

Je t'ai fait remarquer qu'elles sont simples dans C pour tout ε suffisamment petit. On peut le voir comme il suit

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z') \quad (z \neq z') \\ z - z' + \varepsilon P(z) - P(z') &= 0 \\ 1 + \varepsilon \frac{P(z) - P(z')}{z - z'} &= 1 + \varepsilon Q(z, z') = 0 \end{aligned}$$

Q polynome symétrique indépendant de ε ; $|z| < A$, $|z'| < A$ entraînent $|Q(z, z')| < B$. L'égalité précédente est donc impossible pour $|\varepsilon| < 1/B$: $f(z)$ est donc simple pour $|\varepsilon| < 1/B$. Nous avons ainsi des substitutions voisines de la substitution identique qui répondent à la question; mais on peut

²⁴ Comme la précédente, cette lettre évoque des fonctions holomorphes laissant invariants un certain nombre de points, c'est pourquoi elle est placée ici.

en obtenir qui prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut dans C , autrement dit les $f(z)$ ne sont pas bornées dans leur ensemble. Je fais l'itération de la substitution

$$z' = R(z) = z + \varepsilon P(z).$$

L'un au moins des multiplicateurs ($R'(a_i)$) des points doubles a_i est > 1 en module ou égal à $+1$ (si P a des racines multiples) (voir p. ex le début de mon mémoire sur l'itération). Donc les fonctions itérées ne forment pas une suite normale en a_i (on a en effet $R_n(z) = a_i + s^n(z - a_i) + \dots$ ($|s| > 1$), et pour $s = 1$: $R_n(z) = a_i + (z - a_i) + cn(z - a_i)^q + \dots$); on en conclut (voir p. ex mon mémoire) que les $R_n(z)$ prennent toutes les valeurs finies autour de a_i c'ad dans C ; les domaines conséquents $C_1, C_2, \dots, C_n \dots$ finiront par comprendre un point quelconque du plan, notamment un point racine de $1 + \varepsilon P'(z) = R'(z)$ et à partir de là cessent d'être simples. Soit C_{n+1}^ε le premier domaine qui se recouvre lui-même, C_n^ε est donc le premier domaine pour lequel $R(z) = R(z')$ en deux de ses points z et z' ; je fais tendre maintenant ε vers 0; les domaines C_n^ε ne restent pas bornés d'après ma remarque du début, car si on avait $|z| < A$ dans tous ces domaines, on aurait $R(z) \neq R(z')$ dans chacun d'eux (pour $|\varepsilon| < 1/B$).

Les fonctions $f(z)$ ne sont donc pas bornées dans leur ensemble. Peux-tu me démontrer qu'elles prennent toutes les valeurs? Je pense qu'il en est ainsi.

Voici d'autre part quelques propriétés immédiates : les $f(z)$ forment une famille normale (je crois que c'est cela que tu me disais l'autre jour, mais je ne me le rappelle plus très bien. Les domaines D transformés de C ont en commun un domaine Δ ; quel est ce domaine Δ ? Les domaines D ne sont jamais intérieurs à C , ni ne comprennent C à leur intérieur (du moins pour $p > 1$).

Soit $M(\theta)$ le maximum maximorum de $|f(z)|$ pour $|z| \leq \theta < 1$ (en prenant pour C le cercle unité). $M(\theta)$ est fini (mais non borné $\theta \rightarrow 1$). On a $M(\theta) > \theta$. Je demande une limite supérieure de $M(\theta)$.

On pourrait aussi admettre un pôle pour $f(z)$ ($f(z)$ étant toujours simple). Dans ce cas on peut toujours faire passer le contour de D (transformé de C) aussi près que l'on veut d'un point de la sphère de Riemann, extérieur à C .

Tu vois que l'étude de cette famille de fonctions soulève des questions intéressantes. Tu dois pouvoir répondre à certaines d'entre elles.

Peux-tu aussi trouver des propriétés quantitatives des contours des D ? On pourrait rechercher à quoi conduit la méthode de Riemann pour la représentation conforme.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

[1921 ?]

Mon cher Montel²⁵

L'expression des substitutions uniformes dans C ($|z| > 1$) qui laissent invariants les points $a_1 a_2 \dots a_p$ est :

$$z' = z + P(z)\varphi(z) \quad (P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_p))$$

On arrive de suite au but que tu te proposes en prenant une substitution inf^t voisine de la substitution unité, par exemple

$$z' = z + \varepsilon P(z)$$

ε étant une constante très petite; en effet quand $\varepsilon \rightarrow 0$, il y a continuité des divers ordres; soit $z' = \rho e^{i\omega}$ pour $z = e^{i\varphi}$, ω varie dans le même sens que φ puisque $\frac{d(\omega - \varphi)}{d\varphi}$ est très petit; ρ et ω sont donc des fonctions univoques et périodiques de φ et Γ est une courbe sans point double. Donc on a une représentation conforme de l'intérieur de C sur l'intérieur de Γ (Γ traverse nécessairement C).

J'espère que cela te suffit

Cordialement

[signé] P. Fatou

[Petits calculs ajoutés à l'encre rouge par Montel.]

Fragment, 1921

[...] la situation d'un député que ses électeurs peuvent renvoyer un beau jour à ses études mathématiques²⁶. Ceci posé, tu peux considérer que je ne suis pas candidat, mais ne le dis pas encore; je me donne encore quelques jours pour réfléchir et je pourrais changer d'avis si j'obtenais des renseignements plus favorables en ce qui concerne l'organisation du service, mais c'est peu probable puisque Vessiot qui est la plus grande autorité en la matière et qui paraît animé de dispositions bienveillantes me laisse entrevoir la perspective du service auquel je suis le moins adapté.

D'autre part, Vessiot m'a donné un conseil que je suis décidé à suivre bien que cela n'ait plus pour moi, en vertu de ce qui précède, d'utilité positive,

²⁵ Cette carte pourrait être datée de juste avant la lettre suivante (sur les fonctions schlicht).

²⁶ Il est vraisemblablement question ici de Painlevé et de son remplacement : Painlevé élu député laissait son service (mais pas son poste).

à savoir de faire imprimer une notice²⁷. À ce propos, je retrouve dans mes brouillons un certain nombre de résultats dont quelques-uns ne sont peut-être pas sans valeur, mais il peut y en avoir qui ne sont pas nouveaux. Comme tu lis plus que moi et que tu es sans doute mieux outillé pour faire de la bibliographie, je te serais reconnaissant de me dire si tu as connaissance des propositions suivantes.

I. Soit $F(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle unité, V le logarithme du module maximum de $F(z)$ pour $|z| = r, r_1 \dots r_n \dots$ les modules des zéros de $F(z)$:

1) Si $\int_0^1 V dr$ est finie, la série $\sum (1 - r_n)^2$ est convergente. 2) Si $V \leq \frac{1}{1-r}^\alpha$, la série $\sum (1 - r_n)^{1+\alpha+\varepsilon}$ est convergente pour $\varepsilon > 0$.

(Théorèmes analogues de convergence uniforme quand $F(z)$ dépende de paramètres.)

II. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions entières (transcendantes) et p un nombre positif arbitraire ; M et M_1 les modules maxima de $f(z)$ et de $f[g(z)]$ pour $|z| = r$. On a pour certaines valeurs infiniment grandes de r

$$M_1 > r^p M$$

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Lettre non datée, vers 1922

Soit, mon cher Montel,

$$F(z) = \int_0^1 \frac{f(u) du}{z - u}$$

$f(u)$ étant une fonction réelle, absolument intégrable. Soit d'abord $f(u) > 0$, on a

$$\mathcal{I}(F(z)) = -y \int_0^1 \frac{f(u) du}{(x - u)^2 + y^2} \quad z = x + iy$$

Donc

$$\mathcal{I}(F(z)) < 0$$

(en restant dans le demi-plan supérieur). Mon théorème sur les valeurs limites des fonctions bornées est donc applicable à la fonction $\frac{1}{F(z) - i}$ et par suite à $F(z)$. De plus la valeur limite n'est infinie presque nulle part ; cela revient à dire que pour une fonction bornée la valeur limite n'est zéro presque nulle

²⁷ Il s'agit peut-être ici d'une candidature à l'ENS (dont Vessiot est directeur scientifique). Fatou a fait imprimer une notice en 1921 (que l'on trouve dans son dossier à l'Académie des sciences). Il est vraisemblable que ce fragment a en effet été écrit après la lettre datée samedi soir : Fatou est allé voir Vessiot.

part ; c'est ce qu'ont démontré F et M Riesz (Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Stockholm 1916) et moi-même d'une manière beaucoup plus simple à la fin de l'article que je t'ai remis (Sur les fonctions holomorphes et bornées)²⁸.

Soit maintenant $f(u) > 0$ ou < 0 ; $f(u)$ étant absolument intégrable est la différence de deux fonctions positives jouissant de la même propriété

$$f = f_1 - f_2$$

L'opération considérée étant distributive on a

$$F(z) = F_1(z) - F_2(z)$$

est le théorème est encore vrai pour F (puisque'on n'a $\infty - \infty$ nulle part).

De même si $f = f_1 + if_2$, on opère la même décomposition.

La proposition que tu m'as énoncée hier voudrait donc dire que les fonctions qui ont plus de 2 valeurs exceptionnelles au voisinage d'une coupure s'y comportent au point de vue de l'indétermination de la même manière que les fonctions bornées. J'ai quelques doutes sur l'exactitude de cette proposition qui ne me paraît pas compatible avec l'existence de certaines fonctions fuchsiennes qui peuvent avoir un nombre fini quelconque de valeurs exceptionnelles, autant qu'il me souvient et qui, eu égard au réseau des polygones fuchsien, n'est certainement pas le mode d'indétermination qui vaut pour les fonctions bornées.

Il est vrai que d'une part je n'ai pas regardé depuis longtemps les fonctions fuchsiennes et que je bafouille peut-être à ce sujet ; que d'autre part j'ai peut-être mal compris ton énoncé. Je t'engage cependant à faire attention à mon objection.

Cordialement

[signé] P. Fatou

Mardi [?]

[Cette lettre est sur papier blanc]

Mon cher Montel

Je reçois une nouvelle missive de ce brave Fréchet qui n'a vraiment pas le sens du ridicule. Je te communique cette lettre et ma réponse que tu voudras bien mettre à la poste après en avoir pris connaissance ; si tu voyais quelque chose à y changer, en ce qui te concerne, tu n'aurais qu'à me la renvoyer avec les corrections que tu demandes.

²⁸ Il s'agit des articles [Riesz & Riesz 1916] et [Fatou 1923b], dont nous avons vu pour ce dernier que Fatou l'avait remis à Montel avant 1923. Cette lettre est encore écrite sur le papier à lettres bleu, ce qui en permet une datation approximative.

J'ai reçu une lettre de Lebesgue dont tu connais probablement le contenu. Je suis allé d'autre part voir Goursat qui m'a conseillé d'attendre et de ne pas dire maintenant que je ne suis pas candidat.

Je reprends ma lettre interrompue précisément par l'arrivée de Lebesgue qui vient de me dire de la part de Goursat que Picard s'entend avec Julia pour qu'on me donne un service qui puisse me convenir et que dans ces conditions il me conseille d'être candidat ferme. Je crois donc cette fois ne pas pouvoir me dérober ; à la réflexion il me semble que je peux tenter cette expérience surtout si étant simplement délégué à la Sorbonne en remplacement de Painlevé, je suis mis en congé à l'Observatoire ce qui me permettrait, je pense, d'y reprendre du service si par exemple au bout d'un an je constatais n'être pas en état de continuer à la Sorbonne²⁹. Il faudra que j'éclaircisse ce point qui est très important pour moi.

J'irai demain soir à la SM³⁰. Lebesgue aussi. Tâche d'y venir si tu n'as rien de mieux à faire.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Vendredi [1922 ?]

Mon cher Montel

J'accepte sans restriction³¹ le 2^e alinéa p. 41 mais je fais quelques réserves sur ce qui précède immédiatement (p. 41, lignes 6 à 12) : « Puisqu'il existe une courbe aboutissant en z_0 sur laquelle $f(z)$ a pour limite z_0 on en déduit que $f(z)$ a pour limite z_0 sur toute courbe intérieure à (d) aboutissant en z_0 et remplissant les conditions du §23..... »

Je me reporte aux conclusions du §23 et je lis : Soit L une courbe intérieure à l'angle AOB , tangente en O à OA et admettant en ce point un rayon de courbure non nul.....

Or ici nous n'avons aucune raison de supposer que la courbe ℓ a un rayon de courbure, ni même une tangente distincte ou non de la tangente au cercle.

²⁹ Il est à peu près clair que cette lettre date de la même période que les autres lettres où il est question de ce remplacement de Painlevé. Il s'agit d'une période où Julia est déjà à la Sorbonne (et il y est chargé de cours depuis 1920) et pas Denjoy (qui est devenu chargé de cours en 1922). Il y a toutefois un petit doute quant à sa position par rapport aux précédentes, puisqu'elle n'est pas écrite sur le papier bleu.

³⁰ Les séances de la SMF ayant lieu le mercredi, et Fatou y étant assidu, cette indication n'aide pas à dater cette lettre !

³¹ L'article de Montel que Fatou critique ici est [Montel 1917b], mais la lettre est très postérieure à la parution de cet article. Elle doit donc suivre une conversation avec Montel.

D'ailleurs le § 23 envisage des courbes de plus en plus rapprochées de la frontière et ce qui nous intéresse ici surtout ce sont au contraire les cordes de la circonférence.

Il faut donc se référer au § 22 qui précède et, effectivement ce § 22 donne à *peu près* confirmation de ton assertion ; mais pas tout à fait car, je le répète, l'argument limite de $z - z_0$ peut avoir toutes les valeurs comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ (fig) [Il y a une figure dans la lettre] en sorte que la courbe L (p. 34) ne soit ni tangente à OA ou à OB , ni intérieure à un angle $< AOB$.

Je constate cependant, en me reportant à la démonstration du § 22 qu'il n'y a aurait probablement pas grand chose à changer pour que ça colle. Cela marche si les [illisible] λ_n convergent uniformément vers le segment A_2A_3 ; cela marche aussi à fortiori (§ 11) si les points limites des λ_n sont tous intérieurs à Δ'_1 . Je pense donc que cela marche dans les cas intermédiaires. Il n'y a donc pas d'erreur de principe, comme je l'avais cru d'abord, mais seulement négligence de détail, dont on s'aperçoit d'autant plus que tes démonstrations sont, en général, parfaitement précises et claires.

Il manque donc à la suite du § 22 la démonstration du théorème suivant qui, à première vue semble devoir tenir en quelques lignes (mais encore faut-il y réfléchir un peu) : « Si $f(x)$ tend vers α sur une courbe quelconque aboutissant en 0 et intérieure à AOB , $f(x)$ tend uniformément vers α dans tout secteur $A'OB'$ complètement intérieur à AOB » Tant que cela n'est pas fait, il peut subsister quelque doute sur les conclusions de la p. 41. [une figure]

Puisque j'ai entamé la critique de tes travaux, je note ce qui suit au sujet de ton mémoire sur les familles normales (1916)³².

La démonstration du théorème pages 240 à 242, sur les frontières telles que les aires des domaines qu'elles recouvrent restent bornés [*sic*] est habile mais me paraît inutile le théorème se ramenant bien facilement à celui qui concerne les fonctions ayant 2 valeurs exceptionnelles. Car si on prend dans le plan des $X = f(x)$ deux carrés C et C' complètement extérieurs l'un à l'autre et de cote $\sqrt{M+1}$, $f_n(x)$ ne peut pas prendre une certaine valeur a_n de C ni b_n de C' . De toute suite des f_n on peut en extraire une autre pour laquelle a_n et b_n tendent respectivement vers a et b ($a \neq b$). Les $\frac{f_n(z) - a_n}{b_n - a_n}$ ne prenant jamais les valeurs 0 et 1 forment une famille normale etc. Tu vois la conclusion.

Je note enfin que tu aurais peut-être pu citer comme exemple de famille normale les fonctions $f(x, y)$ holomorphes en x et continues par rapport à l'ensemble des deux variables x et y quand y varie dans le domaine fermé Δ et x dans D' intérieur à D . Pour banale que soit cette remarque je crois qu'elle peut être le point de départ de recherches intéressantes sur les fonctions analytiques de deux variables. Je livre cela à tes réflexions.

³² Il s'agit de [Montel 1916].

Je passe maintenant à d'autres sujets. Enjalbran me dit de t'avertir qu'il faut s'adresser pour régulariser les pièces pour la retraite à la Recette centrale de la Seine, place Vendôme. Les comptes des percepteurs à partir de 1902 et suiv. sont tous transférés là.

Enfin je te convie à dîner avec moi mardi prochain (28)³³ au restaurant S^t Michel 7^h $\frac{1}{4}$.

Cordialement

[signé] P. Fatou

30 janvier [1922 ?]

[Carte]

Mon cher Montel

Je lis dans ton mémoire sur les familles normales de fonctions analytiques³⁴, n° 38, p. 301 :

« Considérons la relation $X^m + T^n = 1$ dans laquelle $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$. Si l'on résout cette relation à l'aide de 2 fonctions uniformes de x , il résulte de ce qui précède que ces fonctions ont d'autres singularités que des points essentiels isolés ».

Ceci est faux, car pour

$$m = 2, \quad n = 4$$

$$m = 2, \quad n = 3$$

$$m = 3, \quad n = 3$$

la courbe est de genre 1, X et Y sont des fonctions elliptiques. Le th. du n° 38 est donc incorrect.

Le théorème du n° 37 est exact, mais est contenu dans celui de Picard : si 2 fonctions méromorphes sont reliées par une relation algébrique, cette relation est de genre zéro ou un. — Le fait n'est donc nouveau que pour les valeurs de m et n en nombre fini pour lesquelles $X^m + Y^n = 1$ est de genre 1.

Pour ce cas j'ai démontré le th. suivant (qui est probablement connu, mais je n'en suis pas sûr) : 2 fonctions entières, ou une fonction entière et une fonction méromorphe, ne peuvent être liées par une relation algébrique de genre 1.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

★

[Ajouté par Montel : il y a erreur seulement dans l'énoncé — ajouter [illisible] pôles.]

³³ Il y a eu des mardis 28 (de 1921 à 1924) : en juin 1921, février 1922, mars 1922, novembre 1922, août 1923, octobre 1924. Le calcul des probabilités est donc en faveur de 1922.

³⁴ Il s'agit de [Montel 1916].

1^{er} février 1923

[Carte. C'est Montel qui a mis la date.]

Mon cher Montel

Tu as raison, il faut examiner le cas du point double isolé pour la cubique, ce qui est bien facile. On peut mettre son équation sous la forme :

$$x(ax^2 + bxy + cy^2) = x^2 + y^2$$

par une homographie réelle, d'où :

$$x = \frac{1+t^2}{a+bt+ct^2} \quad y = \frac{t(1+t^2)}{a+bt+ct^2}$$

On trouve de suite pour les paramètres des 3 points en ligne droite la relation

$$\frac{t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 - 1}{t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3)} = \frac{a-c}{b} = k$$

En faisant $t_1 = t_2 = \theta$ et $t_3 = t$ on a l'équation du second degré en θ qui détermine les tangentes issues de (t) :

$$\theta^2(1-kt) + 2\theta(t+k) - (1-kt) = 0 \quad (\theta'\theta'' = -1)$$

donc toujours deux racines réelles ; les droites $O(\theta')$, $O(\theta'')$ sont rectangulaires, donc en général conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes au point double ; propriété certainement connue d'où découle la réalité de θ' , θ'' quand les tangentes au point double sont imaginaires conjuguées.

La démonstration pour les quartiques marche encore si A ou B sont isolés.

Ta remarque pour les courbes (hyperelliptiques) ayant un point double d'ordre $n-2$ est intéressante ; dans ce cas je ne vois pas la démonstration par les procédés de l'analyse classique.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Samedi soir [1923]

[Carte]

J'ajoute un mot à ma lettre de ce matin³⁵ pour te dire qu'il n'y a pas lieu de chercher à démontrer qu'une courbe d'ordre 3 (gauche) admet une corde passant par tout point de l'espace, puisque la chose n'est pas vraie pour les cubiques gauches quand on n'admet pas les points imaginaires ; la corde est toujours réelle, mais les deux points peuvent être imaginaires conjugués.

³⁵ Ce n'est pas de la carte précédente qu'il s'agit : le 1^{er} février 1923 était un jeudi. Il est certain qu'une partie des lettres de Fatou à Montel n'ont pas été conservées.

Exemple $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 + t^2 : t(1 + t^2) : 1 : 1 + t^3$ est projetée du point $(x_1 = x_2 = x_4 = 0)$ sur le plan $x_3 = 0$ suivant la cubique plane

$$x_1^3 + x_2^3 = x_4(x_1^2 + x_2^2)$$

dont le point double $(x_1 = x_2 = 0)$ est isolé.

Il faut donc compléter l'énoncé par une condition que je n'aperçois pas du tout.

[signé] P. Fatou

Paris, 27 janvier 1929. Brouillon de lettre de Paul Montel à Pierre Fatou

[Sur papier à entête de la chaire de mécanique rationnelle à la faculté des sciences. Il s'agit bien d'un brouillon, dont les morceaux ont dû être réordonnés pour la version que Montel a envoyée à Fatou.]

★

Communiqué à M. E. Meyer
à toutes fins utiles
(à me rendre)

Mon cher ami

Je viens d'être avisé que, dans les milieux scientifiques, [s'est propagée, biffé] circule une version [mensongère, biffé] étrange relative à mon attitude à ton égard à la dernière élection de la Faculté d'après laquelle je n'aurais pas voté pour toi.

Je n'aurais point songé à la relever si cette version ne m'était présentée comme venant de toi³⁶, ce dont je demeure profondément [surpris, biffé] étonné & attristé.

Tu ne peux pas avoir oublié que je n'ai cessé de te soutenir et de t'aider dans la mesure de mes forces, au cours de ta carrière.

Lorsque l'Académie a mis au concours le problème de l'itération, je t'ai continuellement poussé à rédiger un mémoire, et j'ai fait l'impossible pour qu'il parût au Bulletin de la Soc. Math. en temps utile, remplissant contre l'usage plusieurs fascicules consécutifs.

À la mort de Humbert en 22, c'est moi qui ai eu l'idée de ta candidature au Collège de France et qui en ai parlé aux mathématiciens.

[Paragraphe en marge, ajouté] Lorsqu'il a été possible de te donner une conférence à l'École, j'ai demandé à me faire suppléer par toi afin qu'on ne t'accuse pas de n'avoir jamais enseigné. [Toute la partie de « Tu ne peux

³⁶ Le milieu mathématique aimait donc déjà les ragots ! Et en particulier les bruits que l'on fait courir sur des délibérations qui devraient rester confidentielles...

pas » jusqu'ici a été marquée II en marge par Montel, qui a décidé de la placer autrement dans la lettre qu'il a effectivement envoyée.]

J'ai toujours soutenu tes candidatures ultérieures et, en ce qui concerne la dernière élection, j'étais placé à droite de Mauguin et je n'ai pas caché à ses yeux le bulletin portant ton nom et que j'ai déposé dans l'urne.

Au reste, il ne m'est jamais arrivé [d'affirmer, biffé] de promettre à quelqu'un que je voterai pour lui & de ne pas tenir ma promesse. Et je crois pouvoir affirmer que cela ne m'arrivera jamais. [de « Tu comprends » jusqu'ici, Montel a mis un I dans la marge.]

[ajouté, dans la marge] Tu comprends combien il est pénible dans ces conditions de voir ma loyauté suspectée.

Je ne sais si tes paroles ont été travesties, [en ce cas, biffé] il serait alors indispensable de les rectifier. Dans tous les cas, je démens de la manière la plus formelle toute interprétation de mon attitude non conforme à ce que je viens de t'écrire.

Bien amical. à toi
[signé] PM

Texte remanié et condensé.

Lundi 28 [janvier 1929]

Mon cher ami

Je suis moi-même fort surpris de ta lettre aucune hésitation n'ayant jamais existé dans mon esprit ni dans mes paroles sur les votes que tu as émis à mon sujet à la Faculté des Sciences. J'ignore absolument l'origine de ce bruit, n'ayant pas parlé depuis longtemps de cette affaire³⁷ qui a cessé de m'intéresser, n'ayant plus la moindre intention de chercher une situation quelconque dans l'enseignement ; à l'époque où j'en ai parlé, j'ai mis en cause Picard et Andoyer et personne d'autre. Ta justification est donc entièrement superflue et je te remercie à nouveau de m'avoir soutenu en diverses circonstances, ce dont je n'ai aucunement perdu le souvenir.

Il y aurait donc quelqu'un qui s'imaginerait avoir intérêt ou qui prend plaisir à susciter quelque dissentiment entre nous ? Je ne vois pas pour l'instant de qui il s'agit, mais suis naturellement porté à accuser l'élément féminin, car cela me paraît digne de ce sexe³⁸.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

³⁷ ... qui est certainement l'affaire de la candidature de Fatou à la Sorbonne — la fois où on lui a préféré Garnier (voir page 163).

³⁸ Une expression bien banale d'une misogynie courante... néanmoins inattendue dans ce contexte : il n'a pas une seule fois été question de femmes dans les lettres précédentes et on imagine mal « l'élément féminin » intervenir à propos d'une activité aussi strictement masculine qu'une réunion de professeurs.

Bibliographie

ABEL (Niels Henrik)

- [1881] *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel. Vol. II*, Christiania : Imprimerie de Grondahl, 1881, Éditées par Ludwig Sylow et Sophus Lie.

ACADÉMIE

- [1915] Grand Prix des Sciences mathématiques pour 1918, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 161 (1915), p. 921.
- [1918] Grand Prix des Sciences mathématiques pour 1918, Rapport, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 811.

AHLFORS (Lars V.)

- [1964] Finitely generated Kleinian groups, *Amer. J. Math.*, 86 (1964), p. 413–429.
- [1978] *Complex analysis*, New York : McGraw-Hill Book Co., third édition, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

ALAIN

- [1936] *Histoire de mes pensées*, NRF, Gallimard, 1936.

ALEXANDER (Daniel S.)

- [1994] *A history of complex dynamics, From Schröder to Fatou and Julia*, Aspects of Mathematics, E24, Braunschweig : Friedr. Vieweg & Sohn, 1994.
- [1995] Gaston Darboux and the history of complex dynamics, *Historia Math.*, 22 (1995), p. 179–185.

ALEXANDERSON (Gerald L.)

- [1987] *The Pólya picture album : Encounters of a mathematician*, Birkhäuser, 1987.

ANTOINE (Louis)

- [1921] Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages, *J. Math. Pures Appl. (8)*, 4 (1921), p. 221–326.

APOLLINAIRE (Guillaume)

[1965] *Œuvres poétiques*, Bibliothèque de la Pléiade, Paris : Gallimard, 1965.

APPELL (Paul), GOURSAT (Édouard) & FATOU (Pierre)

[1930] *Théorie des fonctions algébriques, tome II, Fonctions automorphes*, Paris : Gauthier-Villars, 1930, Deuxième édition, revue et augmentée.

ARAGON (Louis)

[1934] *Les Cloches de Bâle*, 1934, disponible en Folio.

AUBIN (David)

[2008] The war of guns and mathematics : French mathematicians and artillery men at Grâves, *to appear*, (2008).

AUBIN (David) & BRET (Patrice), éd.

[2003] *Le Sabre et l'éprouvette : l'invention d'une science de guerre 1914-1939*, 14-18 aujourd'hui, vol. 6, Éditions Noésis Agnès Viénot, 2003.

AUDIN (Michèle)

[2007] Publier sous l'Occupation I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences, *Rev. Hist. Math.*, (2007), arXiv : 0711.0447, à paraître.

[2008] *Souvenirs sur Sophie Kowalevski*, Orizzonti, Calvage & Mounet, 2008.

[2009a] Le séminaire Julia, (2009), en préparation.

[2009b] *Une histoire de Jacques Feldbau*, 2009, à paraître.

AUDIN (Michèle) & SCHAPPACHER (Norbert)

[2009] The lark and the eagle, (2009), in preparation.

AUDOIN-ROUZEAU (Stéphane)

[1992] L'enfer, c'est la boue, *in 14-18 : Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris : Seuil, 1992, p. 137-151.

BAILLAUD (Benjamin) & BOURGUET (Henry)

[1905a] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, tome I*, Paris : Gauthier-Villars, 1905.

[1905b] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, tome II*, Paris : Gauthier-Villars, 1905.

BAIRE (René)

[1905] *Leçons sur les fonctions discontinues*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1905.

[1990] Lettres à Émile Borel, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 11 (1990), p. 33-120.

BARBUSSE (Henri)

[1916] *Le Feu*, 1916, disponible en livre de poche.

BARROW-GREEN (June)

[2008] Activities and attitudes of British mathematicians during the First World War, *to appear*, (2008).

- BEAULIEU (Liliane)
 [1989] Bourbaki, une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934–1944), *Thèse, Université de Montréal*, (1989).
- BECKER (Jean-Jacques)
 [1992] Mourir à Verdun, in *14–18 : Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris : Seuil, 1992, p. 152–169.
- BEER (François-Joachim)
 [1966] La vie de Paul Montel, in [MathNiçois 1966], (1966), p. 53–84.
- BERTELOOT (François) & MAYER (Volker)
 [2001] *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés, vol. 7, Paris : Société Mathématique de France, 2001.
- BERTHON (Pierre)
 [1986] Les plis cachetés de l'Académie des sciences, *Rev. Hist. Sci.*, 39 (1986), p. 71–78.
- BIEBERBACH (Ludwig)
 [1927] *Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. II : Moderne Funktionentheorie*, Leipzig : Teubner, 1927.
- BLOCH (Léon)
 [1931] Fatou (Pierre-Joseph-Louis), né à Lorient (Morbihan), le 28 février 1878, mort à Pornichet (Loire-Inférieure), le 9 août 1929, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1931), p. 52–58.
- BÔCHER (Maxime)
 [1917] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1917.
- BONNET (Rose)
 [1941] Publication des observations d'étoiles doubles faites à l'Équatorial de la tour de l'Ouest de 31 cm d'ouverture de l'Observatoire de Paris par M. P. Fatou, *Journal des Observateurs*, 24 (1941), p. 29 et 41.
 [1945] Spectres, périodes et excentricités des binaires, *Thèse, Paris*, (1945).
- BOREL (Émile)
 [1898] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1898.
 [1901] *Leçons sur les séries divergentes*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1901.
 [1903a] Contribution à l'analyse arithmétique du continu, *J. Math. Pures Appl.* (5), 9 (1903), p. 329–375.
 [1903b] Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques, *Bull. Soc. Math. France*, 31 (1903), p. 157–184.
 [1917] *Leçons sur les fonctions monogènes*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1917.

- [1922] Notice sur la vie et les travaux de Georges Humbert, *Mémoires Acad. Sci.*, (1922).
- [1947] Allocution, in [JubiléMontel 1947], (1947), p. 42–44.
- [1966] Trente ans de travaux mathématiques de Paul Montel (1907–1937), in [MathNiçois 1966], (1966), p. 44–49, d’après son titre, ce texte date de 1937.
- BÖTTCHER (Lucien)
- [1904a] Principaux résultats de convergence des itérées et applications à l’analyse (en russe), *Izv. Kazan*, 13 (1904), p. 1–37.
- [1904b] Principaux résultats de convergence des itérées et applications à l’analyse (en russe), *Izv. Kazan*, 14 (1904), p. 155–200.
- [1904c] Principaux résultats de convergence des itérées et applications à l’analyse (en russe), *Izv. Kazan*, 14 (1904), p. 201–234.
- BOULIGAND (Georges)
- [1932] *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris : Vuibert, 1932.
- [1935] *Les définitions modernes de la dimension*, Exposés d’analyse générale publiés sous la direction de Maurice Fréchet, Paris : Hermann, 1935.
- BOURDIEU (Pierre)
- [1984] *Homo academicus*, Le sens commun, Paris : Minuit, 1984, Nouvelle édition augmentée.
- BRAUER (Richard)
- [1967] Emil Artin, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), p. 27–43.
- BRUNO (Alexandre)
- [1971] Analytical forms of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 25 (1971), p. 131–288.
- [1972] Analytical forms of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 26 (1972), p. 199–239.
- BUFF (Xavier) & CHÉRITAT (Arnaud)
- [2005] Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 341 (2005), p. 669–674.
- BUHL (Adolphe)
- [1921] Éloge de Samuel Lattès, *Mémoires de l’Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 9 (1921), p. 1–13.
- [1931a] Gabriel Kœnigs, *Enseignement Math.*, 30 (1931), p. 286–287.
- [1931b] Paul Appell, *Enseignement Math.*, 30 (1931), p. 1–21.
- BURALI-FORTI (Cesare) & MARCOLONGO (Roberto)
- [1910] *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, Paris : Hermann, 1910, traduit de l’italien et augmenté d’un supplément par Samuel Lattès.

- BURDE (Gerhard), SCHWARZ (Wolfgang) & WOLFART (Jürgen)
 [2002] Max Dehn und das Mathematische Seminar, *preprint*, (2002), <http://www.math.uni-frankfurt.de/~schwarz/schwarz/dehnmat3.pdf>.
- CABANNES (Jean)
 [1947] Allocution, in [JubiléMontel 1947], (1947), p. 11–16.
- CAJORI (Florian)
 [1893] *A history of mathematics*, London : MacMillan, 1893, Réimprimé par Chelsea en 1980.
- CALEGARI (Danny) & GABAI (David)
 [2006] Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.*, 19(2) (2006), p. 385–446 (electronic).
- CANTOR (Georg)
 [1884] De la puissance des ensembles parfaits de points, *Acta Math.*, 4 (1884), p. 381–392.
- CARTAN (Élie)
 [1946] Léon Guillet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222 (1946), p. 1149–1151.
- CARTAN (Henri)
 [1974] Notice nécrologique sur Arnaud Denjoy, membre de la section de géométrie, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique*, 279 (1974), p. 49–53.
 [1979/80] Nicolas Bourbaki and contemporary mathematics, *Math. Intelligencer*, 2 (1979/80), p. 175–180.
- CARTAN (Henri) & FERRAND (Jacqueline)
 [1988] Le cas André Bloch, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 9 (1988), p. 210–219.
- CASSIN (René)
 [1966] Paul Montel, enfant et citoyen de Nice, in [MathNiçois 1966], (1966), p. 17–23.
- CAYLEY (Arthur)
 [1890] Sur les racines d'une équation algébrique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 110 (1890), p. 215–218.
- CERVEAU (Dominique), GHYS (Étienne), SIBONY (Nessim) & YOCOZ (Jean-Christophe)
 [1999] *Dynamique et géométrie complexes*, Panoramas et Synthèses, vol. 8, Paris : Société Mathématique de France, 1999.
- CHABERT (Jean-Luc)
 [1990] Un demi-siècle de fractales 1870–1920, *Historia Math.*, 17 (1990), p. 339–365.
- CHÂTELET (Albert)
 [1913] *Leçons sur la théorie des nombres*, Paris : Gauthier-Villars, 1913.
 [1950] Allocution prononcée lors de la cérémonie de remise d'une épée à Gaston Julia, in [Julia 1970], (1950), p. 142–148.

CHAZY (Jean)

[1922] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 174 (1922), p. 1280–1282.

[1932] Pierre Fatou, *Bulletin astronomique*, 8 (1932), p. 379–384.

CHEVALLEY (Claude)

[1961] Allocution prononcée pour le jubilé scientifique de Gaston Julia le 16 décembre 1961, in [Julia 1970], (1961), p. 325–330.

CHOQUET (Gustave)

[1975] Notice sur Arnaud Denjoy, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1975), p. 29–33.

COULOMB (Jean)

[1968] Notice sur Charles Maurain, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1968).

CRAWFORD (Elisabeth) & OLFF-NATHAN (Josiane), éd.

[2005] *La Science sous influence*, éd. par Crawford (Elisabeth) & Olff-Nathan (Josiane), Strasbourg : La Nuée bleue, 2005.

CREMER (Hubert)

[1925] Über die Iteration rationaler Funktionen, *Jahresbericht D. M. V.*, 33 (1925), p. 185–210.

[1927] Zum Zentrumproblem, *Math. Ann.*, 98 (1927), p. 151–163.

[1932] Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckennabbildungsproblem., *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig*, 84 (1932), p. 391–224.

DAUBEN (Joseph Warren)

[1980] Mathematicians and World War I : The international diplomacy of G.H. Hardy and Gösta Mittag-Leffler as reflected in their personal correspondence, *Historia Math.*, 7 (1980), p. 261–288.

DAVENPORT (Harold)

[1985] Reminiscences of conversations with Carl Ludwig Siegel, *The Mathematical Intelligencer*, 7(2) (1985), p. 76–79, Edited by Mrs. Harold Davenport.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Charles)

[1916] *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1916.

[1921] *Cours d'analyse infinitésimale*, Louvain : A. Uystpruyst, 1921.

DE LAUNAY (Louis)

[1931] Notice nécrologique sur M. Gabriel Kœnigs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 193 (1931), p. 757–758.

DEBRÉ (Robert)

[1966] Souvenirs, in [MathNiçois 1966], (1966), p. 32.

DENJOY (Arnaud)

- [1918] Sur une propriété générale des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 31–33.
- [1926] Sur l'itération des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 182 (1926), p. 255–257.
- [1932] Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. Pures Appl.* (9), 11 (1932), p. 333–375.
- [1956] Notice sur Jean Chazy, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1956), p. 29–31.
- [1975] Arnaud Denjoy, l'homme et l'œuvre, *Astérisque*, 28–29 (1975).
- [1980] Lettres à Paul Lévy, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 1 (1980), p. 51–67.

DESFORGE (Julien)

- [1979] Notice sur Gaston Julia, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1979), p. 59–65.

DEVAUX (Alice)

- [2004] Recherche-médecine : destins croisés, *Le Journal de l'Institut Curie*, 58 (2004), p. 15.

DIEUDONNÉ (Jean)

- [1990] Montel, Paul, *Dictionary of scientific biography, supplement*, 18 (1990), p. 649–650.

DORGELÈS (Roland)

- [1919] *Les croix de bois*, 1919, disponible en livre de poche.

DOUADY (Adrien)

- [1983] Systèmes dynamiques holomorphes, Séminaire Bourbaki, 1982–83, *Astérisque*, 105–106 (1983), p. 39–63.
- [1987] Disques de Siegel et anneaux de Herman, Séminaire Bourbaki, 1986–87, *Astérisque*, 152–153 (1987), p. 151–172.
- [2009] L'ensemble de Julia dépend-il continûment du polynôme?, in Berline (Nicole) & Sabbah (Claude), éd., *Aspects des systèmes dynamiques (Palaiseau, 1994)*, Journées X-UPS, Palaiseau : Éditions de l'École polytechnique, 2009, p. 125–166.

DRACH (Jules)

- [1920] L'équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 37 (1920), p. 1–94.

DUBREIL (Paul)

- [1950] Allocution prononcée lors de la cérémonie de remise d'une épée à Gaston Julia, in [Julia 1970], (1950), p. 149–153.
- [1982] L'algèbre en France, de 1900 à 1935, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 3 (1982), p. 69–81.

DUGAC (Pierre)

- [1984] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874–1883), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 5 (1984), p. 49–285, Transcription et annotations par Pierre Dugac.
- [1985] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1884–1891), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 6 (1985), p. 79–216, Transcription et annotations par Pierre Dugac.
- [1989] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1892–1900), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 10 (1989), p. 1–82, Transcription et annotations par Pierre Dugac.
- [1990] René Baire, in *René Baire, Œuvres scientifiques*, Gauthier-Villars, 1990, p. 9–19.

EISELE (Carolyn)

- [1971] Bôcher, Maxime, *Dictionary of scientific biography*, (1971).

ENSMATH

- [1920] La collaboration internationale, *l'Enseignement Math.*, 19 (1920), p. 294–298.
- [1921] Unions scientifiques internationales, *l'Enseignement Math.*, 20 (1921), p. 59–61.

FATOU (Pierre)

- [1904a] Sur les séries entières à coefficients entiers, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 138 (1904), p. 342–344.
- [1904b] Sur la série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 139 (1904), p. 850–852.
- [1904c] Sur l'approximation des incommensurables et les séries trigonométriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 139 (1904), p. 1019–1021.
- [1905a] Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 140 (1905), p. 359–360.
- [1905b] Sur quelques théorèmes de Riemann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 140 (1905), p. 569–570.
- [1906a] Sur l'application de l'analyse de Dirichlet aux formes quadratiques à coefficients et à indéterminées conjuguées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 142 (1906), p. 505–506.
- [1906b] Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 142 (1906), p. 765–766.
- [1906c] Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, 30 (1906), p. 335–400.
- [1906d] Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 143 (1906), p. 546–548.
- [1910] Sur une classe remarquable de séries de Taylor, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 27 (1910), p. 43–53.

- [1913a] Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, *Bull. Soc. Math. France*, 41 (1913), p. 47–53.
- [1913b] Sur les conditions d’aplanétisme pour un système optique quelconque, *Bull. Soc. Math. France, Vie de la Société*, 41 (1913), p. 37.
- [1913c] Sur les généralisations de la condition des sinus, *Bulletin Astronomique*, 30 (1913), p. 242–249.
- [1913d] Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, 41 (1913), p. 113–119.
- [1917a] Sur l’aberration sphérique des lentilles épaisses, *Bulletin astronomique*, 34 (1917), p. 67–74.
- [1917b] Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 164 (1917), p. 806–808.
- [1917c] Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 165 (1917), p. 992–995.
- [1918a] Sur les équations fonctionnelles et les propriétés de certaines frontières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 204–206.
- [1918b] Sur les suites de fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 1024–1026.
- [1919a] Sur l’équation fonctionnelle d’Abel, *Bull. Soc. Math. France, Vie de la Société*, 47 (1919), p. 41–42.
- [1919b] Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 47 (1919), p. 161–271.
- [1920a] Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 48 (1920), p. 33–94.
- [1920b] Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 48 (1920), p. 208–314.
- [1921a] Sur les fonctions qui admettent plusieurs théorèmes de multiplication, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 571–573.
- [1921b] Sur un groupe de substitutions algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 694–696.
- [1921c] Sur l’évanouissement d’une branche de fonction analytique aux points d’une ligne singulière, *Bull. Sci. Math. (2)*, 45 (1921), p. 65–81.
- [1921d] Sur les domaines d’existence de certaines fonctions uniformes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 344–346.
- [1921e] Sur les propriétés d’une classe de fonctions uniformes analogues aux fonctions fuchsienues, *Bull. Soc. Math. France, Vie de la Société*, 49 (1921), p. 20.
- [1922a] Sur le mouvement d’une planète dans un milieu résistant, *Bulletin Astronomique (2)*, 1 (1922), p. 293–301.

- [1922b] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 174 (1922), p. 1162–1165.
- [1922c] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 174 (1922), p. 1330–1332.
- [1922d] Sur les fonctions méromorphes de deux variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 175 (1922), p. 862–865.
- [1922e] Sur certaines fonctions uniformes de deux variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 175 (1922), p. 1030–1033.
- [1922f] Note sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle, *Bull. Soc. Math. France*, 50 (1922), p. 37–41.
- [1922g] Sur l'itération de certaines fonctions algébriques, *Bull. Sci. Math. (2)*, 46 (1922), p. 188–198.
- [1923a] Sur les frontières de certains domaines, *Bull. Soc. Math. France*, 51 (1923), p. 12–22.
- [1923b] Sur les fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur d'un cercle, *Bull. Soc. Math. France*, 51 (1923), p. 191–202.
- [1923c] Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 2 (1923), p. 343–384.
- [1923d] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *Bull. Sci. Math. (2)*, 47 (1923), p. 19–40.
- [1924a] Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (suite), *J. Math. Pures Appl. (9)*, 3 (1924), p. 1–49.
- [1924b] Substitutions analytiques et équations fonctionnelles à deux variables, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 41 (1924), p. 67–142.
- [1924c] Sur un théorème de M. Picard, *Bull. Soc. Math. France*, 52 (1924), p. 468–484.
- [1925a] Sur le mouvement d'un point matériel soumis à l'attraction d'un sphéroïde aplati, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 180 (1925), p. 366–368.
- [1925b] Sur une propriété de certaines fonctions analytiques multiformes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 181 (1925), p. 902–904.
- [1926] Sur l'itération des fonctions transcendantes entières, *Acta Math.*, 47 (1926), p. 337–370.
- [1927a] Sur la recherche des orbites périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 185 (1927), p. 35–36.
- [1927b] Sur le mouvement des nœuds de certaines orbites, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 184 (1927), p. 1535–1537.
- [1928a] Sur le mouvement du périhélie des planètes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 186 (1928), p. 65–67.

- [1928b] Sur certains systèmes d'équations différentielles dépendant d'un paramètre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 186 (1928), p. 416–418.
 - [1928c] Sur le sens du déplacement du nœud de certaines orbites, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 186 (1928), p. 575–576.
 - [1928d] Observations d'étoiles doubles, *Journal des Observateurs*, 11 (1928), p. 11.
 - [1928e] Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période, *Bull. Soc. Math. France*, 56 (1928), p. 98–139.
 - [1929] Sur un critère de stabilité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 189 (1929), p. 967–969.
 - [1931] Sur le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe, *Acta Astron. (A)*, 2 (1931), p. 101–164.
- FATOU (Pierre) & GIACOBINI (Michel)
- [1924] Observations de la planète Baade, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 179 (1924), p. 963.
- FAVARD (Jean)
- [1961] Allocution prononcée à l'école polytechnique pour le quarantième anniversaire de la blessure de guerre du professeur Gaston Julia le 5 janvier 1955, in [Julia 1970], (1961), p. 237–240.
- FÉLIX (Lucienne)
- [1956] Allocution, in *Centenaire d'Émile Picard*, Paris : Imprimerie Pierre Neveu, 1956.
 - [1974] *Message d'un mathématicien : Henri Lebesgue*, Paris : Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1974.
 - [2005] *Réflexions d'une agrégée de mathématiques au xx^e siècle*, Paris : L'Harmattan, 2005.
- FRÉCHET (Maurice)
- [1907] Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonométriques limitées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 144 (1907), p. 124–125.
 - [1908] Sur l'approximation des fonctions continues périodiques par les suites trigonométriques limitées, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 25 (1908), p. 43–56.
 - [1921] Sur les ensembles abstraits, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 38 (1921), p. 341–358.
- FREI (Günther) & STAMMBACH (Urs)
- [1999] Heinz Hopf, in [James 1999], (1999), p. 991–1008.
- FRICKE (Robert) & KLEIN (Felix)
- [1897] *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Erster Band; Die gruppentheoretischen Grundlagen*, Leipzig : Teubner, 1897.
- GALLOIS (Jean)
- [1994] *Ernest Chausson*, Paris : Fayard, 1994.

GALOIS (Évariste)

- [1962] *Écrits et mémoires mathématiques*, Paris : Gauthier-Villars, 1962, Édition critique intégrale de ses manuscrits et publications, par R. Bourgne et J.-P. Azra.

GALUZZI (Massimo)

- [2001] Galois' note on the approximative solutions of numerical equations (1830), *Arch. Hist. Exact Sci.*, 56 (2001), p. 29–37.

GARNIER (René)

- [1954] Les fonctions automorphes de Poincaré et la géométrie, in *Œuvres complètes de Poincaré, volume 11*, Paris : Gauthier-Villars, 1954.
- [1978] Notice nécrologique sur Gaston Julia, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique*, 286(22-25) (1978), p. 126–133.

GATEAUX (René)

- [1919a] Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel, *Bull. Soc. Math. France*, 47 (1919), p. 47–70.
- [1919b] Fonctions d'une infinité de variables indépendantes, *Bull. Soc. Math. France*, 47 (1919), p. 70–96.

GISPERT (Hélène)

- [1983] Sur les fondements de l'analyse en France, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 28 (1983), p. 37–106.
- [1991] *La France mathématique*, Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences, vol. 34, Paris : Société française d'histoire des sciences et des techniques, 1991.
- [1995] La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue... et tous les autres, *Rev. Histoire Math.*, 1 (1995), p. 39–81.

GOLDSTEIN (Catherine) & MAZLIAK (Laurent), éd.

- [2009] *Mathématiques et mathématiciens en France autour de la Première guerre mondiale*, éd. par Goldstein (Catherine) & Mazliak (Laurent), 2009, à paraître.

GOODSTEIN (Judith R.)

- [2007] *The Volterra chronicles*, History of Mathematics, vol. 31, Providence, RI : American Mathematical Society, 2007, The life and times of an extraordinary mathematician 1860–1940.

GRAY (Jeremy)

- [2006] A history of prizes in mathematics, in Carlson (James), Jaffe (Arthur) & Wiles (Andrew), éd., *The Millenium prize problems*, Clay Math. Inst. and Amer. Math. Soc., 2006.

GUIRALDENQ (Pierre)

- [1999] *Émile Borel 1871–1956, L'espace et le temps d'une vie sur deux siècles*, Saint-Affrique : publié par l'auteur, 1999.

HADAMARD (Jacques)

- [1920] Rapport sur les travaux examinés et retenus par la commission de balis-

- tique pendant la durée de la guerre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 170 (1920), p. 436–445.
- [1921] L'Œuvre mathématique de Poincaré, *Acta Math.*, 38 (1921), p. 203–287.
- HARDY (Godefrey Harold) & LITTLEWOOD (John Edensor)
- [1917] Sur la convergence des séries de Fourier et des séries de Taylor, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 165 (1917), p. 1047–1049.
- HAUSDORFF (Felix)
- [1914] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig : Veit & Comp, 1914.
- [1919] Dimension und äusseres Mass, *Math. Annalen*, 79 (1919), p. 157–179.
- [2001] *Gesammelte Werke. Band IV*, Berlin : Springer, 2001.
- [2002] *Gesammelte Werke. Band II*, Berlin : Springer, 2002.
- HERVÉ (Michel)
- [1981] L'œuvre de Gaston Julia, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 2 (1981), p. 1–8.
- HILBERT (David)
- [1920] Gaston Darboux (1842–1917), *Acta Math.*, 42 (1920), p. 269–273.
- HUMBERT (Georges)
- [1917] Rapport sur une communication de M. Gaston Julia, intitulée : Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 165 (1917), p. 1096–1097.
- [1918] Sur les représentations d'un entier par certaines formes quadratiques indéfinies, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 581–587.
- HURWITZ (Adolf) & PÓLYA (George)
- [1916] Zwei Beweise Eines von Herrn Fatou Vermuteten Satzes, *Acta Math.*, 40(1) (1916), p. 179–183, Aus einem Briefwechsel.
- JAMES (Ioan), éd.
- [1999] *History of topology*, éd. par James (Ioan), Amsterdam : North-Holland, 1999.
- JAMES (Ioan)
- [2002] *Remarkable mathematicians*, Cambridge University Press, 2002.
- JORDAN (Camille)
- [1893] *Analyse*, Cours de l'École polytechnique, 1893, Deuxième édition.
- [1916] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 163 (1916), p. 777–787.
- JUBILÉMONTEL
- [1947] *Jubilé scientifique de M. Paul Montel*, Paris : Gauthier-Villars, 1947.
- JULIA (Gaston)
- [1913] Sur les lignes singulières de certaines fonctions analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, 41 (1913), p. 351–366.
- [1917] Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 165 (1917), p. 1098–1100.

- [1918a] Sur l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 61–64.
- [1918b] Sur des problèmes concernant l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 153–156.
- [1918c] Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 599–601.
- [1918d] Valeurs limites de l'intégrale de Poisson relative à la sphère, en un point de discontinuité des données, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 770–773.
- [1918e] Sur les surfaces définies par une propriété cinématique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 1026–1028.
- [1918f] Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pures Appl.* (8), 1 (1918), p. 47–246.
- [1919a] Notice sur Paul Lambert, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1919), p. 109–113.
- [1919b] Sur quelques problèmes relatifs à l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 168 (1919), p. 147–149.
- [1919c] Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (premier mémoire), *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 36 (1919), p. 93–125.
- [1920a] Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, *Acta Math.*, 42 (1920), p. 349–355.
- [1920b] Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (deuxième mémoire), *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 37 (1920), p. 165–218.
- [1921a] Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (troisième mémoire), *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 38 (1921), p. 165–181.
- [1921b] Sur la permutabilité des substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 690–693.
- [1922] Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 39 (1922), p. 131–215.
- [1923] Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 40 (1923), p. 97–150.
- [1924a] *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1924, Rédigées par P. Flamant.
- [1924b] Sur quelques applications de la représentation conforme à la résolution d'équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 52 (1924), p. 279–315.
- [1932] Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes, *Vorhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich*, 1932, p. 102–127, Erster Band, Bericht und allgemeine Vorträge.

- [1942–1950] La vie et l'œuvre de J.-L. Lagrange, *Enseignement Math.*, 39 (1942–1950), p. 9–21.
- [1943] Die Funktionentheorie und die Theorie der Operatoren im Hilbertschen Raum, *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.*, (1943), 15 pages.
- [1968] *Œuvres de Gaston Julia. Vol. I*, Paris : Gauthier-Villars, 1968, Editées par Michel Hervé.
- [1970] *Œuvres de Gaston Julia. Vol. VI*, Paris : Gauthier-Villars, 1970, Éditées par Michel Hervé.
- [1971] Notice nécrologique sur Louis Antoine, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique*, 272 (1971), p. 71–74.
- [X] Souvenirs sur Georges Humbert et Camille Jordan, X, origine non déterminée.
- JÜNGER (Ernst)
- [1920] *Orages d'acier*, 1920, traduction française disponible en livre de poche.
- KAHANE (Jean-Pierre)
- [2006a] Adrien Douady (25 septembre 1935–2 novembre 2006), (2006), http://www.academie-sciences.fr/membres/D/Douady_Adrien.htm.
- [2006b] L'affaire Doebelin : mon souvenir du pli cacheté de Wolfgang Doebelin, *Math. Sci. Hum. Math. Soc. Sci.*, (176) (2006), p. 9–11.
- KAHANE (Jean-Pierre) & SALEM (Raphaël)
- [1963] *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris : Hermann, 1963.
- KASNER (Edward)
- [1913] Conformal geometry, in Hobson (E.W.) & Love (A.E.H.), éd., *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge, 1912)*, vol. 2, Cambridge : Cambridge University Press, 1913, p. 81–87.
- KLINE (Morris)
- [1972] *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York : Oxford University Press, 1972.
- KØNIGS (Gabriel)
- [1884] Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 1 (1884), p. 3–41.
- [1885] Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 2 (1885), p. 385–404.
- LACASSAGNE (Antoine) & LATTÈS (J. Samuel)
- [1924] Méthode auto-historiographique pour la détection dans les organes du polonium injecté, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 178 (1924), p. 488–490.
- LAMBERT (Paul)
- [1912] Entiers imaginaires, *Nouvelles Annales de mathématiques (4)*, 12 (1912), p. 408–421.
- LAMPE (Emil)
- [1916] Briefe von Ch. Hermite an P. du Bois-Reymond 1875–1888, *Archiv der*

Math. und Physik, 24 (1916), p. 193–220 und 289–310, Mitgeteilt von E. Lampe.

LATARJET (Raymond)

[1979] Jeanne Lattès (1888–1979), *Bull. Cancer*, 66 (1979), p. 351–352.

LATTÈS (Jeanne)

[1926] *Étude, par la méthode d'absorption, du rayonnement du radium et de son rayonnement secondaire*, Thèse, Paris, 1926.

LATTÈS (Samuel)

[1911] Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double, *Bull. Soc. Math. France*, 39 (1911), p. 309–345.

[1915] Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* (3), 3 (1915), p. 73–124.

[1918a] Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 26–28.

[1918b] Sur l'itération des substitutions rationnelles à deux variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 151–153.

[1918c] Sur l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 486–489.

LE LIONNAIS (François), éd.

[1948] *Les grands courants de la pensée mathématique*, éd. par Le Lionnais (François), Cahiers du Sud, 1948.

LEAU (Léopold)

[1897] Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, (1897), p. 25–110.

LEBESGUE (Henri)

[1906] *Leçons sur les séries trigonométriques*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1906.

[1991] Lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 12 (1991), p. 1–506.

[2004] *Les lendemains de l'intégrale, lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel*, Paris : Vuibert, 2004.

LEBLANC (Maurice)

[1916] *L'éclat d'obus*, 1916, disponible en livre de poche.

LEGENDRE (Adrien-Marie)

[1955] *Théorie des nombres, tome II*, Paris : Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1955, reproduction de l'édition de 1830.

LEHTO (Olli)

[1998] *Mathematics without borders*, New York : Springer-Verlag, 1998, A history of the International Mathematical Union.

LERAY (Jean)

- [1973] Notice sur Henri Villat, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1973), p. 37–39.

LEROUX (Gaston)

- [1917] *Rouletabille chez Krupp*, 1917, disponible en livre de poche.

LÉVY (Paul)

- [1970] *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Introduction. Première partie : Souvenirs mathématiques. Deuxième partie : Considérations philosophiques*, Paris : Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1970.

LÉVY (Paul) & FRÉCHET (Maurice)

- [2004] *50 ans de correspondance mathématique*, Paris : Hermann, 2004, lettres éditées par Marc Barbut, Bernard Locker, Laurent Mazliak.

LISTING (Johann Benedict)

- [1847] *Vorstudien zur Topologie*, Göttingen : Göttinger Studien, 1847.

LORCH (Edgar)

- [1951] Obituary : Joseph Fels Ritt, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 57 (1951), p. 307–318.

MALLIAVIN (Paul)

- [1989] La vie et l'œuvre de René Garnier, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Gén. Vie Sci.*, 6(6) (1989), p. 569–572.

MANDELBROJT (Szolem)

- [1942] Obituary : Émile Picard. 1856–1941, *Amer. Math. Monthly*, 49 (1942), p. 277–278.

- [1975] Notice nécrologique sur Paul Montel, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique*, 280 (1975), p. 186–188.

- [1985] Souvenirs à bâtons rompus de Szolem Mandelbrojt, recueillis en 1970 et préparés par Benoit Mandelbrot, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 6 (1985), p. 1–46.

MANDELBROT (Benoit)

- [1982] *The fractal geometry of nature*, San Francisco, Calif. : W. H. Freeman and Co., 1982.

- [1983] Self-inverse fractals osculated by sigma-discs and the limit sets of inversion groups, *Math. Intelligencer*, 5(2) (1983), p. 9–17.

MARBO (Camille)

- [1968] *À travers deux siècles – Souvenirs et rencontres (1883–1967)*, Paris : Grasset, 1968.

MATHNÎÇOIS

- [1966] *Paul Montel, mathématicien niçois*, Ville de Nice, 1966.

MAZLIAK (Laurent)

- [2007] The ghosts of the Ecole Normale. Life, death and destiny of René Gateaux, (2007), arXiv : 0701490.

MAZ'YA (Vladimir) & SHAPOSHNIKOVA (Tatyana)

- [2005] *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, Les Ulis : EDP-Sciences, 2005, traduit de l'anglais par Gérard Tronel.

McMULLEN (Curtis)

- [2000] The Mandelbrot set is universal, *in* [Tan 2000], (2000), p. 1–17.

MILLOUX (Henri)

- [1924] Le théorème de M. Picard ; suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières, *J. Math. Pures Appl.* (9), 36 (1924), p. 345–402.

MILNOR (John)

- [2006a] *Dynamics in one complex variable*, Annals of Mathematics Studies, vol. 160, Princeton, NJ : Princeton University Press, troisième édition, 2006.
- [2006b] On Lattès maps, *in Dynamics on the Riemann sphere*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 9–43.

MINEUR (Henri)

- [1929] Discours, *le Nouvelliste du Morbihan*, (1929), p. 3, édition du 14 août 1929.

MOLK (Jules)

- [1912] *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Paris : Gauthier-Villars, 1912.

MONTBRIAL (Thierry de)

- [2003] Témoignage d'un élève et d'un collègue, *Gaz. Math.*, (2003), volume spécial Laurent Schwartz (1915–2002).

MONTEL (Paul)

- [1903] Sur l'intégrabilité d'une expression différentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 136 (1903), p. 1233–1236.
- [1904] Sur les suites de fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 138 (1904), p. 469–471.
- [1907] Sur les suites infinies de fonctions, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 24 (1907), p. 233–334.
- [1912] Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 29 (1912), p. 487–535.
- [1916] Sur les familles normales de fonctions analytiques, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 33 (1916), p. 223–302.
- [1917a] Sur la représentation conforme, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 164 (1917), p. 879–881.
- [1917b] Sur la représentation conforme, *J. Math. Pures Appl.* (7), 3 (1917), p. 1–54.
- [1919] Notice sur Samuel Lattès, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1919), p. 79–81.

- [1927] *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1927.
- [1931a] Sur les couples de polynômes dont les zéros sont entrelacés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 192 (1931), p. 1014–1015.
- [1931b] Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés, *Mathematica, Cluj*, 5 (1931), p. 110–129.
- [1932] Sur une classe de fonctions méromorphes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 194 (1932), p. 643–645.
- [1933] Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles à termes entrelacés, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 50 (1933), p. 171–196.
- [1941] Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 213 (1941), p. 197–200.
- [1948] Le rôle des familles de fonctions dans l'analyse mathématiques, in [Le Lionnais 1948], (1948), p. 173–178.
- [1956] Notice nécrologique sur M. Émile Borel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242 (1956), p. 845–850.
- [1957] *Leçons sur les récurrences et leurs applications*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris : Gauthier-Villars, 1957.
- [1966] Anecdotes, in [MathNiçois 1966], (1966), p. 147–153.
- MUMFORD (David), SERIES (Carolyn) & WRIGHT (David)
- [2002] *Indra's pearls*, Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
- NATHAN (Henry)
- [1971] Fatou, Pierre Joseph Louis, *Dictionary of scientific biography*, 4 (1971), p. 547–548.
- NEVANLINNA (Rolf)
- [1922] Kriterien für die Randwerte beschränkter Funktionen, *Math. Z.*, 13(1) (1922), p. 1–9.
- [1961] Allocution prononcée pour le jubilé scientifique de Gaston Julia le 16 décembre 1961, in [Julia 1970], (1961), p. 355–357.
- OSTROWSKI (Alexander)
- [1925] Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes, *Math. Z.*, 24 (1925), p. 213–258.
- PAINLEVÉ (Paul)
- [1918a] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 17–19.
- [1918b] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 741–742.
- [1918c] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 797–810.
- [1975] *Œuvres de Paul Painlevé, Volume III*, Paris : CNRS, 1975.

PÉREZ MARCO (Ricardo)

- [1992] Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe (d'après J.-C. Yoccoz), *Astérisque*, (206) (1992), p. 273–310, Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92.

PERRIER (Edmond)

- [1915] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 161 (1915), p. 801–819.

PERRIER (Georges)

- [1940] Notice nécrologique sur Jules-Louis Breton, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 211 (1940), p. 85–87.

PFEIFFER (George A.)

- [1917] On the conformal mapping of curvilinear angles. The functional equation $\phi[f(x)] = a_1\phi(x)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18 (1917), p. 185–198.

PICARD (Émile)

- [1879] Sur une propriété des fonctions entières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 88 (1879), p. 1024–1027.

- [1921] Allocution de clôture, *Congrès international des mathématiciens (Strasbourg 22-30 septembre 1920)*, (1921), p. xxxi–xxxiii.

PIERRARD (Pierre)

- [1992] Lille, ville allemande, in *14–18 : Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris : Seuil, 1992, p. 242–254.

PIGLOWSKI (Jean)

- [1911] Note sur le mouvement des projectiles, *Revue de Math. spéc.*, 22 (1911), p. 341.

PINAULT (Michel)

- [2000] *Frédéric Joliot-Curie*, Paris : Odile Jacob, 2000.

PINCHERLE (Salvatore)

- [1925] Notice sur les travaux, *Acta Math.*, 46 (1925), p. 341–362.

- [1929a] Discorso, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, 1 (1929), p. 72–74.

- [1929b] Rapporti con gli Istituti scientifici, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, 1 (1929), p. 6–10.

POGGENDORFF (Johann Christian)

- [1922] *Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften*, Leipzig : Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, 1922.

POINCARÉ (Henri)

- [1883] Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta Mathematica*, 3 (1883), p. 49–92.

- [1890] Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes, *J. Math. Pures Appl. (4)*, 6 (1890), p. 313–365.

- [1905] Sur la dynamique de l'électron, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 140 (1905), p. 1504–1508.
- PURKERT (Walter)
 [2002] Grundzüge der Mengenlehre — Historische Einführung, in [Hausdorff 2002], (2002), p. 1–89.
- REID (Constance)
 [1976] *Courant in Göttingen and New York*, New York : Springer-Verlag, 1976, The story of an improbable mathematician.
- REMARQUE (Erich Maria)
 [1928] *À l'ouest rien de nouveau*, 1928, traduction française disponible en livre de poche.
- REMMERT (Volker)
 [2000] Mathematical publishing in the Third Reich : Springer-Verlag and the Deutsche Mathematiker-Vereinigung, *Math. Intell.*, 22(3) (2000), p. 22–30.
- RIESZ (Frédéric) & RIESZ (Marcel)
 [1916] Ueber die Randwerte einer Analytischen Funktion, in *4^e Congrès des mathématiciens scandinaves*, Stockholm, 1916.
- RIESZ (Marcel)
 [1916a] Ein konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen, *Acta Math.*, 40 (1916), p. 349–361.
 [1916b] Neuer Beweis des Fatouschen Satzes, *Gött. Nachr.*, (1916), p. 62–65.
- RIPPON (Phil)
 [2005] Obituary Irvine Noel Baker (1932–2001), *Bull. London Math. Soc.*, 37 (2005), p. 301–315.
- RITT (Joseph Fels)
 [1918] Sur l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 380–381.
 [1920] On the iteration of rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 21(3) (1920), p. 348–356.
 [1923] Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 25 (1923), p. 399–448.
- ROUBAUD (Jacques)
 [1997] *Mathématiques : (récit)*, Fiction & Cie, Paris : Seuil, 1997.
- ROUSSY (Gustave)
 [1947] Allocution, in [JubiléMontel 1947], (1947), p. 7–10.
- RUDIN (Walter)
 [1966] *Real and complex analysis*, New York : McGraw Hill, 1966.
- RUSSELL (Bertrand)
 [1911] Sur les axiomes de l'infini et du transfini, *Bull. Soc. Math. France, Vie de la Société*, 39 (1911), p. 488–501.

RÜSSMANN (Helmut)

- [1967] Über die Iteration analytischer Funktionen, *J. Math. Mech.*, 17 (1967), p. 523–532.

SAINT-MARTIN (Arnaud)

- [2008] *L'office et le télescope. Une sociologie historique de l'astronomie française, 1900-1940*, Thèse, Université de Paris-Sorbonne, 2008.

SARTRE (Louis)

- [1948] Notice sur Paul Flamant, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1948), p. 47–50.

SCHOENFLIES (Arthur)

- [1913] *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig : Teubner, 1913.

SCHRÖDER (Ernst)

- [1871] Ueber iterirte Functionen, *Math. Ann.*, 3 (1871), p. 296–322.

SCHWARTZ (Laurent)

- [1997] *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Paris : Odile Jacob, 1997.

SEGAL (Sanford)

- [2003] *Mathematicians under the Nazis*, Princeton : Princeton University Press, 2003.

- [2008] *Nine introductions in complex analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 208, Amsterdam : Elsevier Science B.V., 2008.

SIEGEL (Carl Ludwig)

- [1942] Iterations of analytic functions, *Ann. Math.*, 43 (1942), p. 807–812.

- [1978] On the history of the Frankfurt Mathematics Seminar, *Math. Intelligencer*, 1(4) (1978), p. 223–230, talk given in Frankfurt in 1964, original text *Zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars* in the complete works of Siegel.

SIEGMUND-SCHULTZE (Reinhard)

- [2005] Maurice Fréchet à Strasbourg, in [Crawford & Olf-Nathan 2005], (2005), p. 185–196.

SIERPINSKI (Wacław)

- [1915] Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 160 (1915), p. 302–305.

SIMON (Claude)

- [1989] *L'acacia*, Paris : Minuit, 1989.

SINGER (Claude)

- [1997] *L'Université libérée, l'université épurée 1943–1947*, Paris : Les Belles lettres, 1997.

SIRINELLI (Jean-François)

- [1992] La génération du feu, in *14–18 : Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris : Seuil, 1992, p. 298–312.

SMITH (Henry J. Stephen)

- [1874] On the integration of discontinuous functions, *Proc. London Math. Soc.*, 6 (1874), p. 140–153.

STEINMETZ (Norbert)

- [1993] *Rational iteration*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 16, Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1993.

SULLIVAN (Dennis)

- [1985] Quasiconformal homeomorphisms, *Ann. of Math. (2)*, 122 (1985), p. 401–418.

TAN (Lei), éd.

- [2000] *The Mandelbrot set, theme and variations*, éd. par Tan (Lei), Cambridge : Cambridge university press, 2000.

TAYLOR (Angus)

- [1982] A Study of Maurice Fréchet : I His Early Work on Point Set Theory and the Theory of Functionals, *Archive for History of Exact Sciences*, 27 (1982), p. 233–295.

- [1985] A Study of Maurice Fréchet : II Mainly about his Work on General Topology, *Archive for History of Exact Sciences*, 34 (1985), p. 279–380.

TAYLOR (Angus) & DUGAC (Pierre)

- [1981] Quatre lettres de Lebesgue à Fréchet, *Rev. Hist. Sci.*, 34 (1981), p. 149–169.

THEBAUD (Françoise)

- [1992] Au travail, les femmes et les étrangers !, in *14–18 : Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris : Seuil, 1992, p. 228–241.

VAN DALEN (Dirk) & REMMERT (Volker R.)

- [2006] The birth and youth of *Compositio Mathematica* : ‘Ce périodique fondamentalement international’, *Compos. Math.*, 142 (2006), p. 1083–1102.

VÉRON (Philippe)

- [2004] Dictionnaire biographique des astronomes français (1850-1950), 2004, non publié.

VON KOCH (Helge)

- [1906] Une méthode élémentaire pour l’étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta Math.*, 30 (1906), p. 145–174.

WEIL (André)

- [1991] *Souvenirs d’apprentissage*, Vita Mathematica, vol. 6, Basel : Birkhäuser, 1991.

WOLFF (Julius)

- [1926] Sur l’itération des fonctions bornées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 182 (1926), p. 200–201.

Yoccoz (Jean-Christophe)

- [1995] Petits diviseurs en dimension 1, *Astérisque*, 231 (1995).

[1999] Dynamique des polynômes quadratiques. Notes rédigés par Marguerite Flexor, *in* [Cerveau et al. 1999], (1999), p. 187–222.

YOUNG (William) & CHISHOLM YOUNG (Grace)

[1906] *The Theory of sets of points*, Cambridge : Cambridge University Press, 1906.

ZERNER (Martin)

[1991] Joseph Bertrand, *in* [Gispert 1991], p. 298–322.

ZORETTI (Ludovic)

[1912] Les ensembles de points, *in* [Molk 1912], 2 (1912), p. 113–170.

Index

- AAPSO, *voir* Association amicale des personnels scientifiques des observatoires français
- Abel (Niels), 1802–1829, mathématicien, 51
- équation d', 51, 90, 94, 97, 101
- accessibilité, 96, 154
- Acta mathematica*, 38, 147
- Ahlfors (Lars), 1907–1996, mathématicien, 2, 100, 119, 184, 208
- conjecture d', 11, 119
- Alain (Émile Chartier), 1868–1951, philosophe, 128, 151, 172
- Alexander (Daniel), historien des mathématiques, 2, 100, 151
- Andoyer (Henri), 1862–1929, astronome, 164, 166, 240
- André (Désiré), v. 1840–1918, mathématicien, 9, 11, 168
- Annales de l'École normale supérieure*, 81, 110, 185, 191, 198, 203, 208
- Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 132
- anneau
- de Fatou, *voir* Fatou (anneau de)
- de Gauss, *voir* Gauss (anneau de)
- de Herman, *voir* Herman (anneau de)
- antécédent, 55, 69, 85, 86
- Antoine (Louis), 1888–1971, mathématicien, 23, 95, 109
- collier d', 95, 109
- Apollinaire (Guillaume), 1880–1918, poète, III, 20
- appel des intellectuels allemands aux Nations civilisées, *voir* manifeste des 93
- Appell (Germaine), 1885–XX, médecin, 33
- Appell (Paul), 1855–1930, mathématicien, 6, 30, 36, 40, 76, 77, 131, 147, 149, 186, 188, 191, 219
- Arago (François), 1786–1853, astronome, 140
- Archimède, 287 avant notre ère–212 avant notre ère, savant, 190
- Artin (Emil), 1898–1962, mathématicien, 23
- Arzelà (Cesare), 1847–1912, mathématicien, 45
- Ascoli (Giulio), 1843–1896, mathématicien, 45
- Association amicale des personnels scientifiques des Observatoires français, 132, 144, 146, 166, 167
- attractif
- cycle, 61, 91, 123
- point, 16, 40–42, 49, 55, 61, 62, 68, 70–72, 80, 85, 88, 91–93, 100
- Aubin (David), historien des mathématiques, 10, 125, 141
- Baade (Walter), 1893–1960, astronome, 159
- Baganas (Nicolas), XX–XX, mathématicien, 199

- Baillaud (Benjamin), 1848–1934, astronome, 141, 144, 166
- Baillaud (Jules), 1876–1960, astronome, 166, 226
- Baire (René), 1874–1932, mathématicien, 18–20, 29, 30, 139, 168, 173, 209
- Baker (Irvine Noel), 1932–2001, mathématicien, 117, 153
- Barbusse (Henri), 1873–1935, écrivain, 26, 34
- Barrow-Green (June), historienne des mathématiques, 10
- basilique, 61
- bassin d'attraction, 41, 61, 72, 74, 88
- Benes (Ladislav), 1882–1968, astronome, 144
- Berteloot (François), mathématicien, 44
- Bertrand (Joseph), 1822–1900, mathématicien, 6, 191
- Bibliothèque nationale de France, 108
- Bieberbach (Ludwig), 1886–1982, mathématicien, 36, 90, 99, 100, 111, 114, 151, 179, 191
- et la *Deutsche Mathematik*, 36
- Biehler (Charles), 1845–1906, mathématicien, 129, 169
- Bloch (André), 1893–1948, mathématicien, 23, 199
- Bloch (Eugène), 1878–1944, physicien, 131, 172
- Bloch (Léon), 1876–1947, physicien, 106, 125, 132, 135, 137, 140, 141, 157, 161, 164, 170, 172, 173
- BNF, voir Bibliothèque nationale de France
- Bôcher (Maxime), 1867–1918, mathématicien, 57
- Bohr (Harald), 1887–1951, mathématicien, 178
- Bonaparte (Napoléon), 1769–1821, homme politique, 76
- Bonnard (Abel), 1883–1968, ministre de Vichy, 182
- Bonnet (Rose), 1894–1973, astronome, 6, 106, 158, 173, 174
- Boquet (Félix), 1852–1929, astronome, 144
- Borel (Émile), 1871–1956, mathématicien, 6, 7, 17–20, 22, 23, 27, 29, 32, 33, 36, 37, 40, 48, 54, 56, 59, 76, 82, 110, 125, 131, 140, 142, 143, 146, 147, 169, 181, 182, 186, 187, 201, 205, 207, 209, 219
- Borel (Marguerite), voir Marbo (Camille)
- Borel-Lebesgue (théorème de), 17
- Böttcher (Lucien), XX–XX, mathématicien, 50, 70, 92
- théorème de, 50, 70, 92
- Bouligand (Georges), 1889–1979, mathématicien, 109
- Bourbaki (Nicolas), mathématiciens, 18, 94, 106
- séminaire, 44, 114, 179
- Bourdieu (Pierre), 1930–2002, sociologue, 191
- Boussinesq (Joseph), 1842–1929, mathématicien, 76
- Boutroux (Pierre), 1880–1922, mathématicien et philosophe, 139, 189, 209
- Brandicourt (Charles), 1860–XX, astronome, 144
- Brauer (Richard), 1901–1977, mathématicien, 99
- Breton (Jules-Louis), 1872–1940, inventeur et homme politique, 31
- Bruno (Alexandre), mathématicien, 115
- Buff (Xavier), mathématicien, 10, 101, 119, 123
- Bulletin de la Société mathématique de France*, 21, 37, 82, 83, 125, 130, 136, 152, 155, 158, 169, 184, 227
- Bulletin de la société royale des sciences de Liège*, 200
- Bulletin des sciences mathématiques*, 107, 183, 191, 227
- Bulletin of the American mathematical society*, 69
- calembour, 93
- Cantor (Georg), 1845–1918, mathématicien, 17, 18, 48
- ensemble de, 42, 72, 95, 101
- Caquot (Alfred), 1881–1976, ingénieur, 187, 194

- Carathéodory (Constantin), 1873–1950, mathématicien, 213, 227
- Carcopino (Jérôme), 1881–1970, historien et haut-fonctionnaire, 181
- Carnot (Lazare), 1753–1823, physicien, 35
- Cartan (Élie), 1869–1951, mathématicien, 31, 36, 108, 170, 186–188, 194, 195, 228
- Cartan (Henri), mathématicien, 189, 194
- Cassin (René), 1887–1976, diplomate, 182
- Cayley (Arthur), 1821–1895, mathématicien, 15, 42
- Céline (Louis-Ferdinand), 1894–1961, écrivain, 179
- Centre international de rencontres mathématiques, 10, 109, 122, 189, 203
- cercle à fossettes, 44, 71, 72
- Cerf (Jean), mathématicien, 8
- Châtelet (Albert), 1883–1960, mathématicien et homme politique, 25, 59
- Chatelu (André), 1973–XX, calculateur, 144
- Chatelu (Jules), 1970–XX, astronome, 144
- Chatterji (Shristi D.), mathématicien, 109
- Chausson (Ernest), 1855–1899, compositeur, 5
- Chazy (Jean), 1882–1955, mathématicien et astronome, 33, 125, 139, 159, 160, 169, 172, 174, 189
- Chéritat (Arnaud), mathématicien, 10, 42, 61, 87, 94, 101, 119, 120, 122, 123
- Chevalley (Claude), 1909–1984, mathématicien, 179
- chou-fleur de Douady, *voir* Douady (chou-fleur de)
- CIRM, *voir* Centre international de rencontres mathématiques
- Claude (Georges), 1870–1960, inventeur, 35
- Clemenceau (Georges), 1841–1929, homme politique, 57
- Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, 18, 19, 29, 110, 173, 210
- Collège de France, 2, 29, 36, 37, 161, 168, 226
- collier d'Antoine, *voir* Antoine (collier d')
- composante de Fatou, *voir* Fatou (composante de)
- Comptes rendus*, 7, 53, 54, 58, 63, 64, 68, 69, 78, 80, 102, 105, 110, 136, 156, 160, 163, 179, 185, 196
- condition de Cauchy, *voir* Cauchy (condition de)
- Congrès international des mathématiciens, 5, 28, 37, 79, 167, 179, 191, 209
- conjecture d'Ahlfors, 11, 119
- conséquent, 16, 66, 67, 84, 86, 94, 96
- continu
linéaire, 62, 67, 85, 89, 222
superficiel, 62, 67, 85
- Courant (Richard), 1888–1972, mathématicien, 22
- courbe de Jordan, *voir* Jordan (courbe de)
- courbe de von Koch, *voir* von Koch (courbe de)
- Courbet (Louise Eulalie), 1845–1911, mère de Pierre Fatou, 126
- cours Peccot, *voir* Peccot (cours)
- Cremer (Hubert), 1897–1983, mathématicien, 99, 112, 114, 115
- Cremona (transformation de), 68
- cycle
attractif, 61, 91, 123
indifférent, 91
périodique, 39
répulsif, 55, 88, 96
- d'Arsonval (Arsène), 1851–1941, médecin, 57
- Darboux (Gaston), 1842–1917, mathématicien, 14, 15, 38, 54, 73, 188, 190, 191

- Darmois (Eugène), 1884–1958, physicien, 181
- Darmois (Georges), 1888–1960, mathématicien, 181
- Dartron (Dominique), bibliothécaire, 10
- Dautry (Raoul), 1880–1951, ingénieur et homme politique, 21, 181, 195
- Davenport (Anne), 115
- Davenport (Harold), 1907–1969, mathématicien, 115, 178
- de Broglie (Louis), 1892–1987, physicien, 187, 194
- de la Vallée Poussin (Charles), 1866–1962, mathématicien, 8, 37, 108, 191, 194, 200, 202
- de Possel (René), 1905–1974, mathématicien, 108
- de Rham (Georges), 1903–1990, mathématicien, 195
- Déat (Marcel), 1894–1955, homme politique, 179, 181
- Débarbat (Suzanne), astronome et historienne, 10, 126, 130
- Debré (Robert), 1882–1978, pédiatre, 182
- Debussy (Claude), 1862–1918, compositeur, 34
- Dedekind (Richard), 1831–1916, mathématicien, 36, 38
- Dehn (Max), 1878–1952, mathématicien, 19, 23
- Deltheil (Robert), 1890–1972, mathématicien, 23
- dendrite, 110
- Denjoy (Arnaud), 1884–1974, mathématicien, 18, 29, 32, 109, 115, 155, 186, 187, 195, 208, 227, 228
- Deslandres (Henri), 1853–1948, astronome, 157, 164
- Deutsche Mathematik*, 36
- Dictionary of scientific biography*, 4, 125, 160, 182
- Dieudonné (Jean), 1906–1992, mathématicien, 199
- dimension de Hausdorff, *voir* Hausdorff (dimension de)
- Dirichlet (Johann Peter Gustav Lejeune), 1805–1859, mathématicien, 153, 156, 216, 219
- disque de Siegel, *voir* Siegel (disque de)
- distance de Hausdorff, *voir* Hausdorff (distance de)
- Dixmier (Jacques), mathématicien, 106
- Doebelin (Vincent), 1915–1940, mathématicien, 53
- Doetsch (Gustav), 1892–1977, mathématicien, 178
- Douady (Adrien), 1935–2006, mathématicien, 42, 44, 72, 106
- chou-fleur de, 72
- lapin de, 2
- double
- point, *voir* fixe (point)
- Drach (Jules), 1871–1949, mathématicien, 32, 157, 187, 194, 228
- Dreyfus (Alfred), 1859–1935, officier
- Affaire, 132, 188, 194
- droite de Julia, *voir* Julia (droite de)
- DSB, *voir* *Dictionary of scientific biography*
- du Bois-Reymond (Paul), 1831–1889, mathématicien, 73
- Dubreil (Paul), 1904–1994, mathématicien, 106
- Duclaux (Jacques), 1877–1978, physicien, 33
- Dufresnoy (Jacques), v. 1913–XX, mathématicien, 199
- Ebert (Wilhelm), 1871–1916, astronome, 142
- École
- centrale, 27, 191
- de Sèvres, 190
- navale, 126, 129, 226
- normale supérieure, 8, 20–22, 24, 27, 29, 31, 55, 56, 60, 105, 111, 129–132, 140, 144, 161, 162, 209
- polytechnique, 18, 21, 23, 26, 27, 58, 105, 118, 179, 180, 189, 193, 195, 197, 209
- Einstein (Albert), 1879–1955, physicien, 36
- Encyclopédie des sciences mathématiques*, 18, 79, 84, 164
- ENS, *voir* École normale supérieure
- ensemble

- de Cantor, *voir* Cantor (ensemble de)
- de Fatou, *voir* Fatou (ensemble de)
- de Julia, *voir* Julia (ensemble de)
- de Julia rempli, *voir* Julia (ensemble de (rempli))
- de Mandelbrot, *voir* Mandelbrot (ensemble de)
- limite, 46, 95, 119–121, 157
- parfait, *voir* parfait (ensemble)
- totale-ment discontinu, *voir* totale-ment discontinu (ensemble)
- équation d'Abel, *voir* Abel (équation d')
- équation de Schröder, *voir* Schröder (équation de)
- équation fonctionnelle, 16, 22, 48, 49, 51, 68, 90, 91, 97, 101, 118
- Esclangon (Ernest), 1876–1954, astronome, 30, 166
- espace de Hilbert, *voir* Hilbert (espace de)
- esprit de corps, 180, 194
- essentielle
 - singularité, 39, 47, 90, 106, 111, 153, 200
- étoile double, 106, 158, 160

- Fatou (Alain), petit-cousin de Pierre Fatou, 9, 126
- Fatou (Ambroise), ancêtre de Pierre Fatou, 126
- Fatou (Anny), petite-cousine de Pierre Fatou, 9, 150
- Fatou (Ernestine), 1869–XX, sœur de Pierre Fatou, 126, 127
- Fatou (Étienne), 1890–XX, cousin de Pierre Fatou, 165, 171
- Fatou (Georges), cousin de Pierre Fatou, 129
- Fatou (Hélène), petite-cousine de Pierre Fatou, 9
- Fatou (Henry), petit-neveu de Pierre Fatou, 8, 9, 133
- Fatou (Jeanne), XX–XX, sœur de Pierre Fatou, 126, 127
- Fatou (Louis), 1867–1957, amiral, 126, 127, 130, 140, 165, 171, 173, 191
- Fatou (Marguerite), petite-cousine de Pierre Fatou, 130

- Fatou (Michel), petit-cousin de Pierre Fatou, 9, 130, 133, 150
- Fatou (Pierre), 1878–1929, mathématicien et astronome, 1, 3, 6–11, 15–18, 20, 22, 29, 33, 39, 42–44, 51, 53, 54, 56, 60–64, 66, 68–71, 74, 77, 79–85, 87, 89, 91–93, 95, 100–102, 106, 109, 113, 115, 118, 125–132, 135–141, 145, 150, 159–161, 163, 164, 167, 169–172, 174, 175, 177, 185, 186, 189, 190, 197–199, 202, 206–208, 210, 213–217, 219–223, 225–228, 230–235, 237–240
 - anneau de, 152
 - composante de, 102, 117
 - ensemble de, 102, 110, 113, 177
 - et les succès officiels, 80, 138
 - étoile de, *voir* fleur
 - lemme de, 20, 150
- Fatou (Prosper Ernest), 1832–1891, capitaine de frégate et père de Pierre Fatou, 126, 127
- Fatou (Robert), 1895–1981, capitaine de vaisseau, 126, 127, 129, 131–135, 138, 139, 170
- Fayet (Gaston), 1874–1967, astronome, 144
- Feigl (Georg), 1890–1945, mathématicien, 178
- Fejér (Lipót), 1880–1959, mathématicien, 147, 219
- Félix (Lucienne), 1901–1994, mathématicienne, 183, 193–195
- Félix (Roger), 1899–1918, étudiant, 25
- Fischer (Emil), 1852–1919, chimiste, 35
- Flamant (Paul), 1892–1940, mathématicien, 8, 24, 111, 173
- fleur, 87, 93, 113
- Foch (Ferdinand), 1851–1929, maréchal, 54, 75, 76
- Fourier (Joseph), 1768–1830, mathématicien, 15
 - séries de, 63
- Fowler (Ralph), 1889–1944, mathématicien, 23
- France (François-Anatole Thibault, dit Anatole), 1844–1924, écrivain, 34

- Fréchet (Maurice), 1878–1973, mathématicien, 3, 7, 17, 18, 23, 66, 108, 109, 131, 158, 166, 181, 187–189, 195, 203, 215, 218, 234
- Fricke (Robert), 1861–1930, mathématicien, 120
- Galbrun (Henri), v. 1880–v. 1940, mathématicien, 134, 227
- Galeski (Maurice), bibliothécaire, 10
- Galois (Évariste), 1811–1832, mathématicien, 15
- Garnier (René), 1887–1984, mathématicien, 4, 32, 77, 120, 139, 163, 179, 180, 187–190, 240
succès de, 163, 189
- Gateaux (René), 1889–1914, mathématicien, 25, 38, 110
- Gauja (Pierre), 1886–1969, secrétaire-archiviste, 14, 166, 170
- Gauss (Carl Friedrich), 1777–1855, mathématicien et astronome, 160
anneau de, 160
- Ghys (Étienne), mathématicien, 10
- Giacobini (Michel), 1873–1938, astronome, 159
- Gispert (Hélène), historienne des mathématiques, 169
- Goldstein (Catherine), mathématicienne et historienne, 10
- Gonnessiat (François), 1856–1934, astronome, 144, 146
- Goursat (Édouard), 1858–1936, mathématicien, 131, 156, 163, 186–188, 235
- Grand Prix des sciences mathématiques, 1, 3, 13, 14, 53, 56, 60, 62, 66, 71, 77, 79, 125, 137, 161, 178, 197
- Granottier (Nathalie), bibliothécaire, 11
- Gray (Jeremy), historien des mathématiques, 11
- Grefle (Florence), conservateur, 9, 134
groupe kleinéen, 15, 17, 46, 117–119
- Guillet (Léon), 1873–1946, métallographe, 132, 166, 170, 171
- Hadamard (Étienne), 1897–1916, étudiant, 27
- Hadamard (Jacques), 1865–1963, mathématicien, 3, 7, 14, 16, 17, 22, 25, 27, 32, 36, 40, 43, 63, 66, 76, 78, 80, 91, 100, 105, 119, 149, 150, 163, 168, 180, 182, 184–188, 195, 208, 209, 213, 215, 220, 226
séminaire, 15, 29, 168, 179, 199
- Hadamard (Louise), 1868–1960, épouse de Jacques Hadamard, 27
- Hadamard (Mathieu), 1899–1944, 27
- Hadamard (Pierre), 1894–1916, étudiant, 27
- Halphen (Georges), 1844–1889, mathématicien, 190
- Hamy (Maurice), 1861–1936, astronome, 33, 140, 164, 226
- Hardy (Godfrey Harold), 1877–1947, mathématicien, 23, 63, 178
- Hasse (Helmut), 1898–1979, mathématicien, 23, 116
- Hausdorff (Felix), 1868–1942, mathématicien et écrivain, 2, 4, 18, 19, 109, 177
dimension de, 109
distance de, 96, 106, 122
- Heegaard (Poul), 1871–1948, mathématicien, 19
- Hensel (Kurt), 1861–1941, mathématicien, 111
- Herman (Michel), 1942–2000, mathématicien
anneau de, 2, 114
- Hermite (Charles), 1822–1901, mathématicien, 5, 6, 17, 36, 58, 72, 129, 193
- Hermite (Louise), XX–XX, sœur de Joseph Bertrand, 191
- Hervé (Michel), mathématicien, 2, 106
- Hilbert (David), 1862–1943, mathématicien, 36, 38, 111, 191
espace de, 179, 207
- Hitler (Adolf), 1889–1945, dictateur, 116
- Holmboe (Berndt), 1795–1850, mathématicien, 51
- Hopf (Heinz) 1894–1971, mathématicien, 23, 99
- Hôpital 103, 31, 55
- Hubbard (John), mathématicien, 2, 42

- Humbert (Georges), 1859–1921, mathématicien, 15, 27, 28, 54, 56, 58, 59, 63, 64, 74, 76, 80, 81, 153, 167, 169, 188, 226, 239
- Humbert (Pierre), 1891–1953, mathématicien, 15, 27
- Hurwitz (Adolf), 1859–1919, mathématicien, 151
- IHP, *voir* Institut Henri Poincaré
- indifférent
cycle, 91
point, 40, 51, 55, 80, 86, 89, 91, 92, 96
- Institut de recherche mathématique avancée, 7, 108
- Institut Henri Poincaré, 7, 10, 11, 108, 132, 158, 183
- intégrale de Lebesgue, *voir* Lebesgue (intégrale de)
- IRMA, *voir* Institut de recherche mathématique avancée
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 25, 50, 111, 154
- Jordan (Camille), 1838–1922, mathématicien, 14, 15, 18, 27, 38, 76, 81, 86, 108, 187, 190, 219
courbe de, 71, 72, 86, 97
- Jouguet (Émile) 1871–1943, mécanicien, 187, 194
- Journal de mathématiques pures et appliquées*, 82, 83, 191
- Journal des Observateurs*, 158
- Julia (Gaston), 1893–1978, mathématicien, 1, 3–5, 7, 8, 11, 15, 20, 21, 27, 28, 37, 39, 40, 44, 53, 54, 56–58, 62–65, 67–70, 72, 75, 76, 78–83, 85–87, 89, 91, 92, 94, 97, 101, 102, 105, 109–112, 116, 125, 129, 131, 155, 160, 163, 168, 169, 173, 177–180, 184–186, 189–191, 194–199, 201, 202, 204–207, 209, 210, 214, 223, 226, 235
blessure de guerre de, 5, 21, 26, 57, 60, 64, 179, 180, 187, 209
droite de, 111, 198, 201, 205, 208
élection à l'Académie des sciences de, 187
ensemble de, 3, 6, 10, 44, 48, 61, 78, 91, 98, 102, 109, 117, 177, 196
ensemble de (rempli), 122
et *Zentralblatt*, 178
fonds, 10, 109, 189
indication biographique sur, 5, 21, 105, 116, 125, 178–180
lemme de, 84, 90, 151, 185
points de, 3, 61, 112, 180, 202, 205, 207, 209
séminaire, 105, 108, 179, 199
sentiments filiaux pour Picard de, 28
- Julia (Madame Marc), belle-fille de Julia, 5
- Julia (Madame Sylvestre), belle-fille de Julia, 5
- Julia (Marianne), 1893–1971, fille du compositeur Ernest Chausson, 5
- Kahane (Jean-Pierre), mathématicien, 11, 106, 109
- Kasner (Edward), 1878–1955, mathématicien, 69, 113
- Klein (Felix), 1849–1925, mathématicien, 18, 35, 37, 38, 121, 194
exclusion de l'Académie des sciences de, 35
- kleinéen (groupe), 15, 17, 46, 117–119
- Koenigs (Gabriel), 1858–1931, mathématicien, 15, 32, 40, 70, 76, 86, 90, 101, 214, 228
- Kowalevski (Sophie), 1850–1891, mathématicienne, 14
- L'Enseignement mathématique*, 107
- La Porte (Florian), 1857–1938, ingénieur hydrographe, 126, 170
- Lacassagne (Antoine), 1894–1971, médecin et biologiste, 76
- Lacroix (Alfred), 1863–1948, géologue, 36, 57, 166, 190, 193
- Lagrange (Joseph Louis), 1736–1813, mathématicien, 210
- Laguerre (Edmond), 1834–1886, mathématicien, 190
- Lambert (Armand), 1880–1944, astronome, 164

- Lambert (Paul), 1894–1915, étudiant, 25, 173
- Landau (Edmund), 1877–1938, mathématicien, 100, 111, 115
- Langevin (Paul), 1872–1946, physicien, 36, 40, 132, 163, 181
- lapin de Douady, *voir* Douady (lapin de)
- Lattès (Jeanne Ferrier), 1888–1979, physicienne, 6, 76
- Lattès (Samuel), 1873–1918, mathématicien, 2, 3, 20–22, 29, 53, 66–68, 70, 71, 74–78, 80, 81, 83, 85, 96, 136, 152, 153, 190, 214
- Le Lionnais (François), 1901–1984, notamment mathématicien, 183
- Le Verrier (Urbain), 1811–1877, astronome et mathématicien, 140
- Leau (Léopold), 1868–1943, mathématicien, 86, 93, 113, 136
- Léauté (Henri), 1847–1916, mécanicien, 70
- Lebeau (Fernand), 1890–1915, physicien, 26, 27
- Lebesgue (Henri), 1875–1941, mathématicien, 7, 18–20, 25, 29, 31–33, 37, 54, 59, 66, 82, 100, 109, 125, 132, 135, 139, 142, 146–148, 150, 151, 163, 164, 167, 174, 181, 183, 186, 187, 190, 193, 194, 202, 209, 213, 214, 219, 226–228, 235
- indépendance par rapport à Picard de, 82, 193
- intégrale de, 18, 21, 37, 43, 150, 151
- Lebeuf (Auguste), 1859–1929, astronome, 218
- Leblanc (Maurice), 1864–1941, écrivain, 34
- Lecervoisier (Nicolas), archiviste, 11, 128, 168
- Lecornu (Léon), 1854–1940, mathématicien, 76
- Legendre (Adrien-Marie), 1752–1833, mathématicien, 15
- Leloup (Juliette), historienne des mathématiques, 11, 27, 54, 59
- lemme de Fatou, *voir* Fatou (lemme de)
- lemme de Julia, *voir* Julia (lemme de)
- lemme de Schwarz, *voir* Schwarz (lemme de)
- Leroux (Gaston), 1868–1927, écrivain, 34
- Levi-Civita (Tulio), 1873–1941, mathématicien, 178
- Lévy (Paul), 1886–1971, mathématicien, 3, 7, 11, 23, 25, 59, 72, 110, 155, 167–169, 180, 187–189, 195, 197–203, 207, 208
- Lichnerowicz (André), 1915–1998, mathématicien, 195
- limite (point), *voir* attractif (point)
- linéaire (continu), 62, 67, 85, 89, 222
- Lindelöf (Ernst), 1870–1946, mathématicien, 2, 226
- Liouville (Joseph), 1809–1882, mathématicien, 81, 114
- théorème de, 47
- Listing (Johann Benedict), 1808–1882, mathématicien, 20
- Littlewood (John Edensor), 1885–1977, mathématicien, 63
- Lœwy (Maurice), 1833–1907, astronome, 141, 142, 144
- Lubin (Germaine), 1890–1979, cantatrice, 179
- Luguern (Odile), bibliothécaire, 11, 174
- Luzin (Nicolas), 1883–1950, mathématicien, 155
- Maisonobe (Philippe), mathématicien, 11
- Mandelbrojt (Szolem), 1899–1983, mathématicien, 4, 106, 179, 189, 190, 199
- Mandelbrot (Benoît), mathématicien, 2, 118, 120, 177
- ensemble de, 2, 78, 94, 117, 123
- manifeste des 93, 35, 37, 38, 194
- Mannheim (Amédée), 1831–1906, mathématicien, 188
- Marbo (Camille), 1883–1969, écrivaine, 6, 26, 27, 33, 36, 56, 181, 182, 194
- Marchaud (André), 1887–1973, mathématicien, 24
- Marinelli (Pierre), médecin, 11, 171
- Marty (Frédéric), 1911–1940, mathématicien, 199

- Marty (Joseph), v. 1885–1914, mathématicien, 25, 199
- Mathiez (Albert), 1874–1932, historien, 21, 181
- Maurain (Charles), 1871–1967, physicien, 32, 166, 183
- Mayer (Volker), mathématicien, 44
- Mazliak (Laurent), mathématicien et historien, 25
- méthode de Newton, *voir* Newton (méthode de)
- Milloux (Henri), 1898–1980, mathématicien, 106, 195, 200, 202–205, 207, 208
- Milnor (John), mathématicien, 44, 210
- Mineur (Henri), 1899–1954, mathématicien et astronome, 24, 125, 139, 153, 156, 157, 159, 165, 173, 174
- Miranda (Carlo), 1912–1982, mathématicien, 200
- Mittag-Leffler (Gösta), 1846–1927, mathématicien, 17, 38, 129, 188
- Monge (Gaspard), 1746–1818, mathématicien, 35
- Mongré (Paul), *voir* Hausdorff (Felix)
- Montbrial (Thierry de), économiste, 58
- Montel (Paul), 1876–1975, mathématicien, 3, 4, 7, 20, 21, 29, 31, 32, 45, 47, 49, 53, 56, 63, 64, 74, 78, 80, 82–84, 91, 108–112, 118, 129, 131, 132, 155, 160, 165, 167, 169, 172, 173, 177, 180, 182, 183, 186, 188, 190, 194–209, 220–223, 225, 227, 230, 232–235, 237–240
- élection à l'Académie des sciences de, 188
- indication biographique sur, 21, 182
- multiplicateur, 15, 39, 40, 49, 51, 68, 101, 152
- Mussolini (Benito), 1883–1945, dictateur, 79
- Nature*, 38
- Néollier (Louis), 1889–1914, étudiant, 25
- Neugebauer (Otto), 1899–1990, mathématicien et historien, 178
- Nevanlinna (Rolf), 1895–1980, mathématicien, 84, 203, 208
- Newton (méthode de), 15, 39, 42, 73, 86, 97
- Noether (Max), 1844–1921, mathématicien, 36
- Nordmann (Charles), 1881–1940, astronome, 33, 141
- normale (famille), 20, 44, 47, 56, 61, 64, 78, 84, 91, 96, 101, 110, 112, 177, 197–202, 204–207
- Observatoire, 1, 2, 7, 10, 20, 33, 67, 106, 126, 128, 130, 132, 139–142, 145, 148, 150, 152, 157, 159, 164, 166, 172, 173, 190
- Ostrowski (Alexander), 1893–1986, mathématicien, 3, 111, 112, 195, 199, 201–204, 206, 207, 209
- Painlevé (Paul), 1863–1933, mathématicien et homme politique, 15, 22, 26, 31, 32, 53, 54, 57, 65, 76, 147, 148, 150, 161, 163, 169, 186, 188, 189, 219–221, 224, 232, 235
- parabolique
- point, 51, 80, 86, 89, 92, 96, 113
- parfait (ensemble), 16, 18, 42, 55, 61, 67, 69, 85, 91, 96, 102, 112, 117, 198, 206
- Parseval (formule de), 147, 151
- Paulin (Frédéric), mathématicien, 11
- Peccot (cours), 18, 25, 59, 110, 146
- Pérès (Joseph), 1890–1962, mathématicien, 27
- Perrier (Edmond), 1844–1921, anatomiste, 5, 26, 30, 35, 36, 57
- Perrier (Georges), 1872–1946, géographe, 31
- Perrin (Jean), 1870–1942, physicien, 36, 40, 164, 181
- Pétain (Philippe), 1856–1951, militaire et homme politique, 54
- Pfeiffer (George), 1889–1943, mathématicien, 69, 113
- Picard (Émile), 1856–1941, mathématicien, 4–6, 14, 15, 27, 28, 36, 54, 58, 59, 67, 75–78, 81, 82, 107, 129, 131, 162–165, 175, 183, 186, 187,

- 191, 193, 194, 207, 208, 210, 219,
226, 228, 235
pouvoir de, 5, 163, 190
sentiments anti-allemands de, 36, 67,
77
sentiments paternels pour Julia de,
28, 60
théorème de, 23, 47, 70, 83, 84, 105,
110, 111
Picard (Charles), 1884–1915, 27
Picard (Jeanne), 1882–1915, 27
Picard (Madeleine), 1892–1915,
infirmière, 27
Picard (Marie), 1860–1945, fille de
Charles Hermite, 5, 191
Picasso (Pablo), 1881–1973, artiste, 20
Pigowski (Jean), 1889–1915, étudiant,
25
Pincherle (Salvatore), 1853–1936,
mathématicien, 65, 78, 79, 81
Plancherel (Michel), 1885–1967,
mathématicien, 154
Poincaré (Henri), 1854–1912, mathéma-
ticien, 13, 15–17, 19, 50, 56, 62,
66, 67, 69, 70, 118, 119, 156, 180,
188, 190, 214, 221
fonction de, 13, 16, 50, 62, 66, 67, 69,
70, 90
Poincaré (Raymond), 1860–1934,
homme politique, 53
point
attractif, 16, 40–42, 49, 55, 61, 62, 68,
70–72, 80, 85, 88, 91–93, 100
indifférent, 40, 51, 55, 80, 86, 89, 91,
92, 96
parabolique, 51, 80, 86, 89, 92, 96,
113
répulsif, 41, 42, 48, 55, 61, 62, 66–70,
84, 88, 89, 93, 96, 100, 101, 198
superattractif, 72, 88, 92
point limite, *voir* point attractif
points de Julia, *voir* Julia (points de)
Poisson (Siméon Denis), 1781–1840,
mathématicien
formule de, 147, 156, 217
Pólya (George), 1887–1985, mathémati-
cien, 8, 151, 191, 208
Ponticelli (Lazare), 1898–2008, ancien
soldat, 4
poussière, 42, 72
Pringsheim (Alfred), 1850–1941,
mathématicien, 19
Prix
Albert I^{er} de Monaco, 187
Bordin, 14, 21, 58, 76, 178
de la fondation Henri Becquerel, 75,
78, 79, 138
Femina, 6
Francœur, 25, 74, 78, 178
Gegner, 75
Goncourt, 26, 34
Gustave Roux, 21
Le Conte, 101
Nobel, 35
Petit d'Ormoy, 178
Poncelet, 178
problème du centre, 112, 114
Puisseux (Pierre), 1855–1928, astronome,
165
quadrature du cercle, 75
Rabioulle (Émile), 1887–1914, calcula-
teur, 144
Raphson (Joseph), 1648–1715,
mathématicien, 15
Reidemeister (Kurt), 1893–1971,
mathématicien, 99
Remarque (Erich Maria), 1898–1970,
écrivain, 13
Renan (Henri), 1845–1925, astronome,
144
Renouvin (Pierre), 1893–1974, historien,
191
répulsif
cycle, 55, 88, 96
point, 41, 42, 48, 55, 61, 62, 66–70,
84, 88, 89, 93, 96, 100, 101, 198
Revue du mois, 6
Riemann
hypothèse de, 14
sphère de, 39
Riesz (Frédéric), 1880–1956, mathéma-
ticien, 154, 204, 213
Riesz (Marcel), 1886–1969, ma-
thématicien, 151, 154, 213,
227

- Ritt (Joseph Fells), 1893–1951, mathématicien, 2, 3, 20, 53, 69, 70, 83, 102, 118
- Roth (Klaus Friedrich), mathématicien, 114
- Roubaud (Jacques), écrivain retraité des mathématiques, 11, 183
- Rudin (Walter), mathématicien, 151
- Russell (Bertrand), 1872–1970, philosophe et mathématicien, 167
- Rüssmann (Helmut), mathématicien, 115
- Saint-Martin (Arnaud), sociologue et historien, 11, 141
- Salem (Raphaël), 1898–1963, mathématicien, 109
- Salet (Pierre), 1875–1936, astronome, 141, 164, 166
- Sartre (Louis), 1891–1971, mathématicien et électricien, 23
- Schappacher (Norbert), mathématicien et historien, 11
- Schmidt (Ehrard), 1876–1959, mathématicien, 99
- Schoenflies (Arthur), 1853–1928, mathématicien, 18, 19, 108
- Schönberg (Arnold), 1874–1951, compositeur, 20
- Schottky (théorème de), 83, 202, 207
- Schröder (Ernst), 1841–1902, mathématicien, 42, 48
équation de, 49–51, 90, 97, 101, 112, 114, 155
- Schwartz (Claudine), mathématicienne, 11
- Schwartz (Laurent), 1915–2002, mathématicien, 195
- Schwartz (Marie-Hélène), mathématicienne, 11
- Schwarz (Hermann Amandus), 1843–1921, mathématicien, 36
lemme de, 61, 84, 86, 100
- séminaire
Bourbaki, *voir* Bourbaki (séminaire)
Hadamard, *voir* Hadamard (séminaire)
Julia, *voir* Julia (séminaire)
- séries de Fourier, *voir* Fourier (séries de)
- Sérieyx (Gladys), petite-cousine de Pierre Fatou, 8, 9, 125, 126, 171
- Servant (M.), 1877–XX, mathématicien, 209
- Siegel (Carl Ludwig), 1896–1981, mathématicien, 4, 23, 112, 114, 116, 177, 180
disque de, 2, 114
- Sierpinski (Wacław), 1882–1962, mathématicien, 18, 72
triangle de, 72
- Simonin (Martial), 1863–XX, astronome, 144, 226
- singularité essentielle, 39, 47, 90, 106, 111, 153, 200
- SMF, *voir* Société mathématique de France
- Smith (Henry John Stephen), 1826–1883, mathématicien, 95
- Société des gens de lettres, 6
- Société mathématique de France, 4, 15, 37, 82, 125, 130, 154, 155, 158–161, 168, 169, 208
- stable (composante), *voir* Fatou (composante de)
- Steinmetz (Norbert), mathématicien, 11, 99
- Stieltjes (Thomas), 1856–1894, mathématicien, 14, 141
- Sullivan (Dennis), mathématicien, 117, 119
- superattractif (point), 40, 72, 88, 92
- superficiel (continu), 62, 67, 85
- Süss (Wilhelm), 1895–1958, mathématicien, 179
- Tamarkin (Jacob), 1888–1945, mathématicien, 178
- Tan Lei, mathématicienne, 44
- Tannery (Jules), 1848–1910, mathématicien, 140, 142, 150
- Tchebychev (Pafnouti), 1821–1894, mathématicien, 62, 66
- Teichmüller (Oswald), 1913–1943, mathématicien, 119
- théorème de Borel-Lebesgue, *voir* Borel-Lebesgue (théorème de)

- théorème de Böttcher, *voir* Böttcher (théorème de)
- théorème de Cantor-Bernstein, 48
- théorème de Denjoy-Wolff, 115
- théorème de Fermat, 14, 15, 60
- théorème de Picard, *voir* Picard (théorème de)
- théorème de Schottky, *voir* Schottky (théorème de)
- Thiry (René), v. 1872–1968, mathématicien, 23
- Thomine (Félix-Jean-Léonce), 1866–1941, contre-amiral, 226
- topologie générale, 17–20, 22, 101, 107, 108, 154
- totalement discontinu (ensemble), 16, 42, 55, 67, 72, 85, 94–96, 102, 117
- transformation de Cremona, *voir* Cremona (transformation de)
- UMI, *voir* Union mathématique internationale
- Union mathématique internationale, 28, 37, 40, 191
- Valiron (Georges), 1884–1955, mathématicien, 27, 180, 181, 188, 189, 199, 203, 205, 208
- Veblen (Oswald), 1880–1960, mathématicien, 178
- Véron (Philippe), astronome et historien, 11, 141, 144
- Vessiot (Ernest), 1865–1952, mathématicien, 32, 162, 186, 187, 228, 232
- Vidil (Roger), 1891–1918, étudiant, 25, 59
- Viennet (Éloi), 1857–1932, astronome, 144
- Villat (Henri), 1879–1972, mathématicien, 32, 40, 187, 191, 194
- Volterra (Vito), 1860–1940, mathématicien, 25, 60
- von Baeyer (Adolf), 1835–1917, chimiste, 35
- von Koch (Helge), 1870–1924, mathématicien, 72, 89
- courbe de, 72, 89, 101
- Voss (Aurel Edmund), 1845–1931, mathématicien, 19
- Wagner (Richard), 1813–1883, compositeur, 59
- Waldeyer (Heinrich), 1836–1921, anatomiste, 35
- Weierstrass (fonction $\wp$ de), 67
- Weil (André), 1906, 1998, mathématicien, 115, 163, 189
- Weyl (Hermann), 1885–1955, mathématicien, 214
- Wolff (Julius), 1882–1944, mathématicien, 115
- x, *voir* École polytechnique
- Yoccoz (Jean-Christophe), mathématicien, 44, 115
- Young (Grace Chisholm), 1868–1944, mathématicienne, 18, 23
- Young (William), 1863–1942, mathématicien, 18, 23
- Yvon-Deyme (Brigitte), bibliothécaire, 11
- Zazzo (René), 1910–1995, psychologue, 181
- Zentralblatt für Mathematik*, 178
- zeugme, 3, 121
- Zoretti (Ludovic), 1845–1948, mathématicien et homme politique, 18, 84, 179, 209
- Zweig (Liliane), bibliothécaire, 11