MATHÉMATIQUES ET THÉÂTRE

Le cas de Sophie K. (de Jean-François Peyret)

Michèle Audin

Un peu de mathématiques, pour commencer. Le mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant est *intégrable*, ici au sens où les solutions des équations différentielles qui le décrivent sont des fonctions méromorphes du temps, dans trois cas et trois cas seulement :

– le cas d'Euler, celui où le centre de gravité du solide est le point fixe ;

– le cas de Lagrange, celui où la droite joignant le centre de gravité au point fixe est un axe de révolution du solide — comme c'est le cas pour une toupie, si l'on admet que le point de contact de celle-ci avec le sol est fixe, c'est pourquoi on appelle souvent ces solides des « toupies » ;

– le cas de Kowalevskaya, où il y a aussi un axe de révolution, mais cette fois orthogonal à la droite joignant le point fixe au centre de gravité et où, de plus, le solide a une forme particulière, le $A = B = 2C$ dans la matrice d'inertie.

... Ce que nous savons depuis 1888, date où une jeune femme russe se voit attribuer par l'Académie des Sciences le prix Bordin pour un remarquable mémoire (devenu l'article [1]) dans lequel elle démontre l'assertion sur les trois cas ci-dessus et elle résout effectivement le système différentiel dans le nouveau cas qui porte désormais son nom, grâce à une remarque sur laquelle je reviendrai plus bas et à une connaissance approfondie des fonctions abéliennes et de leurs propriétés, ici sur une courbe de genre 2.

Le cas de Sophie K.

Le « cas de Sophie K » est donc une sorte de gyroscope, mais c'est aussi le cas d'une personnalité aux facettes multiples, mathématicienne, révolutionnaire, romancière[1] et, pour ceux qui préfèrent les arguments d'autorité(s), amie de Dostoïevski, première femme docteur en mathématiques, épouse du traducteur de Darwin en russe, élève de Weierstraß, j'en passe, et tout ça vite, vite, trop vite, existence ardente et fulgurante — Sophie K. meurt à quarante ans, d'une pneumonie. Oui, c'était le XIX^{e} siècle, et Sophie était une mathématicienne aux prises avec son siècle, avec les maux de son siècle, mysoginie et pneumonie notamment. Encore aux prises avec les nôtres (de siècles) où, si l'on meurt moins de pneumonie, sa brillante ! personnalité est plutôt méconnue, dans le monde

[1] auteur notamment du roman [2], qui n'est sans doute pas ce qu'elle a écrit de plus beau, mais qui est le moyen par lequel Jean-François Peyret l'a rencontrée...

même qui devrait être capable de mesurer la qualité de son apport à la science. J'y reviendrai aussi.

« Le cas de Sophie K. » est aussi, pour notre plus grande élévation scientifique et intellectuelle et donc aussi pour notre plus grand plaisir, un spectacle de Jean-François Peyret et Luc Steels, donné au Festival d'Avignon (dans le cadre somptueux de la Chartreuse de Villeneuve-lez-Avignon) en juillet 2005 et que l'on pourra, à nouveau, voir au printemps 2006 au théâtre de Chaillot à Paris. Jean-François Peyret s'intéresse depuis de nombreuses années aux relations entre science et théâtre, il a déjà monté plusieurs spectacles sur ces thèmes, comme les *Variations Darwin*, l'année dernière à Chaillot et au Théâtre National de Strasbourg (voir l'article [3], une critique théâtrale parue dans *Nature*, ce n'est pas rien !).

Une petite expérience dans le labo Peyret

S'intéressant à notre Sophie, Jean-François Peyret ne pouvait pas ne pas contacter Jacqueline Détraz, qui a publié le livre [4]. C'est sur le conseil de celle-ci (elle me connaissait comme l'un(e) des auteurs d'un travail sur la toupie de Kowalevski [5]) qu'il m'a demandé de venir participer à une après-midi de répétitions, en mai 2005, à Chaillot, une expérience à laquelle Jacqueline s'était livrée, elle aussi. Il va sans dire que j'étais très impressionnée (ne fût-ce que d'entrer dans ce temple, euh, je veux dire, palais, par l'entrée des artistes) et que je m'attendais à assister à une répétition, c'est-à-dire à écouter des acteurs réciter un texte, puis à faire deux ou trois commentaires (allais-je savoir en produire d'assez intéressants ?).

Rien de tout cela, bien entendu. Plusieurs heures avec l'équipe autour d'une table, je réponds à des questions, vagues d'abord, comment je travaille, celle-là, je m'y attendais, ce que je fais, puis la toupie, j'en ai amené une mais il y en a déjà plusieurs dans la salle de répétitions, et vous en verrez dans le spectacle, comment elle tourne, je mentionne les tores (de Liouville, j'y reviendrai), je dessine donc des bouées, puis des surfaces de genre 2, c'est joli, tout le monde trouve ça joli, il y a là les trois actrices que vous verrez dans *le Cas de Sophie K.*, Olga Kokorina, Elina Löwensohn et Nathalie Richard (par ordre alphabétique), j'explique que, s'il s'est passé presque tout le XIX^{e} siècle entre l'étude de la toupie (le cas de Lagrange) et l'article de Sophie [1], c'est parce qu'il a fallu inventer l'analyse complexe entre temps, et, bon, l'analyse complexe, elle connaissait, elle, la meilleure élève de Weierstraß (voir l'article [6] de Mittag-Leffler), quelqu'un, sans doute Jacqueline, leur a déjà dit que, dans les nombres réels, si on rencontre un obstacle, on reste bloqué, alors que dans les nombres complexes, les obstacles, on peut les contourner, je confirme et je fais encore un dessin, mais là, c'est un peu plus compliqué... il n'y avait *pas* d'obstacle réel, les obstacles, on les a introduits en disant que le temps est complexe[2], les questions deviennent plus précises, Olga (que vous entendrez dans le spectacle « imaginer » la racine carrée de -1) ne sait pas ce qu'est un nombre complexe, c'est-à-dire, elle n'a jamais réalisé qu'elle ne connaissait pas de racine carrée à un nombre négatif, Elina, passionnée, me dit, pour nous, x, y, c'est abstrait, ça ne nous dit rien, et me demande ce que je vois quand j'entends parler de x et y, s'ils sont là tous les deux, je pense à une courbe

[2] En termes mathématiques et pour les lecteurs de la *Gazette*, l'énergie totale du système est une fonction *propre* ; le mouvement, qui a lieu à énergie constante, est donc confiné sur des hypersurfaces d'énergie qui sont *compactes* les flots sont complets, rien ne part à l'infini en réel !

(c'est elle qui me l'a rappelé, elle s'en souvient encore !), j'en passe, puisque cette gymnastique épuisante mais passionnante dure plusieurs heures.

Au bout desquelles, une pause, puis les trois sœurs[3] improvisent un peu, le spectacle en est à un stade très préliminaire, mais je suis déjà impressionnée par le découpage en plusieurs plans, toujours une des actrices filmée en vidéo dans le couloir et projetée en gros plan sur le fond du plateau. Re-pause, puis re-séance de questions, tout le monde participe et toute l'équipe semble vouloir comprendre un maximum de mathématiques, Marion Stoufflet (la dramaturge), Pierre Nouvel et Valère Terrier (les « vidéastes »), Agnès de Cayeux (la webmaîtresse), Claire Béjanin (la productrice), les solutions des équations, les surfaces de Riemann... Et quand c'est fini, on recommence en allant dîner.

Ce que vous en verrez dans le spectacle ? Eh bien, voyez-vous, tout se passe comme si vous, mathématicien, vous assistiez à un séminaire, vous discutiez avec la collègue qui a fait l'exposé, vous lisiez un article d'une troisième personne, vous travailliez sur votre sujet, vous pensiez à une idée que vous aviez eue en parlant avec une quatrième collègue plusieurs mois plus tôt, et puis comme si tout ça se mettait ensemble, et comme si vous démontriez un théorème, vous écriviez un article dans lequel tout ça a joué un rôle sans pour autant que les contenus en apparaissent effectivement. Vous verrez[4] un spectacle dans lequel tout ce dont je viens de faire la liste, mais qui n'est qu'une toute petite partie de ce que l'équipe de Jean-François Peyret a dû ingurgiter, a été mélangé, digéré, a réagi avec d'autres apports, d'autres textes. C'est ce que j'ai trouvé le plus intéressant, en voyant le spectacle « fini » (l'était-il ?), de découvrir cette façon d'emmagasiner de la connaissance, cette façon de travailler, intellectuellement si proche de la nôtre. Rien d'étonnant à ce que Jean-François Peyret s'intéresse à la science, il confectionne un théâtre de l'ère scientifique (et pas seulement, comme d'autres, à l'air scientifique) dans une salle de répétition qui fonctionne comme un laboratoire.

Le *Cas de Sophie K.* que vous verrez est une sorte de collage (les critiques de l'*Humanité* [7], puis du *Monde* [8], parlaient de cubisme, c'est vrai aussi), pas moins de trois actrices, Olga, Elina et Nathalie, magnifiques et déjà nommées, pour les éclats d'une telle personnalité, encore un acteur, Graham F. Valentine, commentateur flegmatique, et un époustoufflant musicien, Alexandros Markeas, qui improvise au piano en faisant tourner une toupie sur un écran vidéo, sans compter les deux vidéastes Pierre et Valère qui filment, sous vos yeux, ce que vous verrez quelques secondes plus tard, sans parler des caméras qui filment et que vous ne voyez pas ni de celles que vous ne voyez pas et qui filment ce que vous voyez, images dans différents plans (voilà le cubisme et les « nouvelles technologies » dont se réclame Jean-François Peyret) dans un dispositif scénique d'une grande beauté, collage de textes, les *Souvenirs d'enfance* de notre Sophie (voir [4]), ceux de Gosta (voir [6]) et de sa sœur Charlotte Mittag-Leffler (voir encore [4]), Poincaré prononcé par les images presque abstraites des bouches de nos trois sœurs, Dostoïevski (si Dieu n'existe pas, Kirilov est Dieu [9]), la biographie de Vera Zasoulitch (une authentique Vera nihiliste, plus crédible que celle de [2]), Lautréamont, un spectacle raffiné, riche, intelligent et exigeant, à la hauteur de son sujet.

---

[3] La référence semble pertinente ! À la suite d'une remarque entendue ce jour-là, je découvre que, au premier acte des *Trois sœurs*, on offre une toupie à Irina, dont c'est la fête.

[4] À Paris, au théâtre national de Chaillot, salle Gémier, du 26 avril au 27 mai 2006.

Retour sur la toupie de Sophie

J'ai annoncé plusieurs fois que j'allais revenir à tel ou tel point de mathématiques. Pour éviter les malentendus, je précise que, de l'œuvre mathématique de Kowalevskaya, je ne connais que l'article sur le solide [1], que ce n'est *pas* parce que la personnalité de son auteur m'intéressait que j'ai travaillé sur ce sujet mais à l'inverse[5] parce que je travaillais sur les systèmes intégrables que j'ai dû lire cet article (que j'ai trouvé si beau que j'ai eu envie d'en parler), que Kowalevskaya a fait bien d'autres choses (Cauchy-Kowalevskaya, les anneaux de Saturne,...), pour lesquelles je renvoie à sa bibliographie dans [4].

Revenons donc à la toupie de Sophie. J'ai commencé par mettre le mot « intégrable » en italiques, avant de le définir comme « à solutions méromorphes[6] ». C'est en effet ainsi que Kowalevskaya a démontré qu'il n'existe que trois cas « intégrables ».

J'ai ensuite promis de revenir sur une certaine « remarque » de notre auteur. Eh bien, voilà, elle a trouvé ce nouveau cas en imposant que les solutions n'aient pas de singularités pires que des pôles (ce qu'on appelle aujourd'hui, assez injustement, la « propriété de Painlevé »)... mais elle a aussi remarqué que, dans ce cas[7] (comme dans ceux d'Euler et de Lagrange et comme par hasard), il y a une quantité conservée, une intégrale première, ce qui fait que le système est intégrable « au sens de Liouville » (voir les tores du même Liouville mentionnés à propos de la toupie de Lagrange). J'attire l'attention des lecteurs de la *Gazette* sur le fait que les relations entre ces deux notions d'intégrabilité, relation soulevée par [1], n'est toujours pas complètement éclaircie (voir [12] et, plus modestement, [13]).

Il est vrai que l'on s'est arrêté assez vite de s'intéresser aux systèmes intégrables, après que Poincaré ait démontré qu'il y en avait fort peu... Maintenant que la théorie des représentations (avec notamment Kirillov [14], qui n'est pas Dieu, et Kostant [15]) et celle des algèbres de Lie affines (travaux d'Adler et van Moerbeke, voir [16], de Reyman et Semenov-Tian-Shanski, et je ne pense pas seulement à [17], source de [5]) ont remis, depuis une trentaine d'années, le sujet à la mode, maintenant que la théorie de Galois différentielle [18] permet d'appréhender mieux les différentes notions d'intégrabilité, il est sans doute temps de revaloriser les qualités novatrices et révolutionnaires du travail de mathématicienne de Sophie K.

Références

[1] S. Kowalevski – « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177–232.
[2] S. Kovalevskaïa – *Une nihiliste*, Phébus, Paris, 2004.
[3] L. Spinney – « A stage of evolution », *Nature* **432** (25th november 2004), p. 445.
[4] J. Détraz – *Kovalevskaïa : l'aventure d'une mathématicienne*, Belin, Paris, 1993.

[5] À l'époque où je travaillais avec Robert Silhol sur [5], je partageais sans le savoir l'avis de Weierstraß, rapporté dans [6], sur la biographie de Kowalevskaya écrite par Charlotte Mittag-Leffler : « "Die Menschen sterben, die Gedanke bleiben", il eût suffi que la haute figure de Sonja passât à la postérité par la seule vertu de ses travaux mathématiques et littéraires. »

[6] Le système n'est pas linéaire, les solutions peuvent, *a priori*, avoir des singularités très compliquées.

[7] On peut voir des figures représentant les solides dans les trois cas en question dans l'article [10], publié dans [11].

[5] M. Audin & R. Silhol – « Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski », *Compositio Math.* **87** (1993), p. 153–229.
[6] G. Mittag-Leffler – « Weierstrass et Sonja Kowalewsky », *Acta Math.* **39** (1923), p. 133–198.
[7] J.-P. Léonardini – « L'art d'un expert en calcul mental », *l'Humanité* (12 juillet 2005).
[8] F. Darge – « Un portrait cubiste de Sofia Kovalevskaïa mathématicienne, romancière et féministe », *le Monde* (16 juillet 2005).
[9] F. Dostoïevski – *Les Démons*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, XX.
[10] P. Y. Polubarinova-Kochina – « On the scientific work of Sofya Kovalevskaya », in [11], 1978, Translated and introduced by Beatrice Stillman.
[11] S. Kovalevskaya – *A Russian childhood*, Springer, 1978, Translated and introduced by Beatrice Stillman.
[12] V. E. Zakharov (éd.) – *What is integrability ?*, Springer, Berlin, 1991.
[13] M. Audin – « Two notions of integrability », *soumis*.
[14] A. A. Kirillov – *Éléments de la théorie des représentations*, MIR, Moscou, 1974.
[15] B. Kostant – « Quantization and representation theory I : prequantization », in *Lectures in modern analysis and applications III*, Lecture Notes in Math., vol. 170, Springer, 1970.
[16] M. Adler, P. van Moerbeke & P. Vanhaecke – *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
[17] A. I. Bobenko, A. G. Reiman & M. A. Semenov-Tian-Shansky – « The Kowalevski top 99 years later », *Commun. Math. Phys.* **122** (1989), p. 321–354.
[18] J. Morales-Ruiz – *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.