

Les lecteurs studieux lisent dans les bibliothèques. Les professeurs font leurs cours. Les comptables alignent des colonnes de chiffres. Les apprentis pâtisseries fourrent de crème au beurre des rangées de petits choux. Les pianistes font leurs gammes. Assis à leurs tables, méditatifs et concentrés, les écrivains alignent des mots.

Georges Perec [64]

Je dédie ce livre à la mémoire de Nicole Desolneux-Moulis.

LES SYSTÈMES HAMILTONIENS ET LEUR INTÉGRABILITÉ

Michèle Audin

Résumé. — Ce livre présente certaines techniques modernes de la théorie des systèmes intégrables, vues comme des variations sur le thème des variables action-angle. On y trouvera des méthodes analytiques issues de la théorie de Galois des équations différentielles et, plus classiquement, les méthodes algèbro-géométriques liées aux équations de Lax, ainsi que de nombreux exemples.

Abstract (Hamiltonian systems and integrability). — This book presents some modern techniques in the theory of integrable systems, as variations on the theme of action-angle coordinates. These are analytical methods coming from the Galois theory of differential equations and—more classically—algebraic-geometric methods related to Lax equations. Many examples are also given.

Resumo (Sistemas hamiltonianos e integrabilidade). — Neste livro, introduzo técnicas modernas da teoria dos sistemas integráveis, apresentadas como variações sobre o tema das coordenadas ação-ângulo. Encontram-se métodos analíticos da teoria de Galois das equações diferenciais e — mais classicamente — métodos da geometria algébrica em relação com as equações de Lax. Apresento também muitos exemplos.

MICHÈLE AUDIN, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France • E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr • Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>

Classification mathématique par sujets (2000). — 70H05, 53C15, 12Hxx, 34A30, 14H10, 14Pxx.

Mots clefs. — Systèmes hamiltoniens, systèmes intégrables, géométrie symplectique, variables action-angle, théorème d'Arnold-Liouville, théorie de Galois différentielle, extensions de Picard-Vessiot, équations de Lax, toupies, pendule sphérique, géodésiques de l'ellipsoïde, système de Hénon-Heiles.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I. Introduction aux systèmes intégrables	7
I.1. Variétés symplectiques	7
I.2. Systèmes hamiltoniens, exemples	13
I.3. Systèmes complètement intégrables	17
I.4. Les flots géodésiques	21
I.5. Appendice: le théorème de Darboux	26
Exercices	27
II. Variables action-angles	35
II.1. Opérations hamiltoniennes de tores	35
II.2. Théorème d'Arnold-Liouville	40
II.3. Exemples	48
Exercices	52
III. Intégrabilité et groupes de Galois	57
Le théorème d'Arnold-Liouville, revu par la théorie de Galois différentielle	57
III.1. Équation aux variations, groupes de Galois et intégrales premières ..	58
III.2. Le cas d'un système hamiltonien	65
III.3. Le cas d'un système intégrable	67
III.4. Vers les applications: la réduction	77
III.5. L'exemple de Hénon-Heiles	83
III.6. Appendice: démonstration du lemme de Ziglin	86
Exercices	90

IV. Une introduction aux équations de Lax	95
Le théorème d'Arnold-Liouville, revu à travers les équations de Lax	95
IV.1. Pourquoi des courbes algébriques?	96
IV.2. Un théorème de linéarisation	100
IV.3. Le cas des géodésiques des quadriques	106
IV.4. Appendice: comment on construit des équations de Lax (un aperçu)	119
Exercices	126

Appendices

A. Ce qu'il faut savoir en théorie de Galois différentielle	135
A.1. Corps différentiels	135
A.2. Extension de Picard-Vessiot	136
A.3. Le groupe de Galois	138
A.4. Le groupe de Galois d'un système hamiltonien est symplectique	141
A.5. Un exemple: l'équation d'Airy	142
Exercices faciles sur la théorie de Galois différentielle	147
B. Ce qu'il faut savoir sur les courbes algébriques	149
B.1. Courbes complexes et surfaces de Riemann	149
B.2. Fibrés en droites sur les courbes	151
B.3. Faisceaux et cocycles	153
B.4. Groupe de Picard, Riemann-Roch, jacobienne	154
Exercices de compréhension des définitions	158
Bibliographie	161
Index	167

INTRODUCTION

Ce texte est une introduction à quelques aspects topologiques, analytiques et algèbro-géométriques de la théorie des systèmes hamiltoniens complètement intégrables.

Les systèmes hamiltoniens sont les équations différentielles qui décrivent les mouvements d'un objet dont l'énergie est conservée (mécanique conservative). Certains de ces systèmes se laissent intégrer « par quadratures », ce sont les systèmes hamiltoniens complètement intégrables. Un exemple que tous les enfants connaissent est celui du mouvement d'une toupie. Les mouvements d'une particule libre sur une surface de révolution ou un ellipsoïde sont d'autres exemples simples de systèmes complètement intégrables.

Ce qu'on trouvera dans ce texte. — La théorie des systèmes intégrables trouve des méthodes, des adeptes et des champs d'applications dans la plupart des domaines des mathématiques. Elle a donc fait l'objet d'immenses quantités de travaux. Aucun livre — fût-il dix fois plus volumineux que cet opuscule — ne peut rendre compte de tous ces aspects.

Les systèmes intégrables appartiennent à la mécanique hamiltonienne (conservative), c'est-à-dire, aujourd'hui, à la géométrie symplectique, et ils ont beaucoup de quantités conservées, d'« intégrales premières ». C'est à cette définition qu'est consacré le premier chapitre.

Le point central de l'étude présentée ici est le théorème d'Arnold-Liouville, qui décrit les propriétés des solutions pour lesquelles les valeurs de ces quantités conservées sont assez générales. Il y a des coordonnées dans lesquelles ces systèmes ont des formes très simples. On a dit que ces systèmes sont « intégrables par quadratures ». Géométriquement : les trajectoires sont dessinées sur des tores et elles sont *linéaires* sur ces tores (figure 1). C'est le théorème d'Arnold-Liouville, à la démonstration et à quelques illustrations duquel est consacré le chapitre II.

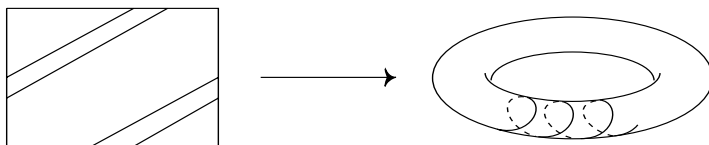


FIGURE 1

L'étude bifurque ensuite dans deux directions indépendantes entre elles :

- vers la théorie algébrique des équations différentielles. Le théorème d'Arnold-Liouville affirme que les solutions proches d'une solution assez générale sont de même nature que leur voisine (figure 1 encore). Il est alors tentant de regarder ce qui se passe, en général, pour les solutions (infinitésimalement) voisines d'une trajectoire d'un champ hamiltonien. Le mot que je viens de mettre entre parenthèses indique qu'on a linéarisé l'équation différentielle. Avec des hypothèses convenables d'analyticité, on peut utiliser la théorie de Picard-Vessiot (théorie de Galois différentielle). Le résultat le plus intéressant est un théorème de Morales et Ramis [58] qui affirme que le groupe de Galois différentiel de l'équation linéarisée ne peut pas être trop compliqué (sa composante neutre reste un groupe abélien) quand le système est intégrable. Ce théorème peut servir, effectivement, à montrer que tel ou tel système hamiltonien n'est *pas* complètement intégrable.
- vers la géométrie algébrique, qui est capable, dans certaines situations, de préciser, voire de rendre effectif, le théorème d'Arnold-Liouville. Si le système différentiel peut s'écrire comme une « équation de Lax », il lui est associé une (famille de) courbe(s) algébrique(s) qui entraîne à sa suite la (famille des) jacobienne(s), des tores prêts à jouer le rôle de tores de Liouville. Je montrerai notamment comment cette machinerie peut fournir la réponse à des questions naïves et concrètes, par exemple, comment savoir si une valeur des intégrales premières est « générale ».

Deux appendices résument les définitions et propriétés utiles de la théorie de Galois différentielle d'une part, des courbes algébriques de l'autre.

Si les aspects algébro-géométriques ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux, voire de livres, il n'en est pas de même des aspects « galoisiens ». Une de mes ambitions en rédigeant ce livre a été de comprendre, puis de populariser, le beau théorème de Morales et Ramis en le donnant à lire à un public moins spécialisé que celui pour lequel ont été écrits les textes originaux. Le critère de non-intégrabilité dont il est question appartient au monde de la théorie de Galois différentielle, il n'en concerne pas moins les objets de la géométrie !

C'est pourquoi je me suis efforcée

- d'utiliser les exemples les plus classiques et surtout les plus élémentaires possibles. L'exemple principal utilisé ici comme illustration des techniques galoisiennes (un cas du système de Hénon-Heiles menant à l'équation d'Airy), qui est sans doute l'exemple le plus simple possible, n'apparaît pas dans les articles originaux ;
- de clarifier un peu la situation en séparant
 - ce qui relève de la théorie générale des équations différentielles (équation aux variations, formes initiales, intégrales premières, groupes de Galois) et
 - ce qui relève effectivement de la géométrie symplectique.

De même, j'ai essayé de dépouiller un peu les arguments des démonstrations pour aller droit au but poursuivi ;

- de rester à un niveau acceptable : ces notes sont celles d'un cours de DEA, professé devant d'authentiques étudiants, auxquels la simplicité de la présente rédaction doit d'ailleurs beaucoup.

Je crois beaucoup à la vertu des exemples. Il y en a donc de nombreux (bien classiques, je l'ai dit, mais ce sont les meilleurs) dans les chapitres I et II. Si les mathématiques utilisées dans le chapitre III ne sont pas plus difficiles que dans les deux premiers, les *applications* du théorème de Morales & Ramis sont plus élaborées. Ce chapitre contient donc, hélas, surtout des exemples académiques. Le chapitre IV, quant à lui, est presque exclusivement constitué d'exemples — le principal étant celui des géodésiques des quadriques.

Les exercices. — Chaque chapitre se termine par une série d'exercices. La plupart sont des applications directes du cours. Contrairement à la tradition, aucune démonstration sérieuse n'a été laissée en exercice.

L'index. — J'ai fait un effort particulier pour que l'index soit le plus complet et le plus redondant possible, des conditions indispensables à son utilisabilité.

Les notations. — Elles sont aussi standard que possible. Je ne voyais pas l'intérêt de désigner par $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le stabilisateur de l'élément x pour l'opération du groupe G , par G_x une forme symplectique ou par ω l'espace projectif complexe, je me suis donc conformée à la tradition. J'utilise les caractères *penchés* pour désigner les notions que je suis en train de définir. Les *italiques* ont, eux, une fonction emphatique.

Ce qu'on n'y trouvera pas. — Beaucoup de choses, on l'a dit, parmi lesquelles

- l'utilisation de la machinerie algébro-géométrique pour le décompte des tores de Liouville, sujet sur lequel je n'aurais pu que répéter [9],
- des exemples de systèmes intégrables en dimension infinie, pas d'équation de Korteweg-de Vries, pas de diffusion inverse, sujets auxquels on pourra s'initier en lisant le petit livre de Moser [62] et l'article de Segal dans [39],
- les questions de perturbation, voir aussi [62].

Note bibliographique. — J'utilise les bases du calcul différentiel sur les variétés (champs de vecteurs, formes différentielles, dérivée de Lie) pour lesquelles je renvoie les lectrices, par exemple, à [51] ou au tome I de [71]. J'utilise aussi la définition d'un groupe et d'une algèbre de Lie (et pas beaucoup plus)⁽¹⁾ et les notions de base sur les groupes opérant sur les variétés (qu'on trouvera par exemple dans [18] et aussi dans [6]). À partir de là, ce texte est « autonome » au sens où il contient toutes les définitions des objets utilisés et toutes les démonstrations, à l'exception

- de celles de l'unicité des extensions de Picard-Vessiot et de l'algébricité du groupe de Galois, qu'on trouvera dans [54],
- de celle de la trivialité des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces de Riemann ouvertes, que j'utilise de façon très marginale et qu'on trouvera dans [26],
- de quelques résultats sur les surfaces de Riemann (complétion, Riemann-Roch...) utilisés au chapitre IV et énumérés dans l'appendice B, qu'on trouvera dans [68].

Pendant l'année 1999, j'ai donné trois cours sur les systèmes intégrables, dans lesquels j'ai eu l'occasion d'expliquer les quelques aspects présentés dans ce livre :

- à Lisbonne en juin, où j'avais surtout en vue les aspects algébro-géométriques (ici le chapitre IV),
- au CIRM en juillet (la partie « galoisienne », ici le chapitre III, n'y ayant été évoquée qu'assez rapidement et la partie algébro-géométrique pas du tout) pour l'école « Symétries et application moment », organisée par Patrick Iglesias et Elisa Prato,
- à Strasbourg à l'automne (cours de DEA), où j'ai présenté tout le contenu du livre, à l'exception du chapitre IV, et en particulier, assez en détail, la partie galoisienne.

Ce livre émane des notes que j'ai écrites pour les « étudiants » de tous ces cours.

Remerciements. — Je remercie tous les participants, étudiants, auditeurs de ces divers cours et plus particulièrement l'assistance chaleureuse du cours de Lisbonne. La ténacité et la fidélité des auditeurs qui m'ont subie deux fois par jour pendant deux longues semaines m'ont beaucoup touchée et impressionnée.

Un remerciement spécial à Ana Cannas da Silva qui, non contente d'avoir organisé le cours à Lisbonne⁽²⁾, a suivi très activement le cours à Marseille en y apportant par ses remarques et questions, de nombreuses corrections et améliorations.

La partie galoisienne a été essentiellement mise au point pendant le groupe de travail sur le théorème de Morales & Ramis que Claudine Mitschi et moi-même

⁽¹⁾ Les lecteurs pourront, pour ceci aussi, consulter [51].

⁽²⁾ Um mês de junho muito agradável em Lisboa... É um grande prazer agradecer o convite.

avons organisé à Strasbourg au printemps 1999. La plus grande partie de ce que j'ai compris en théorie de Galois différentielle vient des exposés et explications de Claudine Mitschi. Elle a aussi relu un brouillon d'une partie de ce texte et m'a aidée à l'améliorer. Qu'elle en soit remerciée.

Je remercie aussi Leonor Godinho, Christelle Holtzmann, Marie-Laure Kostyra et Julien Stiker pour leur lecture attentive de tout ou partie de diverses versions préliminaires, pour leurs commentaires et les corrections qu'ils m'ont suggérées.

Un rapporteur anonyme et débonnaire a exprimé quelques désirs que je me suis empressée de satisfaire. Qu'il soit remercié pour les améliorations qui en ont résulté.

Enfin, je remercie Raymond Seroul, qui a dessiné les plus belles des figures que ce livre contient, et Claude Sabbah.

CHAPITRE I

INTRODUCTION AUX SYSTÈMES INTÉGRABLES

Les systèmes intégrables sont — en particulier — des systèmes différentiels définis par des champs de vecteurs⁽¹⁾ « hamiltoniens » sur les variétés symplectiques.

Dans ce chapitre, je rappelle donc brièvement les notions utiles de géométrie symplectique et donne des exemples de systèmes intégrables. Je renvoie les lecteurs à leurs livres de géométrie symplectique préférés ([53, 6] ou autres) et notamment à [4].

I.1. Variétés symplectiques

I.1.a. Espaces vectoriels symplectiques. — Ce sont les espaces vectoriels réels munis de formes bilinéaires alternées *non dégénérées*. L'exemple archétypique et, on va le voir, unique, est celui de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, muni de la forme

$$\omega((q, p), (q', p')) = p \cdot q' - p' \cdot q$$

(le point $\cdot$ désignant bien sûr le produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^n$).

En réalité, il n'y a qu'un exemple, comme l'affirme la proposition suivante.

Proposition I.1.1. — *Soit ω une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension finie. Il existe une base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ (dite symplectique) telle que $\omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$, et $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$.*

Démonstration. — Comme ω est non dégénérée, elle n'est pas nulle et on peut trouver deux vecteurs e_1 et f_1 tels que $\omega(e_1, f_1) = 1$. On vérifie que ω se restreint en une forme *non dégénérée* à l'orthogonal (pour ω) du plan $\langle e_1, f_1 \rangle$ et on conclut par récurrence sur la dimension, après avoir remarqué qu'une forme bilinéaire alternée sur un espace de dimension 1 est nulle. $\square$

⁽¹⁾Un champ de vecteurs sur une variété est une équation différentielle, celle dont les solutions sont ses courbes intégrales. Voir [2]. Voir aussi la note 1 de l'appendice A.

En particulier, la dimension de E est paire et c'est le seul invariant du type d'isomorphisme de (E, ω) . Dans une base symplectique, la matrice de la forme bilinéaire ω est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple I.1.2. — Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$, la base

$$((0, e_1), \dots, (0, e_n), (e_1, 0), \dots, (e_n, 0))$$

est une base symplectique de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Exercices I.1, I.2.

Le groupe symplectique. — C'est le groupe des isométries de ω , c'est-à-dire des isomorphismes linéaires g tels que

$$\omega(gX, gY) = \omega(X, Y) \text{ pour tous } X \text{ et } Y \text{ dans } E.$$

Dans une base symplectique où $\omega(X, Y)$ s'écrit tXY , il s'agit des matrices g telles que

$${}^tgJg = J.$$

C'est un sous-groupe algébrique de $\text{GL}(2n; \mathbf{R})$: les équations sont des polynômes en les coefficients de g . On le note $\text{Sp}(2n; \mathbf{R})$. Son algèbre de Lie, espace tangent en Id , est formée des matrices A qui satisfont à

$${}^tAJ + JA = 0,$$

équation linéaire qu'on obtient en différentiant, au point Id , l'équation ${}^tgJg - J = 0$.

Exercices I.5, I.25.

Sous-espaces isotropes, lagrangiens. — On dit qu'un sous-espace F de l'espace symplectique E est *isotrope* s'il est contenu dans son orthogonal symplectique ($F \subset F^\circ$). On dit alors aussi que F° est *co-isotrope*.

Comme la forme ω est non dégénérée, on a, pour tout sous-espace F ,

$$\dim F + \dim F^\circ = \dim E.$$

Si on suppose que $\dim E = 2n$ et que F est un sous-espace isotrope, on a donc $\dim F \leq n$. Il existe des sous-espaces isotropes de dimension n , par exemple le sous-espace engendré par la « moitié » $(e_1, \dots, e_n)$ d'une base symplectique. Ces sous-espaces sont dits *lagrangiens*.

Exercices I.3, I.4, I.6.

I.1.b. Variétés symplectiques, définition. — Essayons de comprendre ce que pourrait être la définition d'une *variété symplectique*. On demandera d'abord que chaque espace tangent soit muni de la structure vectorielle définie ci-dessus : la variété W sera munie d'une 2-forme différentielle ω , c'est à dire, pour chaque x , d'une forme bilinéaire alternée ω_x sur $T_x W$. On veut en plus que chaque ω_x soit non dégénérée, ce qu'on peut écrire⁽²⁾, si la dimension, nécessairement paire, de W est $2n$

$$\wedge^n \omega_x \neq 0 \in \wedge^{2n} T_x^* W$$

pour tout x . Autrement dit, on demande que la $2n$ -forme $\omega^{\wedge n}$ soit une forme volume sur W . Notons qu'en particulier, la variété W doit posséder une forme volume et donc être orientable.

En fait cette définition est insuffisante : on veut aussi que le calcul différentiel que ω permet de faire sur W soit localement le même que celui qu'on sait faire sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme « constante » (celle décrite au début du § I.1.a). Écrivons donc cette forme comme une forme différentielle : les vecteurs de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ sont notés $X = (q, p)$, $X' = (q', p')$ de sorte qu'on a

$$\omega(X, X') = p \cdot q' - p' \cdot q.$$

Autrement dit

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = d\left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i\right)$$

en particulier, ω est une forme *exacte*. On pourrait demander à une forme symplectique d'être une forme exacte... malheureusement, ceci interdirait d'utiliser des variétés compactes. On a en effet :

Proposition I.1.3. — *Sur une variété compacte, il n'existe aucune 2-forme qui soit à la fois non dégénérée et exacte.*

Démonstration. — On a dit que ω est non dégénérée si et seulement si $\omega^{\wedge n}$ est une forme volume. Comme W est compacte, on sait que les formes volumes ne sont pas exactes⁽³⁾. Or, si ω était exacte, on aurait $\omega = d\alpha$, mais alors la forme volume $\omega^{\wedge n}$ serait exacte : $\omega^{\wedge n} = d(\alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)})$. $\square$

En réalité, si on veut calculer *localement* comme dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, ce qu'il faut utiliser, c'est une condition d'« exactitude locale »... c'est-à-dire de fermeture. Ce qui nous amène à la bonne définition⁽⁴⁾.

Définition I.1.4. — Une *variété symplectique* est un couple (W, ω) où W est une variété et ω une 2-forme fermée non dégénérée. Une telle forme ω est dite *symplectique*

⁽²⁾Voir au besoin l'exercice I.2.

⁽³⁾Voir les rudiments de cohomologie de de Rham par exemple dans [51] ou dans le chapitre VIII du tome I de [71].

⁽⁴⁾Voir aussi la note 20.

Bien entendu, on commettra souvent l'abus d'appeler W une variété symplectique, sans mentionner la forme ω quand il n'y aura pas d'ambiguïté à redouter.

I.1.c. Exemples de variétés symplectiques. — Évidemment, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme constante $\sum dp_i \wedge dq_i$, est une variété symplectique.

Les cotangents. — Si V est une variété, on considère l'espace total de son fibré cotangent, avec la projection :

$$\pi : T^*V \longrightarrow V.$$

Sur T^*V , il y a une 1-forme différentielle *canonique* α (voir l'exercice I.7), dite *forme de Liouville*, définie par :

$$\alpha_{(x,\varphi)}(X) = \varphi(T_{(x,\varphi)}\pi(X))$$

où $x \in V$, $\varphi \in T_x^*V$ et $X \in T_{(x,\varphi)}(T^*V)$. On vérifie aisément que $\omega = d\alpha$ est non dégénérée (et encore plus aisément qu'elle est fermée!). Si $(q_1, \dots, q_n)$ sont des coordonnées locales sur V et si $(p_1, \dots, p_n)$ sont les coordonnées « duales », alors $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ est un système de coordonnées locales dans lequel $\alpha = \sum p_i dq_i$ et $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. On dit souvent que ω est la « forme symplectique canonique » sur le cotangent⁽⁵⁾. L'exemple de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ci-dessus peut être considéré comme le cas où $V = \mathbf{R}^n$.

L'espace des droites. — L'espace $\mathcal{D}_n$ des droites (affines) orientées de $\mathbf{R}^{n+1}$ est une variété symplectique de dimension $2n$: on l'identifie à

$$\left\{ (p, u) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 = 1 \text{ et } p \cdot u = 0 \right\}$$

(voir la figure 1) qui est symplectique comme sous-variété de $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$ ou comme fibré (co)tangent à la sphère S^n .

Exercices I.7, I.9, I.13.

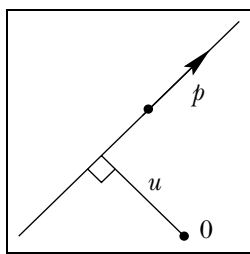


FIGURE 1. Espace des droites

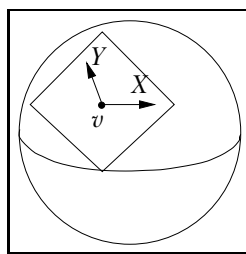


FIGURE 2. Forme symplectique sur la sphère

⁽⁵⁾Voilà encore un exemple de forme symplectique exacte, bien sûr sur une variété non compacte.

Les surfaces. — Sur une surface W , toutes les formes différentielles de degré 2 sont fermées. De plus, en dimension 2, dire qu'une 2-forme est non dégénérée veut simplement dire qu'elle ne s'annule en aucun point. Sur une surface, la notion de forme symplectique coïncide donc avec celle de forme volume : toutes les surfaces orientables peuvent être considérées comme des variétés symplectiques.

Exemple I.1.5. — On considère la sphère unité S^2 de $\mathbf{R}^3$, dont l'espace tangent en un point v est le plan orthogonal au vecteur unitaire v . On pose

$$\omega_v(X, Y) = v \cdot (X \wedge Y)$$

(figure 2). C'est une 2-forme non dégénérée (vérification immédiate) et donc une forme symplectique.

Exercice I.8.

On peut démontrer (c'est le célèbre « théorème de Darboux », voir le §I.5) que toutes les variétés symplectiques sont *localement* isomorphes à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme $\sum dp_i \wedge dq_i$.

Variétés symplectiques complexes. — Au chapitre III, on aura besoin de variétés symplectiques *complexes*. Une variété *symplectique complexe* est

- une variété analytique complexe W (les changements de cartes sont analytiques)
- munie d'une 2-forme fermée complexe ω non dégénérée (sur chaque espace tangent, ω est une forme bilinéaire complexe non dégénérée) *holomorphe*, c'est-à-dire que, dans des coordonnées locales analytiques complexes, on a

$$\omega = \sum f_{i,j} dz_i \wedge dz_j$$

où les $f_{i,j}$ sont des fonctions holomorphes.

I.1.d. Champs de vecteurs hamiltoniens. — Si $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction, la forme symplectique permet de lui associer un champ de vecteurs, une sorte de gradient, le *champ hamiltonien* X_H (parfois appelé le « gradient symplectique » de H). C'est le champ de vecteurs défini par la relation

$$\omega_x(Y, X_H(x)) = (dH)_x(Y) \text{ pour tout } Y \in T_x W$$

(ou par $i_{X_H} \omega = -dH$).

On remarque que le champ X_H s'annule en x si et seulement si x est un point critique de la fonction H :

$$X_H(x) = 0 \iff (dH)_x = 0.$$

En particulier, les singularités (ou zéros) d'un champ de vecteurs hamiltonien sont les points critiques d'une fonction.

On remarque aussi que la fonction H est constante sur les trajectoires ou courbes intégrales du champ X_H : comme ω_x est alternée, on a $(dH)(X_H) = 0$ ou $X_H \cdot H = 0$.

Exercice I.11.

I.1.e. Crochet de Poisson. — Supposons maintenant que f et g soient deux fonctions sur W . On définit leur « crochet de Poisson » $\{f, g\}$ par la formule

$$\{f, g\} = X_f \cdot g = dg(X_f).$$

On remarque immédiatement qu'on a

$$\{f, g\} = dg(X_f) = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -df(X_g) = -X_g \cdot f = -\{g, f\}.$$

Cette suite d'égalités montre que le crochet est anti-symétrique en f et g . Par définition aussi, c'est une dérivation (en chacune de ses variables), c'est-à-dire qu'il satisfait à l'identité de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Crochet des champs de vecteurs hamiltoniens. — En utilisant la formule générale

$$\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X, Y]}$$

et la formule de Cartan

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d,$$

on obtient

$$\begin{aligned} i_{[X_f, X_g]} \omega &= \mathcal{L}_{X_f} i_{X_g} \omega - i_{X_g} \mathcal{L}_{X_f} \omega \\ &= di_{X_f} i_{X_g} \omega + i_{X_f} di_{X_g} \omega - i_{X_g} di_{X_f} \omega - i_{X_g} i_{X_f} d\omega \\ &= di_{X_f} i_{X_g} \omega = d(\omega(X_g, X_f)) = d\{f, g\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire le fait que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

On a donc aussi

$$[X_f, X_g] \cdot h = \{\{f, g\}, h\}.$$

On va en déduire que le crochet de Poisson satisfait aussi à l'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

et donc définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(W)$, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(W) &\longrightarrow \mathcal{X}(W) \\ f &\longmapsto X_f \end{aligned}$$

étant un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathcal{C}^\infty(W)$ (munie du crochet de Poisson) dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs (munie du crochet de Lie des champs de vecteurs).

Démonstration de l'identité de Jacobi. — On applique la définition du crochet des champs de vecteurs :

$$[X_f, X_g] \cdot h = X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h),$$

celle du crochet de Poisson et l'égalité démontrée ci-dessus pour obtenir

$$\begin{aligned}\{\{f, g\}, h\} &= [X_f, X_g] \cdot h \\ &= X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h) \\ &= X_f \cdot \{g, h\} - X_g \cdot \{f, h\} \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\},\end{aligned}$$

ce qui, compte-tenu de l'anti-symétrie du crochet de Poisson, est équivalent à l'identité de Jacobi. $\square$

Remarque I.1.6. — Plus généralement, un *crochet de Poisson* sur une variété V est une structure d'algèbre de Lie, notée $\{, \}$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(V)$ des fonctions sur V , le crochet $\{, \}$ satisfaisant en outre à l'identité de Leibniz. On en verra des exemples non symplectiques au §IV.4.a.

Exercices I.10, I.15, I.16, I.17.

I.2. Systèmes hamiltoniens, exemples

Un système hamiltonien est simplement un système différentiel associé à un champ de vecteurs hamiltonien. C'est une équation différentielle

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t))$$

pour une certaine fonction H sur la variété symplectique W . Par exemple, si H est une fonction sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, le système hamiltonien⁽⁶⁾ associé est le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

en notations abrégées où $q = (q_1, \dots, q_n)$ et $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Les exemples de systèmes hamiltoniens que je présente dans ce livre sont des pendules, des solides (toupies), des flots géodésiques (je leur réserve un traitement spécial, au §I.4), plus quelques exemples académiques.

I.2.a. L'oscillateur harmonique. — On appelle ainsi le système différentiel qui décrit, par exemple, l'allongement d'un ressort (sans amortissement) ou un circuit « RLC » sans résistance ($R = 0$). L'équation différentielle est $\ddot{q} = -aq$ pour un certain réel $a > 0$.

⁽⁶⁾Voir l'exercice I.10 pour une expression en coordonnées du champ X_H .

La variété symplectique est $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On suppose ici que $a = 1$ (voir plus généralement l'exercice I.12). Le hamiltonien est alors

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

et le système différentiel est simplement

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -q.$$

Il est bien entendu équivalent à l'équation différentielle $\ddot{q} = -q$. Ses solutions sont données par $q = A \cos(t - t_0)$, $\dot{p} = -A \sin(t - t_0)$. Les trajectoires ont pour supports les niveaux de H , c'est-à-dire les cercles centrés à l'origine.

On peut construire des systèmes hamiltoniens en dimension plus grande en couplant plusieurs oscillateurs harmoniques, c'est-à-dire en considérant des hamiltoniens sur $\mathbf{R}^{2n}$ de la forme

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \sum a_i q_i^2.$$

Exercice I.12.

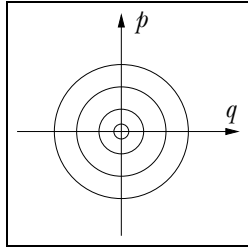


FIGURE 3. Oscillateur harmonique

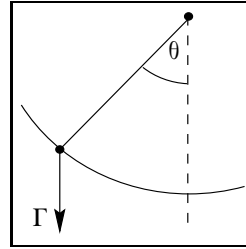


FIGURE 4. Pendule simple

I.2.b. Les rotations sur la sphère. — La sphère unité S^2 de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ est munie, comme on l'a vu dans l'exemple I.1.5, de la forme ω définie par

$$\omega_v(X, Y) = v \cdot (X \wedge Y).$$

On considère le hamiltonien $H(x, y, z) = z$. Appelons e_3 le « troisième » vecteur de base, de sorte que $H(v) = v \cdot e_3$. Le champ hamiltonien est le champ X tangent à S^2 et satisfaisant, pour tout $Y \in T_v S^2 = v^\perp$, à

$$v \cdot (X \wedge Y) = -(dH)_v(Y) = -Y \cdot e_3,$$

c'est-à-dire, pour tout $Y \in v^\perp$,

$$Y \cdot (v \wedge X - e_3) = 0.$$

La condition est donc équivalente au fait que $v \wedge X - e_3$ soit colinéaire à v , ce qui donne $X_H(v) = v \wedge e_3$. Les trajectoires de X_H sont les cercles intersections des plans horizontaux avec la sphère.

I.2.c. Le pendule simple. — Le pendule simple est le système mécanique constitué par une bille (pesante) attachée à une corde (supposée, bien sûr, non pesante et non élastique) dont l'autre extrémité est fixe, dans un champ de pesanteur constant (voir la figure 4).

On considère ici que la bille se meut dans un plan vertical. Désignons par θ l'angle fait par la corde du pendule avec la verticale (direction de la pesanteur). L'équation différentielle décrivant le mouvement de la bille est $\ddot{\theta} = -\sin \theta$.

L'espace de phases est $S^1 \times \mathbf{R}$. Utilisons une variable réelle q dont θ est la réduction modulo 2π et la variable duale $p = \dot{q}$. L'équation différentielle est équivalente au système

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\sin q,$$

qui est le système hamiltonien associé à la fonction $H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q = \frac{1}{2}p^2 - \cos \theta$, l'énergie totale du pendule simple.

Exercice I.18.

Passons maintenant à des exemples « à deux degrés de liberté », c'est-à-dire sur des variétés symplectiques de dimension 4.

I.2.d. Le système de Hénon-Heiles. — La variété symplectique est $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ et le hamiltonien la fonction

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1) - \frac{\lambda}{3}q_1^3.$$

Le champ de vecteurs X_H est

$$X_H(q_1, q_2, p_1, p_2) = (p_1, p_2, q_2^2 + \lambda q_1^2, 2q_2(A + q_1)).$$

Appelons E le sous-espace (symplectique) d'équations $q_2 = p_2 = 0$. Si $x = (q_1, 0, p_1, 0)$ est un point de E , on a

$$X_H(x) = (p_1, 0, \lambda q_1^2, 0).$$

Le champ hamiltonien X_H est donc *tangent* au sous-espace E . Il y a donc des solutions du système hamiltonien qui sont *contenues* dans E . Si $\lambda = 0$, ce sont les droites $(p_1 t + q_1^0, 0, p_1, 0)$. Cet exemple « académique » et ces solutions seront utilisés au chapitre III.

Exercice I.19.

I.2.e. Un oscillateur anharmonique. — La variété symplectique est toujours $\mathbf{R}^4$ et le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \lambda q_2^2 + (q_1^2 + q_2^2)^2$$

(λ est une constante non nulle). Le champ hamiltonien est

$$X_H(q_1, q_2, p_1, p_2) = (p_1, p_2, -4(q_1^2 + q_2^2)q_1, -2\lambda q_2 - 4(q_1^2 + q_2^2)q_2).$$

Comme dans l'exemple I.2.d, le champ X_H est tangent au sous-espace E d'équations $q_2 = p_2 = 0$. Les solutions contenues dans ce plan ont pour supports les courbes d'équations

$$\frac{1}{2}p_1^2 + q_1^4 = h, \quad q_2 = p_2 = 0.$$

I.2.f. Le pendule sphérique. — Dans le système appelé « pendule simple », la bille se mouvait dans un plan. On la laisse maintenant évoluer dans l'espace, sur la sphère centrée à l'extrémité fixe de la corde. On appelle « pendule sphérique » le système décrit sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ par le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \Gamma \cdot q$$

où p et q désignent des vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et Γ le champ de pesanteur constant « vertical ».

L'espace de phases est

$$TS^2 = \left\{ (q, p) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|q\|^2 = 1 \text{ et } q \cdot p = 0 \right\},$$

(c'est bien le fibré tangent à la sphère S^2) muni de la restriction de la forme symplectique de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, qui est encore une forme symplectique (voir au besoin l'exercice I.13).

Le champ hamiltonien est l'unique champ (Y, X) tangent à TS^2 et satisfaisant à

$$(dH)_{(q,p)}(\eta, \xi) = \omega((\eta, \xi), (Y, X)) = \xi \cdot Y - \eta \cdot X$$

pour tout vecteur (η, ξ) tangent à TS^2 . Maintenant,

$$(dH)_{(q,p)}(\eta, \xi) = p \cdot \xi - \Gamma \cdot \eta$$

et le fait que (Y, X) est tangent à TS^2 en (q, p) s'exprime par les conditions $Y \cdot q = 0$ et $Y \cdot p + q \cdot X = 0$. L'unique solution est $Y = p$ et $X = \Gamma - (q \cdot \Gamma + \|p\|^2)q$ et le système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \Gamma - (q \cdot \Gamma + \|p\|^2)q. \end{cases}$$

Exercices I.13, I.14.

I.2.g. Le solide avec un point fixe. — Il s'agit d'un solide de centre de gravité G , avec un point O fixé, dans un champ de pesanteur constant.

Il est pratique, pour écrire les équations du mouvement, d'utiliser un repère lié au solide. Le champ de pesanteur constant est un vecteur Γ dépendant du temps (dans le repère mobile). Le moment angulaire est appelé M . Il est lié à la rotation instantanée Ω du solide par la relation $M = \mathcal{J}(\Omega)$ pour un certain endomorphisme symétrique constant $\mathcal{J}$, l'inertie (voir par exemple [9]).

L'énergie totale du solide est alors

$$H(\Gamma, M) = \underbrace{\frac{1}{2}M \cdot \Omega}_{\text{cinétique}} + \underbrace{\Gamma \cdot L}_{\text{potentielle}}$$

où L désigne le vecteur $\overrightarrow{GO}$.

En application des lois de la mécanique, on montre que le système différentiel décrivant le mouvement du solide est

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L \end{cases}$$

Le vecteur Γ n'est, certes, plus constant, mais il reste unitaire⁽⁷⁾. On sait aussi que la quantité $\Gamma \cdot M$, moment du solide par rapport à la verticale⁽⁸⁾, est conservée. Les vecteurs Γ et M sont donc contraints à rester sur la sous-variété

$$W_a = \left\{ (\Gamma, M) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ et } \Gamma \cdot M = a \right\}.$$

Cette sous-variété est difféomorphe au fibré tangent de la sphère S^2 , par l'application

$$(\Gamma, M) \longmapsto (\Gamma, M - a\Gamma).$$

On peut la munir d'une forme symplectique ω pour laquelle le système différentiel est le système hamiltonien associé à l'énergie H . Attention, ω n'est *pas* la structure symplectique canonique du fibré tangent à S^2 . C'est ici⁽⁹⁾ la forme

$$\omega_{(\Gamma, M)}((\xi, \eta), (\xi', \eta')) = (\xi \wedge M + \Gamma \wedge \eta) \cdot \xi' + (\Gamma \wedge \xi) \cdot \eta'.$$

Exercice I.20.

I.3. Systèmes complètement intégrables

I.3.a. Définition des systèmes complètement intégrables. — Le hamiltonien H est constant le long des trajectoires du système hamiltonien qu'il définit. Ceci s'écrit

$$X_H \cdot H = 0 \text{ ou } dH(X_H) = 0.$$

On dit que H est une intégrale première du système. Plus généralement, une fonction $f : W \rightarrow \mathbf{R}$ qui est constante sur les trajectoires d'un champ de vecteurs X est appelée une *intégrale première*. Dans le cas d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H , l'égalité $X_H \cdot f = 0$ équivaut à $\{f, H\} = 0$.

On dit qu'un système hamiltonien est complètement intégrable s'il a « autant d'intégrales premières en involution que possible ».

⁽⁷⁾Les unités étant convenablement choisies...

⁽⁸⁾Par définition, la « verticale » est la direction du champ de pesanteur.

⁽⁹⁾La variété W_a est une « orbite adjointe », c'est de là que vient la forme en question. Voir par exemple [9].

Voici une explication de texte, pour rendre cette définition plus formelle :

- Soient $f_1, \dots, f_k$ des intégrales premières du système X_H . Dire qu'elles sont « en involution », c'est dire qu'on a $\{f_i, f_j\} = 0$ pour tous i et j . Chacune est constante sur les trajectoires du champ hamiltonien défini par chacune.
- On aurait pu parler plutôt⁽¹⁰⁾ d'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}^\infty(W)$, contenant H et abélienne au sens où

$$f, g \in \mathcal{A} \implies \{f, g\} = 0.$$

- Venons-en au « autant que possible » : en chaque point x de W , le sous-espace de $T_x W$ engendré par les champs hamiltoniens des fonctions de $\mathcal{A}$ est isotrope :

$$\omega(X_f, X_g) = \pm \{f, g\} = 0.$$

Sa dimension est donc au plus $n = \frac{1}{2} \dim W$. On demande donc que, au moins pour x dans un ouvert dense de W , ce sous-espace soit de dimension maximale n .

- Remarquons enfin que les vecteurs X_{f_i} sont indépendants en x si et seulement si les formes linéaires $(df_i)_x$ sont indépendantes.

Définition I.3.1. — Le champ hamiltonien X_H sur la variété symplectique W de dimension $2n$ est dit *complètement intégrable* s'il possède n intégrales premières indépendantes en involution.

Exemple I.3.2. — Sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme symplectique standard, tout hamiltonien ne dépendant que des coordonnées p_i ,

$$H = H(p_1, \dots, p_n)$$

est complètement intégrable : les fonctions p_i sont des intégrales premières indépendantes en involution.

Tout système hamiltonien sur une surface est complètement intégrable. De même, un système hamiltonien sur une variété symplectique de dimension 4 est intégrable si et seulement si il possède une « deuxième intégrale première ».

I.3.b. L'oscillateur harmonique et le pendule simple. — Je renvoie aux §§I.2.a et I.2.c pour ces exemples. Ce sont des systèmes hamiltoniens sur des variétés de dimension 2, ils sont donc (automatiquement) complètement intégrables.

I.3.c. Le système de Hénon-Heiles. — On connaît une deuxième intégrale première de ce système (introduit au §I.2.d) pour certaines valeurs des paramètres A et λ . C'est le cas notamment pour $\lambda = 6$.

Exercice I.21.

⁽¹⁰⁾Voir [73].

I.3.d. L'oscillateur anharmonique. — On vérifie sans mal que la fonction

$$K = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{\lambda}(q_1p_2 - q_2p_1)^2 + q_1^2(q_1^2 + q_2^2)$$

est une intégrale première pour le hamiltonien considéré au §I.2.e.

I.3.e. Le pendule sphérique. — On reprend ici les notations du §I.2.f. Le système est invariant par les rotations autour de l'axe vertical, ce qui permet de trouver facilement une deuxième intégrale première, le moment par rapport à cet axe :

$$K(q, p) = (q \wedge p) \cdot \Gamma.$$

On peut montrer directement que $\{H, K\} = 0$ (exercice I.22). Il est plus intéressant de donner une démonstration géométrique : le champ hamiltonien associé à K est

$$X_K(q, p) = (-q \wedge \Gamma, -p \wedge \Gamma)$$

dont le flot est celui des rotations par rapport à l'axe vertical

$$\varphi_t(q, p) = (R_t q, R_t p)$$

(c'est bien ce que veut dire le fait que K est le moment par rapport à cet axe). Ce flot préserve la sous-variété TS^2 :

$$\|R_t q\|^2 = \|q\|^2 = 1 \text{ et } R_t p \cdot R_t p = q \cdot p = 0$$

et de même il préserve H puisqu'il laisse le vecteur vertical Γ invariant. En dérivant en $t = 0$ la relation $H(\varphi_t(x)) = H(x)$, on obtient la nullité du crochet de Poisson de H et K . Le pendule sphérique est donc un système complètement intégrable.

Exercice I.22.

I.3.f. Le solide, cas d'Euler-Poinsot. — C'est un solide comme décrit au §I.2.g, dans le cas où le centre de gravité est le point fixe ($G = O$, $L = 0$). On vérifie aisément que $K(M) = \|M\|^2$ est alors une intégrale première du système.

Remarque I.3.3. — Dans ce cas, la résolution du système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \\ \dot{M} = M \wedge \Omega. \end{cases}$$

se réduit à celle de l'équation $\dot{M} = M \wedge \Omega$ (avec $M = \mathcal{J}(\Omega)$). Ce dernier système décrit le mouvement d'un solide « libre » (cas sans gravité).

I.3.g. La toupie. — On considère toujours un solide, mais on suppose cette fois qu'il a un axe de révolution, l'axe OG . C'est dire qu'il existe un repère orthonormé dont le dernier vecteur est $L = \overrightarrow{GO}$ et dans lequel la matrice d'inertie est la diagonale (ℓ, ℓ, m) . On choisit bien sûr que les unités de façon que $\ell = 1$. La condition est donc que $M - \Omega$ soit colinéaire à L .

Ce cas, étudié par Lagrange en 1788, est dit « toupie ». Les toupies avec lesquelles on joue n'ont pas de point fixe mais sont contraintes à avoir une extrémité O de leur axe de révolution dans un plan horizontal. Je renvoie les éventuels lecteurs au classique ouvrage de Klein et Sommerfeld [46]. Nous considérerons dans ce texte que la « toupie de Lagrange » est une approximation raisonnable du jouet toupie.

Dans ce cas, il est clair que le moment par rapport à l'axe de révolution doit être une intégrale première.

Exercice I.20.

I.3.h. La toupie de Kowalevski. — C'est (toujours...) un solide avec un point fixe, cette fois dans le cas où la matrice d'inertie $\mathcal{J}$ est la diagonale $\mathcal{J} = (2, 2, 1)$ dans un repère lié au solide dans lequel le *premier* vecteur est colinéaire à L : comme dans le cas de Lagrange, il y a un plan équatorial, mais ici il contient l'axe $\overrightarrow{OG}$. Dans la même base, écrivons

$$M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2.$$

est une intégrale première, « l'intégrale de Kowalevski », voir [50].

Remarque I.3.4. — Les trois cas explicités ci-dessus sont les seuls cas intégrables de solides avec un point fixe. Plus précisément : dans les autres cas, il n'y a pas d'intégrale supplémentaire qui soit méromorphe (le résultat « polynomial » analogue est dû à Husson [40], le cas méromorphe est dû à Ziglin [80, 81] mais peut se traiter à l'aide du théorème de Morales & Ramis [58], comme au chapitre III).

I.3.i. Autres exemples. — Il y a beaucoup d'autres exemples de systèmes intégrables intéressants notamment parmi les flots géodésiques, auxquels je consacre le § suivant. Voir, par exemple, la liste à la page 13 de [9]. Deux des systèmes les plus remarquables dont il n'est pas question dans ce livre sont celui de Goldman [32]⁽¹¹⁾ et celui de Hitchin [38].

Exercice I.26.

⁽¹¹⁾ On trouvera un survol de certains systèmes intégrables sur les espaces de modules dans [10].

I.4. Les flots géodésiques

On considère ici une variété V munie d'une métrique riemannienne. Cette métrique définit une fonction $L : TV \rightarrow \mathbf{R}$, le « lagrangien »,

$$L(q, \xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_q.$$

Ici, bien sûr, q désigne un point de V et ξ un vecteur de $T_q V$.

Les géodésiques de V sont les extrema de la fonctionnelle

$$c \mapsto \int \|\dot{c}(t)\|^2 dt$$

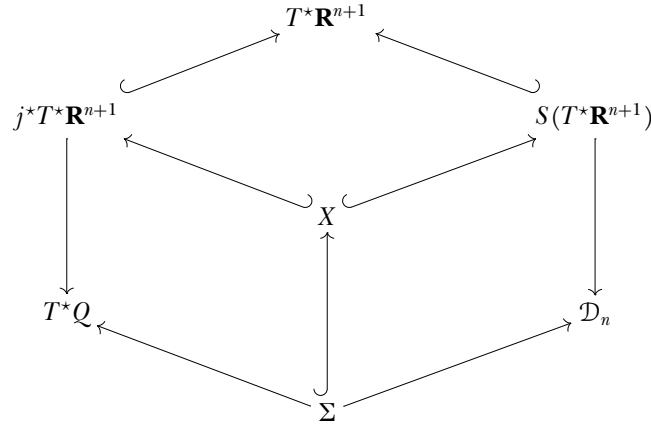
et données par l'équation d'Euler-Lagrange. On pose donc $p = \partial L / \partial \xi$, c'est la forme linéaire $\langle \xi, \cdot \rangle_q$. L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit $\dot{p} = \partial L / \partial q$. Le hamiltonien⁽¹²⁾ est la fonction sur T^*V définie par

$$H(q, p) = p \cdot \xi - L(q, \xi) = \langle \xi, \xi \rangle_q - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_q = \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_q$$

(à exprimer en termes de p).

Géodésiques d'une hypersurface et espace des droites. — Soit $Q \subset \mathbf{R}^{n+1}$ une hypersurface, munie de la métrique induite par la métrique euclidienne. On peut étudier le flot géodésique sur Q à l'aide d'un système sur l'espace des droites, en associant à chaque géodésique (une courbe sur Q) la courbe de ses tangentes.

L'outil essentiel pour ce faire est le diagramme hexagonal « de Melrose » que je reproduis ici



et explicite maintenant.

- La ligne du haut contient la variété symplectique ambiante, ici $T^*\mathbf{R}^{n+1}$ (comme toujours, j'appelle (p, q) les points de cet espace).

⁽¹²⁾Je renvoie à [3] pour cette construction.

- La deuxième ligne contient les deux hypersurfaces $j^*T^*\mathbf{R}^{n+1}$ (définie par $q \in Q$, $j : Q \subset \mathbf{R}^{n+1}$ est l'inclusion) et $S(T^*\mathbf{R}^{n+1})$ (définie par $\|p\|^2 = 1$).
- La troisième ligne contient leur intersection X .
- La ligne suivante contient les espaces de caractéristiques (voir l'exercice I.9) des deux hypersurfaces, ici d'une part le cotangent à Q et de l'autre l'espace $\mathcal{D}_n$ des droites (géodésiques!) de $\mathbf{R}^{n+1}$.
- Enfin, sur la dernière ligne, Σ est le fibré cotangent unitaire de Q , hypersurface de T^*Q dont l'espace des caractéristiques est l'espace des géodésiques de Q , vu ici comme

$$\Sigma = \left\{ (p, q) \mid \|p\|^2 = 1 \text{ et } p \in T_q^*Q \right\}.$$

L'application $\Sigma \rightarrow \mathcal{D}_n$ envoie (p, q) sur la droite dirigée par p et passant par q .

On a ainsi décrit Σ comme hypersurface dans les deux variétés symplectiques T^*Q et $\mathcal{D}_n$ et comme une sous-variété de codimension 3 de $T^*\mathbf{R}^{n+1}$... duquel espace ambiant proviennent toutes les structures symplectiques utilisées. Les caractéristiques de Σ sont donc les mêmes quand on considère Σ

- comme sous-variété de $\mathcal{D}_n$, l'espace des droites tangentes à Q ,
- ou quand on la considère comme fibré unitaire dans T^*Q — l'espace des caractéristiques est celui des géodésiques de Q .

Autrement dit : toute caractéristique de l'espace des droites tangentes à Q dans l'espace des droites est constituée des droites tangentes à une géodésique de Q . Ou encore : dans le cas d'une hypersurface de $\mathbf{R}^{n+1}$, on peut considérer le flot géodésique comme un système hamiltonien sur la variété symplectique $\mathcal{D}_n$ des droites.

I.4.a. Géodésiques des surfaces de révolution. — Considérons une surface de révolution dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. On la paramètre par un cylindre $]a, b[\times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$:

$$(s, \theta) \longmapsto (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, g(s))$$

où la courbe méridienne est supposée paramétrée par la longueur d'arc s . Un vecteur tangent ξ écrit

$$\xi = \sigma \frac{\partial}{\partial s} + \tau \frac{\partial}{\partial \theta}$$

a pour norme

$$\|\xi\|_{(s, \theta)}^2 = \frac{1}{2}(\sigma^2 + f(s)^2 \tau^2) = L((s, \theta), (\sigma, \tau)).$$

Les variables cotangentes p_s et p_θ correspondantes sont

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \sigma} = \sigma \text{ et } p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \tau} = f(s)^2 \tau.$$

Le hamiltonien est donc

$$H((s, \theta), (p_s, p_\theta)) = \frac{1}{2}(\sigma^2 + f(s)^2 \tau^2) = \frac{1}{2} \left(p_s^2 + \frac{1}{f(s)^2} p_\theta^2 \right).$$

Le système hamiltonien, quant à lui, est

$$\begin{cases} \dot{s} = p_s \\ \dot{\theta} = \frac{1}{f(s)^2} p_\theta \\ \dot{p}_s = \frac{f'(s)}{f(s)^3} p_\theta^2 \\ \dot{p}_\theta = 0. \end{cases}$$

Il est donc bien clair que p_θ est une intégrale première : H ne dépend pas de θ . C'est la façon la plus simple de décrire l'intégrale de Clairaut, dont la description classique⁽¹³⁾ figure dans l'exercice I.23.

Exercice I.23.

Remarque I.4.1. — La deuxième intégrale première est, comme dans les cas du pendule sphérique et de la toupie aux §§I.3.e et I.3.g, un moment par rapport à l'axe de révolution.

I.4.b. Géodésiques des quadriques. — Considérons un ellipsoïde dans $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est-à-dire une matrice symétrique définie positive A d'ordre $n+1$ et l'hypersurface d'équation

$$f(x) = \langle A^{-1}x, x \rangle - 1 = 0.$$

Soient $t \mapsto x(t)$ une géodésique de cette hypersurface et $y(t) = \dot{x}(t)$ son vecteur tangent. Dire que x est une géodésique, c'est dire que son vecteur accélération $\dot{y}(t)$ n'a pas de composante tangente, en d'autres termes que

$$\dot{y}(t) = \lambda \operatorname{grad}_{x(t)} f.$$

Ici $\operatorname{grad}_x f = 2A^{-1}x$ et on évalue facilement λ en dérivant la relation $\langle A^{-1}x, y \rangle = 0$ (qui dit que y est tangent à l'ellipsoïde) :

$$0 = \langle A^{-1}\dot{x}, y \rangle + \langle A^{-1}x, \dot{y} \rangle = \langle A^{-1}y, y \rangle + \lambda \langle A^{-1}x, A^{-1}x \rangle.$$

Le système différentiel donnant les géodésiques de l'ellipsoïde est donc

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{\langle A^{-1}y, y \rangle}{\|A^{-1}x\|^2} A^{-1}x. \end{cases}$$

Intégrabilité, approche classique. — Des théorèmes très classiques de Jacobi et Chasles permettent de montrer⁽¹⁴⁾ que ce système est complètement intégrable.

⁽¹³⁾Voir par exemple le tome III de [71].

⁽¹⁴⁾Cette démonstration aussi est classique. On la trouvera par exemple dans [72]. Elle était connue de Jacobi [42]. Il y a des démonstrations plus modernes, utilisant des techniques de géométrie algébrique. Sur les géodésiques des quadriques, voir aussi, par exemple [75, 47, 61, 7].

J'aime beaucoup la géométrie de cet exemple, aussi je vais y consacrer quelques pages, que les lectrices pressées pourront sauter en première lecture (mais quel dommage!).

La famille des quadriques « homofocales » à notre ellipsoïde joue un rôle très important. Il s'agit des quadriques Q_z d'équation

$$f_z(x) = \langle (A - z \text{Id})^{-1}x, x \rangle - 1 = 0$$

(l'ellipsoïde originel Q_0 correspondant à la valeur 0 du paramètre réel z). Dans le cas des coniques ($n = 1$), il s'agit bien de la famille des coniques qui ont les mêmes foyers que l'ellipse donnée, d'où la terminologie. En dimension plus grande, la caractéristique remarquable de cette famille est que la famille duale est un pinceau, c'est-à-dire est *linéaire*.

Le premier résultat utilisé ici est un théorème de Jacobi, qui affirme qu'un point générique de l'espace est contenu dans $n + 1$ quadriques de la famille, lesquelles sont orthogonales en ce point d'intersection.

Le deuxième est dû à Chasles et affirme qu'une droite générique de l'espace est tangente à n quadriques de la famille et que les hyperplans tangents à ces n quadriques (aux points où la droite leur est tangente) sont orthogonaux deux à deux.

Parce que c'est très joli, j'indiquerai plus bas des démonstrations de ces deux résultats. On peut déjà remarquer que la droite des $u + tp$ est tangente à la quadrique Q_z exactement quand l'équation du second degré en t

$$f_z(u + tp) = 0$$

a une racine double. Concrètement, ici, l'espace Σ du diagramme de Melrose est l'hypersurface de $\mathcal{D}_n$ d'équation $\Psi_z(p, u) = 0$, où

$$\Psi_z(p, u) = \langle (A - z \text{Id})^{-1}u, p \rangle^2 - (\langle (A - z \text{Id})^{-1}p, p \rangle)(\langle (A - z \text{Id})^{-1}u, u \rangle - 1),$$

une fonction de z de la forme

$$\Psi_z(p, u) = \frac{Q_{p,u}(z)}{\prod(\alpha_i - z)}$$

avec Q un polynôme de degré n et où l'on a supposé que A est diagonale (avec comme valeurs propres les α_i).

La condition que la droite (p, u) soit tangente à la quadrique Q_z est donc équivalente au fait que z soit racine d'un certain polynôme $Q_{(p,u)}(z)$ de degré n dont toutes les racines sont donc, Chasles nous le garantit, réelles. Localement, on a ainsi des fonctions

$$z_1(p, u), \dots, z_n(p, u)$$

décrivant les n quadriques auxquelles la droite des $u + tp$ est tangente.

Si on considère le système hamiltonien décrivant les géodésiques de l'hypersurface Q comme un système sur l'espace $\mathcal{D}_n$ des droites, les fonctions $z_1, \dots, z_n$ définissent

(localement) des fonctions sur cet espace et on montre (suivant Jacobi et Chasles) que ces fonctions sont en involution.

Soit en effet X_i le champ hamiltonien associé à la fonction z_i . Il est tangent aux caractéristiques des hypersurfaces de niveau de z_i , c'est-à-dire (une valeur de z_i étant fixée) à l'espace des droites tangentes à la quadrique Q_{z_i} . Nous savons (grâce au diagramme hexagonal de Melrose étudié au début du § I.4) que cette hypersurface est formée des droites tangentes à une géodésique de Q_{z_i} . Nous savons que ces droites sont tangentes aussi à Q_{z_j} (z_j est une autre des fonctions considérées). Donc z_j est constante le long du flot de X_i , autrement dit $\{z_i, z_j\} = 0$.

Deux théorèmes sur les familles homofocales. — Démontrons ici les théorèmes de Jacobi et Chasles que nous venons d'utiliser.

Le théorème de Jacobi. — On traduit l'énoncé en termes de la famille duale : on va démontrer que tout hyperplan affine de $(\mathbf{R}^{n+1})^*$ ne passant pas par l'origine⁽¹⁵⁾ est tangent à n quadriques du pinceau et que les vecteurs correspondant aux points de tangence sont orthogonaux deux à deux. L'équation des quadriques du pinceau est

$$\langle (A - z \text{Id})x, x \rangle = 1.$$

On considère la forme quadratique $B(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle x, y \rangle$ et une de ses droites propres ℓ , pour la valeur propre z . C'est dire que la forme quadratique $B - z \text{Id}$ ainsi que sa forme polaire sont nulles sur ℓ . Soit y un point de l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$. L'hyperplan dual a pour équation $\langle x, y \rangle = 1$, il coupe la droite ℓ en un point x_0 , qui est sur la quadrique $\langle (A - z \text{Id})x, x \rangle = 1$, puisque $(B - z \text{Id})x_0 = 0$. De plus, comme la forme polaire de $B - z \text{Id}$ s'annule aussi sur ℓ , la quadrique définie par $A - z \text{Id}$ est tangente à l'hyperplan en x_0 .

Les points de tangence de l'hyperplan dual à y avec les quadriques du pinceau sont les vecteurs propres de la forme quadratique B . Comme toutes les formes quadratiques réelles, celle-ci a n vecteurs propres indépendants et orthogonaux. $\square$

Le théorème de Chasles. — On se donne une droite ℓ . On projette l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$ sur l'hyperplan $\ell^\perp$ (orthogonalement à ℓ). On considère les contours apparents⁽¹⁶⁾ des quadriques de la famille sur $\ell^\perp$.

Cette famille d'hypersurfaces de $\ell^\perp$ est encore une famille homofocale. On utilise la dualité, qui transforme contour apparent de Q sur $\ell^\perp$ en intersection de la quadrique duale avec $\ell^\perp$. Comme l'intersection d'une famille linéaire de quadriques avec un hyperplan est évidemment une famille linéaire de quadriques, notre famille de contours apparents est, en effet, une famille homofocale.

⁽¹⁵⁾C'est la condition de généricité dans l'énoncé originel.

⁽¹⁶⁾Le contour apparent d'une des quadriques est l'ensemble des valeurs critiques de la projection, il est constitué des images des points où ℓ est tangente à la quadrique.

On applique maintenant le théorème de Jacobi au point d'intersection de ℓ et $\ell^\perp$. Il est sur n quadriques de la famille des contours apparents, ce qui revient exactement à dire que la droite ℓ était tangente à n quadriques de la famille homofocale originelle. $\square$

Je reviendrai longuement sur ce système et son intégrabilité au chapitre IV.

Exercice I.24.

I.5. Appendice : le théorème de Darboux

C'est un théorème qui affirme que, localement, toutes les formes symplectiques sont isomorphes.

Théorème I.5.1 ([60], [76]). — Soient ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques sur W qui coïncident en x . Alors il existe un voisinage U_0 de x dans W et une application

$$\psi : (U_0, x) \longrightarrow (W, x)$$

avec $\psi^*\omega_1 = \omega_0$.

Remarque I.5.2. — L'application ψ est alors un difféomorphisme local puisque $\omega_0^{\wedge n} = \psi^*\omega_1^{\wedge n}$ et que ces deux $2n$ -formes sont des formes volumes.

Corollaire I.5.3 (Théorème de Darboux). — Soit x un point d'une variété W munie d'une forme symplectique ω . Il existe des coordonnées locales $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ centrées en x dans lesquelles $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Démonstration du corollaire. — Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^{2n}$ et $f : U \rightarrow W$ une carte centrée en x . Sur U , considérons deux formes symplectiques :

- la forme $f^*\omega$
- et la forme constante $(f^*\omega)_0$.

Par définition, elles coïncident en 0. Le théorème affirme qu'elles sont difféomorphes. Les coordonnées $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ dans une base symplectique pour $(f^*\omega)_0$, transportées par ψ , ont la propriété voulue. $\square$

Démonstration du théorème. — On applique la méthode du chemin de Moser (voir [60]). C'est dire qu'on considère, pour $t \in [0, 1]$, la forme $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Il est clair qu'elle est fermée. Comme ω_0 et ω_1 coïncident en x , elle est non dégénérée en x et donc aussi au voisinage de x : la non dégénérescence est une propriété ouverte. Comme l'intervalle $[0, 1]$ est compact, on peut trouver un voisinage de x sur lequel toutes les ω_t sont des formes symplectiques.

Comme ω_0 et ω_1 sont fermées, il en est de même de $\omega_0 - \omega_1$, on peut donc trouver au voisinage de x une 1-forme α telle que $d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x et telle que $(df)_x = \alpha_x$. On a alors $(\alpha - df)_x = 0$ et

$d(\alpha - df) = d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. Quitte à remplacer α par $\alpha - df$, on peut donc supposer que $\alpha_x = 0$

La 2-forme ω_t étant symplectique, elle définit une dualité entre tangent et cotangent, on obtient ainsi pour chaque t un champ de vecteurs X_t dual à α par ω_t , c'est-à-dire tel que $i_{X_t}\omega_t = \alpha$. On considère maintenant X_t comme un champ de vecteurs (dépendant du temps) nul en x pour tout t . Le flot φ_t de X_t fixe x , on peut donc trouver un voisinage U de x sur lequel φ_t est définie et satisfait à $\varphi_t(U) \subset U$.

On a donc :

$$\frac{d}{dt} [\varphi_t^* \omega_t] = \varphi_t^* \left[\frac{d\omega_t}{dt} + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t \right] = \varphi_t^* [\omega_1 - \omega_0 + \omega_0 - \omega_1] = 0$$

puisque $\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = di_{X_t} \omega_t + i_{X_t} d\omega_t = d\alpha$ grâce à la formule de Cartan et à la définition de α . La forme $\varphi_t^* \omega_t$ ne dépend donc pas de t , elle vaut ω_0 pour $t = 0$. On en déduit le résultat voulu avec $\psi = \varphi_1$. $\square$

Remarque I.5.4. — Un énoncé analogue à I.5.1 pour des métriques riemanniennes serait grossièrement faux : en riemannien, il y a un invariant *local* qui distingue un voisinage d'un point de son espace tangent, c'est la courbure. Nous venons de montrer qu'il n'y a pas d'invariant local en géométrie symplectique.

Un théorème plus général peut être obtenu essentiellement par la même méthode [76]. Il décrit les voisinages tubulaires des sous-variétés *isotropes* (celles sur lesquelles ω est identiquement nulle) de W . Il affirme en particulier que si L est une sous-variété isotrope de dimension maximale (alors $\dim L = \frac{1}{2} \dim W$ et l'on dit que L est *lagrangienne*), un voisinage tubulaire de L dans W est (symplectiquement) isomorphe à un voisinage de la section nulle de T^*L (avec la forme symplectique canonique).

Exercices

Exercice I.1. — On considère $\mathbf{C}^n$ comme espace vectoriel *réel* de dimension $2n$. Montrer que la forme bilinéaire (réelle)

$$\omega(X, Y) = \operatorname{Im} \langle X, Y \rangle$$

où le crochet désigne la forme hermitienne standard est alternée et non dégénérée. La comparer avec la forme définie sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ au § I.1.a. À partir d'une base complexe unitaire de $\mathbf{C}^n$, construire une base symplectique.

Exercice I.2. — Soit ω une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel E . Montrer qu'il existe une base $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_k$ de E telle que

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}, \quad \omega(e_i, e_j) = \omega(e_i, g_\ell) = \omega(f_i, g_\ell) = \omega(g_\ell, g_m) = 0$$

pour tous les indices i, j, ℓ et m .

On suppose que $\dim E = 2n$. Montrer que $\omega^{\wedge n} \neq 0$ si et seulement si ω est non dégénérée.

Exercice I.3. — Soit F un sous-espace isotrope de dimension k d'un espace vectoriel symplectique E . Montrer qu'il existe une base symplectique $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_k)$ soit une base de F .

Exercice I.4 (La réduction symplectique). — Soit F un sous-espace isotrope de l'espace vectoriel symplectique E . Montrer que la forme symplectique de E définit une forme symplectique sur l'espace quotient F°/F .

Soit L un sous-espace lagrangien de E tel que $L + F^\circ = E$. Montrer que $L \cap F^\circ$ s'injecte⁽¹⁷⁾ comme sous-espace lagrangien dans F°/F .

Exercice I.5 (Le groupe symplectique). — Montrer que $\mathrm{Sp}(2; \mathbf{R}) = \mathrm{SL}(2; \mathbf{R})$.

Évaluer la dimension du noyau de l'application linéaire $A \mapsto {}^tAJ + JA$. En déduire que la dimension de $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R})$ est $2n^2 + n$.

On écrit, dans une base symplectique de $\mathbf{R}^{2n}$, une matrice par blocs carrés $n \times n$:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions sur A, B, C et D cette matrice est-elle dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2n)$? dans le groupe de Lie $\mathrm{Sp}(2n)$?⁽¹⁸⁾

Exercice I.6. — Soit L un sous-espace lagrangien d'un espace vectoriel symplectique E . Montrer que le groupe des automorphismes symplectiques de E qui se restreignent en l'identité sur L est isomorphe au groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & B \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \text{ où } B \text{ est une matrice symétrique.}$$

Vérifier que ce groupe est abélien.

Exercice I.7 (La forme de Liouville est canonique). — Une forme différentielle de degré 1 sur une variété V est une section du fibré cotangent T^*V

$$\eta : V \longrightarrow T^*V \quad \eta(x) \in T_x^*V$$

(d'accord?). On désigne par α la forme de Liouville. Montrer qu'on a

$$\eta^*\alpha = \eta.$$

Exercice I.8 (Forme symplectique sur le tore). — Montrer que la forme symplectique standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ de $\mathbf{R}^{2n}$ définit, par passage au quotient, une forme symplectique sur le tore $T^{2n} = \mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n}$.

⁽¹⁷⁾ Un petit miracle de la géométrie symplectique.

⁽¹⁸⁾ Une autre façon d'évaluer la dimension du groupe symplectique.

Exercice I.9 (La réduction symplectique — suite). — Soit (W, ω) une variété symplectique. Si $V \subset W$ est une hypersurface, que peut-on dire du rang de ω sur V ? On suppose que les courbes intégrales du noyau de $\omega|_V$ (les « caractéristiques ») constituent une variété Z . Montrer que ω définit une structure symplectique⁽¹⁹⁾ sur Z .

- Identifier la variété symplectique obtenue quand $W = \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$ et $V = S^n \times \mathbf{R}^{n+1}$.
- On considère l'ensemble des géodésiques (courbes orientées, mais non paramétrées) d'une variété riemannienne, ensemble dont on suppose que c'est une variété. Montrer qu'il est muni d'une structure symplectique.

Exercice I.10 (Champ hamiltonien et crochet de Poisson en coordonnées)

Sur $W = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme symplectique standard, vérifier qu'on a

$$X_H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$

pour toute fonction H et

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)$$

pour toutes fonctions f et g .

Que valent les crochets de Poisson $\{p_i, p_j\}$, $\{p_i, q_j\}$, $\{q_i, q_j\}$?

Exercice I.11. — Montrer qu'un champ de vecteurs hamiltonien sur une variété symplectique compacte a toujours un zéro.

Exercice I.12. — L'espace de phases est $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On fixe un nombre réel $a > 0$. Écrire et résoudre le système hamiltonien associé à la fonction $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}aq^2$. Dessiner les trajectoires.

Exercice I.13. — Vérifier que la forme symplectique standard de $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$ se restreint bien en une forme symplectique sur la sous-variété

$$TS^n = \left\{ (q, p) \mid \|q\|^2 = 1 \text{ et } q \cdot p = 0 \right\}.$$

Exercice I.14. — Soit W une variété symplectique. On suppose que V est une sous-variété symplectique de W , c'est-à-dire que la forme symplectique de W définit une forme *symplectique* sur V .

- Vérifier que l'on a

$$\forall v \in V, \quad T_v V \oplus (T_v V)^\circ = T_v W.$$

⁽¹⁹⁾ La variété symplectique obtenue s'appelle « l'espace des caractéristiques ».

- Soit $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Montrer que le champ hamiltonien de la restriction de H à V est la projection du champ hamiltonien X_H sur le fibré tangent à V (pour la décomposition obtenue ci-dessus).
- Retrouver par cette méthode le champ hamiltonien du pendule sphérique.

Exercice I.15. — On suppose que X et Y sont deux champs de vecteurs *localement* hamiltoniens, c'est-à-dire que $i_X \omega$ et $i_Y \omega$ sont des formes fermées. Montrer que leur crochet $[X, Y]$ est (globalement) hamiltonien, c'est-à-dire que la forme $i_{[X, Y]} \omega$ est exacte.

Exercice I.16. — Pour définir les champs hamiltoniens et le crochet de Poisson on n'a utilisé des propriétés de la forme symplectique ω que le fait qu'elle est non dégénérée. Soit donc ω une 2-forme non dégénérée. Évaluer $(d\omega)_x(X, Y, Z)$ quand X , Y et Z sont des vecteurs de $T_x W$ qui sont les valeurs en x des champs hamiltoniens de trois fonctions f , g et h . Montrer que ω est fermée⁽²⁰⁾ si et seulement si le crochet de Poisson qu'elle définit satisfait à l'identité de Jacobi.

Exercice I.17. — Soit $\mathcal{Q}$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^{2n}$. Quelle est sa dimension ?

On munit $\mathbf{R}^{2n}$ de la forme symplectique standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Montrer que $\mathcal{Q}$ est stable par le crochet de Poisson et que l'algèbre de Lie $(\mathcal{Q}, \{, \})$ est isomorphe⁽²¹⁾ à l'algèbre de Lie symplectique $\mathfrak{sp}(2n; \mathbf{R})$.

Exercice I.18. — Représenter dans le plan des (q, p) les niveaux du hamiltonien $H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$ du pendule simple et les trajectoires du champ de vecteurs (voir aussi la figure 4 du chapitre II).

Exercice I.19. — On considère le hamiltonien de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1) - \frac{\lambda}{3}q_1^3$$

(voir le §I.2.d). On suppose que $\lambda \neq 0$.

- Dessiner les trajectoires de X_H contenues dans le plan $q_2 = p_2 = 0$.
- Déterminer explicitement la solution $(q_1(t), p_1(t))$ telle que

$$\frac{1}{2}p_1^2(t) - \frac{\lambda}{3}q_1^3(t) = 0.$$

Exercice I.20 (Le solide). — Vérifier que les formes bilinéaires $\omega_{(\Gamma, M)}$ définies par

$$\omega_{(\Gamma, M)}((\xi, \eta), (\xi', \eta')) = (\xi \wedge M + \Gamma \wedge \eta) \cdot \xi' + (\Gamma \wedge \xi) \cdot \eta'$$

⁽²⁰⁾C'est la meilleure justification possible de l'exigence de fermeture dans la définition d'une forme symplectique : le crochet de Poisson doit être une structure d'algèbre de Lie.

⁽²¹⁾Une troisième façon d'évaluer la dimension du groupe symplectique.

définissent une forme symplectique ω sur la variété de dimension 4

$$W_a = \left\{ (\Gamma, M) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ et } \Gamma \cdot M = a \right\}.$$

Avec les notations du § I.2.g, vérifier que le champ hamiltonien associé à $H = \frac{1}{2}M \cdot \Omega + \Gamma \cdot L$ est

$$X_H(\Gamma, M) = (\Gamma \wedge \Omega, M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L).$$

On suppose que $L = 0$ (cas d'Euler-Poinsot). Montrer que la fonction K définie par

$$K(M) = \|M\|^2$$

commute avec H .

On suppose enfin que $M - \Omega$ est colinéaire à L (cas de la toupie). Montrer que la fonction K définie par

$$K(M) = M \cdot \Gamma$$

commute avec H .

Exercice I.21. — On considère la fonction K définie sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ par

$$K = q_2^4 + 4q_1^2 q_2^2 + 4p_2(p_2 q_1 - p_1 q_2) + 8A(q_2^2 q_1 - p_2^2 + 2Aq_2^2).$$

Montrer que le hamiltonien de Hénon-Heiles (§ I.2.d) commute⁽²²⁾ avec K si et seulement si $\lambda = 6$.

Exercice I.22. — On considère le hamiltonien H du pendule sphérique et le moment

$$K(q, p) = q_1 p_2 - q_2 p_1.$$

En calculant le crochet de Poisson $\{H, K\}$, montrer que K est, effectivement, une intégrale première.

Exercice I.23 (L'intégrale de Clairaut). — On considère une surface de révolution. Si $c(t)$ est une géodésique de la surface, soit $\alpha(t)$ l'angle que le vecteur $\dot{c}(t)$ fait avec le méridien passant par $c(t)$, et soit $r(t)$ la distance de $c(t)$ à l'axe de révolution. Montrer que $r(t) \sin \alpha(t)$ ne dépend pas de t (on vérifiera que, avec les notations du § I.4.a, on a $p_0(t) = r(t) \sin \alpha(t)$).

Exercice I.24. — On reprend les notations du § I.4.b. Montrer que le système hamiltonien associé à la fonction $\frac{1}{2}\Psi_z$ sur l'espace des droites $\mathcal{D}_n$ est

$$\begin{cases} \dot{p} = \Gamma p \\ \dot{u} = \Gamma u - (A - z \text{Id})^{-1} p \end{cases}$$

où Γ est la matrice des $\Gamma_{i,j} = \frac{p_i u_j - p_j u_i}{(\alpha_i - z)(\alpha_j - z)}$.

⁽²²⁾La deuxième intégrale première vient de [17].

Exercice I.25. — On se place dans l'espace vectoriel complexe⁽²³⁾ $\mathbf{C}^{2n}$ muni de la forme symplectique $\sum dp_i \wedge dq_i$. On considère une matrice $A \in \mathfrak{sp}(2n; \mathbf{C})$.

Montrer que le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$P(\lambda) = \lambda^{2r} Q(\lambda) Q(-\lambda)$$

pour un entier r et un polynôme Q .

Montrer qu'il existe des sous-espaces symplectiques $E_1, \dots, E_k$ de $\mathbf{C}^{2n}$, orthogonaux deux à deux et invariants par A tels que $\mathbf{C}^{2n} = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ et tels que chaque E_i possède une base symplectique dans laquelle la matrice $A|_{E_i}$ a l'une des formes suivantes :

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \alpha & & \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1 & \alpha \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 0 & \end{array} & \begin{array}{ccc} -\alpha & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \\ & & & -\alpha \end{array} \end{array} \right] \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 0 & & \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array} \end{array} \right]$$

où α est un nombre complexe et où les coefficients qui n'apparaissent pas sont nuls.

Plaçons-nous maintenant sur l'espace vectoriel $\mathbf{C}^{2r}$ muni d'une matrice B ayant l'une des formes ci-dessus. Vérifier que le sous-espace

$$Z_B = \{M \in \mathfrak{sp}(2r; \mathbf{C}) \mid [M, B] = 0\}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sp}(2r; \mathbf{C})$ qui contient une sous-algèbre de Lie abélienne de dimension r .

Exercice I.26 (Formes normales pour les formes quadratiques)

Cet exercice est une simple reformulation du précédent. Soit Q une forme quadratique sur l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^{2n}$ muni de la forme symplectique complexe $\sum dp_i \wedge dq_i$. Montrer qu'il existe une décomposition de $\mathbf{C}^{2n}$ en somme de sous-espaces symplectiques $E_1, \dots, E_k$ orthogonaux deux à deux pour la forme symplectique *et* pour la forme quadratique Q et tels que

$$- \mathbf{C}^{2n} = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$$

⁽²³⁾ On peut démontrer des résultats analogues dans le cas réel. Comme toujours en algèbre linéaire, c'est un peu plus délicat, mais pas beaucoup plus difficile.

- chaque E_i possède une base symplectique dans laquelle la forme quadratique $Q|_{E_i}$ a l'une des formes suivantes :

$$\alpha(p_1q_1 + \cdots + p_rq_r) - (p_2q_1 + \cdots + p_rq_{r-1}) \text{ ou } p_2q_1 + \cdots + p_rq_{r-1} + \frac{1}{2}q_r^2.$$

Montrer qu'un hamiltonien quadratique sur $\mathbf{C}^{2n}$ possède toujours n intégrales premières quadratiques indépendantes en involution, et en particulier est intégrable⁽²⁴⁾.

⁽²⁴⁾Ces résultats (incluant le cas réel) sont dus à Williamson, dans [78] pour les formes normales et dans [79] pour l'intégrabilité.

CHAPITRE II

VARIABLES ACTION-ANGLES

Dans ce chapitre, je démontre le théorème d'Arnold-Liouville⁽¹⁾, qui décrit une variété symplectique et un système hamiltonien complètement intégrable au voisinage d'un niveau commun régulier des intégrales premières. Avec une hypothèse de compacité, ces niveaux réguliers sont des tores lagrangiens et le système hamiltonien est *linéaire* sur ces tores.

Le modèle « semi-local » est celui d'une opération hamiltonienne d'un tore — une notion importante en géométrie symplectique — ce chapitre commence donc par les rudiments de la théorie des opérations hamiltoniennes de tores.

Pour la démonstration du théorème proprement dit, j'ai suivi fidèlement le très bel article de Duistermaat [21]. Les commentaires plus généraux sur les fibrations lagrangiennes se trouvent aussi dans [4].

II.1. Opérations hamiltoniennes de tores

II.1.a. Opérations symplectiques. — Soit G un groupe de Lie opérant sur une variété symplectique (W, ω) . On dit que l'opération est *symplectique* si G préserve ω , c'est-à-dire si on a, pour tout g dans G ,

$$g^*\omega = \omega.$$

Ceci se traduit en termes des champs fondamentaux qui décrivent, infinitésimalement, l'opération de G . Pour tout vecteur X dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G , on définit un champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur W par

$$\tilde{X}(x) = \frac{d}{dt}(\exp(tX) \cdot x)|_{t=0},$$

⁽¹⁾Ce théorème est énoncé (et démontré) dans le livre d'Arnold [3] sous le nom de « théorème de Liouville ». Comme je l'ai appris dans la thèse de San Vũ-Ngọc [74], on peut aussi trouver ce théorème dans un article ancien mais oublié de Mineur [56].

c'est le *champ fondamental* associé à X . En dérivant la relation $g^*\omega = \omega$, on obtient

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad \mathcal{L}_{\tilde{X}}\omega = 0.$$

Comme la forme ω est fermée, la formule de Cartan donne l'égalité $d\tilde{X}\omega = 0$: les formes $i_{\tilde{X}}\omega$ sont *fermées*.

II.1.b. Opérations hamiltoniennes du cercle. — Si G est le cercle $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, l'algèbre de Lie est $\mathbf{R}$, soit X le vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}$. Ce vecteur définit « le » champ fondamental de l'opération de S^1 . L'opération est symplectique si et seulement si la forme $i_{\tilde{X}}\omega$ est fermée. Si elle est *exacte* (c'est-à-dire s'il existe une fonction H telle que $i_{\tilde{X}}\omega = -dH$), on dit que l'opération est *hamiltonienne*.

Hamiltoniens périodiques. — Partons inversement d'une fonction H sur une variété symplectique. Elle y définit un champ de vecteurs X_H . On a vu dans les exemples de dimension 2 (voir les §§I.2.a et I.2.b) qu'il arrive souvent que ce champ de vecteurs ait des orbites périodiques⁽²⁾.

Considérons le cas d'un champ de vecteurs hamiltonien qui soit *vraiment* périodique (non seulement toutes ses orbites sont périodiques, mais en plus, elles ont toutes la même période). On peut alors considérer le flot du champ de vecteurs comme une opération du cercle. On a donc une fonction $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ dont le champ hamiltonien X_H est le champ fondamental d'une opération du cercle S^1 . C'est dire que S^1 opère sur W

$$\begin{aligned} S^1 \times W &\longrightarrow W \\ (t, x) &\longmapsto t \cdot x \end{aligned}$$

et que le vecteur tangent à l'orbite en x est $X_H(x)$. Comme on le voit sur la figure 1, on peut aussi écrire

$$\frac{d}{d\theta}(e^{i\theta} \cdot x)|_{\theta=0} = X_H(x).$$

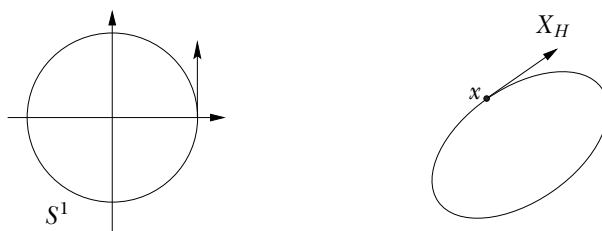


FIGURE 1. Champ fondamental

⁽²⁾Le théorème d'Arnold-Liouville, dont il est question dans ce chapitre, est aussi une façon très précise de généraliser cette remarque.

On dit que H est un hamiltonien périodique, c'est bien entendu équivalent à dire que l'opération de S^1 est hamiltonienne. On dit aussi que H est une application moment pour l'opération du cercle.

Exemple II.1.1. — L'exemple le plus simple est celui de l'oscillateur harmonique

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

(voir le §I.2.a), qui est l'application moment pour l'opération de S^1 sur $\mathbf{R}^2$ par rotations autour de l'origine.

Exercices II.1, II.2.

Pour conclure cette partie, j'inclus un résultat qui sera utile dans la démonstration du théorème d'Arnold-Liouville.

Proposition II.1.2. — Soit (V, ω) une variété symplectique exacte et soit λ une 1-forme sur V satisfaisant à $\omega = d\lambda$. Toute opération symplectique de S^1 sur V est hamiltonienne, de hamiltonien

$$J(v) = \int_{S^1 \cdot v} \lambda.$$

Démonstration. — La démonstration est directe : on évalue $(dJ)_v(Z)$ pour Z dans T_vV et on montre qu'on a

$$(dJ)_v(Z) = \omega(Z, Y(v)),$$

Y désignant le champ fondamental de l'opération du cercle.

Soient donc v un point de V et Z un vecteur tangent à V en ce point. On commence par prolonger Z en un champ de vecteurs invariant défini le long de l'orbite de v en posant

$$Z(t \cdot v) = T_v t(Z).$$

On prolonge ensuite Z en un champ de vecteurs, que je note encore Z , sur V . On écrit

$$J(v) = \int_0^1 \lambda_{t \cdot v}(Y(t \cdot v)) dt$$

(on aura compris que t désigne à la fois un élément de $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et l'élément correspondant de $[0, 1]$) et on dérive. Il faut calculer, t étant fixé dans S^1 , la différentielle de la fonction

$$v \longmapsto \lambda_{t \cdot v}(Y(t \cdot v)),$$

évaluée sur Z . C'est

$$(\mathcal{L}_Z \lambda)_{t \cdot v}(Y(t \cdot v)) + \lambda_{t \cdot v}((\mathcal{L}_Z Y)(t \cdot v)).$$

Le deuxième terme de cette somme est nul. En effet, on a $\mathcal{L}_Z Y = -\mathcal{L}_Y Z$ et $(\mathcal{L}_Y Z)(t \cdot v)$ ne dépend que du champ Z le long de l'orbite de v (voir au besoin le lemme III.1.3) ; comme Z est invariant le long de l'orbite, on a $\mathcal{L}_Y Z(t \cdot v) = 0$.

Évaluons le premier terme. On a

$$(d\lambda)(Z, Y) = Z \cdot \lambda(Y) - Y \cdot \lambda(Z) - \lambda([Z, Y]).$$

On a dit qu'en les points $t \cdot v$, le crochet $[Z, Y]$ était nul, donc le dernier terme est nul et on a

$$(\mathcal{L}_Z \lambda)_{t \cdot v}(Y(t \cdot v)) = (d\lambda)_{t \cdot v}(Z(t \cdot v), Y(t \cdot v)) + (\mathcal{L}_Y \lambda)_{t \cdot v}(Z(t \cdot v)).$$

Pour calculer $(dJ)_v(Z)$, il faut intégrer les deux termes restants sur $[0, 1]$.

Commençons par le deuxième. On dérive la fonction

$$t \longmapsto \lambda_{t \cdot v}(Z(t \cdot v)).$$

On obtient

$$\frac{d}{dt}(\lambda_{t \cdot v}(Z(t \cdot v))) = (\mathcal{L}_Y \lambda)_{t \cdot v}(Z(t \cdot v)) + \lambda_{t \cdot v}((\mathcal{L}_Y Z)(t \cdot v)) = (\mathcal{L}_Y \lambda)_{t \cdot v}(Z(t \cdot v)).$$

On a donc, en intégrant

$$\int_0^1 (\mathcal{L}_Y \lambda)_{t \cdot v}(Z(t \cdot v)) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\lambda_{t \cdot v}(Z(t \cdot v))) dt = 0.$$

Pour l'instant, on a utilisé le fait que ω est exacte et qu'on peut prolonger Z en un champ invariant le long de l'orbite de v . Utilisons maintenant le fait que Y est le champ fondamental d'une opération *symplectique*, c'est-à-dire qu'on a

$$\mathcal{L}_Y \omega = 0 \text{ ou encore } di_Y \omega = 0.$$

Comme Y et Z sont invariants le long de l'orbite de v , on en déduit que la fonction

$$t \longmapsto \omega_{t \cdot v}(Z(t \cdot v), Y(t \cdot v))$$

est constante. En effet, sa dérivée par rapport à t est

$$\left(\frac{d}{dt} \omega_{t \cdot v} \right) (Z(t \cdot v), Y(t \cdot v)) + \omega_{t \cdot v}((\mathcal{L}_Y Z)_{t \cdot v}, Y(t \cdot v)) + \omega_{t \cdot v}(Z(t \cdot v), (\mathcal{L}_Y Y)(t \cdot v))$$

une somme de trois termes nuls. Finalement, on a

$$\int_0^1 \omega_{t \cdot v}(Z(t \cdot v), Y(t \cdot v)) dt = \omega_v(Z, Y(v)),$$

c'est-à-dire

$$(dJ)_v(Z) = \omega_v(Z, Y(v))$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

Remarque II.1.3. — On n'a pas utilisé vraiment l'hypothèse que l'opération est symplectique, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_Y \omega = 0$ mais seulement le fait que

$$i_Y \mathcal{L}_Y \omega = 0.$$

La proposition reste donc vraie sous cette hypothèse plus faible.

II.1.c. Opérations hamiltoniennes de tores. — Plus généralement, si un tore T écrit comme un produit $(S^1)^k$ opère sur la variété symplectique W , on en déduit k champs de vecteurs $X_1, \dots, X_k$, les champs fondamentaux des k facteurs. On dit que l'opération est *hamiltonienne* si chacun d'eux est un champ hamiltonien. En mettant tous ces hamiltoniens périodiques ensemble, on a une application

$$H = (H_1, \dots, H_k) : W \longrightarrow \mathbf{R}^k$$

dite *application moment*⁽³⁾.

Les champs fondamentaux $X_1, \dots, X_k$ commutent pour le crochet de Lie des champs de vecteurs : le groupe T^k est commutatif et son algèbre de Lie est abélienne⁽⁴⁾. On en déduit que $\{H_i, H_j\} = 0$ et que le sous-espace de $T_x W$ engendré par les vecteurs $X_1(x), \dots, X_k(x)$ est isotrope (voir le §I.3).

On en déduit aussi que H est constante sur les orbites. On a

$$dH_j(X_i) = \{H_i, H_j\} = 0$$

donc $(dH)_x$ s'annule sur le sous-espace engendré par les champs fondamentaux, c'est-à-dire sur l'espace tangent à l'orbite de x .

Orbites, opérations effectives. — On peut montrer⁽⁵⁾, en utilisant des voisinages tubulaires équivariants des orbites,

- que les stabilisateurs des points dans un voisinage de x sont des sous-groupes du stabilisateur de x (parce que le tore T est abélien)
- et, si W est connexe, qu'il y a un ouvert dense dans W dont tous les points ont le même stabilisateur (parce que le groupe est compact et abélien), donc en particulier ce stabilisateur est contenu dans tous les stabilisateurs des points de W .

On dit que l'opération est *effective* si tous les éléments du tore (sauf 1) déplacent effectivement un point de la variété :

$$\forall t \in T - \{1\}, \exists x \in W \text{ avec } t \cdot x \neq x.$$

C'est dire aussi, de façon équivalente, que l'intersection de tous les stabilisateurs des points de W est le sous-groupe trivial. On a donc un ouvert dense de points de W à stabilisateur trivial. Les orbites de ces points sont donc des tores T .

On suppose que le tore T^k opère effectivement sur la variété W . Sur l'ouvert dense U de W des points x dont le stabilisateur est trivial, les vecteurs $X_1(x), \dots, X_k(x)$ sont indépendants.

⁽³⁾On trouvera des définitions plus intrinsèques (ici j'ai choisi une base) et plus générales (remplacer le tore par un groupe de Lie) un peu partout (et notamment dans [6]).

⁽⁴⁾On utilise ici le fait que le crochet des champs fondamentaux est le champ fondamental du crochet.

⁽⁵⁾Voir par exemple [18].

Comme au §I.3, on en déduit que la dimension maximale possible pour un tore opérant effectivement sur une variété symplectique de dimension $2n$ est n . Alors l'application moment de cette opération est un système intégrable.

Exemple II.1.4. — On a dit (exemple II.1.1) que l'oscillateur harmonique $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ est l'application moment pour l'opération de S^1 sur $\mathbf{R}^2$ par rotations autour de l'origine. Plus généralement

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2, \dots, p_n^2 + q_n^2)$$

est l'application moment pour l'opération « produit » du tore T^n sur $\mathbf{R}^{2n}$. La plus belle⁽⁶⁾ de toutes les opérations hamiltoniennes est celle du tore T^n sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Voir l'exercice II.5.

Exercices II.3, II.4, II.5 et aussi IV.20.

II.2. Théorème d'Arnold-Liouville

Ce théorème affirme qu'au voisinage d'une composante connexe compacte d'un niveau régulier d'un système intégrable, on est dans la situation d'une opération hamiltonienne de tore.

On considère ici un système intégrable, c'est-à-dire une variété symplectique (W, ω) de dimension $2n$ et une application $f : W \rightarrow \mathbf{R}^n$ dont les composantes $f_1, \dots, f_n$ sont indépendantes et en involution.

II.2.a. Action locale de $\mathbf{R}^n$. — La variété W est munie d'une opération locale, localement libre en les points réguliers, de $\mathbf{R}^n$. Appelons $X_1, \dots, X_n$ les champs de vecteurs hamiltoniens associés aux f_i . Ces champs commutent :

$$[X_i, X_j] = X_{\{f_i, f_j\}} = 0.$$

On obtient l'opération de $\mathbf{R}^n$ en les intégrant :

$$t \cdot x = \varphi_n^{t_n} \circ \varphi_{n-1}^{t_{n-1}} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1}(x)$$

où φ_i désigne le flot de X_i et $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ est proche de 0 (pour que $\varphi_i^{t_i}$ soit défini).

Cette opération locale est localement libre⁽⁷⁾ sur l'ouvert des points réguliers dans W parce que les champs X_i sont indépendants en ces points.

⁽⁶⁾La généralisation à l'opération du tore T^n des matrices unitaires diagonales par conjugaison sur les matrices hermitiennes n'est pas mal non plus. Voir par exemple [6] pour un traitement élémentaire (avec figures) de ces exemples.

⁽⁷⁾Rappelons que l'opération locale du groupe de Lie G sur la variété W est *localement libre* s'il y a au moins un point de W où les champs fondamentaux sont indépendants. Voir aussi l'exercice II.7.

Si les champs sont complets. — Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire que les champs X_i sont complets, c'est-à-dire que les flots $\phi_i^{t_i}$ sont définis pour toutes les valeurs de t . On a alors une opération localement libre de $\mathbf{R}^n$ sur l'ouvert des points réguliers dans W . Comme les champs X_i sont tangents aux niveaux communs des f_i , cette opération préserve ces niveaux.

Les composantes connexes des niveaux réguliers de f sont des espaces homogènes de $\mathbf{R}^n$ par des sous-groupes discrets. Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$ sont les réseaux $\mathbf{Z}^k$ des sous-espaces vectoriels de dimension k . Les composantes connexes des niveaux réguliers sont donc des $\mathbf{R}^{n-k} \times \mathbf{T}^k$ pour un k tel que $0 \leq k \leq n$.

Tores de Liouville. — Les composantes connexes compactes des niveaux réguliers sont donc des tores $\mathbf{T}^n$ et ces tores sont lagrangiens.

Remarque II.2.1. — On n'a d'ailleurs pas besoin de demander que les flots soient complets pour avoir ce résultat : sur une composante compacte, le flot *est* complet.

Remarque II.2.2. — Il existe des exemples tout à fait honnêtes de systèmes intégrables dont les intégrales ne sont pas propres. C'est le cas notamment pour le système de Hénon-Heiles (voir le §I.3.c) et pour un autre système célèbre, le système de Toda. Pour savoir comment peuvent être faits les niveaux, voir par exemple [28, 30] pour Hénon-Heiles et [8] pour Toda.

Exercices II.7, II.8, II.9.

II.2.b. Construction de variables « action ». — On peut décrire les résultats du §II.2.a en disant que les niveaux communs des intégrales premières ont une structure affine naturelle (voir l'exercice II.8).

Remarque II.2.3. — Cette structure affine a été définie en intégrant les champs hamiltoniens des intégrales premières. En particulier, les solutions du système hamiltonien sont linéaires dans cette structure affine... une tautologie sur laquelle je reviendrai au chapitre IV.

Il y a aussi une structure affine transverse, décrite en termes de coordonnées par les coordonnées « action », que nous allons construire maintenant.

Fixons une valeur régulière q de f . On suppose que $f^{-1}(q)$ a une composante compacte F_q , qu'on fixe aussi. On veut étudier ce qui se passe au voisinage de F_q . Comme les valeurs régulières de f forment un ouvert, il y a tout un voisinage U de q dans $\mathbf{R}^n$ qui est formé de valeurs régulières.

Voisinage d'un tore de Liouville. — Comme F_q est compacte, il y a un voisinage relativement compact V de F_q dans la variété W tel que $f(\overline{V}) \subset U$. Appelons g la restriction de f à V . L'application $g : V \rightarrow U$ est une submersion, que je vais supposer propre. Quitte à rétrécir éventuellement U et V , on peut trivialisier la

fibration g (c'est le théorème de fibration d'Ehresmann [22, 23]), on a donc un difféomorphisme

$$\tau : V \longrightarrow U \times F_q$$

tel que $\tau^{-1}(\{u\} \times F_q) = g^{-1}(u)$, la fibre de U .

Comme on l'a remarqué, F_q et les autres fibres sont des tores. Avec τ , on peut aussi construire des sections de g . Fixons un point p de F_q . Dans le modèle $U \times F_q$, on a une section évidente $u \mapsto (u, p)$. On regarde son image σ par τ^{-1} (figure 2) :

$$\sigma(u) = \tau^{-1}(u, p).$$

C'est une section de g .

Déformation du réseau. — En utilisant cette section σ , on montre maintenant que les tores $g^{-1}(u)$ se déforment de façon continue, au sens où $g^{-1}(u)$ est le quotient de $\mathbf{R}^n$ par le stabilisateur⁽⁸⁾ $P(\sigma(u))$ qui ne dépend que de u et en dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$.

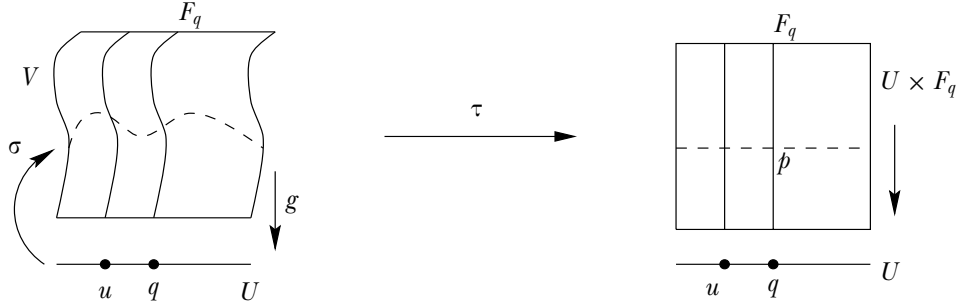


FIGURE 2

L'idée est d'appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation

$$t \cdot \sigma(u) = \sigma(u).$$

Fixons donc $t_0 \in P(p) \subset \mathbf{R}^n$. Soient A un voisinage de t_0 dans $\mathbf{R}^n$ et B un voisinage de p dans F_q , assez petits pour que

$$t \in A \text{ et } u \in U \implies \tau(t \cdot \sigma(u)) \in \{u\} \times B.$$

On peut considérer l'ouvert B de F_q comme un ouvert de $\mathbf{R}^n$, puisque $F_q \cong \mathbf{R}^n / P(p)$.

On a ainsi défini une application

$$\begin{aligned} \Theta : A \times U &\longrightarrow B \\ (t, u) &\longmapsto \tau(t \cdot \sigma(u)) - p \end{aligned}$$

⁽⁸⁾Dans cette démonstration, j'utilise la notation $P(p)$ pour désigner le stabilisateur du point p , un réseau de $\mathbf{R}^n$. La lettre P est pour « périodes ». Les réseaux, qui jouent un rôle essentiel dans la théorie et en particulier dans ce chapitre, étaient annoncés par les rangées de petits choux de la citation liminaire.

(la différence est au sens de la structure affine du tore F_q). On a

$$\begin{aligned}\Theta(t, u) = 0 &\iff \tau(t \cdot \sigma(u)) = p \\ &\iff t \cdot \sigma(u) = \sigma(u) \\ &\iff t \in P(\sigma(u)).\end{aligned}$$

La différentielle partielle $(d_t\Theta)_{(t,u)}$ de Θ par rapport aux variables t est composée de la différentielle $(d\tau)_{t \cdot \sigma(u)}$ du difféomorphisme τ et de la différentielle de $t \mapsto t \cdot \sigma(u)$. Celle-ci est de rang n puisqu'elle envoie les vecteurs $\frac{\partial}{\partial t_i}$ de la base canonique sur les vecteurs indépendants $X_i(\sigma(u))$.

La différentielle partielle $(d_t\Theta)_{(t,u)}$ étant de rang n , le théorème des fonctions implicites nous donne une fonction $T : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ (peut-être en rétrécissant encore une fois l'ouvert U) telle que

$$\begin{cases} (t, u) \in A \times U \text{ et } t = T(u) \iff t \cdot \sigma(u) = \sigma(u) \\ T(p) = t_0. \end{cases}$$

En faisant parcourir à t_0 une base du réseau $P(p)$, on obtient une base du réseau $P(\sigma(u))$, dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ de u .

Action du tore $\mathbf{T}^n$. — Soit donc $(T_1(u), \dots, T_n(u))$ (pour $u \in U$) une telle base. C'est une base du réseau $P(\sigma(u))$ des périodes dans $\mathbf{R}^n$. Son avatar $Y_1(v), \dots, Y_n(v)$ dans $T_v V$ est une base des vecteurs tangents à la fibre (figure 3).

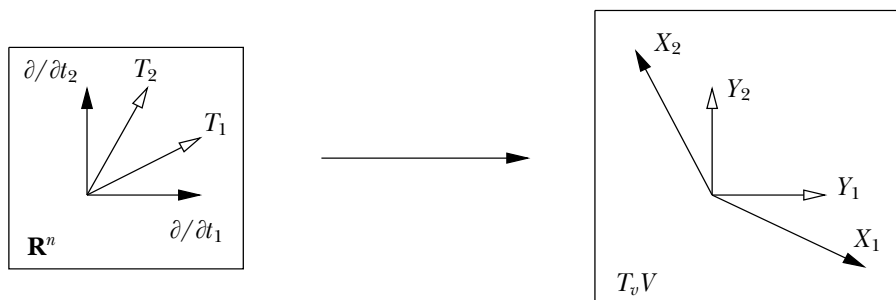


FIGURE 3

Pour ceux qui aiment les formules : si on écrit $T_i(u)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$

$$T_i(u) = \sum_{j=1}^n T_{i,j}(u) \frac{\partial}{\partial t_j},$$

alors

$$Y_i(v) = \sum_{j=1}^n T_{i,j}(f(v)) X_j(v).$$

Les champs de vecteurs $Y_1, \dots, Y_n$ sont, par définition, périodiques de période 1. De plus, on a, en désignant par ψ_i^t le flot de Y_i ,

$$\psi_i^t(v) = (tT_i(f(v))) \cdot v,$$

ce dont on déduit

$$\begin{aligned} \psi_i^t \circ \psi_j^{t'}(v) &= tT_i(f(\psi_j^{t'}(v))) \cdot \psi_j^{t'}(v) \\ &= tT_i(f(v)) \cdot (t'T_j(f(v))) \cdot v \\ &= tt'T_i(f(v))T_j(f(v)) \cdot v \end{aligned}$$

(en utilisant le fait que $f(\psi_j^{t'}(v)) = f(v)$) et donc Y_i et Y_j commutent.

On a ainsi défini une opération du tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ sur V . Ce qu'on a gagné : les Y_i sont périodiques de période 1, *indépendante de u* .

Primitive de la forme symplectique. — On va construire les variables d'action en intégrant une 1-forme sur les trajectoires des Y_i . Il faut donc d'abord construire une telle 1-forme. On peut supposer que l'ouvert U est une boule⁽⁹⁾, et donc que V se rétracte sur F_q . On a alors en particulier $H^2(V; \mathbf{R}) \cong H^2(F_q; \mathbf{R})$.

Maintenant, F_q est isotrope donc la classe $[\omega]$ de la forme symplectique ω est nulle dans $H^2(F_q; \mathbf{R})$. Donc elle est nulle aussi dans $H^2(V; \mathbf{R})$, la forme symplectique est exacte sur V . Soit λ une de ses primitives, c'est-à-dire une 1-forme telle que $\omega = d\lambda$.

Définition des variables d'action. — Posons

$$J_i(v) = \int_0^1 \lambda(Y_i) \circ \psi_i^t(v) dt.$$

Dans cette écriture, il s'agit bien d'intégrer la fonction de t obtenue en calculant la forme λ , au point $\psi_i^t(v)$, sur le vecteur tangent Y_i . En posant $\gamma_i(t) = \psi_i^t(v)$, on définit un lacet paramétré par $[0, 1]$, qui est l'orbite de v sous l'opération du cercle correspondant à Y_i . La fonction $J_i(v)$ n'est autre que l'intégrale de la forme λ sur le lacet γ_i :

$$J_i(v) = \int_{\gamma_i} \lambda.$$

Proposition II.2.4. — *L'opération du tore $\mathbf{T}^n$ sur V est hamiltonienne et son application moment est*

$$J = (J_1, \dots, J_n) : V \longrightarrow \mathbf{R}^n.$$

Démonstration. — On va appliquer la proposition II.1.2 (et plus précisément la variante exprimée dans la remarque II.1.3) dans la variété symplectique exacte V , pour l'opération de chacun des facteurs de T^n . La seule chose à vérifier est que

⁽⁹⁾Voir toutefois le § II.2.d.

chacun des champs fondamentaux Y_i satisfait à $i_{Y_i}\mathcal{L}_{Y_i} = 0$. Compte-tenu de la formule de Cartan, on a

$$\begin{aligned} i_{Y_i}\mathcal{L}_{Y_i}\omega &= i_{Y_i}d i_{Y_i}\omega \\ &= i_{Y_i}d\left(\sum T_{i,j}df_j\right) \\ &= i_{Y_i}\left(\sum dT_{i,j} \wedge df_j\right). \end{aligned}$$

Mais Y_i est tangent aux fibres de f et $T_{i,j}$ est constant sur ces fibres, donc Y_i est dans le noyau de $dT_{i,j}$ comme dans celui de df_j . $\square$

Quelques conséquences. — On remarquera que, bien sûr, $J(v)$ ne dépend que de $f(v)$: c'est une application moment, elle est constante sur les orbites. On aurait pu le vérifier directement.

On remarquera aussi que l'application J est de rang n (c'est dire que l'opération du tore est effective). On a en effet

$$(dJ)_v(Z) = (\omega_v(Z, Y_1), \dots, \omega_v(Z, Y_n))$$

et cette application linéaire est de rang n parce que les vecteurs Y_i sont indépendants et la forme ω non dégénérée.

Exercice II.10.

II.2.c. Construction de variables « angle ». — Résumons les épisodes précédents. On a un fibré symplectique

$$J : V \longrightarrow U$$

dont les fibres sont des tores lagrangiens et une opération de $\mathbf{T}^n$ dont J est l'application moment.

On peut utiliser, comme ci-dessus, une section σ du fibré et un difféomorphisme τ avec $U \times F_q$. Comme F_q est un tore $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, on a des coordonnées $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ sur F_q et donc aussi des coordonnées $(J_1, \dots, J_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ sur V .

Dans ces coordonnées, la forme symplectique s'écrit

$$\omega = \sum dJ_i \wedge d\theta_i + \sum a_{i,j} dJ_i \wedge dJ_j$$

(il n'y a pas de termes en $d\theta_i \wedge d\theta_j$ parce que les fibres sont lagrangiennes).

Posons $\eta = \sum a_{i,j} dJ_i \wedge dJ_j$. *A priori*, les $a_{i,j}$ pourraient dépendre des θ_k , mais en fait, il n'en est rien : comme ω est fermée, il en est de même de η , ce qui revient exactement à dire que η ne dépend pas des θ_k . Plus intrinsèquement, $\eta = \sigma^*\omega$ est fermée comme ω .

C'est donc une forme sur U , et une forme fermée. On a déjà supposé (et utilisé le fait) que U est contractile. Donc η est exacte, $\eta = dA$ pour une forme A sur U qu'on écrit

$$A = \sum A_i dJ_i.$$

Les A_i sont des fonctions sur U . On les utilise pour modifier la section σ : on pose

$$\varphi_i = \theta_i - A_i$$

(nouveaux « angles ») ou

$$s(J_1, \dots, J_n) = (J_1, \dots, J_n, \theta_1 - A_1, \dots, \theta_n - A_n),$$

en abrégé

$$s(J_1, \dots, J_n) = \sigma(J_1, \dots, J_n) - (A_1, \dots, A_n).$$

Finalement

$$s^*\omega = \sigma^*\omega - dA = 0$$

donc

$$\omega = \sum dJ_i \wedge d\varphi_i.$$

Remarque II.2.5. — On peut modifier J en lui ajoutant une constante, φ en lui ajoutant une fonction de J seul, on aura encore des variables « action-angle⁽¹⁰⁾ ».

Le système hamiltonien dans les coordonnées action-angle. — Il a une forme particulièrement simple. D'abord, le hamiltonien H est dans l'algèbre engendrée par les intégrales premières et donc c'est une fonction de $J_1, \dots, J_n$ seuls, notons-la

$$H(x) = h(J_1, \dots, J_n).$$

Ensuite, les coordonnées $(J_1, \dots, J_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sont symplectiques, donc le système hamiltonien s'écrit, dans ces coordonnées

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial h}{\partial \varphi_i} = 0 \text{ et } \dot{\varphi}_i = \frac{\partial h}{\partial J_i} = a_i(J_1, \dots, J_n).$$

Sous cette forme, on vérifie sans mal que les solutions sont bien des angles φ_i dépendant linéairement du temps sur les niveaux de J . Il est clair qu'un tel système s'intègre par quadratures, d'où la terminologie « système intégrable ».

II.2.d. Problème global. — Une question intéressante est de savoir « jusqu'où » on peut prolonger les coordonnées action-angle obtenues. Revenons donc à la démonstration et examinons les diverses opérations de rétrécissement effectuées sur l'ouvert U . Supposons, pour simplifier la discussion, que f soit propre. On s'aperçoit successivement qu'il suffit que l'ouvert U satisfasse aux propriétés suivantes :

- D'abord il est connexe et contenu dans l'ensemble des valeurs régulières de f .
- Au dessus de U , le fibré $g : V \rightarrow U$ est trivial. C'est certainement le cas si U est contractile⁽¹¹⁾.

⁽¹⁰⁾Je n'arrive pas à décider comment mettre cette expression au pluriel.

⁽¹¹⁾On remarquera toutefois que, comme le fibré en tores $V \rightarrow U$ n'est pas, *a priori*, principal, il ne suffit pas que $H^2(U; \mathbf{Z})$ soit nul pour qu'il soit trivial. Voir les exemples II.3.c et II.3.d.

- Le théorème des fonctions implicites s'applique globalement : la différentielle de l'application Θ est de rang n dès que les X_i sont indépendants et donc au-dessus de l'ouvert des valeurs régulières de f .
- On a eu besoin d'une primitive de la forme symplectique sur V , pour cela on a utilisé un isomorphisme

$$H^2(U \times F_q; \mathbf{R}) \cong H^2(F_q; \mathbf{R})$$

qui, compte-tenu de la formule de Künneth, existe certainement dès que

$$H^1(U; \mathbf{R}) = 0 \text{ et } H^2(U; \mathbf{R}) = 0,$$

et en particulier quand U est contractile.

On a donc en fait montré le résultat plus global suivant.

Proposition II.2.6. — *Soit U un ouvert contractile de $\mathbf{R}^n$ formé de valeurs régulières de f . Soit V une composante connexe de $f^{-1}(U)$ telle que $f|_V : V \rightarrow U$ ait une fibre compacte. Il existe des coordonnées action-angle globales sur V .*

On trouvera une discussion plus générale dans l'article fondateur de Duistermaat [21] : l'absence de monodromie — et en particulier la simple connexité de U et la nullité de $H^2(U; \mathbf{Z})$ suffisent à assurer l'existence globale de coordonnées action-angle.

Remarque II.2.7. — Si une des composantes de f , le hamiltonien par exemple, est propre, l'hypothèse de compacité est automatiquement satisfaite.

Exemple II.2.8. — Dans le cas des géodésiques des quadriques, on peut démontrer (voir ici le §IV.3.c et [7]) que les composantes connexes de l'ensemble des valeurs régulières sont des simplexes, en particulier contractiles, de sorte qu'on a des coordonnées action-angle au-dessus de chacune de ces composantes (voir le §IV.3.d et [11]). Attention toutefois que les images inverses de ces composantes ne sont jamais connexes⁽¹²⁾.

Exemple II.2.9 (Contre-exemples). — Il y a deux contre-exemples classiques, ceux du pendule sphérique et de la toupie symétrique, voir [21] ou [19]. Dans les deux cas, il y a un point singulier isolé de l'application f au beau milieu d'un ouvert de points réguliers (voir les exercices II.13 et IV.12 ainsi que la figure 7). L'ouvert U en question n'est pas simplement connexe et ne satisfait pas aux hypothèses de la proposition II.2.6. On peut montrer que la fibration $V \rightarrow U$ n'est effectivement pas triviale dans ce cas et donc qu'il n'y a *pas* de variables action-angle globales dans ces deux exemples. Voir [21], [19] (et aussi [12] pour un point de vue différent).

⁽¹²⁾ Assertion facile à vérifier : les géodésiques sont des courbes *orientées*, ce qui aide les niveaux réguliers à avoir un nombre pair de composantes connexes. Pour un décompte précis des tores de Liouville, voir [7].

II.2.e. Le cas analytique réel. — La démonstration que j’ai donnée ici ne fonctionne pas très bien dans le cas analytique réel. En effet, j’y ai utilisé le théorème de fibration d’Ehresmann, qui est faux dans ce cadre : il y a des familles analytiques réelles qui ne sont pas (analytiquement) localement triviales. Le théorème d’Arnold-Liouville « analytique réel » est quand même vrai : au lieu d’utiliser le fait que la fibration est localement triviale, puis la section σ et le théorème des fonctions implicites, on peut montrer directement que les niveaux forment une famille « analytique » de tores : les réseaux dépendent de façon analytique de u (voir, par exemple, [41]). Le reste de la démonstration fonctionne bien.

II.3. Exemples

Je reprends ici les exemples décrits dans le chapitre I et je montre quelques aspects de ce qu’en dit le théorème d’Arnold-Liouville, principalement du point de vue de la topologie.

II.3.a. L’oscillateur harmonique. — Toutes les valeurs de $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ sauf 0 sont régulières. Les tores de Liouville sont les cercles centrés à l’origine, la variable « angle » est l’angle θ des coordonnées polaires et la variable d’action est $\frac{1}{2}r^2$ (c’est-à-dire H).

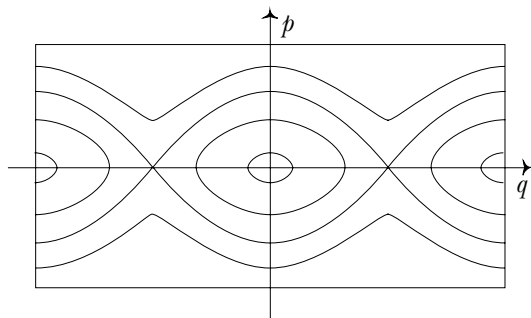


FIGURE 4. Pendule simple

II.3.b. Le pendule simple. — La figure 4 représente les niveaux du hamiltonien H , supports des solutions du système différentiel associé pour

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q.$$

Les ovales tels que celui représenté sur la figure 4 correspondent aux petits mouvements (mouvements presque périodiques) du pendule.

Dans cet exemple de dimension 2, tout est très simple, mais il n’est pas inutile de s’assurer qu’on est capable de le comprendre complètement (exercice II.12).

II.3.c. Le pendule sphérique. — Les valeurs régulières et les tores de Liouville pour le problème du pendule sphérique sont déterminés de façon extrêmement détaillée et terre-à-terre dans [19] où l'on trouvera aussi une longue discussion de l'existence, ou plutôt de la non-inexistence, de variables action-angles globales. Il n'est donc pas malhonnête de proposer ces résultats en exercice, en fait deux fois dans ce livre : de façon directe (exercice II.13) puis de façon plus élégante (sans calcul) en application des méthodes algèbro-géométriques au chapitre IV (exercice IV.12).

II.3.d. La toupie. — On utilise ici les notations des §§ I.2.g et I.3.g. L'espace de phases est la variété

$$W_a = \left\{ (\Gamma, M) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ et } \Gamma \cdot M = a \right\}$$

et le hamiltonien $H = \frac{1}{2}M \cdot \Omega + \Gamma \cdot L$. Posons aussi

$$H'(\Gamma, M) = \frac{1}{2} \|M\|^2 + \Gamma \cdot L.$$

On vérifie sans mal⁽¹³⁾ que H' est une intégrale première du mouvement de la toupie et que les applications (H', K) et (H, K) ont le même rang.

On va donc déterminer les valeurs régulières de cette application (H', K) . Le rang de cette application au point (M, Γ) est celui de la paire de formes linéaires

$$\begin{cases} (dH')_{(\Gamma, M)}(\gamma, \mu) = L \cdot \gamma + M \cdot \mu \\ (dK)_{(\Gamma, M)}(\gamma, \mu) = L \cdot \mu \end{cases}$$

sur le sous-espace vectoriel

$$\begin{cases} \Gamma \cdot \gamma = 0 \\ M \cdot \gamma + \Gamma \cdot \mu = 0. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'étudier le rang de la matrice $\begin{pmatrix} L & 0 & \Gamma & M \\ M & L & 0 & \Gamma \end{pmatrix}$. Dire que ce rang n'est pas maximal, c'est dire qu'on a des relations

$$\begin{cases} xL + \quad + z\Gamma + tM = 0 \\ xM + yL + \quad + t\Gamma = 0 \end{cases}$$

avec des coefficients x, y, z et t non tous nuls.

- Si ces deux relations sont indépendantes, les trois vecteurs L, Γ et M sont colinéaires, donc $L = \varepsilon \Gamma$ (avec $\varepsilon = \pm 1$, c'est le cas où l'axe de la toupie est vertical) et $M = a\Gamma$. En ces points, (H', K) est de rang nul et prend les valeurs $H' = \frac{1}{2}a^2 + \varepsilon$, $K = \varepsilon a$.
- Si elles sont liées, en identifiant les coefficients de M , on voit qu'il existe un nombre réel λ tel que $\lambda^{-1}\Gamma + M + \lambda L = 0$.

⁽¹³⁾ Les « trous » de cette démonstration sont énumérés dans l'exercice II.15.

Les valeurs régulières de (H', K) sont celles pour lesquelles le polynôme

$$Q(\lambda) = \|\Gamma + M\lambda + L\lambda^2\|^2$$

a toutes ses racines simples.

Dans le cas où l'on a $a < 2$, l'image de l'application (H', K) ressemble beaucoup à celle de l'application (H, K) dans le cas du pendule sphérique (figure 7) et en particulier l'ensemble des valeurs régulières n'est pas simplement connexe. Voir dans [19] une démonstration du fait que, là encore, la fibration par les tores de Liouville n'a pas de section globale. Déterminons maintenant ces tores de Liouville, justement.

Proposition II.3.1. — *Les niveaux réguliers de (H', K) sont connexes.*

Démonstration. — Comme conséquence des résultats de l'exercice II.15, l'ensemble des valeurs régulières de (H', K) est connexe (à défaut, parfois, d'être simplement connexe). Il suffit donc de montrer que certains niveaux réguliers sont connexes. Je vais montrer que c'est le cas de tous ceux pour lesquels K est submersive. Soit donc k une valeur régulière de

$$K : W_a \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Le groupe des rotations autour de l'axe L de la toupie préserve $K^{-1}(k)$ par définition : K est une application moment pour cette opération du cercle sur W_a . On peut donc considérer la « variété symplectique réduite », le quotient $W_{a,k} = W_a/S^1$ (voir l'exercice II.4). Comme W_a était de dimension 4, $W_{a,k}$ est une surface. Comme H' commutait avec K , il passe au quotient et définit un hamiltonien, encore noté H'

$$H' : W_{a,k} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Le niveau (h', k) de (H', K) est un fibré en cercles sur le niveau h' de H' dans $W_{a,k}$. Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer que celui-ci est connexe.

Considérons l'orbite d'un point (Γ, M) de $K^{-1}(k)$. Si, dans la base orthonormée utilisée pour diagonaliser la matrice d'inertie $\mathcal{J}$ (§I.3.g), on écrit

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ k \end{pmatrix} \text{ ou, mieux } \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 + i\gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} u + iv \\ k \end{pmatrix},$$

le cercle opère par

$$\theta \cdot (\Gamma, M) = \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta}(\gamma_1 + i\gamma_2) \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\theta}(u + iv) \\ k \end{pmatrix} \right).$$

Remarquons aussi que, si $M \cdot \Gamma = a$, on a $k = \pm a$, ce qui est une valeur critique de K , comme on l'a remarqué ci-dessus. Comme on a supposé que k est une valeur régulière, on a $\gamma_1 + i\gamma_2 \neq 0$ et, dans chaque orbite, il y a un unique représentant avec $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 = 0$. Fixons un γ_3 dans $] -1, 1[$. Alors $\gamma_1 = \sqrt{1 - \gamma_3^2}$ et $\Gamma \cdot M = a$

donne $u = (a - k\gamma_3)/\gamma_1$ et aucune restriction sur v . On a ainsi défini un plongement de $\mathcal{O}_{c,k}$ dans $] -1, 1[\times \mathbf{R}$:

$$(\Gamma, M) \longmapsto (\gamma_3, v).$$

Regardons donc, dans $] -1, 1[\times \mathbf{R}$, les niveaux du hamiltonien réduit H' :

$$H'(\gamma_3, v) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a - k\gamma_3}{\gamma_1} \right)^2 + v^2 + k^2 \right] + \gamma_3.$$

Au niveau h' , on trouve

$$v^2 = (1 - \gamma_3^2)(h' - k^2 - 2\gamma_3) - (a - k\gamma_3)^2$$

dont l'intersection avec $] -1, 1[\times \mathbf{R}$ est connexe. $\square$

II.3.e. Géodésiques des surfaces de révolution. — Je vais présenter l'exemple du flot géodésique des surfaces de révolution, dont nous avons montré au §I.4.a qu'il est complètement intégrable, dans l'exercice II.14. Cet exercice vise à convaincre les lecteurs que ce que représente « vraiment » la figure illustrant la couverture du livre [27], c'est un tore de Liouville du flot géodésique d'une surface de révolution.

II.3.f. Géodésiques de l'ellipsoïde. — Je vais décrire les valeurs régulières et déterminer des coordonnées d'action au chapitre IV en utilisant des méthodes de géométrie algébrique. Ces mêmes méthodes permettent aussi de compter les tores de Liouville [7].

Exercices II.11, II.12, II.13, II.14, II.15.

II.3.g. Les anneaux et les tores, une remarque. — La figure représentant les géodésiques d'une surface de révolution et qui orne la couverture de [27], ressemble beaucoup aux figures représentant le mouvement de l'extrémité de l'axe d'une toupie (voir [3] ou [9], par exemple), le mouvement de la bille d'un pendule sphérique ou les géodésiques d'un ellipsoïde (voir [37] ou [7]).

Dans chacun de ces cas, on voit une solution d'un système intégrable dans un espace de configuration : la géodésique sur la surface, le mouvement d'un point sur une sphère. Quelques-unes de ces trajectoires sont représentées sur la figure 5. On remarque que, dans chacun de ces cas, on a un anneau (topologiquement, un cylindre) et que la solution considérée oscille entre les deux « cercles » limitant cet anneau. Ce que chacune de ces figures représente, c'est un tore de Liouville (qui vit dans un espace de phases de dimension 4), vu en projection sur l'espace de dimension 2, comme le montre la figure 6.

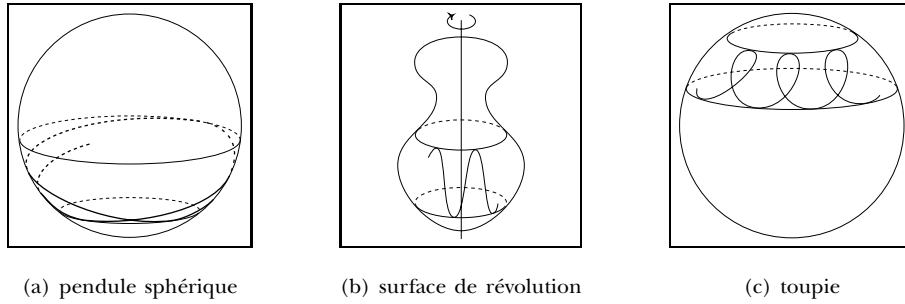


FIGURE 5. Des anneaux...

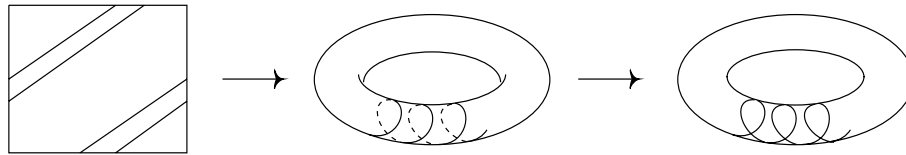


FIGURE 6. ... ou des tores?

Exercices

Exercice II.1. — Vérifier que l'opération de S^1 sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ par rotations autour de l'axe des z est hamiltonienne d'application moment la fonction hauteur z (voir le §I.2.b).

Exercice II.2. — Le tore $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ est muni de la forme symplectique déduite de celle de $\mathbf{R}^2$ (exercice I.8). Vérifier que la formule

$$t \cdot (x, y) = (x + t, y)$$

définit une opération symplectique de $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ sur T^2 . Cette opération est-elle hamiltonienne?

Exercice II.3. — La variété symplectique (W, ω) est munie d'une opération symplectique d'un tore T . Soient X et Y deux champs fondamentaux de cette opération. Montrer que la fonction

$$x \longmapsto \omega_x(X(x), Y(x))$$

est constante. En déduire que l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T est munie (par l'opération) d'une forme bilinéaire alternée. À quelle condition l'opération est-elle hamiltonienne?

Exercice II.4 (La réduction symplectique — suite). — Soit F un hamiltonien périodique sur une variété symplectique W et soit f une valeur régulière de F . Vérifier que S^1 opère sur la sous-variété $F^{-1}(f)$ et que cette opération est localement libre.

On suppose maintenant que cette opération est libre. Montrer que la forme symplectique de W définit une forme symplectique sur la variété quotient $F^{-1}(f)/S^1$ (voir au besoin l'exercice I.4).

On suppose que G est une autre fonction sur W , qui commute avec F . Montrer que G définit une fonction sur la « variété symplectique réduite » $F^{-1}(f)/S^1$.

Exercice II.5 (L'espace projectif complexe). — En appliquant la technique mise au point dans l'exercice II.4, définir une structure symplectique sur l'espace projectif complexe

$$\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^* = S^{2n+1}/S^1.$$

Le tore T^{n+1} opère sur $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{C}^{n+1}$ par multiplication des coordonnées :

$$(t_1, \dots, t_{n+1}) \cdot (z_1, \dots, z_{n+1}) = (t_1 z_1, \dots, t_{n+1} z_{n+1}).$$

Montrer que cette opération est hamiltonienne. Quelle est son application moment ?

Toujours en utilisant la méthode de l'exercice II.4, en déduire une opération hamiltonienne du tore T^{n+1} sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Est-elle effective ? Montrer que l'image de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par l'application moment de cette opération est un simplexe⁽¹⁴⁾ de dimension n .

Exercice II.6 (Les hamiltoniens périodiques sont intégrables)

Soit F un hamiltonien périodique sur une variété symplectique W . On considère une trajectoire Γ du champ hamiltonien X_F , contenue dans un niveau régulier de F . Un voisinage de $F^{-1}(f)$ dans W est difféomorphe⁽¹⁵⁾ à

$$F^{-1}(f) \times]f - \varepsilon, f + \varepsilon[$$

avec $F(x, t) = t$.

On suppose que le cercle S^1 opère librement sur le niveau $F^{-1}(f)$. En utilisant l'exercice II.4 et $n - 1$ fonctions indépendantes en involution sur un voisinage de l'image de Γ dans $F^{-1}(f)/S^1$, montrer que, sur un voisinage de Γ dans W , F est intégrable.

Exercice II.7. — Montrer que l'opération du groupe de Lie G sur la variété W est localement libre si et seulement si il existe un point x de W et un voisinage U de 1 dans G tels que $G_x \cap U = \emptyset$.

Exercice II.8 (Structure affine des fibres). — Montrer que les fibres d'une fibration lagrangienne sont canoniquement munies d'une structure affine.

⁽¹⁴⁾ C'est un cas particulier d'un célèbre théorème d'Atiyah, Guillemin et Sternberg [5, 35] : l'image de l'application moment de l'opération d'un tore sur une variété symplectique compacte et connexe est un polytope convexe.

⁽¹⁵⁾ On peut démontrer ce fait en intégrant le gradient de F pour une métrique riemannienne, ou, de façon équivalente, en intégrant le champ JX_F pour une structure presque complexe J adaptée à ω .

Exercice II.9. — Montrer que toute composante connexe compacte d'une fibre d'une fibration lagrangienne est isomorphe (comme variété munie d'une structure affine) à un tore.

Exercice II.10 (Structure affine transverse). — Soit $g : V \rightarrow U$ une fibration lagrangienne.

- Soit q un point de U . Montrer que l'espace cotangent T_q^*U opère sur $g^{-1}(q)$.
- On suppose les fibres de g compactes et connexes. Vérifier qu'alors ces fibres s'identifient au quotient de T_q^*U par un réseau P_q et montrer qu'on peut choisir, au voisinage de q , une base $(\alpha_1(q), \dots, \alpha_n(q))$ de P_q de sorte que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soient des 1-formes au voisinage de q .
- Démontrer que ces formes sont fermées.
- Soient $J_1, \dots, J_n$ des primitives locales des α_i sur un voisinage U' de q . Montrer que

$$(J_1, \dots, J_n) : U' \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

est une carte locale de la base U de la fibration.

- On a ainsi construit un atlas sur U . Montrer que les changements de carte sont dans le sous-groupe du groupe affine formé de toutes les transformations affines dont la partie linéaire est dans $\mathrm{GL}(n; \mathbf{Z})$.

Exercice II.11. — Déterminer des variables action-angles pour le système hamiltonien sur $\mathbf{R}^2$ associé à $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}aq^2$.

Exercice II.12. — Préciser les valeurs régulières de H , les tores de Liouville et une coordonnée d'action dans l'exemple du pendule simple. On donnera une description géométrique de cette coordonnée.

Exercice II.13 (Valeurs régulières pour le pendule sphérique)

On utilise les notations du §I.2.f. On vérifie d'abord que les mouvements horizontaux du pendule sphérique sont critiques, un résultat dû à Huygens (voir [21]). On écrit le vecteur q sous la forme

$$q = \frac{1}{\alpha^2} \Gamma + q'$$

pour une constante α telle que $\alpha^2 > 1$ et un vecteur q' orthogonal à Γ et on considère le vecteur

$$p = \alpha q' \wedge \Gamma$$

qui est, lui aussi, horizontal. Montrer que

$$X_H(q, p) = -\alpha X_K(q, p).$$

En déduire que les valeurs

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2\alpha^2} \\ K = -\alpha + \frac{1}{\alpha^3} \end{cases} \quad \text{pour } \alpha^2 > 1$$

sont des valeurs critiques.

On vérifie ensuite que les mouvements où le pendule reste vertical sont critiques. On considère donc $(q, p) = (\pm\Gamma, 0)$. Montrer qu'alors $X_K(q, p) = 0$. En déduire que les valeurs $(H, K) = (\pm 1, 0)$ sont critiques.

Montrer que l'ensemble des valeurs régulières de l'application $(H, K) : TS^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ a l'aspect représenté sur la figure 7 (on remarquera en particulier que cet ouvert n'est *pas* simplement connexe⁽¹⁶⁾). Montrer que tous les niveaux réguliers de (H, K) sont connexes et que le niveau $(H, K) = (1, 0)$ est un tore « pincé ».

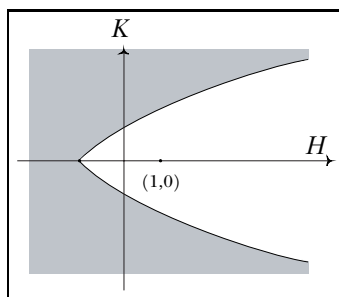


FIGURE 7

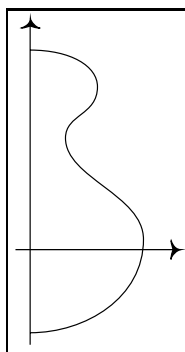


FIGURE 8

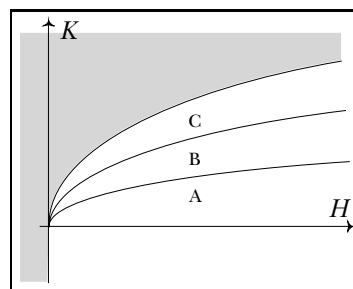


FIGURE 9

Exercice II.14 (Tores de Liouville pour les surfaces de révolution)

On considère la surface de révolution engendrée par la courbe « de profil » représentée sur la figure 8, qu'on suppose paramétrée par la longueur d'arc (voir les notations au §I.4.a). Déterminer les valeurs régulières et montrer que l'image dans $\mathbf{R}^2$ de l'application (H, K) ressemble à la partie non hachurée de la figure 9. À quoi correspondent les paraboles de cette figure ? Montrer que les niveaux réguliers sont constitués de

- deux⁽¹⁷⁾ tores dans les parties A et C
- quatre tores dans la partie B.

⁽¹⁶⁾Voir l'exercice IV.12 pour une démonstration sans calcul.

⁽¹⁷⁾Voir la note 12.

Que peut-on dire des niveaux correspondant aux points des paraboles ?

Montrer que les géodésiques qui ne sont pas des méridiens sont condamnées à osciller entre deux parallèles de la surface. Que peut-on dire de ces parallèles ? Interpréter cette remarque dans le cas des géodésiques de la sphère vue comme surface de révolution autour de l'axe des z .

Exercice II.15. — Boucher les trous de l'étude de l'exemple de la toupie au § II.3.d :

- Vérifier que H' est une intégrale première du mouvement de la toupie et que les applications (H', K) et (H, K) ont le même rang.
- Soit $Q(\lambda) = \|\Gamma + M\lambda + L\lambda^2\|^2$ (un polynôme de degré 4 en λ). Montrer que, pour que (h', k) soit une valeur régulière de (H', K) , il faut et il suffit que le polynôme Q ait une racine multiple. Déterminer l'ensemble des valeurs (régulières et critiques) de (H', K) (voir les figures dans [9]).
- Dessiner la (partie réelle de la) courbe elliptique d'équation

$$y^2 = (1 - x^2)(h' - k^2 - 2x) - (a - kx)^2$$

et vérifier qu'elle a deux composantes connexes dont une est compacte et se projette dans l'intervalle ouvert $x \in]-1, 1[$.

CHAPITRE III

INTÉGRABILITÉ ET GROUPES DE GALOIS

Le théorème d'Arnold-Liouville, revu par la théorie de Galois différentielle

Le théorème d'Arnold-Liouville affirme que les solutions proches d'une solution assez générale d'un système intégrable lui « ressemblent » beaucoup. Dans ce chapitre, on étudie les solutions (infinitésimalement) proches à l'aide de la théorie algébrique des équations différentielles linéaires.

À une trajectoire d'un champ de vecteurs X sur une variété W on associe, suivant une tradition « variationnelle » remontant à Poincaré [65], une équation différentielle linéaire : l'équation aux variations. Ziglin [80] avait démontré et utilisé efficacement le fait que toute intégrale première de X permet de définir une intégrale première de l'équation aux variations, invariante par le groupe de Galois.

Dans le cas spécifique d'une trajectoire générique d'un système intégrable, on montre facilement que le groupe de Galois est « petit » (pour un groupe algébrique !). Il est connexe, abélien, bien souvent trivial. Un théorème de Morales et Ramis [58, 57] (voir aussi [13]) affirme que, le long de n'importe quelle trajectoire, sa composante neutre doit être un groupe abélien.

Ce théorème a déjà des applications [58, 59, 43, 57]. Il peut servir de critère de non-intégrabilité, c'est-à-dire aider à répondre à des questions du type : « étant donné un système hamiltonien, comment montrer qu'il est (ou plutôt qu'il n'est pas) complètement intégrable ? » ou, plus naïvement : « si je n'ai pas été capable de trouver des intégrales premières, est-ce parce que j'ai été maladroite ou parce qu'on ne pouvait *pas* en trouver ? » Bien que beaucoup plus facile à démontrer, le théorème de Morales et Ramis implique un théorème classique de Ziglin [80]. Il est strictement plus fort⁽¹⁾ au sens où il permet de montrer de certains systèmes pour lesquels la méthode de Ziglin avait échoué qu'ils ne sont pas intégrables.

⁽¹⁾Ce qu'on sait *a priori* parce que le groupe de Galois contient plus de sources de non commutativité que le groupe de monodromie utilisé par Ziglin. Toutefois, les hypothèses faites par Ziglin sont moins restrictives : il ne suppose pas que les intégrales premières commutent.

Dans ce chapitre, j'explique ces propriétés du groupe de Galois en essayant de limiter les calculs et de séparer ce qui est symplectique de ce qui est de la théorie générale des équations différentielles et je donne un exemple relativement simple⁽²⁾ d'application.

III.1. Équation aux variations, groupes de Galois et intégrales premières

Dans cette première partie, on rappelle comment associer, à une trajectoire d'un champ de vecteurs sur une variété, une équation différentielle linéaire, l'équation aux variations. On explique ensuite comment les intégrales premières du champ de vecteurs permettent de fabriquer des intégrales premières de l'équation linéaire, invariantes par le groupe de Galois de cette dernière.

III.1.a. La trajectoire Γ . — Soit X un champ de vecteurs sur une variété W supposée analytique complexe⁽³⁾. Le temps t aussi est une variable complexe.

On considère une trajectoire Γ de X , non réduite à un point (non stationnaire). C'est une courbe complexe, une surface de Riemann, mais elle n'est pas nécessairement *plongée* dans W . Pour préciser : pour tout point x_0 de W , il existe un ouvert U de $\mathbf{C}$ et un voisinage V de x_0 tels que le flot de X soit défini sur $U \times V$:

$$\begin{aligned} U \times V &\longrightarrow W \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x). \end{aligned}$$

On munit W de la topologie dont une base est formée des ensembles $\{\varphi_t(x)\}_{t \in U}$. La trajectoire passant par x_0 est la composante connexe de x_0 pour cette topologie. C'est cette courbe qu'on appelle Γ . Elle possède deux particularités importantes :

- elle est munie d'une coordonnée, le temps t ,
- elle est munie d'une immersion injective $i : \Gamma \rightarrow W$.

Remarque III.1.1. — La courbe Γ est paramétrée globalement par t dans un ouvert de $\mathbf{C}$ mais en général ce paramétrage n'est pas injectif. C'est même souvent un revêtement infini : penser au cas d'une équation différentielle dont les solutions sont des fonctions transcendentes, par exemple au champ de vecteurs $X(x) = x$ sur $\mathbf{C}$.

⁽²⁾C'est probablement l'exemple le plus simple possible. De façon étonnante, on ne le trouve pas dans [58, 57].

⁽³⁾Pour les applications à de *vrais* systèmes différentiels, on se contentera de systèmes analytiques réels qu'on s'empressera de complexifier. C'est une opération qu'il faut traiter avec un peu de prudence, on ne se préoccupera pas de ce problème dans ces notes.

III.1.b. L'équation aux variations. — Traditionnellement [65], on pense à l'équation aux variations comme à celle décrivant les solutions « infinitésimalement proches » d'une solution donnée. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des solutions proches, écrivons, dans une carte

$$y(t) = x(t) + Y(t).$$

On a alors, à l'ordre 1,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = X(y(t)) - X(x(t)) = (dX)_{x(t)}(Y(t)).$$

Cette équation différentielle *linéaire* en Y est l'équation aux variations, que je vais décrire maintenant de façon plus intrinsèque.

L'opérateur D . — Considérons le fibré vectoriel $i^*TW \rightarrow \Gamma$. Une section de ce fibré est un champ de vecteurs tangents à W le long de Γ . Par exemple, $X = \frac{d}{dt}$ est une telle section.

Lemme III.1.2. — *La dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$ définit un opérateur D sur les sections locales de i^*TW , qui satisfait, pour toute fonction f sur Γ , à*

$$D(fY) = \dot{f}Y + fDY.$$

Démonstration. — On définit DY en

- prolongeant Y en $\tilde{Y}$ sur un voisinage de Γ (ou d'un point de Γ , tout est local)
- calculant $\mathcal{L}_X \tilde{Y}$ ($= [X, \tilde{Y}]$)
- restreignant ce champ de vecteurs à Γ .

On vérifie que le résultat ne dépend pas du choix du prolongement $\tilde{Y}$ de Y en constatant que, si Z est un champ identiquement nul en restriction à Γ , alors $\mathcal{L}_X Z$ est nul en restriction à Γ (X ne dérive que dans la direction de Γ). C'est ce qu'affirme le lemme III.1.3 ci-dessous.

La « linéarité » par rapport aux fonctions est conséquence immédiate de l'identité

$$\mathcal{L}_X(fY) = (X \cdot f)Y + f\mathcal{L}_X Y. \quad \square$$

Lemme III.1.3. — *Si Z est un champ de vecteurs sur W défini au voisinage de Γ et identiquement nul sur Γ , alors $\mathcal{L}_X Z$ est nul en tout point de Γ .*

Démonstration. — Pour définir $\mathcal{L}_X Z$, on utilise le flot φ_t de X :

$$\mathcal{L}_X Z = \frac{d}{dt} ((\varphi_t)_* Z)_{|t=0}.$$

En tout point x de Γ , le vecteur $Z(x)$ est nul, donc aussi $(\varphi_t)_* Z(x)$, identiquement. Donc $\mathcal{L}_X Z$ est nul en tout point de Γ . $\square$

Remarque III.1.4. — En termes plus savants, $\nabla = D \otimes dt$ est une connexion sur le fibré i^*TW . Si on s'autorise à ajouter des zéros de X ou des points à l'infini à Γ , la forme dt peut devenir une forme singulière sur Γ et il sera utile de penser à une connexion (singulière) ∇ plutôt qu'à un opérateur D . Le « cas méromorphe » sera

particulièrement intéressant. Dans ce cas, on parlera de trajectoire *prolongée*. On en aura besoin pour les applications, voir le § III.5.

L'équation aux variations. — On appelle *équation aux variations* l'équation linéaire

$$DY = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla Y = 0.$$

On remarquera qu'évidemment, X lui-même est une solution de l'équation aux variations.

Pour ceux qui aiment les coordonnées, écrivons cette équation sous forme matricielle. Si $(e_1(t), \dots, e_m(t))$ est une base de sections locales d'un fibré $E \rightarrow \Gamma$, une section Y de E s'écrit $Y(t) = \sum y_i(t)e_i(t)$ et

$$\begin{aligned} DY &= \sum_{i=1}^m (\dot{y}_i e_i + y_i D e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\dot{y}_i e_i + y_i \sum_{j=1}^m a_{i,j} e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\dot{y}_i + \sum_{k=1}^m a_{k,i} y_k \right) e_i \end{aligned}$$

ce qui donne, en écrivant y pour le vecteur colonne des y_i et en appelant $A(t)$ la matrice des $A(t)_{i,j} = a_{j,i}(t)$:

$$\dot{y} + A(t)y = 0.$$

Encore plus localement, supposons que W soit un ouvert de $\mathbf{C}^m$, de sorte que le champ de vecteurs X peut être considéré comme une application

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow \mathbf{C}^m \\ x &\longmapsto X(x). \end{aligned}$$

Utilisons comme base $(e_1(t), \dots, e_m(t))$ la base canonique $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$ de $\mathbf{C}^m$ restreinte à la trajectoire. Ainsi

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = -\frac{\partial X}{\partial x_i} \text{ de sorte que } A(t) = -(dX)_{x(t)}.$$

L'équation aux variations est la *linéarisée* $\dot{y} = (dX)_{x(t)}y$ de l'équation différentielle originelle. On retrouve l'équation aux variations « à la Poincaré » évoquée ci-dessus.

Exemples III.1.5

- (1) Cas d'un système linéaire. On suppose comme ci-dessus que W est un ouvert de $\mathbf{C}^m$, mais en plus, que le champ X est linéaire : c'est une matrice $X \in M_m(\mathbf{C})$ (et $X(x) = X \cdot x$). Dans ce cas, l'équation aux variations le long d'une solution n'est autre que l'équation elle-même.

- (2) Cas du hamiltonien de Hénon-Heiles. On reprend les notations du §I.2.d. Le système hamiltonien était

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 \\ \dot{q}_2 = p_2 \\ \dot{p}_1 = q_2^2 + \lambda q_1^2 \\ \dot{p}_2 = 2(A + q_1)q_2. \end{cases}$$

On a dit que ce système avait des solutions dans le plan $q_2 = p_2 = 0$. Le long d'une solution $(q_1(t), 0, p_1(t), 0)$, l'équation aux variations est le système

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = P_1 \\ \dot{Q}_2 = P_2 \\ \dot{P}_1 = 2\lambda q_1 Q_1 \\ \dot{P}_2 = 2A Q_2 + 2q_1 Q_2. \end{cases}$$

- (3) Cas d'un flot géodésique. On considère une variété riemannienne V et une géodésique $c(t)$ sur cette variété. C'est l'image, dans V d'une courbe intégrale du flot géodésique considéré comme un flot sur T^*V (voir le §I.4). Les solutions $Y(t)$ de l'équation aux variations sur T^*V se projettent sur des champs tangents à V le long de la géodésique. Ce sont les fameux « champs de Jacobi », solutions de l'équation différentielle linéaire

$$\ddot{J}(t) + R(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t) = 0$$

(voir par exemple [71] et [27]).

Exercices III.1, III.2.

III.1.c. Formes initiales. — On considère maintenant une fonction f sur W . Soit x un point de W . Rappelons le lemme (un tant soit peu auto-référent!) :

Lemme III.1.6. — Si $(df)_x = 0, \dots, (d^{k-1}f)_x = 0$, alors $(d^k f)_x$ est bien définie, c'est un polynôme homogène de degré k

$$(d^k f)_x : T_x W \longrightarrow \mathbf{C}.$$

La démonstration est un exercice. — Soient U un voisinage de x dans W et $\varphi : U \rightarrow \mathbf{C}^m$ une carte avec $\varphi(x) = 0$. Pour $Y \in T_x W$, posons

$$(d^k f)_x(Y) = d^k(f \circ \varphi^{-1})_0(T_x \varphi(Y)).$$

On vérifie immédiatement que, quand les dérivées précédentes de f en x sont nulles, le résultat ne dépend pas de la carte utilisée. $\square$

Exercice III.3.

Appelons f_x° cette première dérivée non nulle, divisée par $k!$ si $f_x^\circ = (d^k f)_x$, de sorte que $f_x^\circ(Y)$ est le terme homogène de plus bas degré dans la série de Taylor

de f au point x , calculé sur le vecteur Y . Dans des coordonnées locales $z \in \mathbf{C}^m$ centrées en x comme ci-dessus, on a

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = P_k(z) + \text{termes de degré supérieur}$$

où P_k est un polynôme homogène de degré k . Alors

$$f_x^\circ(Y) = P_k(y)$$

écriture dans laquelle y désigne le vecteur $T_x\varphi(Y) \in \mathbf{C}^m$.

Intégrales premières. — On suppose maintenant que la fonction f est une intégrale première de l'équation différentielle X , c'est-à-dire qu'elle est constante sur les trajectoires. Ceci s'exprime par le fait que $f(\varphi_t(x))$ ne dépend pas de t ou, infinitésimalement, par l'équation $X \cdot f = 0$.

Supposons tout d'abord que f soit une fonction holomorphe. Pour tout x dans W , on appelle $v_x(f)$ l'ordre d'annulation de f en x .

Lemme III.1.7 (Ziglin [80]). — *Si f est une intégrale première de X , la fonction $x \mapsto v_x(f)$ est constante sur la trajectoire Γ de X .*

Démonstration. — Par hypothèse, $f \circ \varphi_t(x)$ ne dépend pas de t . Donc, si

$$(df)_{\varphi_t(x)} = 0, \dots, (df^{k-1})_{\varphi_t(x)} = 0 \text{ et } (d^k f)_{\varphi_t(x)} \neq 0$$

pour une valeur de t , il en est de même pour toutes les valeurs de t . $\square$

On définit donc bien une fonction

$$f^\circ : i^*TW \longrightarrow \mathbf{C}$$

en posant, pour $x \in \Gamma$ et $y \in T_xW$,

$$f^\circ(y) = \frac{1}{k!} (d^k f)_x(y) \text{ pour } k = v_x(f).$$

Cette fonction est appelée *forme initiale* de f (la laide terminologie « terme junior », qui vient d'une traduction brutale de [80], semble malheureusement déjà bien établie).

Exemple III.1.8. — Considérons à nouveau l'exemple du système de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1) - \frac{\lambda}{3}q_1^3$$

le long d'une trajectoire $\Gamma : t \mapsto (q_1(t), 0, p_1(t), 0)$ contenue dans le plan $q_2 = p_2 = 0$. Nous savons que le hamiltonien H est une intégrale première du champ X_H . Sa forme initiale le long de Γ est

$$H^\circ(t, Q_1, Q_2, P_1, P_2) = (dH)_{(q_1(t), 0, p_1(t), 0)}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = -\lambda q_1(t)^2 Q_1 + p_1(t) P_1.$$

Remarque III.1.9. — Comme on le voit dans l'exemple précédent, la forme initiale peut dépendre explicitement du temps.

Exemple III.1.10. — Le champ de vecteurs hamiltonien associé à la fonction

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \lambda q_2^2 + (q_1^2 + q_2^2)^2, \quad \lambda \neq 0$$

(oscillateur anharmonique, § I.2.e) a une solution particulière Γ supportée par la courbe d'équations

$$\frac{1}{2}p_1^2 + q_1^4 = 0, \quad q_2 = p_2 = 0$$

et paramétrée par

$$q_2 = p_2 = 0, \quad q_1 = \frac{i}{\sqrt{2}t}, \quad p_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}t^2}, \quad t \in \mathbf{R}^*.$$

La forme initiale de H le long de Γ est

$$H^\circ = p_1 P_1 + 4q_1^3 Q_1.$$

Celle de l'intégrale première K mise en évidence au § I.3.d est la forme quadratique

$$K^\circ = \left(q_1^2 - \frac{1}{\lambda}p_1^2\right)Q_2^2 + \frac{2}{\lambda}q_1 p_1 Q_2 P_2 - \frac{1}{\lambda}q_1^2 P_2^2.$$

Remarque III.1.11. — Supposons la fonction f seulement *méromorphe*. Écrivons-la comme quotient de deux fonctions holomorphes. La forme initiale est alors définie (et bien définie) comme quotient des formes initiales. On remarquera que f° est une fraction rationnelle dans chaque fibre de i^*TW et une fonction méromorphe sur Γ .

Voici un troisième lemme facile issu de [65] et [80] :

Lemme III.1.12. — Si f est une intégrale première du champ X , alors f° est une intégrale première de l'équation aux variations.

Démonstration. — Si on utilise des coordonnées (t, y) sur W au voisinage de $x \in \Gamma$ dans lesquelles $X = \partial/\partial t$ et Γ est l'axe des t , f est une fonction de y seul, f° est son terme homogène de plus bas degré, l'équation aux variations a pour solutions les vecteurs Y constants, sur lesquels f° est, bien sûr, constante. Le cas où f n'est que méromorphe est laissé en exercice. $\square$

Exercices III.4, III.5.

Invariance par le groupe de Galois. — Pour finir cette partie, comme $t \mapsto f^\circ(Y(t))$ est constante quand Y est une solution de l'équation aux variations, on a facilement :

Lemme III.1.13 (Morales & Ramis [58]). — Le groupe de Galois de l'équation aux variations laisse invariante la forme initiale f° de l'intégrale méromorphe f .

Je renvoie les lectrices peu au fait de théorie de Galois différentielle à l'appendice A et aux références qu'il contient.

Démonstration. — Si Y est une solution, la fonction $t \mapsto f^\circ(Y(t))$ est dans l'extension de Picard-Vessiot de $(\mathcal{M}(\Gamma), d/dt)$ définie par l'équation aux variations (bien sûr, $\mathcal{M}(\Gamma)$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur Γ). Comme elle est constante, elle est dans le corps des invariants par le groupe de Galois. Fixons un point x_0 de Γ . On considère l'application

$$\begin{aligned} T_{x_0} W &\longrightarrow \mathbf{C} \\ Y &\longmapsto f_{x_0}^\circ(Y). \end{aligned}$$

Pour toute solution $Y(t)$ de D avec $Y(0) = Y$, on a

$$f_{x(t)}^\circ(Y(t)) = f_{x_0}^\circ(Y)$$

puisque f° est une intégrale première.

Soit σ un élément du groupe de Galois de l'équation aux variations. Si $Y \in T_{x_0} W$, $\sigma(Y)$ est la valeur en x_0 de la solution image de celle dont la valeur en x_0 est Y . On a donc :

$$\begin{aligned} f_{x_0}^\circ(Y) &= f_{x(t)}^\circ(Y(t)) \\ &= \sigma \cdot f_{x(t)}^\circ(Y(t)) \text{ puisque } \sigma \text{ préserve les constantes} \\ &= f_{x(t)}^\circ(\sigma(Y(t))) \text{ puisque } \sigma \text{ opère sur les solutions en fixant } \mathcal{M}(\Gamma) \\ &= f_{x_0}^\circ(\sigma(Y)) \text{ puisque } f^\circ \text{ est constante sur les solutions.} \end{aligned}$$

Le groupe de Galois, vu comme sous-groupe de $\mathrm{GL}(T_x W)$, laisse donc invariante la fraction rationnelle f_x° . $\square$

III.1.d. Le « lemme » de Ziglin. — Il affirme que, si le champ de vecteurs X possède k intégrales premières indépendantes, il en est de même de l'équation aux variations associée. On se place au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^m$, lequel espace $\mathbf{C}^m$ est muni de coordonnées $(x_1, \dots, x_m)$.

Théorème III.1.14 (Lemme de Ziglin [80]). — Soient $f_1, \dots, f_k$ des (germes de) fonctions méromorphes fonctionnellement indépendantes sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^m$. Alors il existe des polynômes $P_1, \dots, P_k$, $P_i \in \mathbf{C}[z_1, \dots, z_i]$, tels que les formes initiales à l'origine des k fonctions $g_i = P_i(f_1, \dots, f_i)$ soient des fractions rationnelles algébriquement indépendantes dans $\mathbf{C}(x_1, \dots, x_m)$.

Autrement dit, peut-être que les formes initiales des f_i ne sont pas indépendantes au point x , mais dans l'algèbre engendrée par ces intégrales premières, il y a k intégrales premières dont les formes initiales en x sont indépendantes. Une démonstration, issue de l'article original de Ziglin [80] (voir aussi [15]) se trouve dans l'appendice III.6 ainsi qu'une discussion des notions d'indépendance présentes dans l'énoncé.

III.2. Le cas d'un système hamiltonien

Dans cette partie, on applique les constructions précédentes au cas d'un système hamiltonien sur une variété symplectique.

Convention. — La variété symplectique sur laquelle on considère le système hamiltonien est supposée *analytique réelle*, c'est d'ailleurs, dans presque tous les exemples considérés dans ces notes, $\mathbf{R}^{2n}$ ou une sous-variété de $\mathbf{R}^{2n}$ définie par des équations polynomiales. La forme symplectique et les hamiltoniens considérés sont naturellement supposés, eux aussi, analytiques⁽⁴⁾ réels.

De cette façon, tout peut être complexifié quand le besoin s'en fait sentir : la théorie de Galois différentielle fonctionne bien sur un corps *algébriquement clos* (voir l'appendice A) et pour des fonctions *analytiques* ou méromorphes (voir la note 5).

On suppose désormais que W est munie d'une forme symplectique ω et que X est un champ de vecteurs *hamiltonien*.

III.2.a. Crochet de Poisson et formes initiales

Lemme III.2.1. — *Si f et g sont des fonctions méromorphes sur W qui commutent pour le crochet de Poisson défini par ω , leurs formes initiales en x sont des fonctions sur $T_x W$ qui commutent pour le crochet de Poisson défini sur cet espace vectoriel par ω_x .*

Démonstration. — Je ne traite que le cas de fonctions holomorphes, laissant le cas méromorphe aux lecteurs courageux. Développons f et g en série entière au voisinage de x :

$$f(x+h) = f(x) + f_x^\circ(h) + \text{termes homogènes de degré supérieur}$$

et de même pour g , de sorte que

$$\{f, g\}(x+h) = \{f_x^\circ, g_x^\circ\}_x(h) + \text{termes supérieurs}$$

expression dans laquelle $\{ , \}_x$ désigne le crochet de Poisson associé à ω_x sur $T_x W$. Si $\{f, g\} = 0$, alors en particulier, $\{f_x^\circ, g_x^\circ\}_x = 0$, ce qui est bien dire que f_x° et g_x° commutent. $\square$

Remarque III.2.2. — On a calculé ici en coordonnées locales. Rappelons (voir la discussion autour du lemme III.1.6) que les termes d'ordre supérieur dépendent du choix de ces coordonnées locales, mais pas le fait qu'ils soient d'ordre supérieur !

III.2.b. Le groupe de Galois est symplectique. — Remarquons d'abord que, dans le cas hamiltonien, le groupe de Galois est symplectique :

Lemme III.2.3. — *Le groupe de Galois de l'équation aux variations, vu comme sous-groupe du groupe linéaire $GL(T_x W)$, est un sous-groupe du groupe symplectique $Sp(T_x W)$.*

⁽⁴⁾ ou peut-être simplement méromorphes

C'est un cas particulier d'un théorème général de Kolchin (voir [48]). J'en donne une démonstration au §A.4. La propriété géométrique qui est la raison d'être de ce lemme est exprimée dans le lemme suivant.

Lemme III.2.4. — *Pour un système hamiltonien, l'équation aux variations est de la forme $Y' + AY = 0$ avec $A(t) \in \mathfrak{sp}(2n; \mathbb{C})$ pour tout t .*

Démonstration. — Soit X un champ de vecteurs préservant la forme symplectique ω (c'est le cas en particulier si X est hamiltonien), c'est-à-dire tel que $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Si Y et Z sont deux champs de vecteurs le long de la trajectoire Γ , on écrit

$$0 = (\mathcal{L}_X \omega)(Y, Z) = X \cdot \omega(Y, Z) - \omega(DY, Z) - \omega(Y, DZ).$$

Dans une base (avec des matrices), ceci donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega(Y(t), Z(t)) &= \omega(Y' + AY, Z) + \omega(Y, Z' + AZ) \\ &= \omega(Y', Z) + \omega(Y, Z') + \omega(AY, Z) + \omega(Y, AZ). \end{aligned}$$

La somme des termes superflus est donc nulle, c'est dire que la matrice A satisfait à

$$\omega(AY, Z) + \omega(Y, AZ) = 0$$

pour tous Y et Z , ce qui est la définition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2n; \mathbb{C})$. $\square$

III.2.c. L'équation aux variations normales. — Dans le cas d'un système hamiltonien, on peut utiliser la réduction symplectique pour abaisser l'ordre de l'équation linéarisée, ce qui est une simplification appréciable.

Considérons un sous-fibré isotrope $E \subset i^*TW$ et son orthogonal (pour ω) E° , de sorte que $E \subset E^\circ$ (c'est cette inclusion qui dit que E est isotrope).

Lemme III.2.5. — *Le fibré E est invariant par D si et seulement si le fibré E° l'est.*

Alors D définit un opérateur, noté D_N , sur le fibré symplectique E°/E .

Démonstration. — Soient Y et Z des sections respectivement de E et de E° . Ainsi $\omega(Y, Z)$ est identiquement nul et donc

$$0 = X \cdot \omega(Y, Z) = (\mathcal{L}_X \omega)(Y, Z) + \omega(DY, Z) + \omega(Y, DZ)$$

Comme $\mathcal{L}_X \omega = 0$, on a donc

$$\omega(DY, Z) + \omega(Y, DZ) = 0$$

pour tous Y et Z , on en déduit le lemme. $\square$

Si la trajectoire Γ n'est pas stationnaire, le fibré i^*TW contient toujours un sous-fibré isotrope, le fibré tangent $T\Gamma$, engendré par X . Appelons Q le niveau de la fonction H dans lequel se trouve la trajectoire Γ . L'orthogonal de $T\Gamma$ n'est autre que i^*TQ : comme $\omega(X, Y) = -dH(Y)$, l'orthogonal de X est le noyau de dH .

Il est bien clair que le sous-fibré $T\Gamma$ de i^*TW est invariant par D : si X et Y sont tangents à Γ , alors $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ est tangent à Γ . Donc le lemme s'applique à

$$T\Gamma \subset i^*TQ \subset i^*TW$$

Le fibré réduit⁽⁵⁾ $i^*TQ/T\Gamma$ sera noté N (pour « normal » : c'est le fibré symplectique normal à Γ). Il est muni de l'opérateur D_N . L'équation $D_N Z = 0$ est dite équation aux variations *normales*. Comme pour l'équation aux variations, il est parfois agréable de considérer la connexion $\nabla_N = D_N \otimes dt$.

Exemple III.2.6 (Hénon-Heiles — suite). — Reprenons le système linéaire obtenu en linéarisant le système hamiltonien de Hénon-Heiles (voir les §§ I.2.d et III.1.5). On considère une solution Γ contenue dans le plan $q_2 = p_2 = 0$ et dans le niveau $H = 0$. Pour alléger les notations, écrivons $(q_1, p_1) = (x, y)$. La solution Γ est supportée par la courbe

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{\lambda}{3}x^3 = 0 \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Le fibré symplectique normal à Γ s'identifie au fibré trivial de fibre le plan des (Q_2, P_2) . L'équation aux variations normales s'écrit

$$\begin{cases} \dot{Q}_2 = P_2 \\ \dot{P}_2 = 2(A + q_1(t))Q_2 \end{cases}$$

soit, en posant $q_1 = x$ et $Q_2 = \xi$ l'équation

$$\ddot{\xi} - 2(A + x(t))\xi = 0.$$

Exemple III.2.7 (Réduction pour les champs de Jacobi). — Dans le cas de l'équation aux variations le long d'une géodésique d'une variété riemannienne, équation différentielle d'ordre $2n$, il est tout à fait habituel de se restreindre aux champs de Jacobi orthogonaux à la géodésique, ce qui correspond, dans le cotangent de V , exactement à l'opération de réduction explicitée ci-dessus. Rien d'étonnant dans ce contexte à ce que l'espace des champs de Jacobi soit de dimension $2n - 2$.

III.3. Le cas d'un système intégrable

Dans cette partie, nous allons étudier ce que dit la géométrie symplectique sur le groupe de Galois de l'équation aux variations dans le cas d'un système complètement intégrable : le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symplectique, comme on l'a dit plus haut (lemme III.2.3), mais maintenant, il doit, en plus, préserver les n formes initiales que, grâce au lemme de Ziglin (théorème III.1.14), nous allons supposer indépendantes.

À titre d'introduction géométrique, je vais d'abord (§ III.3.a) expliquer ce que le théorème d'Arnold-Liouville (chapitre II) impose au groupe de Galois le long

⁽⁵⁾Voir l'exercice I.4.

d'une trajectoire générique. Puis (§III.3.b) je montrerai les restrictions faites au groupe de Galois par la préservation de n formes linéaires indépendantes. De ces deux paragraphes, la morale est : le long d'une trajectoire générique, le groupe de Galois est « tout petit »... et en tout cas, abélien et connexe. En raffinant un peu, je démontre enfin, au §III.3.c, le théorème de non-intégrabilité de Morales et Ramis : quelle que soit la trajectoire, le groupe de Galois est « presque » abélien. Pour les applications à la non-intégrabilité, il faudra attendre la réduction, au §III.4, mais auparavant, je donne une application au calcul de groupes de Galois.

III.3.a. Le long d'une trajectoire générique d'un système intégrable. — Considérons maintenant un système intégrable sur une variété symplectique (analytique réelle) et supposons qu'une des intégrales premières (le hamiltonien lui-même, par exemple) soit propre. On peut alors invoquer le théorème d'Arnold-Liouville⁽⁶⁾ et écrire le système dans les coordonnées « action-angle ».

Le système hamiltonien dans les coordonnées action-angle. — On considère un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, un tore $T^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ et la variété $W = U \times T^n$ munie de la forme symplectique

$$\omega = dx_1 \wedge d\theta_1 + \cdots + dx_n \wedge d\theta_n,$$

les x_i désignant les coordonnées dans U et les $d\theta_i$ les 1-formes sur T^n déduites des coordonnées $\theta_1, \dots, \theta_n$ de $\mathbf{R}^n$.

On donne une fonction $h : U \rightarrow \mathbf{R}$ et on s'intéresse au système hamiltonien associé à la composée

$$H : W \longrightarrow U \xrightarrow{h} \mathbf{R}$$

c'est-à-dire au système différentiel

$$\dot{x}_i = 0 \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

(écrit ici sur le revêtement $U \times \mathbf{R}^n \rightarrow W$). Ce système hamiltonien est complètement intégrable : les fonctions x_i sont n intégrales premières indépendantes en involution.

Les solutions. — On choisit une solution

$$x_i = a_i, \quad \theta_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)t + \theta_i^0 \quad 1 \leq i \leq n.$$

Elle est paramétrée globalement par $t \in \mathbf{R}$. La trajectoire Γ est

- (a) $\mathbf{R}$ si les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$ ne sont pas toutes des multiples rationnels d'un même nombre rationnel $T > 0$,
- (b) $\mathbf{R}/T\mathbf{Z}$ dans le cas contraire.

⁽⁶⁾Pour une version analytique réelle, voir, par exemple [41].

Solutions de l'équation aux variations. — L'équation aux variations le long de Γ est simplement le système linéarisé

$$\dot{X}_i = 0 \quad \dot{\Theta}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} (a_1, \dots, a_n) X_j$$

dont les solutions sont les

$$X_i = A_i \quad \Theta_i = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} (a_1, \dots, a_n) A_j \right) t + \Theta_i^0.$$

- (a) Dans le cas où $\Gamma = \mathbf{R}$, les solutions sont bien définies sur Γ .
- (b) Dans le cas où $\Gamma = \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$, il y a deux possibilités :
 - (b') Soit il existe un entier m tel que $\Theta_i(t+mT) = \Theta_i(t)$ pour tout t , auquel cas les solutions sont bien définies sur un revêtement fini de Γ . Pour ceci, il faut et il suffit que les nombres

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} (a_1, \dots, a_n) A_j$$

soient rationnels pour tous les choix des A_j , ce qui arrive exactement quand la matrice hessienne de h en $(a_1, \dots, a_n)$ est identiquement nulle. Dans ce cas, les solutions de l'équation aux variations sont les constantes. Un cas particulier intéressant est celui où h est linéaire. C'est le cas où on considère une action hamiltonienne du tore T^n et où X_H est le champ fondamental associé à un sous-groupe fermé de ce tore. Voir plus généralement l'exercice III.6.

- (b'') Dans le cas contraire, certaines des solutions peuvent n'être définies que sur le revêtement universel $\mathbf{R}$ de Γ .

Pour utiliser de façon efficace la théorie de Picard-Vessiot, il est préférable, on l'a dit, de complexifier la situation. C'est la raison pour laquelle nous n'avons considéré que des objets analytiques réels. On considère donc maintenant la trajectoire $\Gamma_{\mathbf{C}}$ complexifiée, ici le germe de $\mathbf{C} \supset \mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}/T\mathbf{Z} \supset \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$. Concrètement, le corps $\mathcal{M}(\Gamma_{\mathbf{C}})$ des fonctions sur $\Gamma_{\mathbf{C}}$ est le corps des fractions de

- l'anneau des fonctions analytiques complexes définies au voisinage de $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ si $\Gamma = \mathbf{R}$,
- l'anneau des fonctions analytiques complexes périodiques de période T définies au voisinage de $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ si $\Gamma = \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$. Dans ce cas, posons $z = \exp(it/T)$. les éléments de $\mathcal{M}(\Gamma_{\mathbf{C}})$ sont les quotients des fonctions (de z) analytiques définies au voisinage de $S^1 \subset \mathbf{C}^*$.

Groupe de Galois. — Les cas (a) et (b') donnent des groupes de Galois triviaux. Dans le cas (b''), l'extension de Picard-Vessiot est engendrée par t . Le groupe de Galois

est additif de dimension 1. Il est représenté dans le groupe symplectique par

$$c \longmapsto \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ cA & \text{Id} \end{pmatrix}$$

où A est la matrice hessienne de h en $(a_1, \dots, a_n)$. On a démontré :

Proposition III.3.1. — *Soit H un hamiltonien analytique intégrable sur une variété symplectique analytique réelle. Le groupe de Galois de l'équation aux variations le long d'une trajectoire contenue dans une composante compacte d'un niveau régulier des intégrales premières est un sous-groupe connexe de dimension ≤ 1 du groupe symplectique.* $\square$

Exercices III.6, III.7, III.8.

III.3.b. Sous-groupes du groupe symplectique préservant des formes linéaires. — On a dit que le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symplectique (lemme III.2.3) et qu'il préserve les formes initiales. Dans le cas où celles-ci sont des formes linéaires indépendantes, on a un résultat très simple.

Lemme III.3.2. — *Le sous-groupe du groupe symplectique $\text{Sp}(2n)$ formé des transformations qui préservent n formes linéaires indépendantes en involution est conjugué au groupe des matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ A & \text{Id} \end{pmatrix} \quad \text{où } A \text{ décrit l'espace des matrices symétriques carrées d'ordre } n.$$

La démonstration est un exercice d'algèbre linéaire (voir l'exercice I.6) : les n formes linéaires en involution engendrent un sous-espace lagrangien dans le dual. On cherche les transformations symplectiques du dual qui se restreignent en l'identité sur ce lagrangien. On complète ces n formes en une base symplectique. Dans la base duale, nos transformations sont les matrices de l'énoncé. $\square$

Remarques III.3.3

- (1) Les intégrales premières peuvent être indépendantes le long de Γ sans que Γ soit contenue dans un niveau régulier (voir par exemple l'exercice III.17).
- (2) Ce groupe est de dimension $n(n+1)/2$, ce qui donne une borne très grossière quand on l'applique au groupe de Galois dont nous avons vu (au moins dans le cas où une des intégrales premières est propre) qu'il est, au pire, de dimension 1.
- (3) Le groupe obtenu ici est isomorphe au groupe *additif* de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre n . On verra (§III.1.10) que s'il y a des formes initiales de degré supérieur, ce groupe peut contenir des facteurs multiplicatifs.

- (4) En plus d'être abélien, ce groupe est connexe. Comme c'est un groupe *additif*, on vérifie facilement (exercice III.8) que tous ses sous-groupes algébriques sont connexes.

Corollaire III.3.4. — Soit H un hamiltonien complètement intégrable et soit Γ une trajectoire de X_H le long de laquelle les intégrales premières sont indépendantes. Alors le groupe de Galois de l'équation aux variations le long de Γ est un groupe abélien connexe.

Démonstration. — Soit x un point de Γ . L'hypothèse d'indépendance des intégrales premières en x dit que les formes initiales de celles-ci sont des formes linéaires indépendantes⁽⁷⁾ sur $T_x W$. On applique le lemme III.3.2. Le groupe de Galois est donc un sous-groupe algébrique du groupe additif des matrices symétriques. Il est donc abélien et connexe, comme on l'a remarqué ci-dessus. $\square$

Remarque III.3.5. — On ne demande pas ici que le niveau dans lequel se trouve Γ soit régulier, mais seulement que les points de Γ soient réguliers. On ne demande pas non plus qu'une des intégrales premières soit propre. Le résultat est à comparer avec celui de la proposition III.3.1.

Voici un exemple où le lemme III.3.2 s'applique... mais où le groupe de Galois est de dimension 2 (il n'est pas question ici d'appliquer la proposition III.3.1 : aucune des intégrales n'est propre et le niveau n'est pas régulier).

Exemple III.3.6 (Un hamiltonien de Hénon-Heiles intégrable)

On considère le hamiltonien de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2 q_1 - \frac{\lambda}{3} q_1^3$$

sur $\mathbf{R}^4$. Dans le cas où $\lambda = 6$, on connaît une deuxième intégrale première, la fonction

$$K = q_2^4 + 4q_1^2 q_2^2 + 4p_2(p_2 q_1 - p_1 q_2)$$

(voir l'exercice I.21).

Considérons la trajectoire Γ de X_H définie par

$$q_2 = p_2 = 0, \quad p_1^2 = 4q_1^3 + 2h \text{ pour } h \neq 0.$$

On utilise la fonction $\wp$ de Weierstrass⁽⁸⁾ associée à la courbe elliptique lisse Γ pour paramétrer la trajectoire par le temps :

$$q_1 = \wp(t), \quad p_1 = \wp'(t).$$

⁽⁷⁾Voir la remarque III.3.12.

⁽⁸⁾Voir l'appendice B pour l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\wp$ de Weierstrass.

L'équation aux variations le long de Γ est le système

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = P_1 & \dot{P}_1 = 12q_1 Q_1 \\ \dot{Q}_2 = P_2 & \dot{P}_2 = 2q_1 Q_2, \end{cases}$$

système équivalent aux deux équations (indépendantes)

$$\ddot{Q}_1 = 12\wp(t)Q_1 \quad \ddot{Q}_2 = 2\wp(t)Q_2.$$

Chacune de ces équations est une « équation de Lamé ». La première a la solution évidente $Q_1 = \wp(t)$, la deuxième la solution non moins évidente $Q_2 = \wp'(t)$. Il est classique⁽⁹⁾ et assez facile à vérifier qu'aucune des deux n'a d'autre solution bi-périodique et que dans chacun des deux cas, l'extension de Picard-Vessiot est de degré de transcendance 1 et le groupe de Galois additif. Le groupe de Galois du système est donc le groupe des matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{Id} & 0 \\ \hline \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{array} \right) \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbf{C}.$$

Ce groupe est connexe et de dimension 2.

III.3.c. Le théorème de Morales & Ramis. — Des résultats tels que la proposition III.3.1 ou le lemme III.3.2 imposent des restrictions sévères aux groupes de Galois le long de trajectoires génériques d'un système hamiltonien complètement intégrable. À cause des restrictions que je viens de résumer par le mot « générique », ils ne peuvent pas servir de critère de non-intégrabilité. Le théorème de Morales et Ramis est, lui, un tel critère. Il est fondé sur un résultat que je considère être le lemme-clef de [58], lemme analogue à III.3.2, un peu plus général et pas beaucoup plus difficile à démontrer.

Lemme III.3.7 (Lemme-clef). — Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Soient $F_1, \dots, F_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de E , fonctionnellement indépendantes et en involution. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sp}(E)$ qui préserve les F_i . Alors $\mathfrak{g}$ est abélienne.

Dans cet énoncé, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sp}(E)$. Tout $Z \in \mathfrak{g}$ est donc vu comme un endomorphisme de E . On peut aussi considérer l'application

$$x \longmapsto Z \cdot x$$

comme un champ de vecteurs sur E . Dire que Z préserve une fonction F définie sur un ouvert de E , c'est dire que le champ de vecteurs Z préserve F (autrement dit, que $Z \cdot F = 0$) ou encore que $(dF) \circ Z = 0$.

⁽⁹⁾Voir le chapitre sur les équations de Lamé dans le deuxième volume de [36].

Démonstration du lemme-clef. — Soit V un niveau commun des F_i , supposé régulier. Son espace tangent, l'intersection $\cap (\text{Ker } dF_j)$, est engendré par les champs hamiltoniens des fonctions $F_1, \dots, F_n$, que je noterai $X_1, \dots, X_n$.

Soit $Z \in \mathfrak{g}$. On a $dF_i \circ Z = 0$, donc $Z(x) \in \text{Ker}(dF_i)_x$ pour tout i . Donc, pour $x \in V$,

$$Z(x) \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(dF_i)_x = \langle X_1(x), \dots, X_n(x) \rangle^\circ = \langle X_1(x), \dots, X_n(x) \rangle.$$

Donc Z s'écrit $Z = \sum \lambda_j X_j$ pour certaines fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Comme $Z \in \mathfrak{sp}(E)$, on a $\mathcal{L}_Z \omega = 0$ (exercice III.10), c'est dire que $di_Z \omega = 0$, ou que $i_Z \omega$ est une forme fermée. Le champ Z est alors hamiltonien, ici globalement parce que E est un espace vectoriel, c'est-à-dire, la forme $i_Z \omega$ est (globalement) exacte et $Z = X_g$ pour une forme quadratique g . Alors

$$[X_i, Z] = [X_i, X_g] = X_{\{F_i, g\}} = 0$$

puisque $\{F_i, g\} = Z \cdot F_i = 0$. Mais

$$\begin{aligned} \left[X_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \right] &= \sum_{j=1}^n ((X_i \cdot \lambda_j) X_j + \lambda_j [X_i, X_j]) \\ &= \sum_{j=1}^n (X_i \cdot \lambda_j) X_j \end{aligned}$$

puisque les F_i commutent. Donc $X_i \cdot \lambda_j = 0$ pour tous i et j , donc les fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont constantes sur V . Finalement $Z = \sum \lambda_j(V) X_j$.

Soit Z' un autre élément de $\mathfrak{g}$, on écrit de même $Z' = X_{g'}$ et $Z' = \sum \lambda'_j(V) X_j$. On calcule aisément

$$[Z, Z'] = [X_g, \sum \lambda'_j(V) X_j] = \sum (X_g \cdot \lambda'_j(V)) X_j + \sum \lambda'_j(V) [Z, X_j].$$

Les deux termes de cette dernière somme sont nuls, donc les champs de vecteurs Z et Z' commutent. Donc (exercice III.9), les endomorphismes Z et Z' commutent dans $\mathfrak{g}$. Ainsi $\mathfrak{g}$ est bien abélienne. $\square$

Exercices III.9, III.10, III.11.

Remarque III.3.8. — On a utilisé ici la force du calcul infinitésimal — et en particulier le fait que le groupe G est un groupe de Lie, ce qui s'applique notamment au groupe de Galois, qui est un groupe algébrique. En contre-partie, on perd tout contrôle des propriétés de connexité.

Remarque III.3.9. — Sous les hypothèses du lemme III.3.2, la démonstration du lemme-clef donne, pour l'algèbre de Lie, le résultat correspondant à la conclusion de ce lemme : les matrices Z sont les combinaisons linéaires des $F_i X_{F_j}$ symétriques en i et j .

Venons-en maintenant au théorème de Morales et Ramis :

Théorème III.3.10 ([58]). — Soit Γ une trajectoire du champ hamiltonien X sur la variété symplectique W de dimension $2n$. Si X possède n intégrales premières indépendantes en involution, alors l'algèbre de Lie du groupe de Galois de l'équation aux variations le long de Γ est abélienne.

Démonstration. — Fixons un point x sur Γ , appelons E l'espace vectoriel symplectique $T_x W$ et ω la forme symplectique (constante) ω_x . Sur cet espace vectoriel, le lemme de Ziglin (théorème III.1.14) nous fournit n fonctions indépendantes, les formes initiales en x de n intégrales premières indépendantes de X . Appelons-les $F_1, \dots, F_n$ pour alléger la notation.

En vertu du lemme III.2.1, ces fonctions sont en involution. En vertu du lemme III.1.13, les éléments du groupe de Galois préservent les F_i . En vertu du lemme III.2.3, le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symplectique. Le théorème est alors conséquence du lemme-clef. $\square$

Remarque III.3.11. — En fait, cet énoncé devra être raffiné pour les applications. Il faudra ajouter des points singuliers ou des points à l'infini à Γ . J'ai préféré me contenter ici de cette version « simple », qui montre les idées essentielles. Je viendrai à des versions plus raffinées dans les applications au § III.5.

Remarque III.3.12 (Une remarque sur l'indépendance). — Le lemme de Ziglin ne parle, semble-t-il, que d'indépendance en un point. On ne s'en étonnera pas : soient $f_1, \dots, f_k$ des intégrales premières et soit φ_t le flot du champ hamiltonien X , on a

$$T_{x_0} \varphi_t (X_{f_i}(x_0)) = X_{f_i}(\varphi_t(x_0))$$

puisque $[X, X_{f_i}] = 0$. Donc, si les vecteurs $X_{f_1}(x_0), \dots, X_{f_k}(x_0)$ sont indépendants, leurs images par l'isomorphisme $(\varphi_t)_*$ le sont aussi. On en conclut que si les intégrales premières $f_1, \dots, f_k$ sont indépendantes en $x_0 \in \Gamma$, elles le sont en tout point de Γ .

III.3.d. Applications au calcul de groupes de Galois. — En plus d'avoir comme conséquence le critère de non-intégrabilité III.3.10, la démonstration du lemme-clef permet de préciser la « taille » du groupe de Galois.

Considérons le cas où parmi les formes initiales des intégrales premières, k sont linéaires et $n - k$ quadratiques. Le lemme-clef donne dans ce cas pour les éléments de l'algèbre de Lie du groupe G :

$$Z(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} a_{i,j} (F_i(x)X_{F_j} + F_j(x)X_{F_i}) + \sum_{j=k+1}^n b_j X_{Q_j}(x)$$

ce qui borne la dimension de cette algèbre de Lie par

$$\frac{k(k+1)}{2} + n - k.$$

On remarquera encore que cette borne est d'autant meilleure que k est plus petit : plus le niveau est critique, plus le lemme-clef est bien adapté au groupe de Galois.

Dans le cas d'un système à deux degrés de liberté, pour une trajectoire contenue dans un niveau régulier du hamiltonien mais le long de laquelle la deuxième intégrale première est quadratique, la dimension du groupe de Galois est bornée par 2. On a rencontré des exemples de cette situation au § III.3.b.

Considérons le cas d'un niveau « très » singulier. Dans l'écriture

$$Z(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) X_{F_i}(x),$$

$Z(x)$ désigne un champ de vecteurs linéaire. Si F_i est un polynôme homogène de degré d_i , $X_{F_i}(x)$ est un champ de vecteurs dont les composantes sont des polynômes homogènes de degré $d_i - 1$ en x . Dès que $d_i - 1 \geq 2$, ceci oblige le coefficient $\lambda_i(x)$ à être identiquement nul. On obtient le raffinement suivant :

Proposition III.3.13. — *Supposons que le long de Γ , les formes initiales des intégrales premières se composent de*

- k formes linéaires
- ℓ formes quadratiques
- $n - k - \ell$ polynômes de degré ≥ 3 .

Alors l'algèbre de Lie du groupe G est abélienne de dimension $\leq \frac{k(k+1)}{2} + \ell$. □

Exemple III.3.14. — Voici un exemple où le lemme-clef aide à évaluer le groupe de Galois. C'est celui de l'oscillateur anharmonique, déjà considéré aux §§ I.2.e, I.3.d et III.1.10. Rappelons qu'il s'agit du hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \lambda q_2^2 + (q_1^2 + q_2^2)^2, \quad \lambda \neq 0$$

le long de la solution particulière Γ :

$$q_2 = p_2 = 0, \quad q_1 = \frac{i}{\sqrt{2}t}, \quad p_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}t^2}, \quad t \in \mathbf{R}^*$$

de support la courbe $\frac{1}{2}p_1^2 + q_1^4 = 0$, $q_2 = p_2 = 0$.

Les formes initiales des intégrales premières H et K (voir le § III.1.10) le long de Γ sont

$$H^\circ = p_1 P_1 + 4q_1^3 Q_1 \text{ et } K^\circ = \left(q_1^2 - \frac{1}{\lambda} p_1^2 \right) Q_2^2 + \frac{2}{\lambda} q_1 p_1 Q_2 P_2 - \frac{1}{\lambda} q_1^2 P_2^2.$$

Les champs hamiltoniens associés sont

- le champ constant

$$X_{H^\circ} = (p_1, 0, -4q_1^3, 0)$$

- et le champ linéaire

$$X_{K^\circ} = \left(0, \frac{2}{\lambda} q_1 p_1 Q_2 - \frac{2}{\lambda} q_1^2 P_2, 0, -2 \left(q_1^2 - \frac{1}{\lambda} p_1^2 \right) Q_2 - \frac{2}{\lambda} q_1 p_1 P_2 \right).$$

Les éléments Z de l'algèbre de Lie du groupe de Galois sont les combinaisons linéaires

$$Z = AH^\circ X_{H^\circ} + BX_{K^\circ}.$$

Ici il est plus agréable d'écrire les matrices par blocs en écrivant les coordonnées dans l'ordre q_1, p_1, q_2, p_2 . La matrice Z est alors de la forme

$$Z = \begin{bmatrix} 4Aq_1^3 p_1 & Ap_1^2 & 0 & 0 \\ -16Aq_1^6 & -4Aq_1^3 p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2B}{\lambda} q_1 p_1 & -\frac{2B}{\lambda} q_1^2 \\ 0 & 0 & -2B(q_1^2 - \frac{1}{\lambda} p_1^2) & -\frac{2B}{\lambda} q_1 p_1 \end{bmatrix}.$$

La matrice Z obtenue pour $B = 0$ est nilpotente. Pour $A = 0$ elle est diagonalisable. Ce deuxième terme représente le groupe de Galois normal. L'algèbre de Lie du groupe de Galois est donc ici somme

- d'une partie tangente, contenue dans l'algèbre de Lie des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$
- et d'une partie normale, contenue dans l'algèbre de Lie des matrices $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$.

La composante neutre du groupe de Galois est donc contenue dans le groupe des matrices

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & 0 \\ a & 1 & & \\ \hline & & b & 0 \\ 0 & & 0 & b^{-1} \end{array} \right) \text{ avec } (a, b) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*.$$

Équation aux variations. — C'est le système

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = P_1 & \dot{P}_1 = -12q_1^2 Q_1 = \frac{6}{t^2} Q_1 \\ \dot{Q}_2 = P_2 & \dot{P}_2 = -2(\lambda + 2q_1^2) Q_2 = -2\left(\lambda - \frac{1}{t^2}\right) Q_2. \end{cases}$$

Comme on pouvait s'y attendre après l'étude précédente, le système est formé de deux sous-systèmes indépendants, équivalents aux deux équations

$$\ddot{Q}_1 = \frac{6}{t^2} Q_1, \quad \ddot{Q}_2 = -2\left(\lambda - \frac{1}{t^2}\right) Q_2.$$

La première a pour solutions les $Ct^3 + Dt^{-2}$, son groupe de Galois est trivial et donc bien (strictement!) contenu dans celui des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

La deuxième est une « équation de Whittaker », dont l'étude précédente nous indique que la groupe de Galois est un sous-groupe du groupe multiplicatif des matrices diagonales. Il est classique (c'est-à-dire bien connu des spécialistes) que ce groupe est effectivement tout le groupe multiplicatif.

III.4. Vers les applications : la réduction

Il peut paraître étonnant qu'un énoncé tel que celui du théorème III.3.10 ait des applications. Si on veut l'utiliser pour démontrer qu'un système hamiltonien sur une variété de dimension $2n$ n'est pas intégrable, il faut, non seulement trouver une solution particulière⁽¹⁰⁾, la courbe Γ , mais encore montrer que le groupe de Galois de l'équation aux variations associée est suffisamment non abélien⁽¹¹⁾.

L'équation aux variations est d'ordre $2n$. À vrai dire, comme X est solution, on peut réduire l'ordre, mais la démarche reste assez impraticable, même pour un système hamiltonien à deux degrés de liberté (cas où $n = 2$).

Comme on l'a vu au § III.2.c, le fait que le système soit, précisément, hamiltonien, permet, par un processus standard en géométrie symplectique et en mécanique hamiltonienne, de *réduire* l'ordre de cette équation différentielle en construisant une autre équation différentielle linéaire, d'ordre $2n - 2$, dont le groupe de Galois ait une obligation d'abélianité analogue à celle exprimée par le théorème III.3.10.

Pour un système à deux degrés de liberté, on obtient ainsi une équation du *second* ordre et il existe un algorithme permettant de dire que la composante neutre du groupe de Galois n'est pas résoluble (et en particulier pas abélienne). C'est l'algorithme de Kovacic (voir par exemple [15]), qui a effectivement été utilisé dans les applications que Morales et Ramis qualifient de « non académiques » (voir [58, 57] et [43]).

Remarque III.4.1. — Le lemme III.2.5 permet de réduire d'autant plus l'ordre de l'équation aux variations qu'on connaît d'autant plus d'intégrales premières en involution indépendantes le long de Γ . Si $f_1 = H, f_2, \dots, f_k$ sont indépendantes et satisfont à $\{f_i, f_j\} = 0$, les champs hamiltoniens associés engendrent, le long de Γ , un sous-fibré isotrope de rang k dont l'orthogonal est le fibré tangent au niveau commun des f_i contenant Γ . Le procédé de réduction permet donc de construire une équation différentielle linéaire d'ordre $2n - 2k$.

III.4.a. Groupe de Galois de l'équation réduite. — Commençons, comme au § III.3.b, par un résultat simple de géométrie symplectique.

⁽¹⁰⁾suffisamment bonne...

⁽¹¹⁾Pour résumer : le théorème est facile à démontrer parce que le groupe de Galois est assez gros pour avoir une algèbre de Lie mais semble difficile à appliquer parce que ce groupe de Galois est trop gros pour être calculé.

Proposition III.4.2. — *Le sous-groupe du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n)$ formé des transformations qui préservent k formes linéaires indépendantes en involution est conjugué à une extension d'un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2n - 2k)$ par un sous-groupe du groupe des matrices de la forme*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathrm{Id} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \mathrm{Id} & 0 & 0 \\ \hline A & \beta & \mathrm{Id} & \beta' \\ \alpha' & 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{array} \right].$$

Démonstration. — On adapte la démonstration du lemme III.3.2. Appelons G le groupe considéré et F le sous-espace isotrope du dual E^* de notre espace vectoriel engendré par les k formes linéaires en question. Les éléments de G définissent des transformations de l'espace vectoriel symplectique réduit F°/F . En d'autres termes, on a un morphisme de groupes

$$G \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n - 2k).$$

Évaluons le noyau. C'est le sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2n)$ formé des transformations de E^* qui se restreignent au sous-espace co-isotrope F° en une application linéaire de la forme

$$x \longmapsto x + f(x)$$

pour une application linéaire $f : F^\circ \rightarrow F$ nulle sur F . Dans une base symplectique

$$F_1, \dots, F_k \text{ (nos formes linéaires), } F_{k+1}, \dots, F_n, g_1, \dots, g_n,$$

F° est le sous-espace engendré par tous les F_i et $g_{k+1}, \dots, g_n$. Les matrices des transformations en question sont, dans cette base, les

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathrm{Id} & \alpha & A & \alpha' \\ 0 & \mathrm{Id} & \beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & \beta' & \mathrm{Id} \end{array} \right].$$

On obtient le résultat voulu par transposition. $\square$

Remarque III.4.3. — Vérifions que le groupe des matrices ayant la forme ci-dessus est *connexe* ainsi que tous ses sous-groupes algébriques. En écrivant les vecteurs de la base dans l'ordre

$$F_1, \dots, F_k, g_1, \dots, g_k, F_{k+1}, \dots, F_n, g_{k+1}, \dots, g_n$$

on écrit les matrices par blocs

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{Id} & A & a \\ \hline 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ \hline 0 & b & \mathrm{Id} \end{array} \right]$$

avec A carrée d'ordre k , a à k lignes et $2n - 2k$ colonnes, b à $2n - 2k$ lignes et k colonnes. La structure de groupe sur les triplets (A, a, b) est

$$(A, a, b) \cdot (A', a', b') = (A + A' + ab', a + a', b + b').$$

Ce groupe est une extension du groupe additif de l'espace vectoriel $M_{k, 2n-2k} \times M_{2n-2k, k}$ par celui des matrices carrées d'ordre k . On en déduit l'assertion de connexité pour tous les sous-groupes algébriques.

Le groupe de toutes les transformations symplectiques qui préservent k formes linéaires indépendantes a, lui, autant de composantes connexes que son image dans $\mathrm{Sp}(2n - 2k)$.

Proposition III.4.4. — *Soit H un hamiltonien complètement intégrable sur une variété symplectique de dimension $2n$ et soit Γ une trajectoire le long de laquelle k de ces intégrales sont indépendantes. Alors l'algèbre de Lie du groupe de Galois de l'équation aux variations normales est abélienne.*

Démonstration. — On fixe un point x de Γ et on considère le groupe symplectique de $T_x W = E$. Soit G le groupe de toutes les transformations symplectiques de E qui préservent les formes initiales des intégrales premières et en particulier les formes linéaires $F_1, \dots, F_k$, formes initiales de k intégrales indépendantes. D'après le lemme-clef III.3.7, l'algèbre de Lie de G est abélienne.

On vient de voir que G est muni d'une projection dans $\mathrm{Sp}(2n - 2k)$. Appelons G_N son image dans ce groupe. Considérons enfin le groupe de Galois de l'équation aux variations normales (réduite par les k intégrales). C'est un sous-groupe du groupe symplectique de l'espace réduit F°/F et il préserve les réductions des formes initiales. C'est donc un sous-groupe de G_N . Maintenant, G_N est un quotient de G , donc son algèbre de Lie est abélienne, et le groupe de Galois réduit en est un sous-groupe. $\square$

C'est en fait la proposition III.4.4 qui a des applications à la non-intégrabilité.

Le groupe de Galois réduit est un quotient du groupe de Galois. — Avant de passer à ces applications, ouvrons une parenthèse. La proposition III.4.2 concerne n'importe quel sous-groupe du groupe symplectique préservant des formes linéaires. Je vais donner une démonstration du résultat correspondant pour le groupe de Galois. De façon un peu étonnante (et cet étonnement justifie la présence de cette démonstration ici), cette démonstration donne exactement les mêmes groupes que la proposition III.4.2.

Proposition III.4.5. — *Soit H un hamiltonien sur une variété symplectique de dimension $2n$. On suppose que Γ est une trajectoire non stationnaire de X_H et que le système possède k intégrales premières en involution indépendantes le long de Γ . Alors le groupe de Galois de l'équation aux variations le long de Γ est isomorphe à une extension d'un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2n - 2k)$ par un*

sous-groupe du groupe des matrices de la forme

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \text{Id} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \text{Id} & 0 & 0 \\ \hline A & \beta & \text{Id} & \beta' \\ \alpha' & 0 & 0 & \text{Id} \end{array} \right].$$

C'est bien sûr un corollaire immédiat de la proposition III.4.2 : si $H = f_1, \dots, f_k$ sont les intégrales premières et x un point de Γ , les formes initiales des f_i sont k formes linéaires indépendantes en involution sur $T_x W$ et le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symplectique qui les préserve. La démonstration qui suit montrera qu'on n'obtient pas mieux en spécifiant que le groupe en question est un groupe de Galois... au moins si on n'utilise aucune propriété spécifique de la trajectoire.

Remarque III.4.6. — Pour la démonstration, on construit les solutions de D à l'aide de celles de D_N . On a donc besoin de *bases*. On va utiliser le fait que le fibré holomorphe $i^*TW \rightarrow \Gamma$ sur la surface de Riemann non compacte Γ est analytiquement trivial, un résultat qui ne l'est pas (trivial) et pour lequel je renvoie à [26]. Ce théorème est fondé sur

- la possibilité de trivialisier le fibré parmi les fibrés $\mathcal{C}^\infty$ sur Γ et
- sur l'existence de nombreuses fonctions holomorphes sur Γ et plus précisément sur la nullité du groupe $H^1(\mathcal{O}_\Gamma)$, qui permet de transformer une trivialisatation $\mathcal{C}^\infty$ en trivialisatation holomorphe.

La démonstration donne de même une trivialisatation analytique *symplectique* dans le cas d'un fibré symplectique.

Démonstration « par les équations différentielles » de la proposition III.4.5

Les champs hamiltoniens $X_1 = X_H$, $X_i = X_{f_i}$ (pour $2 \leq i \leq k$) engendrent un sous-fibré isotrope F de rang k de $i^*TW \rightarrow \Gamma$. Choisissons des champs de vecteurs $Y_1(t), \dots, Y_k(t)$ le long de Γ de telle façon que

$$\omega(X_i, Y_j) = \delta_{i,j} \text{ et } \omega(Y_i, Y_j) = 0.$$

Toute section Z de i^*TW peut s'écrire

$$Z = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i + \sum_{i=1}^k \mu_i Y_i + Z_N$$

où Z_N est orthogonal (pour ω) au sous-fibré symplectique de i^*TW engendré par les X_i et les Y_j : grâce au choix de ces champs de vecteurs, on identifie le fibré symplectique réduit F°/F à un sous-fibré F_N de i^*TW , dont Z_N est une section.

Comme le champ X_H est un champ hamiltonien, on a $\mathcal{L}_X \omega = 0$, ce dont on déduit que l'opérateur D est symplectique : $\omega(DU, V) + \omega(U, DV) = 0$. On voit aussi

qu'il définit un opérateur D_N sur le fibré réduit (voir [58]) : on dérive les égalités $\omega(Z_N, X_i) = 0$, on obtient que $\omega(DZ_N, X_i) = 0$ pour tout i et donc qu'on peut écrire

$$DZ_N = \sum \alpha_i(Z_N)X_i + (DZ_N)_N,$$

ce dernier terme désignant la projection de DZ_N sur F_N et représentant $D_N Z_N$ via l'isomorphisme de F_N avec F°/F .

En dérivant maintenant les égalités $\omega(X_i, Y_j) = \text{constante}$, on obtient

$$\omega(X_i, DY_j) = 0 \text{ pour tous } i \text{ et } j,$$

on en déduit que DY_j est orthogonal à tous les X_i , soit que

$$DY_j = \sum_{i=1}^k a_{j,i} X_i + B_j$$

où B_j est une section de F_N .

Finalement, si Z est une section quelconque de i^*TW écrite

$$Z = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i + \sum_{i=1}^k \mu_i Y_i + Z_N,$$

on a

$$DZ = \sum_{i=1}^k \left(\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^k \mu_j a_{j,i} \right) X_i + \sum_{i=1}^k \dot{\mu}_i Y_i + \left(D_N Z_N + \sum_{i=1}^k \mu_i B_i \right).$$

L'équation différentielle $DZ = 0$ est donc équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i + \sum_j a_{j,i} \mu_j + \alpha_i(Z_N) = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq k \\ \dot{\mu}_i = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq k \\ D_N Z_N + \sum_i \mu_i B_i = 0. \end{cases}$$

Dans l'espace vectoriel des solutions se trouve le sous-espace de codimension k des solutions de

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i + \alpha_i(Z_N) = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq k \\ D_N Z_N = 0 \end{cases}$$

correspondant au choix de μ_j tous nuls. Ces solutions s'obtiennent à partir des solutions de l'équation aux variations normales $D_N Z_N = 0$ par les quadratures

$$\lambda_i = - \int \alpha_i(Z_N).$$

La solution $Z_N = 0$ donne les λ_i constants, c'est-à-dire les vecteurs X_i . Si $Z_1, \dots, Z_{2n-2k}$ est une base des solutions de $D_N Z_N = 0$, les

$$- \sum_{i=1}^k \left(\int \alpha_i(Z_\ell) \right) X_i + Z_\ell$$

sont $2n - 2k$ solutions indépendantes (et indépendantes des X_i).

Une matrice fondamentale de solutions est donc de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \text{Id} & A & \alpha \\ \hline 0 & \text{Id} & 0 \\ \hline 0 & \beta & Z_0 \end{array} \right],$$

les blocs correspondant aux blocs $\langle X_1, \dots, X_k \rangle, \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle, \langle F_N \rangle$ et Z_0 désignant une matrice fondamentale de solutions de l'équation aux variations normales.

Ceci montre que l'extension de Picard-Vessiot de l'équation aux variations est une extension de celle de l'équation aux variations normales et le groupe de Galois G_N de cette dernière un quotient du groupe de Galois G de l'équation aux variations.

On peut donc facilement évaluer le groupe de Galois en « résolvant » le système différentiel, c'est-à-dire en étant un peu plus précis sur la forme des matrices A , α et β qui interviennent dans la matrice fondamentale.

On a dit que la matrice α est celle de primitives des $-\alpha_i(Z_\ell)$ (pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq \ell \leq 2n - 2k$). Les matrices A et β s'obtiennent en considérant les solutions avec un des μ_i constant non nul. Fixons un i entre 1 et k , choisissons

$$\mu_j = 0 \text{ pour } j \neq i \text{ et } \mu_i = 1$$

et résolvons

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_j^i + a_{j,i} + \alpha_i(Z_N^i) = 0 & \text{pour } 1 \leq j \leq k \\ D_N Z_N^i + B_i = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation se résout par variations des constantes, ses solutions sont de la forme

$$Z_N^i = Z_0 \cdot v_0 - \int Z_0 \cdot B_i.$$

On résout ensuite la première par une nouvelle quadrature.

Considérons maintenant un élément σ du groupe de Galois G de l'équation aux variations et supposons-le dans le noyau du morphisme $G \rightarrow G_N$. C'est dire qu'on suppose que σ induit l'identité sur l'extension de Picard-Vessiot de l'équation aux variations normales. Voyons comment σ transforme la matrice fondamentale écrite ci-dessus.

- Remarquons d'abord que σ fixe les X_i , obtenus avec les μ_j nuls et les λ_j constants.
- D'autre part, σ fixe les Z_ℓ et transforme la matrice α des primitives des $-\alpha_i(Z_\ell)$ en $\alpha + a$, où a est une matrice constante (qui peut tout à fait être identiquement nulle, si les $\alpha_i(Z_\ell)$ ont des primitives dans le corps des fonctions sur notre courbe Γ).
- Pour finir, examinons l'effet de σ sur les solutions de la forme

$$Y_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j^i X_j + Z_N^i.$$

On a $\sigma(Z_N^i) = Z_N^i + Z_0 \cdot b_i$ où b_i est un vecteur de F_N constant et $\sigma(\lambda_j^i) = \lambda_j^i + C_{i,j} + \alpha_i(Z_0 \cdot b_i)$.

Finalement, les éléments de G qui sont envoyés sur l'identité dans G_N forment un sous-groupe du groupe des matrices de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \text{Id} & C & a \\ \hline C & \text{Id} & b \\ \hline a & 0 & \text{Id} \end{array} \right]$$

comme annoncé (modulo l'ordre des vecteurs de base). $\square$

On aura remarqué que cette démonstration contient le résultat (classique même si pas logiquement indispensable ici) :

Corollaire III.4.7. — *Le groupe de Galois de D_N est un quotient du groupe de Galois de D par un groupe abélien.*

Exercices III.13, III.17.

III.5. L'exemple de Hénon-Heiles

Considérons le système de Hénon-Heiles, déjà évoqué plusieurs fois dans ces notes. Le hamiltonien est écrit au §I.2.d, on a vu au §I.3.c qu'il est intégrable quand le paramètre λ vaut 6. On va maintenant montrer que ce cas était exceptionnel et que le système n'est, en général, pas intégrable.

Pour appliquer les techniques précédentes, on doit d'abord choisir une trajectoire. On a vu (toujours au §I.2.d) qu'il y avait des solutions dans le plan $q_2 = p_2 = 0$. On va considérer celles-ci.

- Dans le cas où $\lambda \neq 0$, on considérera

$$q_1(t) = \frac{6}{\lambda t^2}$$

(c'est la réponse à l'exercice I.19).

- Dans le cas où $\lambda = 0$, on prendra

$$q_1(t) = \frac{1}{2}t - A.$$

On va considérer l'équation aux variations *normales* le long de cette trajectoire, donc ici (voir l'exemple III.2.6) l'équation du second ordre

$$\ddot{\xi}(t) - 2(A + x(t))\xi = 0$$

et, spécifiquement :

- l'équation $\ddot{\xi}(t) - 2\left(A + \frac{6}{\lambda t^2}\right)\xi = 0$ pour $\lambda \neq 0$
- et l'équation $\ddot{\xi} - t\xi = 0$ pour $\lambda = 0$.

Ce sont des équations bien répertoriées par les botanistes des équations différentielles.

Le cas $\lambda \neq 0$. — On fait un petit changement de variable $t = uz$ qui transforme l'équation en

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} - \left(2Au^2 + \frac{12}{\lambda z^2}\right)\xi = 0.$$

- Si $A = 0$, il n'y a pas grand chose à faire, l'équation garde la même forme, c'est une « équation de Cauchy ».
- Si $A \neq 0$, on peut choisir u de façon que $2Au^2 = 1/4$ et mettre l'équation sous la forme

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{12}{\lambda z^2}\right)\xi = 0.$$

C'est une « équation de Whittaker », dont nous avons déjà rencontré un cas particulier dans le cas de l'oscillateur anharmonique (exemple III.4.5).

Le cas $\lambda = 0$. — Dans ce cas, l'équation est une « équation d'Airy ».

Ces équations sont répertoriées, étudiées, commentées, balisées. Le plus intéressant ici est de savoir comment on peut appliquer le théorème de Morales et Ramis. Parce que c'est l'exemple le plus simple et parce qu'on ne le trouve pas dans la littérature, je vais expliquer en détail le cas de l'équation d'Airy; je donnerai les indications et références nécessaires pour les autres cas.

III.5.a. Le cas de l'équation d'Airy

Prolonger Γ . — Dans ce cas, la courbe Γ

$$t \longmapsto \left(q_1(t) = \frac{1}{2}t - A, 0, p_1(t) = \frac{1}{2}, 0\right)$$

est une droite complexe, paramétrée globalement par $t \in \mathbf{C}$. Le corps différentiel à considérer est donc le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$.

Les solutions de l'équation $\ddot{\xi} - t\xi = 0$ sont, en vertu des théorèmes d'existence pour les solutions des équations différentielles linéaires, des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ tout entier, des fonctions *entières*. C'est un exemple où l'extension de Picard-Vessiot est triviale : toutes les solutions sont déjà dans le corps différentiel de base !

Et pourtant, cette équation est célèbre, et il y a des raisons sérieuses pour ça. Notamment le fait que, bien qu'entières, ses solutions ne sont certainement pas rationnelles (un exercice facile, ici l'exercice III.14). De plus, si on la considère comme une équation différentielle à coefficients dans le « petit » corps $\mathbf{C}(t)$, son groupe de Galois est $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ tout entier (et en tout cas, son algèbre de Lie n'est pas abélienne, voir le § A.5). On aura remarqué (dans le cas contraire, voir l'exercice I.5) que $\mathrm{Sp}(2; \mathbf{C}) = \mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$.

L'idéal serait donc de remplacer $\Gamma = \mathbf{C}$ par une courbe dont le corps de fonctions serait, précisément, le corps des fractions rationnelles $\mathbf{C}(t)$. Il suffit pour cela de lui ajouter un point à l'infini (voir l'exercice A.4) et de considérer $\Gamma' = \Gamma \cup \{\infty\}$.

On doit donc tout compléter et prolonger :

- On complète $W = \mathbf{C}^4$ par l'ajout d'une hypersurface à l'infini. Le plus simple est d'ajouter un hyperplan et donc de considérer $W' = \mathbf{P}^4(\mathbf{C})$. La nouvelle variété W' a des coordonnées homogènes

$$[x_1, x_2, y_1, y_2, z] \text{ avec } q_1 = \frac{x_1}{z} \text{ etc.}$$

et W correspond à $z \neq 0$.

- On complète $\Gamma = \{[\frac{1}{2}t - A, 0, \frac{1}{2}, 0, 1]\}_{t \in \mathbf{C}}$ en lui ajoutant le point (à l'infini) de coordonnées homogènes $[1, 0, 0, 0, 0]$.
- On prolonge la forme symplectique ω en une forme ω' sur W' (exercice III.16). La forme ω' est méromorphe, elle a des pôles le long de l'hyperplan à l'infini $z = 0$.
- On prolonge le hamiltonien H en une fonction méromorphe sur W' , ce qui ne présente pas de difficulté puisque c'est un polynôme.
- On se demande alors s'il existe une fonction K sur W qui se prolonge en une fonction méromorphe sur W' et telle que H et K commutent. On se restreint ainsi à des intégrales premières rationnelles en les coordonnées q_i, p_i .

Il reste à se convaincre qu'on peut utiliser une variante du théorème III.3.10 dans cette nouvelle situation pour en déduire l'énoncé de la proposition suivante :

Proposition III.5.1. — *Le hamiltonien $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1)$ n'a pas de deuxième intégrale première qui soit rationnelle en (q_1, q_2, p_1, p_2) .*

Démonstration. — L'équation aux variations normales le long de Γ' est une équation d'Airy. La composante neutre de son groupe de Galois sur $\mathbf{C}(t) = \mathcal{M}(\Gamma')$ est le groupe $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ tout entier et n'est donc pas abélienne (voir le §A.5). $\square$

Remarque III.5.2. — La courbe Γ complétée reste simplement connexe, le groupe de Galois obtenu ne contient pas de monodromie (dit autrement, les solutions sont entières). Cet exemple, tout académique qu'il soit, n'est pas justiciable des méthodes de [80].

III.5.b. Le cas de l'équation de Whittaker. — La solution Γ choisie est paramétrée par $t \in \mathbf{C} - \{0\}$:

$$t \longmapsto \left(q_1(t) = \frac{6}{\lambda t^2}, 0, p_1(t) = -\frac{12}{\lambda t^3}, 0 \right).$$

Le point $q_1 = 0, p_1 = 0$ est un point singulier pour le hamiltonien, le champ de vecteurs s'y annule et il est naturel de considérer la courbe $\bar{\Gamma}$ obtenue en ajoutant ce point singulier à Γ .

La courbe prolongée $\bar{\Gamma}$ est, cette fois, dans $W = \mathbf{C}^4$, qu'on n'a pas besoin de compléter, elle est paramétrée par $t \in (\mathbf{C} - \{0\}) \cup \{\infty\}$.

En appliquant une version *ad hoc* de leur théorème à cette courbe $\bar{\Gamma}$, Morales et Ramis expliquent dans [58] (voir aussi [57]) que, dans le cas où l'équation aux variations normales est une équation de Whittaker (c'est-à-dire dans le cas où $A \neq 0$), le système ne peut pas être intégrable (avec une deuxième intégrale première méromorphe) sauf peut-être si

$$\frac{6}{\lambda} = \frac{k(k+1)}{2} \text{ pour un entier } k \in \mathbf{Z}.$$

Remarques III.5.3

- (1) Le cas $\lambda = 6$ correspond à $k = 1$, il n'est donc pas interdit par Morales et Ramis, ce qui tombe bien puisque nous avons donné une deuxième intégrale première pour ce cas dans l'exercice I.21. Dans le chapitre VI de [57], Morales montre, par un raffinement de ces méthodes, que seules les valeurs 1, 2, 6 et 16 de λ peuvent donner des systèmes intégrables.
- (2) Nous avons d'ailleurs déjà rencontré une équation de Whittaker à groupe de Galois abélien dans l'exemple III.3.14. Nous avons d'ailleurs obtenu le fait que son groupe de Galois était abélien et même un sous-groupe du groupe $\mathbf{C}^*$ en utilisant l'intégrabilité du système concerné (oscillateur anharmonique).
- (3) Le cas $A = 0$ correspond, on l'a dit, à une « équation de Cauchy ». Le groupe de Galois, au moins sur $\mathbf{C}(t)$, est abélien (voir l'exemple A.3.3), on ne peut donc pas conclure dans ce cas.

Exercices III.14, III.15, III.16.

III.6. Appendice : démonstration du lemme de Ziglin

Commençons par quelques explications sur l'énoncé du théorème III.1.14.

Il y est question de germes, ce qui signifie seulement qu'on regarde des séries : l'anneau des germes en 0 de fonctions holomorphes est l'anneau $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_m\}$ des séries entières convergentes et celui des germes de fonctions méromorphes est son corps de fractions.

Il y est question de deux notions d'indépendance :

- pour les f_i , il s'agit d'indépendance fonctionnelle : on demande que les différentielles soient linéairement indépendantes (une condition ouverte),
- pour les formes initiales, il s'agit de l'indépendance algébrique dans le corps des fractions rationnelles. Or dans $\mathbf{C}(x_1, \dots, x_m)$, indépendance algébrique et fonctionnelle coïncident⁽¹²⁾.

⁽¹²⁾Une assertion que je laisse en exercice, mais qui n'est pas complètement triviale, il faut utiliser le fait que toute dérivation d'un corps K de caractéristique nulle se prolonge en une dérivation d'une extension L/K .

Une autre remarque utile sur l'indépendance est la proposition suivante, dont la démonstration va apparaître pendant celle du lemme de Ziglin.

Proposition III.6.1. — *Si les formes initiales $f_1^\circ, \dots, f_k^\circ$ en 0 sont indépendantes, c'est que $f_1, \dots, f_k$ étaient fonctionnellement indépendantes.*

Avant d'arriver à la démonstration proprement dite, je préfère donner un exemple simple — avec deux fonctions ($k = 2$) de trois variables ($m = 3$) — mais éclairant.

Exemple III.6.2. — On considère les deux fonctions

$$f_1 = x_1^2 \text{ et } f_2 = x_1 + x_1 x_2 x_3$$

qui sont évidemment et fonctionnellement indépendantes. Leurs formes initiales en 0,

$$f_1^\circ = x_1^2 \text{ et } f_2^\circ = x_1$$

sont tout aussi évidemment liées puisqu'on a

$$f_1^\circ = (f_2^\circ)^2.$$

En prenant

$$g_1 = f_1 \text{ et } g_2 = f_2^2 - f_1 = x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3,$$

on obtient les formes initiales indépendantes

$$g_1^\circ = x_1^2 \text{ et } g_2^\circ = 2x_1^2 x_2 x_3.$$

On remarquera qu'on a construit la fonction g_2 à l'aide d'un polynôme annulant f_1° et f_2° , ce qui va être fait plus généralement dans la démonstration du théorème.

Pour la démonstration, on aura besoin d'une notation et de quelques lemmes. On note $d(f) = \deg f^\circ$ ($= \deg u^\circ - \deg v^\circ$ si $f = u/v$) et $d(0) = +\infty$.

Lemme III.6.3. — *Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction méromorphe. Alors on a*

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \geq d(f) - 1$$

avec égalité si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$.

Démonstration. — Si f est holomorphe en 0, on écrit $f = \sum a_\alpha x^\alpha$ et $f^\circ = a_\gamma x^\gamma$ où $|\gamma| = d(f)$ est minimal. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum \alpha_i a_\alpha \frac{x^\alpha}{x_i},$$

de sorte que

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \deg\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^\circ \begin{cases} = |\gamma| - 1 & \text{si } \frac{\partial f^\circ}{\partial x_i} \neq 0 \\ > |\gamma| - 1 & \text{si } \frac{\partial f^\circ}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Je laisse le cas où f n'est que méromorphe aux lectrices... □

... ainsi que la démonstration (analogue) du lemme suivant.

Lemme III.6.4. — Soient $f_1, \dots, f_k$ des fonctions méromorphes et $i_1, \dots, i_k$ des entiers dans $\{1, \dots, m\}$. Alors on a

$$d\left(\frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}\right) \geq \sum d(f_i) - k$$

avec égalité si et seulement si

$$\frac{D(f_1^\circ, \dots, f_k^\circ)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} \neq 0.$$

□

Avec ce lemme, on peut déjà démontrer la proposition III.6.1.

Démonstration de la proposition III.6.1. — Si les formes initiales $f_1^\circ, \dots, f_k^\circ$ sont indépendantes, alors il y a des indices $i_1, \dots, i_k$ tels que

$$\frac{D(f_1^\circ, \dots, f_k^\circ)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} \neq 0.$$

Le lemme III.6.4 nous dit donc que

$$d\left(\frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}\right) = \sum d(f_i) - k < +\infty.$$

Ce jacobien ne peut donc être identiquement nul, les f_i sont donc indépendantes. □

Lemme III.6.5. — Soient $f_1, \dots, f_k$ des fonctions méromorphes sur U . On gradue l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$ en donnant le poids $d(f_i)$ à la variable z_i . Soit $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$ un polynôme homogène de poids ν . On a

$$d(P(f_1, \dots, f_k)) \geq \nu$$

avec égalité si et seulement si

$$P(f_1^\circ, \dots, f_k^\circ) \neq 0,$$

auquel cas on a

$$(P(f_1, \dots, f_k))^\circ = P(f_1^\circ, \dots, f_k^\circ).$$

Démonstration. — Je ne traite que le cas où les f_i sont holomorphes, laissant le cas méromorphe en exercice. On a

$$f_i = f_i^\circ + \text{termes de degré supérieur}$$

donc

$$P(f_1, \dots, f_k) = P(f_1^\circ, \dots, f_k^\circ) + \text{termes d'ordre supérieur.}$$

Si le terme $P(f_1^\circ, \dots, f_k^\circ)$ n'est pas nul, c'est la forme initiale, on a la dernière égalité de l'énoncé et l'égalité à ν de $d(P(f_1, \dots, f_k))$. Dans l'autre cas, la forme initiale est de degré plus grand. □

Démonstration du lemme de Ziglin. — La démonstration se fait par récurrence sur k . Il suffit donc de faire la dernière étape : on suppose que $f_1^\circ, \dots, f_{k-1}^\circ$ sont algébriquement indépendantes. Si $(f_1, \dots, f_k)$ sont des fonctions méromorphes, on pose

$$\mu(f_1, \dots, f_k) = \inf_{i_1, \dots, i_k} d\left(\frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}\right) - \sum_{i=1}^k d(f_i) + k,$$

qui est un entier naturel d'après le lemme III.6.4. On démontre le « lemme » par récurrence sur cet entier μ . Si $\mu = 0$, on a égalité dans le lemme III.6.4 donc les formes initiales $f_1^\circ, \dots, f_k^\circ$ sont indépendantes. Supposons donc $\mu > 0$ et montrons qu'on peut trouver une fonction g_k qui est un polynôme en les f_i et telle que

$$\mu(f_1, \dots, f_{k-1}, g_k) < \mu(f_1, \dots, f_k).$$

D'après le lemme III.6.4, on a

$$\frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} = 0 \text{ pour tout choix de } i_1, \dots, i_k.$$

Donc les formes initiales $f_1^\circ, \dots, f_k^\circ$ sont fonctionnellement liées et donc elles sont algébriquement dépendantes (un résultat que nous avons décidé d'admettre ci-dessus). Soit donc P une relation algébrique, c'est-à-dire un polynôme dans $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$ tel que $P(f_1^\circ, \dots, f_k^\circ) = 0$, que l'on choisit de degré minimal.

On munit l'anneau $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$ de la graduation du lemme III.6.5, où le poids de z_i est le degré de f_i° . En décomposant P en somme de parties homogènes pour cette graduation, on voit qu'on peut supposer que ce polynôme est homogène de poids ν .

On a fait l'hypothèse que $f_1^\circ, \dots, f_{k-1}^\circ$ sont algébriquement indépendantes, on sait donc que le polynôme $\partial P / \partial z_k$ n'est pas nul et son degré est inférieur à celui de P . Comme celui-ci était minimal, on a

$$\frac{\partial P}{\partial z_k}(f_1^\circ, \dots, f_k^\circ) \neq 0.$$

Posons $g_k = P(f_1, \dots, f_k)$ (on pourra se reporter à l'exemple III.6.2) et utilisons les indices $i_1, \dots, i_k$ pour lesquels le minimum est atteint dans la définition de μ . On évalue

$$\begin{aligned} \mu(f_1, \dots, f_{k-1}, g_k) &\leq d\left(\frac{D(f_1, \dots, f_{k-1}, g_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}\right) - \sum_{i=1}^{k-1} d(f_i) - d(g_k) + k \\ &\leq d\left(\frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} \frac{\partial P}{\partial z_k}(f_1, \dots, f_k)\right) - \sum_{i=1}^k d(f_i) + d(f_k) - d(g_k) + k \\ &\leq d\left(\frac{\partial P}{\partial z_k}(f_1, \dots, f_k)\right) + \left(d\left(\frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}\right) - \sum_{i=1}^k d(f_i) + k\right) + d(f_k) - d(g_k). \end{aligned}$$

Évaluons maintenant chacun des termes :

- On a dit que le polynôme $\partial P / \partial z_k$ n'est pas nul sur $f_1^\circ, \dots, f_k^\circ$, par minimalité du degré de P , donc, d'après le lemme III.6.5, on a

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial P}{\partial z_k}(f_1, \dots, f_k)\right) &= \text{poids de } \frac{\partial P}{\partial z_k}(z_1, \dots, z_k) \\ &= \text{poids de } P - \text{poids de } z_k \\ &= \nu - d(f_k) \text{ par définition de la graduation.} \end{aligned}$$

- À cause du choix des indices $i_1, \dots, i_k$, on a

$$d\left(\frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}\right) - \sum_{i=1}^k d(f_i) + k = \mu(f_1, \dots, f_k).$$

- Enfin, $d(g_k) > \nu$ grâce au lemme III.6.5, puisque $g_k = P(f_1, \dots, f_k)$, qui est nul sur les f_i .

Finalement, notre suite d'inégalités donne

$$\mu(f_1, \dots, f_{k-1}, g_k) < (\nu - d(f_k)) + \mu(f_1, \dots, f_k) + d(f_k) - \nu < \mu(f_1, \dots, f_k),$$

exactement ce dont nous avons besoin pour conclure par récurrence. $\square$

Exercices

Exercice III.1. — Donner une démonstration du lemme III.1.3 utilisant des coordonnées locales (bien choisies!) sur W .

Exercice III.2. — Soit X le champ fondamental de l'opération du cercle S^1 sur une variété W . Décrire les trajectoires de X en termes de l'opération. Une telle trajectoire étant fixée, décrire les solutions de l'équation aux variations.

Exercice III.3. — Soient U et V des voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^m$ et soit $\psi : V \rightarrow U$ un difféomorphisme tel que $\psi(0) = 0$. On considère une fonction f sur U . Évaluer $d^2(f \circ \psi)_0$ et vérifier que, si 0 n'est pas un point critique de f , on a

$$d^2(f \circ \psi)_0 \neq (d^2 f)_0 \circ T_0 \psi.$$

Exercice III.4. — Vérifier que la forme initiale H° de l'exemple III.1.8 est constante le long des solutions du système linéaire donné dans les exemples III.1.5.

Exercice III.5. — De même, vérifier que les formes initiales H° et K° de l'exemple III.1.10 (oscillateur anharmonique) sont constantes le long de la trajectoire Γ .

Exercice III.6. — Sous les hypothèses de l'exercice II.6 (hamiltonien périodique), montrer que le groupe de Galois le long de toutes les trajectoires non stationnaires est fini⁽¹³⁾.

⁽¹³⁾Au voisinage d'une de ses trajectoires, un hamiltonien périodique est toujours intégrable, c'est ce qu'affirme l'exercice II.6.

Exercice III.7 (Variables action-angle singulières). — On considère un système hamiltonien, écrit dans des coordonnées (analytiques réelles et symplectiques)

$$x_1, \dots, x_k, \theta_1, \dots, \theta_k, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n \quad (k \geq 1),$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = 0 & \dot{\theta}_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n) \\ \dot{\zeta}_j = \frac{\partial h}{\partial \tau_j} \eta_j & \dot{\eta}_j = -\frac{\partial h}{\partial \tau_j} \zeta_j. \end{cases}$$

Dans cette écriture, τ_j désigne la forme quadratique

$$\tau_j = \frac{1}{2}(\zeta_j^2 + \eta_j^2).$$

Vérifier que $x_1, \dots, x_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n$ sont n intégrales premières en involution⁽¹⁴⁾. Expliciter les trajectoires contenues dans un niveau $\tau_{k+1} = \dots = \tau_n = 0$ et vérifier qu'elles sont des $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Écrire l'équation aux variations le long d'une telle trajectoire et ses solutions.

Dans le cas où la trajectoire est périodique mais pas nécessairement les trajectoires infinitésimalement proches, décrire l'extension de Picard-Vessiot. Montrer que le groupe de Galois a une composante additive de dimension 1 et des composantes multiplicatives et que sa dimension est $\leq 1 + n - k$.

Exercice III.8. — Soit G un sous-groupe algébrique (décrit par des équations polynomiales) du groupe additif $\mathbf{C}^m$. Montrer que, si G contient un élément z non nul de $\mathbf{C}^m$, il contient la droite engendrée par z . En déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^m$ et en particulier est connexe.

Exercice III.9. — Pour des endomorphismes Y et Z de E , vérifier que leur crochet $[Y, Z]$ en tant que champs de vecteurs sur E est le champ de vecteurs correspondant à l'endomorphisme $ZY - YZ$ (l'opposé du crochet des endomorphismes).

Exercice III.10. — Vérifier qu'un endomorphisme Z de E est dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(E)$ si et seulement si, en tant que champ de vecteurs, il préserve la forme symplectique, c'est-à-dire si et seulement si $\mathcal{L}_Z \omega = 0$.

Exercice III.11. — On se place sur l'espace vectoriel $\mathbf{C}^{2n}$ avec la forme complexe $\sum dp_i \wedge dq_i$.

Soit F est une forme linéaire, que peut-on dire du champ hamiltonien associé? Soient F et G deux formes linéaires. L'application

$$Y \longmapsto F(Y)X_G + G(Y)X_F$$

définit un champ de vecteurs sur $\mathbf{C}^{2n}$. Montrer que c'est le champ hamiltonien associé à un hamiltonien quadratique que l'on précisera.

⁽¹⁴⁾Ce type de « variables action-angle singulières » est considéré par Eliasson [24], voir aussi [20] et [41].

On suppose maintenant que $F_1, \dots, F_n$ sont des formes linéaires indépendantes et en involution. Montrer qu'il existe une base symplectique de $\mathbf{C}^{2n}$ dans laquelle le champ de vecteurs linéaire

$$Y \longmapsto F_j(Y)X_{F_i} + F_i(Y)X_{F_j}$$

a une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont sur la i -ème ligne et la j -ème colonne et sur la j -ème ligne et la i -ème colonne du bloc carré nord-est.

On suppose enfin que $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions analytiques indépendantes et en involution et que Γ est une trajectoire de X_{f_1} contenue dans un niveau commun régulier des f_i . Montrer que la démonstration du lemme-clef III.3.7 garantit que l'algèbre de Lie du groupe de Galois de l'équation aux variations est conjuguée à une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie abélienne des matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(2n; \mathbf{C})^{(15)}$.

Exercice III.12. — On considère le hamiltonien⁽¹⁶⁾

$$H = \alpha_1 q_1 p_1 + \alpha_2 q_2 p_2$$

sur $\mathbf{R}^4$ (α_1 et α_2 sont des constantes non nulles à préciser). Vérifier que le système hamiltonien a des solutions contenues dans le plan $q_2 = p_2 = 0$. On choisit une telle solution Γ . Vérifier que la surface de Riemann $\Gamma_{\mathbf{C}}$ est (le germe de) $\mathbf{C}/(\frac{2i\pi}{\alpha_1})\mathbf{Z}$, le corps des fonctions méromorphes est le corps des fractions de l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $z = e^{z_1 t}$.

On suppose que α_1/α_2 soit un nombre rationnel non entier. Évaluer le groupe de Galois.

Considérer plus généralement le hamiltonien quadratique sur $\mathbf{R}^{2n}$

$$H = \alpha_1 q_1 p_1 + \dots + \alpha_n q_n p_n$$

le long d'une trajectoire

$$q_1 = ae^{z_1 t}, \quad p_1 = be^{-z_1 t}, \quad q_2 = \dots = q_n = p_2 = \dots = p_n = 0$$

et ajuster les α_i pour obtenir comme groupe de Galois tel produit de groupes cycliques et de groupes multiplicatifs que l'on souhaitera.

Exercice III.13. — Soit k un corps différentiel sur $\mathbf{C}$ et soit a un élément de k . On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \mu' = 0 \\ z' = a\mu. \end{cases}$$

⁽¹⁵⁾ Comparer ce résultat avec le lemme III.3.2.

⁽¹⁶⁾ Comme tous les hamiltoniens quadratiques, H est intégrable (voir [79] et l'exercice I.26). Ici $K = q_2 p_2$ (par exemple) est une deuxième intégrale première.

Montrer que l'extension de Picard-Vessiot K est de degré de transcendance au plus égal à 1. On suppose que ce degré est 1 et qu'il existe un élément Z de K tel que $K = k(Z)$ et $Z' = a$. Quelles sont les solutions du système ? Montrer que le groupe de Galois est conjugué au « groupe additif » des matrices $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice III.14. — Montrer que l'équation d'Airy $y'' - ty = 0$ n'a aucune solution rationnelle.

Exercice III.15. — Soit f une fonction entière sur $\mathbf{C}$, dont on suppose qu'elle satisfait à une équation algébrique à coefficients dans $\mathbf{C}(t)$. Montrer qu'il existe des constantes A, B et C telles que, pour $|t|$ assez grand, on ait

$$|f(t)| \leq A + B |t|^C.$$

En déduire que f est un polynôme.

Exercice III.16. — Montrer que la forme $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ sur $\mathbf{C}^4$ se prolonge en une forme *méromorphe* sur $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$.

Exercice III.17. — On considère une fonction analytique H sur l'espace vectoriel symplectique complexe $\mathbf{C}^4$. On suppose que le plan

$$E : q_2 = p_2 = 0$$

est stable par H au sens où

$$(\forall x \in E) \quad X_H(x) \in E.$$

Montrer qu'alors, H est de la forme

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h(q_1, p_1) + \frac{1}{2} p_2^2 f + q_2 p_2 \varphi + \frac{1}{2} q_2^2 g$$

pour certaines fonctions h sur $\mathbf{C}^2$, f, φ et g sur $\mathbf{C}^4$.

On choisit une trajectoire Γ de X_H contenue dans E , qu'on suppose n'être pas réduite à un point. Quel est le degré de la forme initiale H° de H le long de Γ ?

Écrire l'équation aux variations le long de Γ . Montrer que l'on peut identifier le fibré symplectique réduit le long de Γ au fibré trivial $\Gamma \times (Q_2, P_2)$ et écrire l'équation aux variations normales à laquelle satisfait (Q_2, P_2) .

Le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}q_2^2(q_1 + 3q_2p_2^3)$$

est-il intégrable ?

On considère maintenant le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 - Aq_1^{2+2r} + q_1^r q_2^2$$

où r est un entier supérieur ou égal à 1.

Montrer que le système hamiltonien associé à H est intégrable (on pourra calculer le crochet de Poisson de H et d'une fonction de q_2 seul).

Vérifier qu'il existe une valeur de A telle que X_H ait une trajectoire contenue dans E et de la forme

$$q_1 = t^\alpha, \quad p_1 = \alpha t^{\alpha-1}$$

pour un nombre réel α que l'on déterminera. Est-elle contenue dans un niveau régulier de H ?

Cette valeur de A et cette trajectoire Γ étant fixées, déterminer le groupe de Galois de l'équation aux variations normales le long de Γ .

CHAPITRE IV

UNE INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS DE LAX

Le théorème d'Arnold-Liouville, revu à travers les équations de Lax

La résolution de certains systèmes hamiltoniens complètement intégrables fait intervenir des courbes algébriques et des fonctions liées à ces courbes : courbes elliptiques et fonctions de Weierstrass, par exemple. Une façon élégante de comprendre l'apparition de ces courbes est d'écrire le système différentiel sous la forme d'une équation de Lax, c'est-à-dire sous la forme

$$\frac{dA_\lambda}{dt} = A_\lambda B_\lambda - B_\lambda A_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$$

où A_λ et B_λ sont deux matrices dont les coefficients sont les variables dynamiques qui nous intéressent. Le paramètre supplémentaire indépendant λ joue un rôle important en faisant apparaître des courbes algébriques, celles d'équations $\det(A_\lambda - \mu \text{Id}) = 0$ (courbes spectrales). À l'aide des vecteurs propres des matrices A_λ , on peut enfin relier la géométrie (la famille des niveaux communs des intégrales premières) à un modèle algébrique (la famille des jacobiniennes des courbes spectrales). Rappelons que la jacobienne d'une courbe est un tore complexe... et sa partie réelle une réunion de tores réels, comme un niveau régulier d'un système intégrable.

En exagérant à peine, on pourrait présenter le présent chapitre comme une version *effective* du chapitre II. J'essaie d'y montrer comment utiliser ces techniques algébro-géométriques pour résoudre *effectivement* quelques questions laissées en suspens par le théorème d'Arnold-Liouville :

- *La structure affine des niveaux* (linéarisation sur les tores de Liouville), d'abord. Bien souvent, les solutions du système différentiel peuvent être considérées comme « linéarisées sur la jacobienne de la courbe » — ce qu'on peut considérer

comme une version algébrique⁽¹⁾ du théorème d'Arnold-Liouville (voir le théorème IV.2.5).

- *La détermination des valeurs régulières*, ensuite. Les techniques peuvent permettre de relier la régularité d'un niveau donné à la lissité de la courbe spectrale correspondante et donc de déterminer facilement quelles valeurs des intégrales premières sont régulières.
- *Le décompte des tores de Liouville et l'étude de leurs bifurcations*. On peut aussi utiliser ces méthodes pour compter les tores de Liouville d'un niveau régulier donné, voire étudier leurs bifurcations. Ce point de vue, utilisé avec succès dans [14] pour décrire les tores de Liouville de la toupie de Kowalevski et dans [7] pour énumérer ceux des géodésiques des quadriques, est développé dans [9].
- *Construction de variables d'action*, enfin. Cette fois on ne considère plus *un* niveau régulier mais toute la famille de ces niveaux (un ouvert de la variété symplectique). Du côté algébrique, la situation peut être modélisée par la famille des jacobiennes, vue au-dessus de la famille des courbes spectrales.

On trouvera donc dans ce chapitre une introduction aux équations de Lax et courbes spectrales (§IV.1), la définition de l'application de vecteurs propres et un théorème de linéarisation (§IV.2) et en appendice un aperçu sur une méthode de construction d'équations de Lax (§IV.4). Tout au long de ce chapitre, je vais suivre l'exemple simple du pendule sphérique pour illustrer les méthodes présentées. Je terminerai par une étude assez complète de l'exemple plus élaboré des géodésiques des quadriques (§IV.3).

IV.1. Pourquoi des courbes algébriques ?

IV.1.a. Un exemple simple. — Revenons à l'exemple du pendule sphérique (voir les §§I.2.f et I.3.e).

Choisissons une base orthonormée dont le troisième vecteur e_3 soit vertical (direction de la pesanteur) : $e_3 = -\Gamma$. Cherchons à déterminer la hauteur (ou altitude) q_3 de la bille en fonction du temps.

Les équations différentielles sont

$$\dot{q} = p \text{ et } \dot{p} = -e_3 - (-q_3 + \|p\|^2)q.$$

On a ainsi $\dot{q}_3 = p_3$. On élimine facilement les autres inconnues en utilisant les deux intégrales premières $H = \frac{1}{2} \|p\|^2 + q_3$ et $K = q_1 p_2 - q_2 p_1$ et les relations $\|q\|^2 = 1$ et $p \cdot q = 0$. On trouve

$$\dot{q}_3^2 = p_3^2 = 2(H - q_3)(1 - q_3^2) - K^2.$$

⁽¹⁾Mais autrement précise : les champs hamiltoniens sont linéaires pour une structure affine sur les niveaux qu'ils ont eux-mêmes définie — une tautologie qui a fait l'objet de la remarque II.2.3 — ici les jacobiennes arrivent dans le paysage armées... de leur structure affine canonique !

On est ainsi amené à considérer la courbe d'équation $y^2 = P(x)$ avec $P(x) = 2(H - x)(1 - x^2) - K^2$.

C'est une cubique dans le plan $\mathbf{C}^2$. En lui ajoutant un point à l'infini, on peut la considérer comme une « courbe elliptique ». On peut aussi facilement mettre son équation sous la forme standard $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ et la paramétrer par un réseau de $\mathbf{C}$ et une fonction $\wp$ de Weierstrass. Ceci permet de résoudre effectivement les équations (exercice IV.1).

Le polynôme P est négatif en -1 et en 1 , il a donc deux racines réelles dans $] -1, 1[$ et une dans $]1, +\infty[$. Maintenant, la bille est sur la sphère unité, donc à une altitude comprise entre -1 et 1 . Elle est donc limitée par les parallèles correspondant aux deux racines de P contenues dans cet intervalle. Voir la figure 5 du chapitre II. De cette étude, on peut tirer deux enseignements

- La courbe elliptique $y^2 = P(x)$ intervient naturellement dans la recherche des solutions.
- La géométrie *réelle* de cette courbe algébrique donne des renseignements sur la dynamique et la géométrie du système.

On va maintenant présenter un cadre théorique qui permet d'expliquer pourquoi beaucoup de systèmes complètement intégrables sont liés à des courbes algébriques.

Remarque IV.1.1. — Il y a des systèmes intégrables très simples pour lesquels il n'y a aucun espoir de tout régler par la géométrie algébrique. Penser par exemple aux flots géodésiques sur les surfaces de révolution (voir le §I.4.a).

Exercices IV.1, IV.2.

IV.1.b. Équations de Lax et courbes algébriques. — Une équation de Lax avec paramètre spectral est une équation de la forme

$$\frac{d}{dt}A_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$$

dans laquelle

- les lettres A et B désignent des matrices et $[,]$ le crochet des matrices $[A, B] = AB - BA$,
- ces matrices sont des polynômes en λ , une variable indépendante, le paramètre spectral,
- en général, B dépend de A (l'équation n'est pas linéaire).

Remarque IV.1.2. — On peut aussi considérer des équations de Lax dans lesquelles A et B sont des opérateurs linéaires plus généraux que des matrices (en dimension infinie) par exemple des opérateurs différentiels. Voir par exemple [62] et [39] pour une introduction et des références.

Exemple IV.1.3. — On identifie les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ aux matrices anti-symétriques et le produit vectoriel au crochet des matrices (comme dans l'exercice IV.3). L'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} (q + \lambda(p \wedge q) - \lambda^2 \Gamma) = [q + \lambda(p \wedge q) - \lambda^2 \Gamma, p \wedge q - \lambda \Gamma]$$

est équivalente, pour $(q, p) \in TS^2$, à

$$\begin{cases} \dot{q} = q \wedge (p \wedge q) = p \\ \dot{p} \wedge q + p \wedge \dot{q} = \dot{p} \wedge q = -q \wedge \Gamma \end{cases}$$

c'est-à-dire au système

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \Gamma + \alpha q = -\Gamma - (q \cdot \Gamma + \|p\|^2)q. \end{cases}$$

On aura reconnu le système hamiltonien décrivant le pendule sphérique⁽²⁾ (§I.2.f).

Exemple IV.1.4. — Si Γ , M , L et Ω sont des matrices anti-symétriques d'ordre 3, l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} (\Gamma + M\lambda + L\lambda^2) = [\Gamma + M\lambda + L\lambda^2, \Omega + L\lambda]$$

est une équation de Lax avec paramètre spectral. On vérifie (exercice IV.4) que, quand $M - \Omega$ est colinéaire à L , cette équation est équivalente au système hamiltonien décrivant le mouvement de la toupie symétrique (§§I.2.g et I.3.g).

Exemple IV.1.5 (Équation d'Euler-Arnold). — On a dit au §I.3.f que le mouvement d'un solide libre était décrit par le système différentiel $\dot{M} = M \wedge \Omega$, où M et Ω sont liés par $M = J\Omega$. En interprétant un vecteur de $\mathbf{R}^3$ comme une matrice anti-symétrique et le produit vectoriel comme le crochet des matrices (en cas de besoin, exercice IV.3), ceci s'écrit

$$\dot{M} = [M, \Omega], \quad M = J\Omega + \Omega J$$

où J est une matrice diagonale (fonction de J !). Cette nouvelle écriture a un sens en dimension N , on considère donc que les matrices M et Ω sont anti-symétriques d'ordre N (éléments de $\mathfrak{so}(N)$) et que J est une matrice symétrique.

Ce système a été mis sous forme d'une équation de Lax par Manakov [55] :

$$\frac{d}{dt} (M + \lambda J^2) = [M + \lambda J^2, \Omega + \lambda J].$$

Il décrit aussi le flot géodésique d'une métrique invariante sur le groupe $SO(N)$ (voir l'appendice 2 de [3]), c'est pourquoi cette équation différentielle est dite « équation d'Euler-Arnold ».

Exercices IV.13, IV.4, IV.5.

⁽²⁾Cette équation de Lax m'a été indiquée par Alexei Reyman lorsque je préparais le cours de Lisbonne et cherchais à l'illustrer par un exemple simple qui ne fût pas déjà dans [9]. Qu'il en soit remercié.

IV.1.c. Déformations isospectrales et courbe spectrale. — Le crochet des matrices est la forme infinitésimale de la conjugaison. En conséquence, une équation de Lax est la forme infinitésimale d'une égalité

$$A_\lambda(t) = U_\lambda(t)^{-1} A_\lambda(t_0) U_\lambda(t).$$

Les lecteurs dubitatifs sont invités à faire l'exercice IV.6. Ceux qui veulent « être vraiment sûrs » peuvent même faire aussi l'exercice IV.7. Maintenant que tout le monde est convaincu, la matrice A_λ reste conjuguée à elle-même et, en particulier, ses valeurs propres ne dépendent pas du temps. On dit que l'équation de Lax décrit des déformations « isospectrales ».

Courbe spectrale. — Un système différentiel écrit sous forme de Lax a donc toujours beaucoup d'intégrales premières : toutes les valeurs propres de la matrice A_λ ou, si l'on préfère, tous les coefficients de son polynôme caractéristique.

C'est là que le paramètre spectral λ commence à jouer un rôle important : le polynôme caractéristique $\det(A_\lambda - \mu \text{Id})$ de la matrice est un polynôme en *deux* variables λ et μ . Or, qu'est-ce qu'un polynôme en deux variables sinon l'équation d'une courbe algébrique dans le plan $\mathbf{C}^2$?

Cette courbe décrit le spectre de A_λ , elle est donc appelée « courbe spectrale ».

On remarquera qu'à chaque valeur de λ sont associées N valeurs de μ , les N valeurs propres de la matrice A_λ (avec multiplicités⁽³⁾), si N est la taille de la matrice A_λ . Autrement dit, la courbe spectrale est un revêtement ramifié de degré N de $\mathbf{C}$.

Remarque IV.1.6. — L'équation $\det(A_\lambda - \mu \text{Id}) = 0$ définit une courbe affine

$$C_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \mid \det(A_\lambda - \mu \text{Id}) = 0\},$$

mais celle-ci peut-être complétée et normalisée en lui ajoutant quelques points au dessus de $\lambda = \infty$ (voir l'appendice B). On obtient ainsi une courbe C (une surface de Riemann), munie d'un revêtement $\lambda : C \rightarrow \mathbf{P}^1$. Je vais décrire cette complétion un peu plus concrètement au § IV.2.c.

Remarque IV.1.7. — La courbe spectrale ne dépend pas de la matrice B . Celle-ci sert à décrire une équation différentielle, un flot, particuliers sur un ensemble isospectral de matrices A .

Exemple IV.1.8. — Revenons à l'équation de Lax décrivant le pendule sphérique (exemple IV.1.3). Le polynôme caractéristique d'une matrice anti-symétrique A d'ordre 3 est

$$\det(A - \mu \text{Id}) = -\mu(\mu^2 + \|A\|^2),$$

⁽³⁾À partir de maintenant, il est sage de considérer que les polynômes utilisés sont complexes et donc définissent des courbes complexes. On se souviendra de leur origine réelle le moment venu.

on considérera donc ici⁽⁴⁾ la courbe spectrale d'équation

$$\mu^2 + \|q + \lambda(p \wedge q) - \lambda^2 \Gamma\|^2 = \mu^2 + \lambda^4 + 2K\lambda^3 + 2H\lambda^2 + 1$$

où l'on retrouve bien les intégrales premières H (énergie) et K (moment par rapport à la verticale) attendues (§I.2.f). Cette courbe, complétée par deux points au-dessus de $\lambda = \infty$, est une courbe de genre 1 (voir au besoin l'exercice B.1). On aura remarqué qu'elle n'a aucun point à coordonnées réelles, ce qui ne l'empêche pas d'être utile (voir notamment l'exercice IV.12).

Exercices IV.6, IV.7, IV.8, IV.9, IV.10.

IV.2. Un théorème de linéarisation

La courbe spectrale a été obtenue en considérant les valeurs propres de la matrice A_λ . On va maintenant considérer et utiliser, voire exploiter, ses vecteurs propres.

IV.2.a. Définition de l'application de vecteurs propres. — Fixons maintenant la courbe C et considérons la famille isospectrale $\mathcal{T}_C$ des matrices A_λ dont C est la courbe spectrale (ce qui revient à fixer les valeurs des intégrales premières, le polynôme caractéristique).

Supposons que les polynômes A_λ aient un spectre simple pour presque toutes les valeurs de λ , de sorte que les sous-espaces propres sont des droites et que ces droites engendrent l'espace $\mathbf{C}^N$. Alors $\lambda : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ est un revêtement ramifié de degré N .

Proposition IV.2.1. — *Soit A_λ un polynôme de matrices dans $\mathcal{T}_C$. Si la courbe C est lisse, il existe un unique fibré en droites complexes sur C , défini comme le sous-fibré de $C \times \mathbf{C}^N$ dont la fibre en $(\lambda, \mu) \in C$ est, quand μ est une valeur propre simple de A_λ , le sous-espace propre de A_λ associé à μ .*

Démonstration. — Considérons la sous-variété V de $C \times \mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$ définie par

$$V = \{(\lambda, \mu, d) \mid d \subset \text{Ker}(A_\lambda - \mu \text{Id})\}$$

(où le symbole d désigne une droite de $\mathbf{C}^N$, considérée comme point de $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$) et la sous-variété de V

$$V_0 = \{(\lambda, \mu, d) \in V \mid \mu \text{ est une valeur propre simple de } A_\lambda\}.$$

⁽⁴⁾On peut éviter le facteur μ superflu en remplaçant les matrices 3×3 par des matrices complexes 2×2 , c'est-à-dire en utilisant l'isomorphisme $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$. Voir [29] pour des applications de cette remarque à l'étude de la toupie.

Soit F l'ensemble des points de C en lesquels deux valeurs propres coïncident. Avec nos hypothèses, F est fini, c'est le lieu de ramification du revêtement $\lambda : C \rightarrow \mathbf{P}^1$. On veut montrer que la bijection

$$\begin{aligned} f : C - F &\longrightarrow V_0 \\ (\lambda, \mu) &\longmapsto (\lambda, \mu, d) \end{aligned}$$

a un prolongement holomorphe à la courbe C tout entière, à valeurs dans l'adhérence $\overline{V}_0$ de V_0 .

Soit a un point de F . Comme la courbe C est lisse, elle possède une coordonnée locale z centrée en a et on a, pour z non nul,

$$f(z) = (z, [x_1(z), \dots, x_N(z)])$$

(la coordonnée z représente les points (λ, μ) de la courbe au voisinage de a et $[x_1, \dots, x_N]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbf{P}^{N-1}(\mathbf{C})$). Dans cette expression, les fonctions x_i sont holomorphes sauf en 0 où elles ont peut-être des pôles. Ainsi, pour m assez grand (mais pas trop!), on peut prolonger f sur un voisinage de 0 en posant

$$\varphi(z) = (z, [z^m x_1(z), \dots, z^m x_N(z)]).$$

□

Remarque IV.2.2. — Pour cette démonstration il était essentiel que C soit lisse, mais aussi que ce soit une courbe.

On a ainsi construit une application à valeurs dans le groupe de Picard

$$\varphi_C : \mathcal{T}_C \longrightarrow \text{Pic}^d(C)$$

(pour un certain⁽⁵⁾ entier d). Au polynôme A_λ , φ_C associe le dual L du fibré V des vecteurs propres. On choisit d'utiliser le dual parce que c'est lui qui a un degré positif : les coordonnées des vecteurs propres sont des sections holomorphes... On appelle φ_C l'« application de vecteurs propres ».

Exemple IV.2.3. — Il est souvent possible d'exhiber un diviseur qui représente l'image d'un point de $\mathcal{T}_C$. On le verra dans l'exemple des géodésiques des quadriques au § IV.3.b. Dans le cas où la matrice de Lax est une matrice anti-symétrique 3×3 , on calcule facilement ses vecteurs propres et on en déduit une description concrète de l'application φ_C . C'est le cas pour le pendule sphérique (exercice IV.11) ou pour la toupie (cette fois, l'exercice est traité dans [9]).

⁽⁵⁾Le degré d est une fonction de la taille de la matrice A_λ et de son degré comme polynôme en λ qu'il n'est pas indispensable d'expliciter ici.

On veut comprendre ce que décrit $\varphi_C(A_\lambda(t))$ dans $\text{Pic}^d(C)$ quand $A_\lambda(t)$ est solution d'une équation de Lax. Puisque $A_\lambda(t)$ est solution d'une équation différentielle, c'est à l'équation différentielle à laquelle satisfait l'image qu'on s'intéresse, on veut donc calculer l'application tangente à φ_C .

Ce calcul a été fait très généralement par Griffiths [33] (voir aussi l'appendice 3 de [9] — qui reproduit fidèlement [33]). Le cas particulier des équations de Lax obtenues par des matrices R sur des algèbres de lacets est dû à Adler et vanMoerbeke [1] et Reyman [66]. C'est en fait celui que j'explique ici de façon très terre à terre en m'inspirant de [39] pour la présentation.

IV.2.b. Le tore $\text{Pic}^d(C)$ et son espace tangent. — L'application tangente à φ_C prend ses valeurs dans le fibré tangent à $\text{Pic}^d(C)$. Commençons donc par décrire ce fibré.

Pensons à un fibré en droites comme décrit par un cocycle (voir au besoin l'appendice B) et écrivons la « suite exacte exponentielle »

$$H^1(C; \mathcal{O}_C) \longrightarrow H^1(C; \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\exp} H^1(C; \mathcal{O}_C^*) \xrightarrow{\deg} H^2(C; \mathbb{Z})$$

qui exhibe l'espace vectoriel $H^1(C; \mathcal{O}_C)$ comme revêtement de $\text{Pic}^0(C)$ et donc comme son espace tangent (et aussi comme l'espace tangent à $\text{Pic}^d(C)$).

Si $\beta \in H^1(C; \mathcal{O}_C)$ est la classe d'un 1-cocycle, alors $\exp \beta$ décrit un fibré de degré 0. De même si on fixe un fibré de degré d décrit par un cocycle c , alors $\exp(t\beta)c$ décrit un fibré L_t de degré d qui dépend *linéairement* de t .

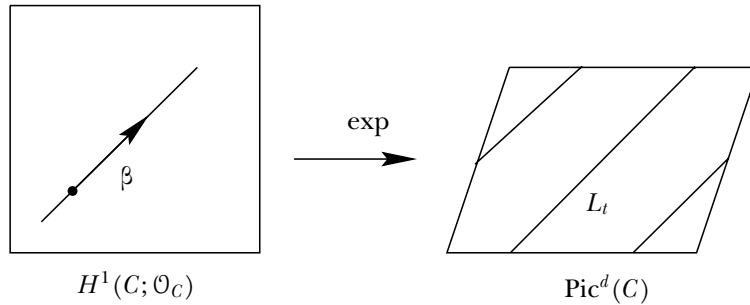


FIGURE 1

Voici ce que je vais expliquer maintenant :

- ces familles linéaires sont les images des solutions de certaines équations de Lax,
- plus précisément, à chaque β , je vais associer une matrice B_λ de façon que le fibré défini par $\exp(t\beta)c$ soit l'image d'une solution $A_\lambda(t)$ de $\dot{A}_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$,
- pour cela, je vais décrire de façon assez concrète les éléments de $H^1(C; \mathcal{O}_C)$ en utilisant un plongement de C dans une surface complexe S .

IV.2.c. La courbe spectrale vue dans $\mathcal{O}(n)$. — La surface S dans laquelle on plonge la courbe spectrale C est simplement l'espace total du fibré $\mathcal{O}(n)$ sur $\mathbf{P}^1$, où n est le degré de A_λ comme polynôme en λ .

Appelons $U_0 = \mathbf{P}^1 - \{\infty\}$ et $U_\infty = \mathbf{P}^1 - \{0\}$. Je rappelle (voir l'appendice B) que le fibré $\mathcal{O}(n)$ est obtenu en recollant $U_0 \times \mathbf{C}$ et $U_\infty \times \mathbf{C}$ par

$$(\lambda, \mu) \longmapsto \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda^n} \right).$$

Et les notations sont bonnes : λ est la coordonnée « affine » (centrée en 0) et, en posant $\lambda' = 1/\lambda$ (la coordonnée centrée en ∞), on a

$$\begin{aligned} \det(A_\lambda - \mu \text{Id}) &= \det \left(\sum_{i=0}^n A_i \lambda^i - \mu \text{Id} \right) \\ &= \det \left(\frac{1}{\lambda^n} \left(\sum_{i=0}^n A_i \lambda'^{n-i} - \lambda'^n \mu \text{Id} \right) \right). \end{aligned}$$

On peut donc considérer tout point (λ, μ) de C comme un point de l'espace total de $\mathcal{O}(n)$. On voit ainsi la courbe C comme plongée dans cette surface S .

On peut aussi interpréter ce plongement en disant que μ est une section du fibré $\lambda^* \mathcal{O}(n)$ sur C .

Remarque IV.2.4. — C'est bien la courbe *complète* C qu'on a plongée ainsi. La compactification partielle de $\mathbf{C}^2$ en l'espace total du fibré $\mathcal{O}(n)$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est d'ailleurs l'endroit le plus naturel où construire la complétion de la courbe affine.

IV.2.d. Les éléments de $H^1(\mathcal{O}_C)$ comme polynômes en (λ, μ) . — L'avantage de voir C dans S , c'est que $H^1(S; \mathcal{O}_S)$ se décrit simplement et donne une description très concrète des éléments de $H^1(C; \mathcal{O}_C)$.

La surface S est réunion des deux ouverts $U_0 \times \mathbf{C}$ et $U_\infty \times \mathbf{C}$. On démontre que $H^1(U_0 \times \mathbf{C}, \mathcal{O}_S)$, $H^1(U_\infty \times \mathbf{C}, \mathcal{O}_S)$ et $H^1((U_0 \cap U_\infty) \times \mathbf{C}, \mathcal{O}_S)$ sont nuls, ce qui permet de démontrer qu'on peut calculer $H^1(S; \mathcal{O}_S)$ à l'aide des 1-cocycles du seul recouvrement de S par ces deux ouverts. Ainsi $H^1(S; \mathcal{O}_S)$ s'interprète comme l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, c'est-à-dire des

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{i,j} \lambda^i \mu^j$$

modulo celles qui s'étendent à $U_0 \times \mathbf{C}$, c'est-à-dire les $\sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{i,j} \lambda^i \mu^j$ et celles qui s'étendent à $U_\infty \times \mathbf{C}$, les

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{i,j} \lambda^i \mu^j = \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{i,j} \lambda^{-nj-i} \mu^j.$$

Considérons maintenant l'inclusion de C dans S . Le polynôme $\det(A_\lambda - \mu \text{Id})$ est de degré nN et les fonctions sur S qui s'annulent sur C sont celles de l'idéal engendré par ce polynôme. Ceci s'écrit comme une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-nN) \xrightarrow{\det(A_\lambda - \mu \text{Id})} \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

Le groupe $H^2(S; \mathcal{O}(-nN))$ est nul puisque S est recouvert par deux ouverts, donc l'inclusion $C \rightarrow S$ induit une surjection

$$H^1(S; \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(C; \mathcal{O}_C)$$

et on peut dire plus précisément que les éléments de $H^1(C; \mathcal{O}_C)$ se décrivent comme éléments de $H^1(S; \mathcal{O}_S)$ modulo l'équation de C , c'est-à-dire $\det(A_\lambda - \mu \text{Id}) = 0$.

En conclusion, tout élément de $H^1(C; \mathcal{O}_C)$ se représente comme un polynôme de Laurent de la forme

$$\beta(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=0}^{N-1} b_i(\lambda) \mu^i$$

(pour un entier k et des polynômes b_i).

IV.2.e. Cocycles et équations de Lax. — Comme je l'ai déjà remarqué, pour tout cocycle c décrivant un fibré de degré d sur C , $\exp(t\beta)c$ décrit aussi un fibré L_t de degré d . Comme prévu, identifions L_t à l'image d'une matrice $A_\lambda(t)$.

Théorème IV.2.5. — Soit $\beta(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=0}^{N-1} b_i(\lambda) \mu^i$ un élément de $H^1(C; \mathcal{O}_C)$ et soit

$$B_\lambda = \left(\frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=0}^{N-1} b_i(\lambda) A_\lambda^i \right)_+$$

la partie polynomiale de $\beta(\lambda, A_\lambda)$. Alors l'image d'une solution $A_\lambda(t)$ de l'équation de Lax $\dot{A}_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$ par l'application de vecteurs propres φ_C est un fibré L_t décrit par un cocycle $\exp(t\beta)c$.

Exemple IV.2.6. — Toujours dans le cas de l'équation de Lax pour le pendule sphérique donnée dans l'exemple IV.1.3, on a

$$\lambda = q + \lambda(p \wedge q) - \lambda^2 \Gamma \text{ et } B_\lambda = p \wedge q - \lambda \Gamma = (\lambda^{-1} A_\lambda)_+.$$

Donc l'application de vecteurs propres linéarise le flot sur la jacobienne de C . Le cocycle β est ici $\lambda^{-1}\mu$.

Remarques IV.2.7

- Le choix de c est lié au choix de la condition initiale $\varphi_C(A_\lambda(0))$.
- Comme l'explique bien Griffiths dans [33], on s'attend *a priori* à ce que B_λ ne soit pas unique (on peut lui ajouter n'importe quel polynôme en A_λ) et ceci annonce la nature cohomologique des objets d'intérêt.
- Ce résultat a de belles applications. On peut, par exemple, l'utiliser pour déterminer les valeurs régulières d'un système intégrable. Voir l'exercice IV.12 pour le cas simple du pendule sphérique et le § IV.3 pour le cas des géodésiques des quadriques.

Démonstration. — Pour cette démonstration, il est plus simple d'utiliser les vecteurs propres eux-mêmes. Soit donc $v(t)$ une section de L_t^* . Par abus de notation, j'écris

encore v pour la section vue au-dessus de U_0 et v' pour cette même section vue au-dessus de U_∞ . Ainsi, on a

$$v = \exp(-t\beta(\lambda, \mu))\gamma v'$$

(le signe $-$ parce que v est une section de L_t^* , γ désigne un cocycle décrivant un fibré de degré $-d$, par exemple $\gamma = c^{-1}$). On dérive par rapport à t :

$$\dot{v} = -\beta v + \exp(-t\beta)\gamma \dot{v}'.$$

Mais v est un vecteur propre de A_λ pour la valeur propre μ , c'est dire que $A_\lambda v = \mu v$ et donc que

$$\beta(\lambda, \mu)v = \beta(\lambda, A_\lambda)v.$$

On décompose $\beta(\lambda, \mu)$ en partie polynomiale et partie « polynôme de Laurent sans terme constant » en λ

$$\beta(\lambda, \mu) = \beta(\lambda, \mu)_+ - \beta(\lambda, \mu)_-.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \dot{v} + \beta(\lambda, A_\lambda)_+ v &= \beta(\lambda, A_\lambda)_- v + \exp(-t\beta(\lambda, \mu))\gamma \dot{v}' \\ &= \exp(-t\beta)\gamma (\dot{v}' + \beta(\lambda, A_\lambda)_- v') \end{aligned}$$

Dans cette égalité, le membre de gauche est holomorphe en λ et celui de droite en λ^{-1} , de sorte que l'égalité définit une section de L_t^* . Enfin, $\beta(\lambda, A_\lambda)_+$ est ce que nous voulons appeler B_λ , de sorte que cette section s'écrit, au-dessus de U_0

$$\dot{v} + B_\lambda v.$$

On a supposé que les valeurs propres de A_λ sont, génériquement, distinctes, de sorte que $\dot{v} + B_\lambda v$ est un vecteur propre de A_λ pour μ , on a donc

$$\begin{cases} A_\lambda v = \mu v \\ A_\lambda (\dot{v} + B_\lambda v) = \mu (\dot{v} + B_\lambda v). \end{cases}$$

On en déduit que

$$A_\lambda \dot{v} + (A_\lambda B_\lambda v - B_\lambda A_\lambda v) - \mu \dot{v} = 0$$

ou encore que

$$A_\lambda \dot{v} + [A_\lambda, B_\lambda]v - \mu \dot{v} = 0.$$

On compare cette égalité à celle qu'on obtient en dérivant $A_\lambda v - \mu v = 0$ par rapport au temps pour obtenir que

$$\dot{A}_\lambda v = [A_\lambda, B_\lambda]v.$$

La possibilité de trouver une base de vecteurs propres pour A_λ montre qu'alors A_λ satisfait bien à l'équation différentielle

$$\dot{A}_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$$

pour la matrice B_λ construite. □

Exercices IV.11, IV.12.

IV.3. Le cas des géodésiques des quadriques

Dans cette partie, j'utilise et illustre les méthodes présentées jusque là pour expliciter les valeurs régulières et des variables d'action pour les géodésiques des quadriques. Les notations sont celles du §I.4.b. La matrice Γ est celle dont les coefficients sont les $\Gamma_{i,j} = (p_i u_j - p_j u_i) / \alpha_i \alpha_j$.

IV.3.a. Équation de Lax et courbe spectrale. — Le système est décrit (par Moser, voir [61], et) par des équations de Lax obtenues par la méthode expliquée dans l'appendice IV.4. Appelons $p \otimes p$ et $p \wedge u$ respectivement les matrices telles que

$$(p \otimes p)_{i,j} = p_i p_j, \quad (p \wedge u)_{i,j} = p_i u_j - p_j u_i.$$

On vérifie sans mal (exercice IV.14) qu'on a :

Proposition IV.3.1. — *Le système hamiltonien décrivant les géodésiques de la quadrique Q_0 sur l'espace $\mathcal{D}_n$ des droites de $\mathbf{R}^{n+1}$ est équivalent à l'équation de Lax $\dot{A}_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$, avec*

$$A_\lambda = \alpha \lambda^2 + (p \wedge u) \lambda - p \otimes p \text{ et } B_\lambda = \alpha^{-1} \lambda + \Gamma. \quad \square$$

Exercice IV.14.

Déterminons maintenant la courbe spectrale. La matrice $p \otimes p$ est celle de la projection orthogonale sur la droite engendrée par p , la matrice $p \wedge u$ a pour image le sous-espace engendré par p et u , donc A_λ est une perturbation de la matrice diagonale α par des termes de rang au plus 2. Il est facile de calculer son polynôme caractéristique⁽⁶⁾ (voir [61]).

Vue la forme de la matrice A_λ , appeler la valeur propre $\lambda^2 z$ s'impose. Écrivons donc

$$A_\lambda - \lambda^2 z \text{Id} = \lambda^2 (\alpha - z \text{Id}) \left[\text{Id} + \underbrace{\lambda^{-1} (\alpha - z \text{Id})^{-1} (p \wedge u - \lambda^{-1} p \otimes p)}_C \right].$$

Choisissons une base $e_1, \dots, e_{n+1}$ pour écrire

$$\begin{aligned} \det(\text{Id} + \lambda^{-1} C) e_1 \wedge \dots \wedge e_{n+1} &= (\text{Id} + \lambda^{-1} C)^{\wedge n+1} (e_1 \wedge \dots \wedge e_{n+1}) \\ &= e_1 \wedge \dots \wedge e_{n+1} + \lambda^{-1} (\text{tr } C) e_1 \wedge \dots \wedge e_{n+1} \\ &\quad + \lambda^{-2} (\text{tr } C^{\wedge 2}) e_1 \wedge \dots \wedge e_{n+1} \end{aligned}$$

(comme $\text{rg } C \leq 2$, on a $C^{\wedge 3} = 0$ et il n'y a pas d'autre terme). Mais $\alpha - z \text{Id}$ est diagonale, et $p \wedge u$ n'a pas de terme diagonal, de sorte que la trace de la matrice $(\alpha - z \text{Id})^{-1} p \wedge u$ est nulle. Donc on a

$$\text{tr } C = -\lambda^{-1} \text{tr}((\alpha - z \text{Id})^{-1} p \otimes p) = -\lambda^{-1} q_z(p)$$

⁽⁶⁾Dans [61], Moser considère plus généralement des équations de Lax avec une matrice A_λ qui est une perturbation de rang au plus 2 d'une matrice diagonale inversible et notamment l'équation d'Euler-Arnold (évoquée ici dans l'exemple IV.1.5).

où j'ai noté q_z la forme quadratique $\sum x_i^2/(\alpha_i - z)$ (j'utilise la notation φ_z pour sa forme polaire). De même, $p \otimes p$ est de rang 1 et on calcule

$$\mathrm{tr} C^{\wedge 2} = \mathrm{tr} \left(((\alpha - z \mathrm{Id})^{-1} p \wedge u)^2 \right) = q_z(p) q_z(u) - \varphi_z(p, u)^2.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \det(A_\lambda - \lambda z \mathrm{Id}) &= \lambda^{2n+2} \det(\alpha - z \mathrm{Id}) \left(1 - \lambda^{-2} (q_z(p) - (q_z(p) q_z(u) - \varphi_z(p, u)^2)) \right) \\ &= \lambda^{2n+2} \det(\alpha - z \mathrm{Id}) \left\{ 1 - \lambda^{-2} \underbrace{(\varphi_z(p, u)^2 - q_z(p) (q_z(u) - 1))}_{\Psi_z(p, u)} \right\}. \end{aligned}$$

La fraction rationnelle $\Psi_z(p, u)$ peut s'écrire

$$\Psi_z(p, u) = \frac{Q_{p,u}(z)}{\prod (\alpha_i - z)},$$

expression dans laquelle $Q_{p,u}$ désigne un polynôme de degré n dans la variable z dont les coefficients sont des fonctions de p et u .

Remarque IV.3.2. — La fraction rationnelle $\Psi_z(p, u)$ n'est autre que le discriminant du polynôme du second degré (en t)

$$q_z(u + tp) - 1 = f_z(u + tp)$$

déjà considéré au §I.4.b, de sorte qu'on a $\Psi_z(p, u) = 0$ si et seulement si la droite des $u + tp$ est *tangente* à la quadrique Q_z . Vue comme fonction de l'espace $\mathcal{D}_n$ des droites dans $\mathbf{R}$, Ψ_z est le hamiltonien du système décrivant les géodésiques de la quadrique Q_z .

On peut aussi décomposer

$$\frac{Q_{p,u}(z)}{\prod (\alpha_i - z)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{F_i(p, u)}{\alpha_i - z}$$

avec

$$F_i(p, u) = p_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{(p_i u_j - p_j u_i)^2}{\alpha_i - \alpha_j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n+1.$$

On aura remarqué que les $n+1$ fonctions F_i sont telles que $\sum F_i = 1$.

Remarque IV.3.3. — Au §I.4.b, on a utilisé les racines $z_1, \dots, z_n$ du polynôme $Q_{p,u}$ comme intégrales premières. Les coefficients du polynôme caractéristique en sont aussi, tout comme les fonctions F_i , les « intégrales d'Uhlenbeck ». De même que les z_i sont en involution, les F_i le sont. C'est aussi une conséquence de la proposition IV.4.1 et de la construction de l'équation de Lax.

La courbe spectrale. — C'est la complétée (normalisée à l'infini) C de la courbe affine d'équation

$$\lambda^2 = \Psi_z(p, u) = \frac{Q_{p,u}(z)}{\prod(\alpha_i - z)}.$$

La fonction $z : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ est un revêtement double de $\mathbf{P}^1$ ramifié en les α_i , en les racines de $Q_{p,u}$ et en ∞ (il y a un seul point au-dessus de $z = \infty$ sur C).

La courbe C est donc hyperelliptique de genre n . J'appellerai τ l'involution hyperelliptique $\tau(\lambda, z) = (-\lambda, z)$.

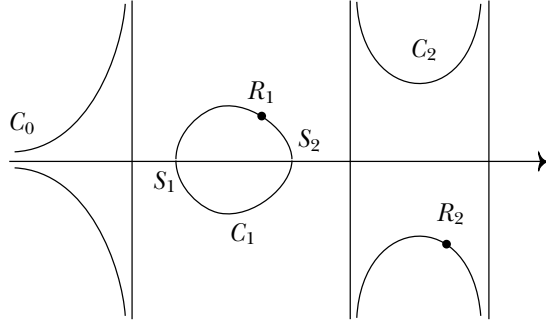


FIGURE 2. Partie réelle de la courbe spectrale

Je penserais toujours à C comme à la courbe complète, même si j'utilise l'équation affine. La courbe C est aussi une courbe réelle. Quand il y aura un risque de confusion, j'appellerai $C_{\mathbf{R}}$ sa partie réelle.

Remarque IV.3.4. — On a $Q(\alpha_i) = F_i$, donc, si $F_i(p, u) = 0$, α_i est une racine de $Q_{p,u}$ et la courbe correspondante est singulière, ou plus exactement, n'est plus une courbe de genre n .

Partie réelle de la courbe spectrale. — Voici quelques propriétés de la partie réelle de la courbe C qui seront utiles pour déterminer les variables d'action.

Proposition IV.3.5. — Quand la courbe C est lisse de genre n , sa partie réelle $C_{\mathbf{R}}$ a $n + 1$ composantes connexes $C_0, \dots, C_n$ telles que $z(C_i) \subset]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ (en convenant que $\alpha_0 = \infty$).

Remarque IV.3.6. — On a déjà remarqué au §I.4.b que le théorème de Chasles donnait la réalité des racines du polynôme $Q_{p,u}$. On a un peu plus précis ici puisqu'on place ces racines par rapport aux α_i . On peut reformuler la proposition en disant que les racines $z_1, \dots, z_n$ de p, u sont réelles et que si on ordonne $\{z_1, \dots, z_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ en $-\infty < b_1 < \dots < b_{2n+2}$, alors $z_i = b_{2i-1}$ or b_{2i} . Ce résultat est bien classique [47, 63, 7].

Rappelons (voir toujours le §I.4.b) que les racines $z_1, \dots, z_n$ de $Q_{p,u}$ déterminent n quadriques $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$ de la famille homofocale définie par les α_j , celles auxquelles

la droite (point de $\mathcal{D}_n$) considérée est tangente. La position des z_i par rapport aux α_j détermine les types des quadriques réelles Q_{z_i} . Par exemple, la configuration choisie sur la figure 2, c'est-à-dire

$$\alpha_1 < z_1 < z_2 < \alpha_2 < \alpha_3$$

correspond à deux hyperboloïdes à une nappe.

Démonstration. — Commençons par exhiber des points réels de C . Au lieu de considérer $\Psi_z(p, u)$ sous la forme $Q(z)/\prod(\alpha_i - z)$, on peut se souvenir de sa définition (voir le §I.4.b) :

$$\Psi_z(p, u) = \varphi_z(p, u)^2 - q_z(p)[q_z(u) - 1].$$

On voit immédiatement que l'équation de C est satisfaite, par exemple, pour $\lambda = \pm \varphi_z(p, u)$ avec $q_z(p) = 0$ ou avec $q_z(u) = 1$. Si $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ sont les n solutions de $q_z(p) = 0$, appelons R_i le point de C de coordonnées $(\lambda, z) = (-\varphi_{\zeta_i}(p, u), \zeta_i)$. Écrivons

$$\sum \frac{p_i^2}{\alpha_i - z} = \frac{\mathcal{R}(z)}{\prod(\alpha_i - z)} \text{ avec } \mathcal{R}(z) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 \prod_{j \neq i} (\alpha_i - z),$$

de sorte que $\mathcal{R}(\alpha_i) = p_i^2 \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)$. Ainsi $\mathcal{R}(\alpha_1) > 0$, les signes des $\mathcal{R}(\alpha_i)$ alternent et $\mathcal{R}$ a une racine réelle dans chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ (on n'a $\zeta_i = \alpha_i$ que si $p_i = 0$).

Venons-en maintenant aux racines de Q . On étudie simplement le signe de Ψ_z :

- On a $\Psi_{-\infty} > 0$, $\Psi_{+\infty} < 0$,
- le signe change en les α_i et en les (éventuelles) racines réelles de Q (et c'est tout),
- on sait que $R_i \in C_{\mathbf{R}}$ et, par définition, que $\Psi_{\zeta_i}(p, u) = \varphi_{\zeta_i}(p, u)^2 \geq 0$.

On constate donc que le signe de Ψ_z change au moins deux fois dans chaque intervalle $] -\infty, \zeta_1]$, $[\zeta_1, \zeta_2]$, $\dots$, $[\zeta_{n-1}, \zeta_n]$, donc que Q a au moins une racine dans chacun de ces intervalles. Comme son degré est n , ça suffit. $\square$

Remarque IV.3.7. — Les points (réels) $R_1, \dots, R_n$ dépendent du point (p, u) utilisé pour les définir, pas seulement du niveau des intégrales premières associé à la courbe C . On va les voir réapparaître comme forme de l'application de vecteurs propres un peu plus bas.

On utilisera plus bas les points $S_1, \dots, S_n$ de C dont les coordonnées sont respectivement $(0, z_1), \dots, (0, z_n)$. La figure 2 représente une des quatre ($= 2^n$) configurations possibles de la partie réelle de la courbe C , avec ses points R_i et S_i dans le cas où $n = 2$.

IV.3.b. Le diviseur des vecteurs propres. — On détermine maintenant l'image d'un point (p, u) par l'application de vecteurs propres, sous la forme explicite du diviseur des zéros d'une section *holomorphe* du fibré dual de celui des vecteurs propres. De façon équivalente, on construit une section méromorphe *partout non nulle* du fibré des vecteurs propres et on détermine le diviseur de ses pôles.

Concrètement, il s'agit de déterminer comment un vecteur propre de la matrice A_λ peut devenir infini. On fixe donc un point $(p, u) \in \mathcal{D}_n$. Tout vecteur de $\mathbf{R}^{n+1}$ se décompose uniquement sous la forme $\alpha p + \mu u + v$, où v est orthogonal au sous-espace engendré par p et u . Pour que le vecteur propre ne s'annule pas, on normalise par $\alpha = 1$. On cherche donc un vecteur de la forme

$$w = p + \mu(\lambda, z)u + v(\lambda, z) \text{ dans le noyau } \text{Ker}(A_\lambda - \lambda^2 z \text{Id}),$$

plus précisément, on cherche le diviseur des pôles d'une telle section de L .

Comme $\|p\| = 1$, $p + \mu u + v$ ne peut être infini que si $\mu u + v$ l'est. Cherchons donc, pour (p, u) donné, les valeurs de (λ, z) telles que $\text{Ker}(A_\lambda - \lambda^2 z \text{Id})$ contienne un vecteur orthogonal à p .

Rappelons que $A_\lambda - \lambda^2 z \text{Id}$ est de la forme $-p \otimes p + \lambda M_{\lambda, z}$ et que $p \otimes p$ annule les vecteurs orthogonaux à p . On cherche donc les (λ, z) de C tels que

$$\text{Ker } \lambda M_{\lambda, z} \cap p^\perp \neq 0$$

avec $M_{\lambda, z} = p \wedge u + \lambda(\alpha - z)$.

Étudions d'abord le cas où $\lambda = 0$. Alors $z = \infty$ ou $Q_{p, u}(z) = 0$ et la matrice $A_\lambda - \lambda^2 z \text{Id} = -p \otimes p$ a pour vecteurs propres

- le vecteur p pour la valeur propre -1
- tous les vecteurs de $p^\perp$ pour la valeur propre 0 .

La valeur propre est

$$\mu = \lambda^2 z = \frac{zQ(z)}{\prod(\alpha_i - z)} = \begin{cases} -1 & \text{si } z = \infty \\ 0 & \text{si } Q(z) = 0 \end{cases}$$

mais dans le premier cas, avec notre normalisation, le vecteur propre est égal à p et donc est borné. Au contraire, si z_i désigne une racine de Q (le point de la courbe est un des S_i), notre vecteur propre tend bien vers l'infini, étant, comme il se doit, orthogonal à p et normalisé en $p + \mu u + v$ — les limites des directions propres sont les n normales des n quadriques définies par $z_1, \dots, z_n$, ce qu'il est convenu d'appeler le repère de Chasles : un (autre) théorème de Chasles affirme que ces n normales sont orthogonales deux à deux.

Supposons enfin $\lambda \neq 0$, nous cherchons donc le noyau de la restriction de $M_{\lambda, z}$ à $p^\perp$. Explicitement,

$$\begin{aligned} M_{\lambda, z}(\mu u + v) &= \mu(p \wedge u)(u) + \lambda(\alpha - z)(\mu u + v) \\ &= \mu \|u\|^2 p + \lambda(\alpha - z)(\mu u + v). \end{aligned}$$

Si $\mu = 0$ ou $u = 0$, $M_{\lambda,z}(v) = \lambda(\alpha - z)v$ ne s'annule que si $v = 0$. On peut donc supposer que $\mu = 1$ et $u \neq 0$. Notre équation devient :

$$\|u\|^2 p + \lambda(\alpha - z)(u + v) = 0,$$

soit

$$v = -\frac{\|u\|^2}{\lambda}(\alpha - z)^{-1}p - u$$

avec $v \cdot p = 0$, soit $[(\alpha - z)^{-1}p] \cdot p = 0$, ou encore $q_z(p) = 0$, et avec $v \cdot u = 0$, soit $\lambda = -\varphi_z(p, u)$. On a ainsi retrouvé les points R_i qui nous ont servi à décrire la partie réelle de C et démontré :

Proposition IV.3.8. — *L'image $\varphi_C(p, u)$ est la classe du diviseur*

$$R_1 + \cdots + R_n + S_1 + \cdots + S_n$$

dans $\text{Pic}^{2n} C$. □

Le diviseur $S_1 + \cdots + S_n$ ne dépend pas de (p, u) . On peut se contenter de $R_1 + \cdots + R_n$ et de sa classe dans $\text{Pic}^n(C)$. Mais nous savons que les points R_i sont réels et répartis sur les composantes $C_1, \dots, C_n$ de $C_{\mathbf{R}}$.

Proposition IV.3.9. — *L'application de vecteurs propres*

$$\varphi_C : \mathcal{T}_C \longrightarrow \text{Pic}^n(C)$$

prend ses valeurs dans le tore réel $C_1 \times \cdots \times C_n \subset \text{Pic}^n(C)$.

Démonstration. — Il reste à démontrer que le tore réel $C_1 \times \cdots \times C_n$ s'injecte bien dans $\text{Pic}^n(C)$. On le voit d'abord comme sous-espace du produit cartésien $C_{\mathbf{R}}^n$ et même comme sous-espace du produit symétrique $C_{\mathbf{R}}^{(n)} = C_{\mathbf{R}}^n / \mathfrak{S}_n$ en utilisant l'ordre de $\mathbf{R}$. Ce produit symétrique, quant à lui, est une partie du produit symétrique $C^{(n)}$ de la courbe complexe, lequel s'envoie enfin dans le groupe de Picard via la relation d'équivalence linéaire. En bref, on a

$$C_1 \times \cdots \times C_n \subset C_{\mathbf{R}}^{(n)} \subset C^{(n)} \xrightarrow{u} \text{Pic}^n(C)$$

où seule la dernière flèche n'est pas injective. Sa restriction à $C_1 \times \cdots \times C_n$ l'est, cependant, grâce au lemme suivant :

Lemme IV.3.10. — *Soit V l'ouvert de $C^{(n)}$ défini par*

$$V = \{P_1 + \cdots + P_n \mid P_i \neq \tau(P_j) \text{ et } z(P_i) \neq \infty\}.$$

La restriction à V de l'application u est injective.

C'est une application directe du théorème de Riemann-Roch, on en trouvera la démonstration plus bas (§IV.3.e). Il est clair que $C_1 \times \cdots \times C_n$ est contenu dans V : les C_i sont stables par l'involution hyperelliptique τ et la seule composante de $C_{\mathbf{R}}$ qui contient des points avec z infini est la composante C_0 qui n'apparaît pas ici. □

À partir de la proposition IV.3.9, on pourra considérer l'application de vecteurs propres φ_C comme à valeurs dans $C_1 \times \cdots \times C_n$, et en particulier, oublier la jacobienne et la courbe complexe.

IV.3.c. Valeurs régulières. — La famille des intégrales premières $F_1, \dots, F_{n+1}$ forme une application

$$F : \mathcal{D}_n \longrightarrow E$$

où E est l'hyperplan d'équation $\sum x_i = 1$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Voici une jolie façon d'appliquer le théorème IV.2.5.

Théorème IV.3.11. — *Un point de E est une valeur régulière de F si et seulement si la courbe spectrale correspondante est lisse de genre n .*

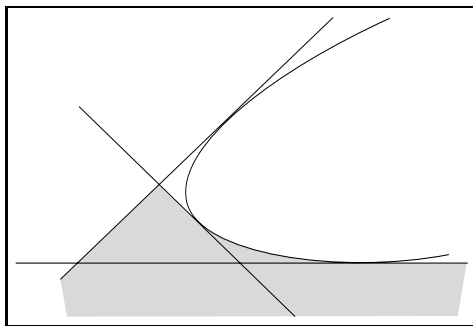


FIGURE 3. Valeurs régulières pour $n = 2$

Remarque IV.3.12. — S'il est pénible de déterminer pour quelles valeurs de (p, u) l'application F est de rang n , il est très facile de décider quand la courbe C est lisse de genre n : il faut et il suffit pour cela que les points de ramification de z soient distincts, c'est-à-dire que $Q_{p,u}$ ait n racines distinctes et distinctes des α_i .

Les valeurs critiques de l'application F sont donc situées sur le discriminant des polynômes $Q_{p,u}$ et sur les hyperplans $F_i = 0$, qui lui sont tangents. La figure 3 représente ce lieu critique dans le cas où $n = 2$, c'est-à-dire dans le cas des quadriques de $\mathbf{R}^3$. La partie grisée est formée des valeurs qui sont effectivement atteintes, celles qui correspondent à des z_i satisfaisant les conditions requises par la proposition IV.3.5 ou la remarque IV.3.6.

Remarque IV.3.13. — Les composantes connexes de l'ensemble des valeurs régulières sont contractiles, comme je l'avais signalé dans l'exemple II.2.8.

La démonstration du théorème IV.3.11 est fondée sur le lemme suivant, qui décrit l'application tangente à l'application de vecteurs propres φ_C .

Lemme IV.3.14. — *Les images par l'application tangente à φ_C des champs hamiltoniens associés aux fonctions $F_1, \dots, F_n$ sont des vecteurs indépendants dans l'espace tangent $H^1(C; \mathcal{O}_C)$ à $\text{Pic}(C)$.*

Je démontrerai ce lemme à la fin de ce chapitre (§IV.3.e). La démonstration utilise le théorème de linéarisation IV.2.5, via le lemme :

Lemme IV.3.15. — *La matrice B_λ satisfait à $B_\lambda = (\lambda^3 A_\lambda^{-1})_+$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que nous sommes dans un espace de matrices d'ordre $n+1$ et que A_λ^{-1} est bien un polynôme en A_λ . La démonstration est un simple calcul :

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda^2(\alpha + (p \wedge u)\lambda^{-1} - (p \otimes p)\lambda^{-2}) \\ &= \lambda^2 \underbrace{\alpha(\text{Id} + \alpha^{-1}(p \wedge u)\lambda^{-1} - \alpha^{-1}(p \otimes p)\lambda^{-2})}_D. \end{aligned}$$

On a donc $A_\lambda^{-1} = \lambda^{-2} D^{-1} \alpha^{-1}$,

$$D^{-1} = \text{Id} - \alpha^{-1}(p \wedge u)\lambda^{-1} \mod \lambda^{-2}$$

et enfin :

$$(\lambda^3 A_\lambda^{-1})_+ = \lambda \alpha^{-1} - \alpha^{-1}(p \wedge u) \alpha^{-1} = \lambda \alpha^{-1} + \Gamma.$$

□

Démonstration du théorème IV.3.11. — L'application $\varphi_C : \mathcal{T}_C \rightarrow \text{Pic}(C)$ est bien définie dès que C est lisse. Si les n vecteurs ont des images indépendantes, c'est qu'eux-mêmes étaient indépendants et la courbe C correspond à une valeur régulière.

On regarde maintenant chaque composante du discriminant, pour établir la réciproque :

- Les hyperplans $z = \alpha_i$ ou $F_i = 0$ sont critiques puisqu'images des (p, u) avec $p_i = 0$ et $u_i = 0$ qui annulent dF_i .
- Considérons les points du discriminant de Q , c'est à dire les niveaux $F_1, \dots, F_n$ tels que Q ait une racine double z . Ce niveau contient alors des tangentes communes à deux quadriques... confondues. Pour des raisons de degré, il s'agit de droites contenues dans Q_z . Une telle droite est bien sûr un point fixe du flot de Ψ_z et ainsi le niveau est critique.

□

Notons une autre application du lemme IV.3.14, qui sera utile au §IV.3.d pour déterminer les variables d'action.

Corollaire IV.3.16. — *L'application $\varphi_C : \mathcal{T}_C \rightarrow C_1 \times \dots \times C_n$ est un revêtement.*

Démonstration. — L'application tangente est partout injective et les deux variétés sont compactes. □

Remarque IV.3.17. — Comme $C_1 \times \cdots \times C_n$ est un tore, ce corollaire nous garantit que $\mathcal{T}_C$ est une réunion de tores... ce qu'Arnold et Liouville nous avaient déjà dit depuis longtemps. Il n'est d'aucune aide dans le décompte de ces tores (le revêtement est de degré 2^{n+1} et $\mathcal{T}_C$ pourrait avoir n'importe quel nombre de composantes entre une et 2^{n+1}). On peut quand même utiliser la géométrie algébrique pour déterminer le nombre de tores de Liouville [7]. C'est une puissance de 2, l'exposant est le nombre de types de quadriques réelles qui apparaissent deux fois dans la liste $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$. Par exemple, pour $n = 2$ (voir la figure 3), il y a toujours deux tores de Liouville, sauf pour les valeurs situées dans la petite zone qui a une frontière sur le discriminant, qui donnent quatre tores de Liouville (voir l'exercice IV.15).

Exercice IV.15.

IV.3.d. Variables d'action. — On s'intéresse maintenant à la question des variables d'action. On ne reste donc plus cantonné dans un niveau $\mathcal{T}_C$, ni sur une courbe C , ni même dans une jacobienne, mais on revient plus globalement à la variété symplectique $\mathcal{D}_n$ ou au moins à un voisinage connexe d'un tore de Liouville. En fait, comme promis en II.2.8, on va construire des variables d'action « aussi globales que possible » c'est-à-dire globalement au-dessus de chaque composante de l'ensemble des valeurs régulières des intégrales premières.

On fixe donc une de ces composantes Δ , c'est-à-dire la position des z_i par rapport aux α_j ou les types des quadriques réelles $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$ ou encore celui des parties réelles des courbes spectrales. On considère la famille $\mathcal{C}$ des courbes spectrales, une complétion convenable de

$$\left\{ (F, \lambda, z) \in \Delta \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \lambda^2 = \sum \frac{F_j}{\alpha_j - z} \right\}$$

au-dessus de Δ : les points à l'infini sont les mêmes sur toutes les courbes, il n'y a pas de difficulté à compléter « en famille ». On utilisera aussi le produit fibré $\mathcal{C}_n$, famille⁽⁷⁾ des $C_{\mathbf{R}}^n$ au-dessus de Δ .

Comme il se doit (§II.2.b), on construit les variables action en intégrant une primitive de la forme symplectique sur des lacets formant une base du groupe fondamental des tores de Liouville. On a déjà de quoi fabriquer une telle base : à un revêtement près, un tore de Liouville est un produit $C_1 \times \cdots \times C_n$. On a aussi une primitive (globale) de la forme symplectique sur la variété symplectique $\mathcal{D}_n$ dans laquelle vivent les tores de Liouville. Celle-ci est en effet isomorphe à TS^n . La forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} u_i dp_i$$

est une primitive de la forme symplectique.

⁽⁷⁾Une version « spécial bébé » de la jacobienne relative, qui suffira à nos besoins grâce à la proposition IV.3.9.

Il reste un peu de travail : la base du groupe fondamental est « du côté de la jacobienne » alors que la 1-forme appartient au « côté Liouville ».

On commence donc par construire une forme sur $\mathcal{C}_n$. On utilise la forme λdz sur chacune des courbes C , qui définit par la même formule une forme sur $\mathcal{C}$, avec laquelle on fabrique enfin une forme

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i dz_i \text{ sur } \mathcal{C}_n.$$

Remarque IV.3.18. — La forme λdz est une forme méromorphe sur la courbe complexe C . Elle a un pôle double au point $z = \infty$ de C , qui n'est sur aucune des composantes $C_1, \dots, C_n$ de $C_{\mathbf{R}}$ qui nous intéressent (un exercice facile, l'exercice B.12).

On envoie $F^{-1}(\Delta)$ dans $\mathcal{C}_n$ par l'application de vecteurs propres

$$\varphi : (p, u) \longmapsto (F(p, u), R_1, \dots, R_n)$$

et on démontre (la démonstration est un peu calculatoire et reportée au §IV.3.e) :

Lemme IV.3.19. — La forme σ satisfait

$$\varphi^* \sigma = 2(-1)^{n-1} \alpha.$$

Désignons enfin, pour exprimer la conclusion, par $C_1(F), \dots, C_n(F)$ les n composantes $C_1, \dots, C_n$ de la partie réelle de la courbe correspondant à F .

Théorème IV.3.20. — Soit U une composante connexe de l'image inverse d'une composante connexe des valeurs régulières. Il existe des nombres entiers non nuls $m_1, \dots, m_n$ tels que

$$U \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$(p, u) \longmapsto \left(\frac{m_1}{2} \int_{C_1(F)} \sigma, \dots, \frac{m_n}{2} \int_{C_n(F)} \sigma \right)$$

soient des variables d'action.

Les m_i sont les entiers minimaux tels qu'il existe une base $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ du groupe fondamental d'un tore de Liouville contenu dans U telle que l'image de γ_i par l'application φ soit m_i fois le lacet C_i . Leur existence est assurée par le corollaire IV.3.16. $\square$

IV.3.e. Démonstrations de trois lemmes

Démonstration du lemme IV.3.10. — Fixons des points $P_1, \dots, P_n$ de C tels que $P_1 + \dots + P_n$ soit dans V . Le lemme affirme que les seules fonctions méromorphes sur la courbe C qui ont, au pire, des pôles simples en $P_1, \dots, P_n$ sont les constantes. C'est une application directe du théorème de Riemann-Roch. Celui-ci nous dit que la dimension de l'espace de ces fonctions est

$$\deg(P_1 + \dots + P_n) - n + 1 + i = 1 + i$$

où i est la dimension de l'espace des formes holomorphes sur C qui ont un zéro en chaque P_k . Comme la courbe C est hyperelliptique de genre n , nous connaissons explicitement toutes les formes holomorphes sur C . Ce sont les

$$\frac{g(z)}{y} dz \text{ pour } g \text{ un polynôme de degré } \leq n-1.$$

Si $\ell = \deg g$, le diviseur de la forme est

$$\left(\frac{g(z)}{y} dz \right) = Z_1 + \tau Z_1 + \cdots + Z_\ell + \tau Z_\ell + (n - \ell - 1)\infty$$

où on a noté ∞ le diviseur de degré 2 des pôles de z et Z_i un point de C situé au-dessus d'une racine du polynôme g .

Maintenant, pour avoir

$$Z_1 + \tau Z_1 + \cdots + Z_\ell + \tau Z_\ell + (n - \ell - 1)\infty \geq P_1 + \cdots + P_n,$$

il faut que $P_i = \tau(P_j)$ ou que $z(P_i) = \infty$ au moins une fois. Donc, si $P_1 + \cdots + P_n$ est dans V , on a $i = 0$. $\square$

Démonstration du lemme IV.3.14. — Je vais montrer que les champs hamiltoniens des fonctions $\Psi_{z_1}, \dots, \Psi_{z_n}$ ont des images indépendantes. Chaque Ψ_{z_i} étant par définition une combinaison linéaire de $F_1, \dots, F_n$ (remplacer F_{n+1} par $1 - \sum F_i$), les images des champs hamiltoniens de $F_1, \dots, F_n$ engendreront aussi un sous-espace de dimension n .

Considérons l'image du champ hamiltonien de Ψ_0 , celui de Ψ_z s'en déduisant en remplaçant partout α_i par $\alpha_i - z$. Du lemme IV.3.15 et du théorème IV.2.5, on déduit que le fibré de vecteurs propres associé est construit par un cocycle $\exp(t\beta)_c$ pour

$$\beta(\lambda, \mu) = \lambda^3 \mu^{-1} = \lambda^3 \lambda^{-2} z^{-1}$$

vu comme cocycle du recouvrement de C par les deux ouverts U_0 (où $\lambda \neq \infty$) et U_∞ (où $\lambda \neq 0$) représentant un élément de $H^1(C; \mathcal{O}_C)$. Ce cocycle représente donc l'image du champ hamiltonien de Ψ_0 par l'application tangente à l'application de vecteurs propres.

En remplaçant partout α_i par $\alpha_i - z_j$, on trouve que les images des champs hamiltoniens associés à $\Psi_{z_1}, \dots, \Psi_{z_n}$ sont les classes des cocycles

$$\lambda (z - z_1)^{-1}, \dots, \lambda (z - z_n)^{-1}$$

dans $H^1(C; \mathcal{O}_C)$. La seule chose à faire pour démontrer le lemme IV.3.14 est de vérifier qu'ils sont indépendants. C'est un calcul de résidu : on va choisir une base $\eta_1, \dots, \eta_n$ de l'espace vectoriel $H^0(C; \Omega_C^1)$ des formes holomorphes telle que la matrice des

$$\text{rés}_{\lambda=0} \left(\frac{\lambda \eta_i}{z - z_j} \right)$$

soit (diagonale et) inversible. On aura ainsi déterminé une application linéaire injective

$$H^1(C; \mathcal{O}_C) \longrightarrow H^0(C; \Omega_C^1)^*$$

envoyant les classes des cocycles $\lambda(z - z_j)^{-1}$ sur une base de $H^0(C; \Omega_C^1)^*$, démontrant ainsi l'indépendance de ces cocycles.

En écrivant l'équation de C sous la forme

$$[\lambda \prod (\alpha_s - z)]^2 = Q(z) \prod (\alpha_s - z),$$

c'est-à-dire $y^2 = P(z)$ pour un polynôme P de degré $2n + 1$, on voit que les formes holomorphes sur C sont toutes les formes

$$\frac{f(z) dz}{\lambda \prod (\alpha_j - z)}$$

où f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Appelons P_i le polynôme

$$P_i(z) = \prod_{j \neq i} (z - z_j) = \frac{Q(z)}{z - z_i}.$$

Comme les z_i sont distincts, les P_i constituent une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et les formes

$$\eta_i = \frac{P_i(z) dz}{\lambda \prod (\alpha_s - z)} \quad 1 \leq i \leq n$$

une base de $H^0(C; \Omega_C^1)$. Considérons maintenant les formes méromorphes

$$\gamma_{i,j} = \frac{\lambda \eta_i}{z - z_j} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

La forme $\gamma_{i,j}$ n'a de pôle en un point S_k que si $i = j = k$ et n'a pas de pôle en ∞ . On a donc

$$\text{rés}_{\lambda=0}(\gamma_{i,j}) = \delta_{i,j} \text{rés}_{S_i} \frac{P_i(z) dz}{(z - z_i) \prod (\alpha_s - z)}$$

de sorte que la matrice est diagonale. Au voisinage de S_i , λ est une coordonnée sur C et $z = z_i + A_i \lambda^2 + o(\lambda^2)$, d'où l'on déduit la valeur du résidu :

$$\text{rés}_{S_i} \frac{P_i(z) dz}{(z - z_i) \prod (\alpha_s - z)} = 2 \frac{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}{\prod_s (\alpha_s - z_i)}$$

donc les termes diagonaux de la matrice ne sont pas nuls, ce qu'on voulait démontrer. $\square$

Démonstration du lemme IV.3.19. — Il me semble que ce résultat devrait être tautologique, c'est pourquoi j'ai un peu honte de présenter ici une démonstration complètement calculatoire. On évalue directement $\varphi^* \sigma$:

$$\varphi^* \sigma = - \sum_{i=1}^n \varphi_{\zeta_i}^*(p, u) d\zeta_i.$$

Écrivons

$$\mathcal{Q}(z, p) = q_z(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{p_j^2}{\alpha_j - z} = \frac{\mathcal{R}(z)}{\prod(\alpha_j - z)}.$$

On différentie cette relation et on évalue en une des racines ζ (un des ζ_i) de $\mathcal{R}$:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z}(\zeta, p) d\zeta + 2\varphi_\zeta(p, dp) = 0$$

de sorte que

$$d\zeta = -\frac{2\varphi_\zeta(p, dp)}{\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z}(\zeta, p)}$$

et que

$$-\varphi_\zeta(p, u) d\zeta = 2 \frac{\varphi_\zeta(p, u) \varphi_\zeta(p, dp)}{\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z}(\zeta, p)}.$$

D'autre part, $\mathcal{R}(z) = \prod(\zeta_k - z)$, donc

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z}(\zeta_i, p) = \frac{\mathcal{R}'(\zeta_i)}{\prod(\alpha_j - \zeta_i)} = -\frac{\prod_{k \neq i}(\zeta_k - \zeta_i)}{\prod_j(\alpha_j - \zeta_i)}.$$

On obtient

$$\varphi^* \sigma = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{\zeta_i}(p, u) \varphi_{\zeta_i}(p, dp)}{\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z}(\zeta_i, p)} = 2 \sum_{j=1}^{n+1} A_j p_j dp_j$$

avec

$$A_j = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{\zeta_i}(p, u)}{(\alpha_j - \zeta_i) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z}(\zeta_i, p)}.$$

On évalue donc A_j . Comme tous les j jouent le même rôle et qu'il y a beaucoup d'indices, je me limite à A_1 pour éviter les erreurs :

$$\begin{aligned} A_1 &= - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{\zeta_i}(p, u)}{\prod_{k \neq i}(\zeta_k - \zeta_i)} \frac{\prod_{\ell \neq 1}(\alpha_\ell - \zeta_i)}{\alpha_1 - \zeta_i} \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{\ell \neq 1}(\alpha_\ell - \zeta_i)}{\prod_{k \neq i}(\zeta_k - \zeta_i)} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{p_j u_j}{\alpha_j - \zeta_i} \\ &= -p_1 u_1 \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{\ell \neq 1}(\alpha_\ell - \zeta_i)}{(\alpha_1 - \zeta_i) \prod_{k \neq i}(\zeta_k - \zeta_i)} - \sum_{j=2}^{n+1} p_j u_j \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{\ell \neq 1, j}(\alpha_\ell - \zeta_i)}{\prod_{k \neq i}(\zeta_k - \zeta_i)} \\ &= -B p_1 u_1 - \sum_{j=2}^{n+1} C_j p_j u_j \end{aligned}$$

... on calcule, d'abord les C_j . Pour ce faire, on développe la fraction rationnelle

$$D(Z) = \frac{\prod_{\ell \neq 1, j}(\alpha_\ell - Z)}{\prod_{k \neq 1}(\zeta_k - Z)}$$

en éléments simples (le terme $i = 1$ dans la somme définissant C_j est $D(\zeta_1)$) :

$$D(Z) = 1 - \sum_{i=2}^n \frac{\prod_{\ell \neq 1, j} (\alpha_\ell - \zeta_i)}{(Z - \zeta_i) \prod_{k \neq 1, i} (\zeta_k - \zeta_i)}.$$

En remplaçant Z par ζ_1 dans cette égalité, on obtient l'égalité $C_j = 1$. Calculons ensuite le terme B :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{\ell \neq 1} (\alpha_\ell - \zeta_i)}{(\alpha_1 - \zeta_i) \prod_{k \neq i} (\zeta_k - \zeta_i)} \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\alpha_1 - \zeta_i)} \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{\ell \neq i} (\alpha_1 - \zeta_\ell) \prod_{\ell \neq 1} (\alpha_\ell - \zeta_i)}{\prod_{k \neq i} (\zeta_k - \zeta_i)} \\ &= \frac{1}{\mathcal{R}(\alpha_1)} E(\alpha_1) \end{aligned}$$

où $E(Z)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui vaut $(-1)^{n-1} \prod_{\ell \neq 1} (\alpha_\ell - \zeta_i)$ en ζ_i de sorte que

$$E(Z) = (-1)^{n-1} \prod_{s \neq 1} (\alpha_s - Z) - \prod_{i=1}^n (\alpha_1 - \zeta_i).$$

On en déduit l'égalité

$$B = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{s \neq 1} (\alpha_s - \alpha_1)}{\mathcal{R}(\alpha_1)} - 1.$$

Comme on a aussi $\mathcal{R}(\alpha_1) = p_1^2 \prod_{k \neq 1} (\alpha_k - \alpha_1)$, B vaut tout simplement $-1 + (-1)^{n-1} / p_1^2$ et finalement

$$\begin{aligned} A_1 &= -p_1 u_1 \left(\frac{(-1)^{n-1}}{p_1^2} - 1 \right) - \sum_{j=2}^{n+1} p_j u_j \\ &= (-1)^{n-1} \frac{u_1}{p_1} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que les vecteurs p et u sont orthogonaux. De même, $A_j = (-1)^{n-1} u_j / p_j$ et, enfin :

$$\varphi^* \sigma = 2 \sum A_j p_j dp_j = 2(-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n+1} u_j dp_j,$$

ce que nous voulions démontrer. $\square$

IV.4. Appendice : comment on construit des équations de Lax (un aperçu)

Une équation de Lax est une équation différentielle dans un espace de matrices. On a dit qu'elle a beaucoup d'intégrales premières. Pour la comprendre comme un système hamiltonien complètement intégrable, il faut aussi un minimum de données symplectiques. En fait, il y a, sur les espaces de matrices, tout ce qu'il faut pour faire des systèmes hamiltoniens : les (duaux des) algèbres de Lie ont des crochets de Poisson. C'est ce que je commence par rappeler ici.

IV.4.a. Structure de Poisson sur le dual d'une algèbre de Lie. — Je décris ici rapidement la structure de Kirillov-Kostant-Souriau (voir [45, 49, 70]) sur le dual d'une algèbre de Lie. Pour des détails, on pourra consulter le livre de Kirillov [45] et les livres de géométrie symplectique déjà cités, notamment [53] et [6].

Le dual d'une algèbre de Lie. — Comme nous le savons, un espace vectoriel (réel ou complexe) $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie s'il est muni d'un crochet bilinéaire anti-symétrique

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

satisfaisant l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Considérons maintenant l'espace vectoriel dual $\mathfrak{g}^*$. Remarquons que le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ ne définit aucune structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}^*$. Par contre, il définit un *crochet de Poisson* (découvert et étudié par Kirillov, Kostant et Souriau). Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ est une fonction et $\xi \in \mathfrak{g}^*$ un point⁽⁸⁾, alors $df(\xi)$ est une forme linéaire sur $T_\xi \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$, qu'on peut considérer comme un élément de $\mathfrak{g}$ par bidualité. Pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, on définit

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df(\xi), dg(\xi)] \rangle,$$

écriture dans laquelle $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la dualité. On a ainsi un crochet de Poisson : $\{ \cdot, \cdot \}$ est évidemment anti-symétrique, satisfait l'identité de Jacobi comme $[\cdot, \cdot]$ et satisfait aussi à l'identité de Leibniz parce qu'il ne fait intervenir que les différentielles des fonctions.

Il y a un crochet de Poisson, mais aucune raison pour que $\mathfrak{g}^*$ soit une variété symplectique. L'exemple donné dans l'exercice IV.3 est une variété de dimension impaire. Néanmoins, la « variété de Poisson » $\mathfrak{g}^*$ est, comme ses semblables, feuilletée par des variétés symplectiques (voir [77] pour la géométrie des variétés de Poisson). Ici les feuilles sont les orbites coadjointes. Voir l'exercice IV.19.

Comme sur une variété symplectique, on peut définir des champs de vecteurs hamiltoniens pour les fonctions sur $\mathfrak{g}^*$: le champ X_f est celui qui dérive les fonctions selon la règle

$$X_f \cdot g = \{f, g\}.$$

Représentations adjointe et coadjointe. — Rappelons enfin les notations ad (adjointe) pour l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \text{End } \mathfrak{g} \\ X &\longmapsto (Y \mapsto [Y, X]) \end{aligned}$$

⁽⁸⁾J'utilise systématiquement des lettres latines majuscules dans $\mathfrak{g}$, des lettres grecques dans $\mathfrak{g}^*$.

et ad^* (coadjointe) pour la transposée

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \text{End } \mathfrak{g}^*$$

définie par

$$\langle \text{ad}_X^* \xi, Y \rangle = \langle \xi, \text{ad}_{-X} Y \rangle = \langle \xi, [X, Y] \rangle.$$

Exercices IV.13, IV.16, IV.17, IV.18, IV.19, IV.20, IV.21.

IV.4.b. Matrices R et équations de Lax

Matrices R classiques. — Je suis ici l'article [69] de Semenov-Tian-Shanski. Il nous apprend qu'une matrice R classique est une application linéaire $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie) qui satisfait une équation « de Yang-Baxter ».

Toute application linéaire R permet de définir un nouveau crochet sur $\mathfrak{g}$:

$$[X, Y]_R = [RX, Y] + [X, RY],$$

qui est anti-symétrique. L'équation de Yang-Baxter, qu'il est inutile d'écrire ici, exprime simplement la condition que ce nouveau crochet satisfait à l'identité de Jacobi. Alors $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_R)$ est une algèbre de Lie. En particulier, $\mathfrak{g}^*$ est ainsi muni d'une deuxième structure de Poisson, que l'on note, bien sûr, $\{\cdot, \cdot\}_R$.

Toujours en lisant [69], on apprend que la première utilité des matrices R est de construire des systèmes intégrables.

Proposition IV.4.1

(a) Si φ est une fonction invariante sur $\mathfrak{g}^*$, on a

$$X_\varphi^R(\xi) = \text{ad}_{Rd\varphi(\xi)}^* \cdot \xi.$$

(b) Si φ et ψ sont invariantes, on a

$$\{\varphi, \psi\} = \{\varphi, \psi\}_R = 0.$$

Dans cet énoncé, X_φ^R est le champ hamiltonien associé à φ par le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_R$, de sorte que l'assertion (a) décrit un système hamiltonien et l'assertion (b) en donne une liste d'intégrales premières.

Démonstration. — Les fonctions invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ dont il est question ici sont les fonctions invariantes par l'opération coadjointe (exercice IV.16) ou, de façon équivalente, celles qui satisfont à

$$\langle \xi, [d\varphi(\xi), Y] \rangle = 0 \text{ pour tous } \xi \in \mathfrak{g}^*, Y \in \mathfrak{g}.$$

Mais alors, on a

$$\begin{aligned} \{\varphi, \psi\}_R(\xi) &= \langle \xi, [Rd\varphi(\xi), d\psi(\xi)] \rangle + \langle \xi, [d\varphi(\xi), Rd\psi(\xi)] \rangle \\ &= \langle \xi, [Rd\varphi(\xi), d\psi(\xi)] \rangle \end{aligned}$$

pour toute fonction ψ , ce qui donne la première assertion. De plus, si ψ aussi est invariante, le terme restant est nul, d'où la deuxième assertion. $\square$

Si $\mathfrak{g}$ est munie d'une forme bilinéaire symétrique invariante et non dégénérée, on peut utiliser celle-ci pour identifier $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ et de même ad et ad^* . Ainsi le système hamiltonien associé à la fonction invariante φ s'écrit

$$\frac{d}{dt}A = [A, R\nabla_A\varphi]$$

où ∇ désigne le gradient. C'est bien une équation de Lax.

La proposition IV.4.1 contient une liste d'intégrales premières en involution. Pour avoir un système intégrable, il faut encore être sur une variété symplectique de la bonne dimension, c'est-à-dire assez petite (le nombre de fonctions indépendantes données par la proposition est limité par le rang de l'algèbre de Lie) $\mathfrak{g}$.

Matrices R en dimension infinie et courbes algébriques. — Bien qu'on ait utilisé abondamment dualité et, plus grave, bidualité, une classe importante d'applications de la philosophie des matrices R se situe dans le cadre d'algèbres de Lie de dimension infinie de la forme $\mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}]$ où $\mathfrak{g}$ est une (brave) algèbre de Lie de matrices, λ est une variable indépendante et R est l'endomorphisme associé à la décomposition

$$\mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}] = \mathfrak{g}[\lambda] + \lambda^{-1}\mathfrak{g}[\lambda^{-1}]$$

par $R(P) = P_+ - P_-$, où P_+ et P_- sont respectivement les parties polynomiale et de Laurent de P .

Dans ce cadre, on obtient des équations de Lax « avec paramètre spectral » : les coefficients des matrices sont des polynômes en λ, λ^{-1} .

Les algèbres $\mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}]$ (et leur différentes complétions) sont dites « algèbres de lacets ». Quand $\mathfrak{g}$ est munie d'une involution σ , on peut aussi construire une sous-algèbre de $\mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}]$, l'« algèbre de lacets tordue » :

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma) = \{A \in \mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}] \mid A(-\lambda) = \sigma(A(\lambda))\}.$$

L'algèbre $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$ est, elle aussi, munie d'une matrice R naturelle, la restriction de celle associée à la décomposition en puissances négatives et positives de λ .

Remarque IV.4.2. — Il est commode, pour écrire la « matrice R » dans ce cas, d'utiliser des polynômes *de Laurent* en λ . Rien n'empêche par la suite de multiplier la matrice A_λ par une puissance convenable de λ pour obtenir de vrais polynômes en λ comme au §IV.1.b.

Les fonctions invariantes sur $\mathfrak{g}$ sont en involution... et donnent de fort nombreuses intégrales premières, puisque ce sont des polynômes en λ dont tous les coefficients sont des quantités conservées. Comme on l'a dit au §IV.1.b, elles donnent mieux :

si une matrice $A_\lambda(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{d}{dt}A_\lambda(t) = [A_\lambda(t), B_\lambda(t)],$$

ses valeurs propres ne dépendent pas du temps et son polynôme caractéristique définit une courbe algébrique (la courbe spectrale)

$$\{(\lambda, \mu) \mid \det(A_\lambda - \mu \text{Id}) = 0\}.$$

Remarque IV.4.3. — Les matrices B_λ obtenues par cette méthode sont précisément du type étudié au § IV.2.e, les résultats de ce § s'appliqueront donc : les solutions des systèmes hamiltoniens ainsi construits sont linéarisés sur des jacobiniennes.

Exercice IV.22.

IV.4.c. Construction d'exemples. — La méthode des matrices R permet, on l'a vu, de construire de nombreux systèmes intégrables écrits sous forme d'équations de Lax. Inversement, étant donné un système intégrable, il n'est pas toujours évident de le mettre sous forme de Lax. C'est très facile pour les exemples simples du pendule sphérique et de la toupie symétrique (les paires de Lax exhibées au § IV.1.b ne sont pas difficiles à inventer). Le cas des géodésiques des quadriques est moins évident (il est dû à Moser [61]). Celui de la toupie de Kowalevski par exemple, a résisté longtemps. Je vais indiquer très rapidement ici une construction générale qui permet d'obtenir des paires de Lax pour tous ces systèmes. Un de ses plus beaux succès (et sans doute sa raison d'être) a été le cas de Kowalevski (voir [16]). Je ne fais que résumer ici la partie *ad hoc* de l'article [67], auquel je renvoie pour les détails et de nombreux exemples. Il s'agit de ce que Reyman et Semenov appellent des « toupies multidimensionnelles ».

Je vais aller assez vite, c'est un § qu'on peut sauter en première lecture... il est en effet très facile de vérifier que les équations de Lax obtenues sont bien équivalentes aux systèmes qu'elles sont supposées représenter.

On considère un groupe G de matrices et un sous-groupe compact K , le sous-groupe des points fixes d'une involution σ . Les exemples seront simplement

- $G = \text{SL}(n; \mathbf{R})$, $K = \text{SO}(n)$,
- $G = \text{SO}(p, q)$, $K = \text{SO}(p) \times \text{SO}(q)$,

je ne fais donc pas de théorie très générale. La différentielle de σ en 1 est aussi une involution (linéaire), encore notée σ , de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On décompose l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K (et l'espace vectoriel des points fixes de σ) et $\mathfrak{p}$ le sous-espace propre de σ pour la valeur propre -1 .

Exemples IV.4.4

- Si $G = \mathrm{GL}(n; \mathbf{R})$ et $\sigma(A) = ({}^t A)^{-1}$, de sorte que $K = \mathrm{SO}(n)$, alors $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie des matrices, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$ l'algèbre de Lie des matrices anti-symétriques et $\mathfrak{p}$ est l'espace vectoriel des matrices symétriques.
- Quand $G = \mathrm{SO}(p, q)$ avec $\sigma(A) = ({}^t A)^{-1}$ encore, $K = \mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)$, alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p, q)$, l'espace des matrices $(p+q) \times (p+q)$ telles que ${}^t X = -JXJ$ (J désignant la matrice de la forme quadratique standard de signature (p, q)). L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est $\mathfrak{so}(p) \times \mathfrak{so}(q)$ et $\mathfrak{p}$ est l'espace vectoriel des matrices $\begin{pmatrix} 0 & s \\ {}^t s & 0 \end{pmatrix}$.

On identifie maintenant $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ par la forme bilinéaire invariante, supposée non dégénérée

$$(X, Y) \longmapsto -\mathrm{tr}(XY),$$

qui permet aussi d'identifier $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}^*$, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^*$.

On fixe une matrice $a \in \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$. On considère l'ensemble de toutes les matrices de la forme

$$a\lambda + \ell + s\lambda^{-1} \text{ avec } \ell \in \mathfrak{k}^* \text{ et } s \in \mathfrak{p}^*.$$

C'est un sous-espace (affine) du dual $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)^*$ de l'algèbre de lacets tordue, il est muni de la structure de Poisson de dual de $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Le groupe K opère sur $\mathfrak{k}^*$ et sur $\mathfrak{p}^*$ (exercice IV.18). Soit V une variété munie d'une opération de K et d'une application équivariante $j : V \rightarrow \mathfrak{p}^*$. On prolonge l'opération de K sur V en une opération hamiltonienne sur T^*V avec application moment

$$\mu : T^*V \rightarrow \mathfrak{k}^*$$

(exercice IV.20). On en déduit une application

$$\begin{aligned} T^*V &\longrightarrow \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{p}^* \longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)^* \\ (v, \varphi) &\longmapsto (\mu(v, \varphi), j(v)) \longmapsto a\lambda + \mu(v, \varphi) + j(v)\lambda^{-1} \end{aligned}$$

qui préserve les crochets de Poisson (exercice IV.21). De la proposition IV.4.1, on déduit :

Proposition IV.4.5. — *Les fonctions invariantes de A_λ sont en involution pour le crochet de Poisson de T^*K (resp. de T^*V).* $\square$

Il faut encore sélectionner un hamiltonien. On fixe une fonction invariante φ sur $\mathfrak{g}$. À la fonction φ est associé un hamiltonien (complètement intégrable) sur le fibré cotangent T^*K par

$$H(k, \varkappa) = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}(\mathcal{J}(\varkappa)\varkappa) - \mathrm{tr}(bk^{-1}fk)$$

où

- l'endomorphisme symétrique $\mathcal{J}$ est $\varphi''(a)$,

- la « partie cinétique » est quadratique et donnée par $\mathcal{J}(\kappa)$,
 - l'élément b qui apparaît dans la partie « potentielle » est $b = d\varphi(a)$.
- On considère les équations de Lax $\dot{A}_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$ avec

$$A_\lambda = a\lambda + \kappa + (k^{-1}fk)\lambda^{-1} \text{ et } B_\lambda = b\lambda + \mathcal{J}(\kappa).$$

Cette construction donne en particulier des équations de Lax pour les systèmes suivants (avec des généralisations en grandes dimensions).

Exemple IV.4.6 (Le pendule sphérique). — Ici $G = \mathrm{SO}(3, 1)$, $K = \mathrm{SO}(3)$. Alors $\mathfrak{p} = \mathbf{R}^3$ avec l'opération habituelle de $\mathrm{SO}(3)$. La variété V est la sphère S^2 et $j : S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ le plongement standard. La matrice A_λ est

$$-\left(\begin{array}{c|c} 0 & \Gamma \\ \hline {}^t\Gamma & 0 \end{array}\right)\lambda + \left(\begin{array}{c|c} p \wedge q & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & q \\ \hline {}^tq & 0 \end{array}\right)\lambda^{-1}.$$

Le hamiltonien le plus simple est

$$H = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \sum a_i q_i$$

(dans les notations de I.2.f et IV.1.a, $a = \Gamma = -e_3$). C'est lui qui donne lieu à la paire de Lax de l'exercice IV.5. On aura remarqué que ce n'est *pas* la paire de Lax que nous avons rencontrée dans l'exemple IV.1.3. Il n'y a pas, on pouvait s'en douter, d'unicité des paires de Lax.

Exemple IV.4.7 (La toupie symétrique). — La méthode donne aussi une paire de Lax pour la toupie symétrique. Ici encore $G = \mathrm{SO}(3, 1)$, $K = \mathrm{SO}(3)$ mais, cette fois, le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{1}{2} M \cdot \mathcal{J}(M) + \Gamma \cdot e_3.$$

La paire de Lax est (A_λ, B_λ) , où

$$A_\lambda = \left(\begin{array}{cc} 0 & \Gamma \\ {}^t\Gamma & 0 \end{array}\right)\lambda^{-1} + \left(\begin{array}{cc} -M & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & L \\ {}^tL & 0 \end{array}\right)\lambda$$

et B_λ est la partie polynomiale $(A_\lambda^2)_+$ de A_λ^2 .

Cette équation est équivalente au système décrivant la toupie symétrique (exercice IV.10). Là encore, ce n'est *pas* la paire de Lax que nous avons rencontrée dans l'exemple IV.1.4.

Exemple IV.4.8 (La toupie de Kowalevski). — C'est le plus beau succès de cette construction. On l'obtient pour $G = \mathrm{SO}(3, 2)$, $K = \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(2)$ (voir [16, 67] et les applications dans [14] et le chapitre III de [9]).

Exemple IV.4.9 (Les géodésiques des quadriques). — Ici $G = \mathrm{SL}(n+1; \mathbf{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n+1)$, la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$ est la décomposition des matrices en somme d'une matrice anti-symétrique et d'une matrice symétrique. On choisit pour a la matrice diagonale $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ de la forme quadratique $\langle Ax, x \rangle$ dans une base orthonormée. La variété V est la sphère S^n et l'application équivariante j qui l'envoie dans l'espace des matrices symétriques est $p \mapsto -p \otimes p$.

L'application moment pour l'action de $\mathrm{SO}(n+1)$ sur T^*S^n est donnée par $\mu(p, u) = p \wedge u$ (exercice IV.20). On trouve la matrice

$$A_\lambda = \lambda \alpha + p \wedge u - \lambda^{-1} p \otimes p,$$

qui est, à un facteur λ près, celle utilisée au §IV.3.

Exercices

Exercice IV.1. — Écrire les solutions $q_3(t)$ de l'équation différentielle décrivant la hauteur q_3 du pendule sphérique à l'aide de la fonction $\wp$ de Weierstrass associée à la courbe elliptique obtenue au §IV.1.a.

Exercice IV.2. — Dans l'exemple de la toupie symétrique, appelons x_3 la hauteur de l'extrémité de l'axe de révolution. Montrer que x_3 satisfait à une équation différentielle de la forme $\dot{x}_3^2 = P(x_3)$ où P est un polynôme⁽⁹⁾ de degré 3 avec deux racines réelles dans $] -1, 1[$ et une dans $]1, +\infty[$ (voir [3]).

En déduire que l'extrémité de l'axe de la toupie oscille entre deux cercles parallèles de la sphère unité (conformément à l'expérience).

Exercice IV.3. — Vérifier que l'isomorphisme de $\mathbf{R}^3$ sur l'espace vectoriel des matrices anti-symétriques

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

transforme le produit vectoriel en crochet des matrices.

Exercice IV.4. — Montrer que l'équation de Lax donnée dans l'exemple IV.1.4 est équivalente au système des trois équations

$$\dot{\Gamma} = [\Gamma, \Omega], \quad \dot{M} = [M, \Omega], \quad \dot{L} = [M - \Omega, L].$$

En déduire qu'elle est aussi équivalente au système hamiltonien décrivant le mouvement du solide dans le cas de la toupie symétrique (§I.3.g).

⁽⁹⁾ Ce polynôme est déjà apparu à la fin de la démonstration de la proposition II.3.1 et dans l'exercice II.15.

Exercice IV.5. — On fixe un vecteur $\Gamma \in \mathbf{R}^3$ et on considère la matrice 4×4

$$-\left(\begin{array}{c|c} 0 & \Gamma \\ \hline {}^t\Gamma & 0 \end{array}\right)\lambda^2 + \left(\begin{array}{c|c} p \wedge q & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\lambda + \left(\begin{array}{c|c} 0 & q \\ \hline {}^tq & 0 \end{array}\right)$$

où p et q sont des vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et où le produit vectoriel $p \wedge q$ est considéré comme une matrice anti-symétrique 3×3 (voir au besoin l'exercice IV.3 pour cette identification). Pour simplifier la notation, on écrit cette matrice sous la forme

$$A_\lambda = -(\Gamma \otimes e_4)\lambda^2 + (p \wedge q)\lambda + (q \otimes e_4).$$

L'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}A_\lambda = [A_\lambda, -(\Gamma \otimes e_4)\lambda + p \wedge q]$$

est une équation de Lax avec paramètre spectral. Montrer qu'elle est équivalente au système différentiel

$$\begin{cases} \dot{q} = q \wedge (p \wedge q) \\ \underbrace{\dot{p} \wedge q}_{= -q \wedge \Gamma} = -q \wedge \Gamma. \end{cases}$$

Supposons maintenant que $\|q\|^2 = 1$ et que $p \cdot q = 0$ (c'est-à-dire que $(q, p) \in TS^2$). Vérifier que l'équation de Lax est équivalente à

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} \wedge q = -q \wedge \Gamma \end{cases}$$

c'est-à-dire au système hamiltonien du pendule sphérique.

Exercice IV.6 (Déformations isospectrales). — Soit $U(t)$ une matrice inversible solution de l'équation différentielle $\dot{U}_\lambda = U_\lambda B_\lambda$. Montrer que A_λ satisfait à

$$\frac{d}{dt}(U_\lambda A_\lambda U_\lambda^{-1}) = 0$$

si et seulement si elle est solution de $\dot{A}_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$. Montrer qu'alors les solutions de l'équation de Lax sont les $A_\lambda(t) = U_\lambda(t)^{-1}A_\lambda(t_0)U_\lambda(t)$.

Exercice IV.7 (Une démonstration piétonne). — Vérifier que, si $A_\lambda(t)$ satisfait une équation de Lax, $\text{tr}(A_\lambda^m)$ est constante pour tout m et donc que les coefficients des puissances de λ dans le polynôme $\text{tr}(A_\lambda^m)$ sont des intégrales premières pour l'équation de Lax.

Exercice IV.8 (Un exercice moyennement passionnant). — Calculer le polynôme caractéristique des matrices de l'exercice IV.5 pour trouver

$$\det(A_\lambda - \mu \text{Id}) = \mu^4 - \mu^2 \|q\|^2 + \mu^2 \lambda^2 (\|p\|^2 + 2q_3) - \mu^2 \lambda^4 - (p_1 q_2 - p_2 q_1)^2 \lambda^6$$

et retrouver les intégrales premières H et K exhibées aux §§I.2.f et I.3.e. La courbe spectrale a pour équation

$$\mu^4 - \mu^2 + 2\mu^2\lambda^2H - \mu^2\lambda^4 - K^2\lambda^6 = 0.$$

Exercice IV.9. — On reprend l'équation de Lax de l'exemple IV.1.4. Montrer que le polynôme caractéristique de $\Gamma + M\lambda + L\lambda^2$ est

$$-\mu(\mu^2 + 1 + 2(\Gamma \cdot M)\lambda + (\|M\|^2 + 2\Gamma \cdot L)\lambda^2 + 2(M \cdot L)\lambda^3 + \lambda^4).$$

Retrouver les intégrales premières du mouvement de la toupie exhibées aux §§I.2.g et I.3.g.

Exercice IV.10. — Montrer que l'équation de Lax

$$\frac{dA_\lambda}{dt} = [A_\lambda, B_\lambda],$$

avec A_λ et B_λ dans $\mathfrak{so}(3,1)$ définies par

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix} \lambda^{-1} + \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & L \\ L & 0 \end{pmatrix} \lambda$$

et B_λ la partie polynomiale $(A_\lambda^2)_+$ de A_λ^2 (exemple IV.4.7), est équivalente au système décrivant la toupie symétrique.

Exercice IV.11. — Soit A la matrice antisymétrique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

et soit μ une valeur propre de A telle que $\mu^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Vérifier que

$$V = \begin{pmatrix} \frac{-xz - \mu y}{x^2 + y^2} \\ \frac{-yz + \mu x}{x^2 + y^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de A pour la valeur propre μ . On suppose maintenant que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q + \lambda(p \wedge q) - \lambda^2 \Gamma,$$

autrement dit, on considère l'exemple du pendule sphérique (§IV.1.3). Montrer⁽¹⁰⁾ que le diviseur des pôles de V est de la forme

$$R_+ + R_- + \infty$$

⁽¹⁰⁾Ce calcul est fait explicitement dans [9] (pour la toupie), s'y reporter en cas de besoin.

où ∞ désigne le diviseur de degré 2 au-dessus de $\lambda = \infty$ sur C et où R_+ et R_- sont les points de coordonnées

$$\lambda(R_{\pm}) = -\frac{q_1 \mp iq_2}{v_1 \mp iv_2} \text{ et } \mu(R_{\pm}) = \pm i(q_3 + \lambda(R_{\pm})v_3 + \lambda(R_{\pm})^2)$$

— où j'ai appelé v_1 , v_2 et v_3 les composantes de $p \wedge q$.

Exercice IV.12 (Valeurs régulières pour le pendule sphérique (bis))

On fixe un point $(H, K) \in \mathbf{C}^2$ et on considère la courbe spectrale C d'équation

$$\mu^2 + \lambda^4 + 2K\lambda^3 + 2H\lambda^2 + 1 = 0$$

ainsi que le niveau $\mathcal{T}_C$ dans la variété complexifiée⁽¹¹⁾ de TS^2 .

On suppose que la courbe C est lisse.

- Montrer que l'application de vecteurs propres φ_C est constante sur les orbites du champ X_K (voir le §1.3.e). Déterminer les points de $\mathcal{T}_C$ où X_K s'annule et les valeurs de H et K possibles.
- On a dit (exemple IV.2.6) que l'image du champ X_H par l'application tangente à φ_C est la classe du cocycle $\beta = \lambda^{-1}\mu$. Calculer $\text{rés}_{\lambda=0}(\beta d\lambda/\mu)$ et en déduire que l'image de X_H n'est jamais nulle.

En déduire que, si la courbe complexe C est lisse, le niveau $\mathcal{T}_C$ est régulier.

Montrer que la courbe C est singulière exactement quand H et K satisfont à

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2u^2} \\ K = -u + \frac{1}{u^3} \end{cases} \quad \text{pour un certain } u \in \mathbf{C}^*$$

(on pourra écrire que le polynôme $\lambda^4 + 2K\lambda^3 + 2H\lambda^2 + 1$ a une racine double u). Montrer que, quand C est singulière, le niveau $\mathcal{T}_C$ est critique (utiliser les mouvements horizontaux, voir l'exercice II.13).

On revient (enfin!) à la situation réelle. Déterminer l'image de l'application $(H, K) : TS^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ et l'ensemble de ses valeurs régulières (retrouver la figure 7 du chapitre II)⁽¹²⁾.

Exercice IV.13. — On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^3$. Montrer que le produit vectoriel le munit d'une structure d'algèbre de Lie. En utilisant la structure euclidienne, l'identifier à son dual. Montrer que les fonctions coordonnées x , y et z satisfont à

$$\{x, y\}(v) = \left\langle v, \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\rangle = abc.$$

⁽¹¹⁾ C'est-à-dire simplement $\{(q, p) \in \mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}^3 \mid \|q\|^2 = 1 \text{ et } q \cdot p = 0\}$.

⁽¹²⁾ Voir [12] pour une étude de la monodromie de ce système utilisant ces méthodes de géométrie algébrique.

(avec $v = \iota(a, b, c)$) et de même qu'on a

$$\{x, y\}(v) = \{y, z\}(v) = \{z, x\}(v) = abc.$$

Exercice IV.14. — Vérifier que l'équation de Lax donnée dans l'énoncé de la proposition IV.3.1 est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{p} \wedge u + p \wedge \dot{u} = [p \wedge u, \Gamma] - [p \otimes p, \alpha^{-1}] \\ p \otimes \dot{p} + \dot{p} \otimes p = [p \otimes p, \Gamma]. \end{cases}$$

En utilisant l'écriture du système hamiltonien associé au hamiltonien Ψ_0 donnée dans l'exercice I.24, montrer que ce système est équivalent à l'équation de Lax.

Exercice IV.15. — On s'intéresse au problème des géodésiques des quadriques de $\mathbf{R}^3$ (cas $n = 2$ avec les notations du § IV.3). Préciser à quels types de quadriques Q_{z_1} , Q_{z_2} correspondent les différentes composantes connexes de l'ensemble des valeurs régulières de l'application F (les zones grisées de la figure 3). Représenter les formes correspondantes de la partie réelle de la courbe spectrale.

On considère une valeur critique F située sur le discriminant du polynôme Q (mais pas sur une des droites $F_i = 0$). Le niveau $\mathcal{T}_F$ correspond dans $\mathcal{D}_n$ à la situation limite des tangentes communes à deux quadriques homofocales qui viennent à coïncider. Quel est le type réel de ces quadriques ? Quelles sont ces tangentes « communes » ? Montrer que le niveau critique $\mathcal{T}_F$ est constitué de quatre⁽¹³⁾ cercles disjoints.

Exercice IV.16. — Le groupe G opère sur lui-même par conjugaison. On note g l'application

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{g} G \\ h &\longmapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Vérifier que les $T_1g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ définissent une opération de G sur $\mathfrak{g}$. On l'appelle l'opération adjointe et on note $T_1g(X) = \text{Ad}_g X$. Quelle relation y a-t-il entre Ad et ad ? Identifier l'opération et les orbites quand $G = \text{SO}(3)$.

On définit Ad^* , l'opération coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$, par

$$\langle \text{Ad}_g^* \xi, X \rangle = \langle \xi, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle.$$

Quel rapport y a-t-il entre Ad^* et ad^* ? Quel est le champ fondamental sur $\mathfrak{g}^*$ associé à X par l'opération coadjointe ?

Exercice IV.17. — On suppose que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d'une forme bilinéaire non dégénérée invariante par l'opération adjointe du groupe G (exercice IV.16). Montrer que la dualité permet de munir $\mathfrak{g}$ d'un crochet de Poisson. Montrer que c'est le cas quand $G = \text{SO}(n)$ (et plus généralement quand G est compact) ou quand $G = \text{SL}(n; \mathbf{C})$.

⁽¹³⁾ Une indication du fait que les niveaux réguliers proches sont constitués de quatre tores de Liouville [7].

Exercice IV.18. — Le groupe de Lie G est muni d'une involution σ . On appelle K le sous-groupe des points fixes et on décompose l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G en

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

selon les sous-espaces propres de σ pour les valeurs propres 1 et -1 . Vérifier que la restriction à K de l'opération coadjointe de G préserve les sous-espaces $\mathfrak{k}^*$ et $\mathfrak{p}^*$.

On suppose que G est le groupe $\mathrm{SO}(3, 1)$ des isométries de la forme diagonale de signature $(3, 1)$ et que $\sigma(A) = {}^t A^{-1}$, de sorte que $K = \mathrm{SO}(3)$. Montrer que $\mathfrak{p}$ s'identifie à $\mathbf{R}^3$ et l'opération de K sur $\mathfrak{p}^*$ à l'opération usuelle de $\mathrm{SO}(3)$ par isométries.

Exercice IV.19 (Forme symplectique sur les orbites coadjointes)

Pour tout ξ dans $\mathfrak{g}^*$, on définit une forme bilinéaire alternée ω_ξ sur $\mathfrak{g}$ en posant

$$\omega_\xi(X, Y) = \langle \xi, [X, Y] \rangle = -\langle \mathrm{ad}_X^* \xi, Y \rangle.$$

Quel est le noyau de ω_ξ ? Montrer que la formule

$$\tilde{\omega}_\xi(\mathrm{ad}_X^* \xi, \mathrm{ad}_Y^* \xi) = \omega_\xi(X, Y)$$

définit une forme symplectique $\tilde{\omega}$ sur l'orbite coadjointe de ξ et vérifier que le crochet de Poisson associé à $\tilde{\omega}$ est le crochet de Poisson de $\mathfrak{g}^*$.

Exercice IV.20. — Le groupe de Lie G opère sur la variété symplectique V . Montrer que la formule

$$g \cdot (v, \varphi) = (g \cdot v, {}^t T_v g^{-1}(\varphi))$$

définit une opération de G sur T^*V . Montrer que cette opération préserve la forme de Liouville α .

Pour $X \in \mathfrak{g}$, appelons $\tilde{X}$ et $\tilde{\tilde{X}}$ les champs fondamentaux associés sur V et T^*V respectivement et définissons

$$\mu_X : T^*V \longrightarrow \mathbf{R}$$

par $\mu_X(v, \varphi) = \langle \varphi, \tilde{X}(v) \rangle$. Vérifier que $\mu_X(v, \varphi) = i_{\tilde{\tilde{X}}} \alpha$ et en déduire que

$$d\mu_X = -i_{\tilde{\tilde{X}}} d\alpha$$

de sorte que $\tilde{\tilde{X}}$ est le champ hamiltonien associé à μ_X . On définit enfin l'*application moment*

$$\mu : T^*V \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

par $\langle \mu(v, \varphi), X \rangle = \mu_X(v, \varphi)$. Montrer que μ est équivariante, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Ad}_g^* \mu(v, \varphi) = \mu(g \cdot (v, \varphi)).$$

On fait opérer $\mathrm{SO}(n)$ sur la sphère unité S^{n-1} de $\mathbf{R}^n$ par rotations. Identifier l'application moment pour l'opération sur T^*S^{n-1} .

Exercice IV.21. — On reprend les notations de l'exercice IV.18. On suppose que le groupe K opère aussi sur une variété V et on appelle $\mu : T^*V \rightarrow \mathfrak{k}^*$ l'application moment (exercice IV.20). On suppose enfin que $j : V \rightarrow \mathfrak{p}^*$ est une application K -équivariante et on considère l'application

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} : T^*V &\longrightarrow \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{p}^* \\ (v, \varphi) &\longmapsto (\mu(v, \varphi), j(v)).\end{aligned}$$

On veut montrer que cette application préserve les crochets de Poisson, c'est-à-dire que, si f et g sont deux fonctions sur $\mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{p}^*$, on a

$$\{f \circ \tilde{\mu}, g \circ \tilde{\mu}\}_{T^*V} = \{f, g\}_{\mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{p}^*} \circ \tilde{\mu}.$$

Montrer d'abord qu'il suffit de le vérifier quand f et g sont des fonctions linéaires sur $\mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{p}^*$, cas où la relation s'écrit

$$\{X \circ \tilde{\mu}, Y \circ \tilde{\mu}\}_{T^*V} = [X, Y]_{\mathfrak{g}} \circ \tilde{\mu}.$$

Démontrer cette relation dans les cas où $X, Y \in \mathfrak{p}$, puis $X, Y \in \mathfrak{k}$, enfin $X \in \mathfrak{p}$ et $Y \in \mathfrak{k}$ et conclure.

Exercice IV.22. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-algèbres de Lie. On suppose que l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est somme directe des deux sous-espaces vectoriels $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. On appelle P_+ et P_- les projections sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ (respectivement) associées à cette décomposition. Montrer que l'application linéaire

$$R = \frac{1}{2}(P_+ - P_-) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

est une « matrice R ».

Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ l'algèbre de Lie des matrices complexes de trace nulle, $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre de Lie des matrices triangulaires inférieures (de trace nulle) et $\mathfrak{b}$ celle des matrices antisymétriques. Vérifier que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ (comme espaces vectoriels).

On utilise la forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY).$$

Montrer qu'elle est non dégénérée, que $\mathfrak{a}^\perp$ est le sous-espace des matrices triangulaires inférieures strictes (la diagonale est nulle) et que $\mathfrak{b}^\perp$ est celui des matrices symétriques.

On considère la fonction φ définie par $\varphi(A) = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2)$. Déterminer son gradient. Montrer que le système hamiltonien associé à φ sur $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^\perp$ est

$$\frac{dA}{dt} = [A, B]$$

où B est la matrice anti-symétrique dont les coefficients au-dessus de la diagonale sont ceux de la matrice symétrique A . Montrer que les fonctions $\text{tr}(A^k)$ sont des intégrales premières de ce système⁽¹⁴⁾.

⁽¹⁴⁾Cette construction est à l'origine d'une équation de Lax pour un système hamiltonien fameux, le système de Toda (non périodique). Voir [1].

APPENDICE A

CE QU'IL FAUT SAVOIR EN THÉORIE DE GALOIS DIFFÉRENTIELLE

Dans cet appendice, j'indique les définitions des notions de base (corps différentiel, extension de Picard-Vessiot, groupe de Galois) de la théorie de Galois différentielle. Pour les détails manquants, je renvoie à [44] et à [54].

A.1. Corps différentiels

On considère ici un *corps différentiel*, c'est-à-dire un corps k muni d'une *dérivation*, un opérateur additif noté $'$ qui satisfait à

$$(ab)' = a'b + ab'.$$

On suppose ici que le corps des constantes de k (l'ensemble des éléments a tels que $a' = 0$, voir l'exercice A.3) est isomorphe à $\mathbf{C}$ (que ce soit exactement $\mathbf{C}$ a peu d'importance, par contre, que ce soit un corps *algébriquement clos* a une grande importance ; on utilisera aussi le fait que la caractéristique de ce corps est nulle).

On utilisera aussi des *anneaux différentiels*, dont la définition est évidente. Un *idéal différentiel* d'un anneau différentiel est un idéal stable par dérivation.

Exemple A.1.1. — Soit Γ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et soit $k = \mathcal{M}(\Gamma)$ le corps des fonctions méromorphes sur Γ . C'est un corps différentiel (avec la dérivation habituelle des fonctions) dont le corps des constantes est, effectivement, isomorphe à $\mathbf{C}$.

C'est l'exemple de base qu'il faut avoir en tête. Plus généralement, on peut considérer le corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann, à condition de choisir une dérivation.

Exemple A.1.2. — Soit Γ une surface de Riemann connexe (mais pas nécessairement compacte) munie d'un champ de vecteurs holomorphe X . Soit $k = \mathcal{M}(\Gamma)$ le corps

des fonctions méromorphes sur Γ . Le champ X définit une dérivation⁽¹⁾ sur k :

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Si X n'est pas identiquement nul, alors les fonctions f telles que $X(f) = 0$ sont constantes sur l'ouvert où X ne s'annule pas, donc sont constantes sur Γ .

Exemple A.1.3. — Le corps $\mathbf{C}(t)$ des fractions rationnelles en la variable t , muni de la dérivation $\frac{d}{dt}$, est un corps différentiel.

Le corps des fractions rationnelles est le corps des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann, donc un cas particulier d'exemple de corps de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann (A.1.2). Voir l'exercice A.4.

On appelle, on s'en doute, *extension différentielle* de k un corps différentiel qui est une extension du corps k et dont la différentielle prolonge celle de k .

On peut bien sûr trouver des extensions algébriques dans cette théorie. Par exemple, $\mathbf{C}(t, u)/(u^2 - t)$ est une extension de degré 2 de $\mathbf{C}(t)$ et on étend la dérivation en posant $u' = 1/2u$. Mais ce pourquoi cette théorie est vraiment faite, c'est pour étudier les extensions (en général transcendentes) obtenues en résolvant des équations différentielles (linéaires). On considère donc un opérateur L sur k , de la forme

$$L \cdot y = \sum_{i=0}^m a_i y^{(i)}$$

où $a_i \in k$ et $y^{(i)}$ désigne la i -ème dérivée de y . On peut considérer plus généralement une matrice carrée A d'ordre m à coefficients dans k et s'intéresser aux extensions de k dans lesquelles les équations $L \cdot y = 0$ ou $Y' + AY = 0$ ont des solutions.

Exemples A.1.4. — Considérons l'exemple de $k = \mathbf{C}(t)$.

- (1) L'équation différentielle $y' = 0$ a toutes ses solutions dans k .
- (2) Ce n'est pas le cas de $y' = ay$, pour laquelle il faut faire des quadratures et prendre des exponentielles.
- (3) Soit α un nombre complexe. L'équation différentielle $y' = \alpha y/t$ n'a toutes ses solutions dans k que si $\alpha \in \mathbf{Z}$.

Exercices A.1, A.2, A.3, A.4.

A.2. Extension de Picard-Vessiot

On donne un système différentiel $Y' + AY = 0$, avec A une matrice $m \times m$ à coefficients dans k . Il n'est pas difficile de vérifier que ses solutions forment un espace vectoriel de dimension au plus égale à m sur le corps des constantes $\mathbf{C}$. On va montrer qu'il existe toujours une extension différentielle K de k sur laquelle les

⁽¹⁾ C'est aussi ça, un champ de vecteurs, une dérivation sur les fonctions.

solutions forment un espace vectoriel de dimension exactement m . On va même construire une extension « minimale » ayant cette propriété, au sens où

- son corps de constantes est $\mathbf{C}$ (on n'ajoute pas de constantes)
- il existe une « solution fondamentale » à coefficients dans K , c'est-à-dire une matrice carrée Z dont les colonnes sont une base des solutions — ou une matrice inversible telle que $Z' + AZ = 0$,
- le corps K est engendré sur k par les coefficients de Z .

Une telle extension, version différentielle du corps de décomposition d'une équation algébrique, est dite « extension de Picard-Vessiot » de l'équation différentielle. Un théorème de Kolchin [48] affirme qu'une telle extension existe et est unique à isomorphisme près. Rappelons-en une construction simple (voir [54] ou [52]).

On commence par faire brutalement tout ce qu'il faut pour que l'extension contienne une solution fondamentale en considérant l'anneau

$$\mathfrak{A} = k[Z_{1,1}, \dots, Z_{1,m}, Z_{2,1}, \dots, Z_{m,m}, (\det Z)^{-1}].$$

On a ajouté m^2 variables, considérées comme les coefficients d'une matrice Z et on demande que ladite matrice Z soit inversible⁽²⁾. On munit l'anneau $\mathfrak{A}$ d'une dérivation en étendant celle de k par la règle

$$Z'_{i,j} = (Z')_{i,j} \text{ et } Z' = -AZ.$$

Par définition, Z est une solution fondamentale et $\mathfrak{A}$ est engendré sur k par les coefficients de cette solution. Malheureusement, $\mathfrak{A}$ n'est pas un corps.

On choisit un idéal différentiel $\mathfrak{q}$ dans $\mathfrak{A}$, maximal parmi les idéaux différentiels. Attention, $\mathfrak{q}$ n'est peut-être pas un idéal maximal, mais $\mathfrak{A}/\mathfrak{q}$ est quand même un anneau intègre, comme on va maintenant le vérifier⁽³⁾.

Lemme A.2.1. — *Si $\mathfrak{q}$ est un idéal différentiel d'un anneau différentiel $\mathfrak{A}$, son radical $\sqrt{\mathfrak{q}}$ est un idéal différentiel.*

Démonstration. — Soit $z \in \sqrt{\mathfrak{q}}$. C'est dire que $z^r \in \mathfrak{q}$ pour un certain r . On dérive z^r et on montre par récurrence que

$$(z^r)^{(r)} = r(z')^r + za$$

pour un certain $a \in \mathfrak{A}$, en d'autres termes, on a

$$(z')^r = \frac{1}{r} \left((z^r)^{(r)} - za \right).$$

On sait que $z^r \in \mathfrak{q}$, qui est un idéal différentiel, on conclut donc que $(z')^r \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ et donc $z' \in \sqrt{\mathfrak{q}}$. $\square$

⁽²⁾Dans la terminologie des « équations différentielles », $\det Z$ est le *wronskien*.

⁽³⁾Cette démonstration est inspirée — c'est un euphémisme — de l'appendice de [52].

Lemme A.2.2. — Si $\mathfrak{q}$ est un idéal différentiel maximal parmi les idéaux différentiels de l'anneau différentiel $\mathfrak{A}$, l'anneau quotient $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{q}$ est intègre.

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\mathfrak{B}$ ne contient aucun élément nilpotent. Le lemme précédent affirme en effet que ceux-ci forment un idéal différentiel de $\mathfrak{B}$ (c'est le radical de l'idéal différentiel nul), or $\mathfrak{B}$ ne contient aucun idéal différentiel propre.

Soit a un élément non nul de $\mathfrak{B}$. Considérons l'idéal I des éléments qui annulent a . On veut montrer que $I = \{0\}$. Pour b dans I , on a

$$0 = (ab)' = a'b + ab' \text{ donc } ab' = -a'b \text{ et } (ab')^2 = -a'(ba)b' = 0.$$

Donc ab' est nilpotent et donc il est nul. Ainsi $b' \in I$. Ainsi I est un idéal différentiel de $\mathfrak{A}$, donc $I = \{0\}$ et $\mathfrak{B}$ est intègre. $\square$

Sachant maintenant que l'anneau quotient $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{q}$ est intègre, on définit K (le corps cherché, une extension de Picard-Vessiot) comme son corps de fractions. On démontre (voir, encore [54]) que :

- Le corps K est un corps différentiel : $\mathfrak{B}$ est un anneau différentiel parce que l'idéal $\mathfrak{q}$ est différentiel et je laisse en exercice le prolongement de la dérivation de $\mathfrak{B}$ à K (c'est l'exercice A.2).
- Le corps des constantes de K est le même que celui de k (exercice A.7).
- La matrice z des images des $Z_{i,j}$ est une matrice fondamentale de solutions (elle a été construite pour ça).

Pour démontrer l'unicité de K à isomorphisme près, on utilise encore le fait que le corps des constantes est algébriquement clos. Je ne le ferai pas ici. Voir [54]. En conséquence, le résultat de la construction ne dépend pas de l'idéal $\mathfrak{q}$ choisi, propriété qu'on va exploiter ci-dessous.

Exercices A.5, A.6, A.7, A.8.

A.3. Le groupe de Galois

Le groupe de Galois de l'équation $Y' + AY = 0$ est, comme en théorie des équations algébriques, le groupe des automorphismes (différentiels!) de K qui fixent k , c'est-à-dire des automorphismes $\sigma : K \rightarrow K$ tels que

$$\sigma|_k = \text{Id}_k \text{ et } (\sigma(u))' = \sigma(u') \text{ pour tout } u \text{ dans } K.$$

On le note $\text{Gal}(Y' + AY)$.

A.3.a. Représentation dans le groupe linéaire. — De la même façon que le groupe de Galois d'une équation algébrique de degré m se représente dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$, le groupe de Galois d'une équation différentielle d'ordre m se représente dans le groupe linéaire $\text{GL}(m; \mathbf{C})$ (m est l'ordre de l'équation différentielle, ou la taille de la matrice A). Voici comment. Si z_i est une colonne d'une matrice fondamentale

de solutions z , c'est en particulier une solution de l'équation différentielle, on a donc

$$z'_i + Az_i = 0 \text{ et donc } 0 = \sigma(z'_i + Az_i) = \sigma(z'_i) + A\sigma(z_i)$$

puisque σ préserve k et que A est à coefficients dans k . Finalement, comme σ est différentiel, on trouve

$$(\sigma(z_i))' + A\sigma(z_i) = 0$$

donc $\sigma(z_i)$ est aussi solution de l'équation, on peut l'exprimer dans la base $(z_1, \dots, z_m)$:

$$\sigma(z_i) = \sum_{j=1}^m c_{j,i} z_j \text{ pour des coefficients constants } c_{j,i} \in \mathbf{C}.$$

Comme σ est un automorphisme, $\sigma(z_1), \dots, \sigma(z_m)$ constitue une base de l'espace vectoriel des solutions et la matrice c des $(c_{j,i})$ est inversible. Le morphisme

$$\begin{aligned} \text{Gal}(Y' + AY) &\longrightarrow \text{GL}(m; \mathbf{C}) \\ \sigma &\longmapsto c \end{aligned}$$

est injectif. On a bien montré que le groupe de Galois se représente dans $\text{GL}(m; \mathbf{C})$. On démontre aussi (c'est un théorème de Kolchin) que c'est un sous-groupe *algébrique* de $\text{GL}(m; \mathbf{C})$. La démonstration consiste à « transformer » l'idéal $\mathfrak{q}$ utilisé pour la construction de l'extension de Picard-Vessiot en un idéal de $\mathbf{C}[Y_{1,1}, \dots, Y_{m,m}, \det(Y_{i,j})^{-1}]$ (anneau du groupe linéaire) qui s'annule précisément sur les éléments du groupe de Galois. Elle utilise un peu plus de techniques d'algèbre commutative que ce que j'ai supposé connu des lecteurs du présent ouvrage. Je renvoie donc à [54].

Remarque A.3.1. — La représentation obtenue dépend du choix de la base $(z_1, \dots, z_m)$ mais un autre choix donne bien évidemment une représentation conjuguée.

A.3.b. Exemples. — Voici deux exemples très classiques de calculs de groupes de Galois.

Exemple A.3.2. — Revenons à l'équation $y' = \frac{\alpha}{t}y$ sur $k = \mathbf{C}(t)$ (voir l'exemple A.1.4 et l'exercice A.8).

- L'extension $k(t^\alpha)/k$ est triviale quand $\alpha \in \mathbf{Z}$.
- Elle est algébrique si et seulement si $\alpha \in \mathbf{Q}$. Si $\alpha = p/q$ est une fraction irréductible avec $q > 0$, l'extension de Picard-Vessiot est $\mathbf{C}(t)[u]/\langle u^q - t^p \rangle$. Elle est algébrique de degré q . À cause de la relation $u^q = t^p$, on a

$$u' = \frac{p}{q} \frac{t^{p-1}}{u^{q-1}}$$

d'où l'on déduit que les groupes de Galois différentiel et algébrique coïncident. Ce dernier est le groupe des σ définis par $\sigma(u) = \zeta u$ pour ζ une racine q -ième de 1, il est donc isomorphe à $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

- Si $\alpha \notin \mathbf{Q}$, l'extension est transcendante (de degré de transcendance 1). Le groupe de Galois est le groupe linéaire $\mathbf{C}^*$ tout entier, opérant sur l'espace de dimension 1 des solutions par multiplication.

Exemple A.3.3 (Équation de Cauchy). — Toujours sur le corps $\mathbf{C}(t)$, on considère l'équation

$$y'' - \frac{a}{t^2}y = 0 \quad a \in \mathbf{C}.$$

Considérons d'abord ses relations avec les équations du premier ordre

$$y' - \frac{\alpha}{t}y = 0 \quad \alpha \in \mathbf{C} \text{ à préciser.}$$

Si u est une solution de cette équation, on a $tu' = \alpha u$. En dérivant et en multipliant par t , on obtient

$$t^2 u'' + (\alpha - \alpha^2)u = 0.$$

Donc, si α est choisi de façon que

$$\alpha^2 - \alpha - a = 0,$$

les solutions de l'équation $ty' = \alpha y$ sont solutions de $t^2 y'' = ay$.

De plus, si α_1 et α_2 sont les deux racines de cette équation du second degré, u_1 et u_2 des solutions des équations correspondantes, on a

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{u_1 u_2}{t}$$

de sorte que, si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, les deux solutions ainsi obtenues sont indépendantes. Supposons donc désormais que $a \neq -1/4$ de sorte que u_1 et u_2 soient indépendantes. On obtient l'extension de Picard-Vessiot de l'équation $y'' = ay/t^2$ en composant celles des $y' = \alpha_i y/t$. Si $y' = \alpha_i y/t$, on a, pour tout σ dans le groupe de Galois,

$$\sigma(y)' = \sigma(y') = \sigma\left(\frac{\alpha_i}{t}y\right) = \frac{\alpha_i}{t}\sigma(y)$$

puisque σ préserve $\mathbf{C}(t)$, donc le groupe de Galois préserve les droites de solutions des deux équations du premier ordre, il est donc contenu dans le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathrm{GL}(2; \mathbf{C})$ — en particulier, il est abélien.

Exercices A.9, A.10, A.11.

A.3.c. La correspondance de Galois. — Comme en théorie de Galois classique, on a une correspondance entre les extensions différentielles intermédiaires d'une extension différentielle K/k et les sous-groupes (algébriques) du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/k)$. On démontre aussi un « théorème fondamental » (voir [54]) : si K/k est une extension de Picard-Vessiot et L est un sous-corps différentiel de K et une extension de k , l'extension L/k est de Picard-Vessiot si et seulement si le groupe de Galois de K/L est distingué dans celui de K/k , auquel cas on a

$$\mathrm{Gal}(L/k) \cong \mathrm{Gal}(K/k) / \mathrm{Gal}(K/L).$$

A.4. Le groupe de Galois d'un système hamiltonien est symplectique

Je vais montrer maintenant que, dans le cas d'un système hamiltonien, le groupe de Galois est en fait un sous-groupe du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{C})$ (lui-même sous-groupe de $\mathrm{GL}(2n; \mathbf{C})$). C'est dire que je vais démontrer le lemme III.2.3.

On se place dans l'espace vectoriel symplectique complexe $\mathbf{C}^{2n}$. La forme symplectique est la forme bilinéaire dont la matrice dans la base canonique est $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$. Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{C})$ est formé des matrices M qui satisfont à l'équation algébrique ${}^tMJM = J$ (voir le §I.1.a).

Démonstration du lemme III.2.3. — Considérons d'abord le groupe $\mathrm{GL}(2n; \mathbf{C})$ d'un point de vue algébrique. C'est le sous-espace de l'ensemble des matrices défini par l'équation $\det Z \neq 0$. Autrement dit, l'anneau des fonctions algébriques sur le groupe linéaire $\mathrm{GL}(2n; \mathbf{C})$ est l'anneau $\mathbf{C}[Z_{i,j}, (\det Z)^{-1}]$. On notera l'analogie avec l'anneau $\mathfrak{A}$ utilisé dans la construction de l'extension de Picard-Vessiot qui, lui, est l'anneau de $\mathrm{GL}(m; k)$.

Voyons maintenant son sous-groupe $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{C})$. Il est défini par l'idéal I engendré par ${}^tZJZ - J$. On va choisir astucieusement l'idéal $\mathfrak{q}$ utilisé dans la construction de l'extension de Picard-Vessiot. Ce doit être un idéal (différentiel maximal) de l'anneau $\mathfrak{A} = k[Z_{i,j}, (\det Z)^{-1}]$, anneau du groupe $\mathrm{GL}(2n; k)$. Il est naturel de considérer l'idéal $(I) = I\mathfrak{A}$ du groupe $\mathrm{Sp}(2n; k)$ et de choisir pour $\mathfrak{q}$ un idéal différentiel maximal contenant (I) . Le point essentiel rendant ce choix possible est contenu dans le lemme suivant.

Lemme A.4.1. — *Si $A \in \mathfrak{sp}(2n; \mathbf{C})$, l'idéal (I) est un idéal différentiel.*

Rappelons que A , la matrice du système, est utilisée pour définir la dérivation de $\mathfrak{A}$ et qu'on a remarqué, précisément, que dans le cas d'un système hamiltonien, elle est dans l'algèbre de Lie du groupe symplectique (c'est le lemme III.2.4). Admettons le lemme A.4.1 pour un bref instant et voyons comment on l'utilise pour achever la démonstration.

Comme $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal contenant (I) , la matrice z image de Z dans $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{q}$ est dans le groupe symplectique sur $\mathfrak{B}$. De plus le groupe de Galois de $Y' + AY$, groupe des k -automorphismes différentiels du corps des fractions K de $\mathfrak{B}$ est aussi le groupe des k -automorphismes différentiels de l'anneau $\mathfrak{B}$.

Soit donc σ un élément de ce groupe de Galois. Comme $z \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$, on a aussi $\sigma(z) \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$ (les équations définissant le groupe symplectique sont à coefficients dans le corps des constantes $\mathbf{C}$). Comme on l'a dit plus haut, la matrice $\sigma(z)$ est une matrice fondamentale de solutions, donc elle s'exprime à l'aide d'une matrice $c \in \mathrm{GL}(2n; \mathbf{C})$:

$$\sigma(z) = zc.$$

Dans cette équation, z et $\sigma(z)$ sont symplectiques à coefficients dans $\mathfrak{B}$ et c est, *a priori*, seulement dans le groupe linéaire, mais à coefficients *constants*. Donc, en fait $c \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{B}) \cap \mathrm{GL}(2n; \mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(2n; \mathbb{C})$.

En conclusion, la représentation $\sigma \mapsto c$ du groupe de Galois dans le groupe linéaire est à valeurs dans le groupe symplectique. $\square$

Démonstration du lemme A.4.1. — On veut montrer que l'idéal (I) engendré par les équations du groupe symplectique est différentiel, c'est-à-dire que, pour tout u dans (I) , u' est aussi dans (I) . Les éléments de (I) sont de la forme

$$u = \sum a_{i,j} ({}^t Z J Z - J)_{i,j} \text{ avec } a_{i,j} \in \mathfrak{A}.$$

Alors on a

$$u' = \sum a'_{i,j} ({}^t Z J Z - J)_{i,j} + \sum a_{i,j} ({}^t Z J Z - J)'_{i,j}.$$

Le premier terme est évidemment dans (I) . Montrons pour conclure que le deuxième est nul. En effet, on a

$$\begin{aligned} ({}^t Z J Z - J)' &= {}^t Z' J Z + {}^t Z J Z' \text{ puisque } J \text{ est constante} \\ &= -{}^t Z^t A J Z - {}^t Z J A Z \text{ puisque } Z' = -AZ \\ &= -{}^t Z ({}^t A J + J A) Z \\ &= 0 \text{ puisque } A \in \mathfrak{sp}(2n). \end{aligned}$$

$\square$

Cette démonstration s'adapte sans mal à une situation plus générale que celle du groupe symplectique. Le bon énoncé est :

Proposition A.4.2. — Soient G un sous-groupe algébrique du groupe linéaire $\mathrm{GL}(m; \mathbb{C})$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si $A \in \mathfrak{g} \otimes k$, alors $\mathrm{Gal}(Y' + AY)$ est un sous-groupe de G .

Démonstration. — On remplace I par l'idéal définissant le sous-groupe G dans l'anneau de $\mathrm{GL}(m; \mathbb{C})$. La seule chose à vérifier est que la démonstration du lemme A.4.1 s'adapte bien, c'est-à-dire en fin de compte que, pour $f \in I$ et $A \in \mathfrak{g}$, on a $f(Z)' = 0$. On calcule

$$f(Z)' = (df)_Z(Z') = -(df)_Z(AZ)$$

et il reste à vérifier que si $(df)_{\mathrm{Id}}(A) = 0$, alors $(df)_Z(AZ) = 0$, ce qui est bien vrai en ramenant Z en Id et en utilisant le fait que f est une relation définissant un sous-groupe. $\square$

A.5. Un exemple : l'équation d'Airy

Je vais détailler cet exemple, puisque je l'ai utilisé au §III.5.

A.5.a. Évaluation du groupe de Galois. — On considère l'équation différentielle $y'' - ty = 0$ sur le corps $\mathbf{C}(t)$ des fractions rationnelles. On va montrer la proposition suivante :

Proposition A.5.1. — *La composante neutre du groupe de Galois de $y'' - ty = 0$ sur $\mathbf{C}(t)$ n'est pas un groupe abélien.*

On montre d'abord deux lemmes faciles.

Lemme A.5.2. — *Le groupe de Galois $\text{Gal}(y'' - ty)$ est un sous-groupe de $\text{SL}(2; \mathbf{C})$.*

Démonstration. — Soit (u, v) une base de l'espace vectoriel des solutions dans une extension de Picard-Vessiot. Calculons la dérivée du wronskien

$$w' = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}' = (uv' - u'v)' = uv'' - u''v = u(tv) - (tu)v = 0.$$

Donc w est une constante. Quitte à multiplier une des solutions par une constante, on peut supposer que $w = 1$. Ensuite on a, pour $\sigma \in \text{Gal}(y'' - ty)$,

$$1 = \sigma(1) = \sigma(w) = \begin{vmatrix} \sigma(u) & \sigma(v) \\ \sigma(u') & \sigma(v') \end{vmatrix} = \det \sigma \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = \det \sigma$$

donc le groupe de Galois est bien, en effet, contenu dans $\text{SL}(2; \mathbf{C})$. $\square$

Lemme A.5.3. — *L'extension de Picard-Vessiot n'est pas finie.*

Notons qu'en particulier, le groupe $\text{Gal}(y'' - ty)$ n'est pas fini.

Démonstration. — Sinon, les solutions, dont nous savons qu'elles sont entières, seraient des solutions d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbf{C}(t)$, donc des polynômes (exercice III.15), ce qui n'est pas possible (exercice III.14). $\square$

Démonstration de la proposition A.5.1. — Supposons donc que la composante neutre G° du groupe de Galois soit un groupe abélien. Il n'est pas difficile de montrer⁽⁴⁾ que, pour un sous-groupe algébrique infini G de $\text{SL}(2; \mathbf{C})$, avoir une composante neutre abélienne implique

- soit que les éléments de G sont simultanément triangulaires
- soit que G a un sous-groupe d'indice 2 dont les éléments sont simultanément diagonaux. Appelons H ce sous-groupe.

Dans le premier cas, il existe une solution u de l'équation d'Airy telle que $\sigma(u)$ soit colinéaire à u pour tout $\sigma \in \text{Gal}(y'' - ty)$. On a alors

$$\sigma\left(\frac{u'}{u}\right) = \frac{\lambda u'}{\lambda u} = \frac{u'}{u}$$

⁽⁴⁾Voir la proposition A.5.5.

donc $u'/u \in \mathbf{C}(t)$. Soit $z = u'/u$. Alors, en dérivant la relation $u' = zu$, on trouve $(t - z^2)u = z'u$ et donc z est une solution de l'équation différentielle « de Riccati » $z' = t - z^2$.

Dans le deuxième cas, en appelant (u, v) une base de vecteurs propres communs pour les éléments de H , on voit de même qu'on a, pour $\sigma \in G$,

$$\text{soit } \sigma^2 \left(\frac{u'}{u} \right) = \frac{u'}{u}, \text{ soit } \sigma \left(\frac{u'}{u} \right) = \frac{u'}{u}.$$

Donc u'/u est dans une extension quadratique L de $\mathbf{C}(t)$ (de groupe de Galois G/H). De même $z = u'/u$ est solution de l'équation différentielle $z' = t - z^2$.

Donc, si on suppose G° abélien, l'équation de Riccati $z' = t - z^2$ devrait avoir une solution rationnelle ou une solution dans une extension quadratique de $\mathbf{C}(t)$. La suite consiste à montrer que ce n'est pas possible. C'est élémentaire, mais assez calculatoire.

Dans le premier cas, on arrive rapidement à une contradiction en écrivant z comme un quotient de polynômes

$$z = \frac{f(t)}{g(t)}, \quad \deg f = m, \quad \deg g = n.$$

En dérivant, l'équation de Riccati donne en effet

$$f'g - fg' + f^2 = tg^2.$$

Si $m > n$, le degré du premier membre est $2m$, strictement plus que le degré $2n + 1$ du second membre. Si $m \leq n$, le degré du premier membre est $\leq 2n$ alors que celui du second membre est $2n + 1$. C'est la contradiction cherchée.

Obtenir une contradiction dans le deuxième cas est un tout petit peu plus compliqué, mais l'idée est la même : montrer qu'une fraction rationnelle devrait satisfaire une équation différentielle compliquée mais dont on sait montrer qu'elle ne peut avoir de solution rationnelle. La fonction z satisfait à

$$\begin{cases} z' = t - z^2 \\ z^2 + rz + s = 0, \quad r, s \in \mathbf{C}(t). \end{cases}$$

On va éliminer z et s pour écrire une équation différentielle à laquelle satisfait la fraction rationnelle r . On dérive l'équation algébrique :

$$2zz' + r'z + rz' + s' = 0,$$

on utilise l'équation de Riccati, pour obtenir

$$-2z^3 - rz^2 + (2t + r')z + rt + s' = 0.$$

On ajoute $2z(z^2 + rz + s)$, qui est nul, on arrive à

$$rz^2 + (2t + 2s + r')z + rt + s' = 0,$$

encore une équation du second degré pour z . On en déduit que

$$\begin{cases} 2t + 2s + r' = r^2 \\ rt + s' = rs. \end{cases}$$

La première équation donne s en fonction de r :

$$s = \frac{r^2 - r'}{2} - t.$$

En dérivant cette même équation, on exprime s' à l'aide de r :

$$s' = rr' - 1 - \frac{r''}{2}$$

on reporte le tout dans la deuxième équation. À la suite de ces acrobaties, on a montré que r doit être solution de l'équation différentielle

$$r'' - 3rr' + r^3 - 4rt + 2 = 0.$$

On montre enfin qu'il n'y a pas de fraction rationnelle $r = f/g$ qui soit solution de cette équation différentielle. Posons $m = \deg f$, $n = \deg g$. Substituons $r = f/g$ dans l'équation différentielle supposée satisfaite par r , multiplions par g^3 pour supprimer les dénominateurs, le numérateur devient une combinaison linéaire des polynômes

$$g^2 f'', fg g'', gf' g', f(g')^2, ff' g, f^2 g', f^3, tfg^2, g^3.$$

Si $m = n$, le terme tfg^2 ne peut disparaître. Si $m > n$, même problème avec f^3 . Si $n > m + 1$, c'est g^3 qui reste... mais hélas, si $n = m + 1$, les termes tfg^2 et g^3 ont le même degré. Il faut donc regarder leurs coefficients de plus près.

Développons r en série de Laurent au voisinage d'un de ses pôles a :

$$r = \frac{c_k}{(t-a)^k} + \dots + \frac{c_1}{(t-a)} + \text{holomorphe}.$$

Pour satisfaire l'équation différentielle compliquée que r satisfait, on doit avoir égalité entre les deux plus grands des nombres $k+2$, $2k+1$, $3k$, donc $k=1$. Dans cette même équation différentielle, un terme $c/(t-a)$ donne

$$\frac{2c}{(t-a)^3} \text{ dans } r'', \frac{3c^2}{(t-a)^3} \text{ dans } -3rr' \text{ et } \frac{c^3}{(t-a)^3} \text{ dans } r^3$$

donc c doit être tel que $c(c^2 + 3c + 2) = 0$, soit $c = -1$ ou -2 si a est vraiment un pôle de r .

Finalement, comme $r = f/g$ avec $\deg g = \deg f + 1$, on a $f(t) = \alpha t^m + \dots$, $g(t) = t^{m+1} + \dots$ et

$$r(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{c_i}{t-a_i} \text{ avec } c_i = -1 \text{ ou } -2$$

donc $\alpha = c_1 + \dots + c_{m+1} \in \mathbf{Z}$.

... mais pour annuler les termes en tfg^2 (venant de $-4tr$) et g^3 (venant de $+2$), il faut que $-4\alpha + 2 = 0$, impossible si α est entier. Ouf! $\square$

Remarque A.5.4. — En affinant un peu, on peut montrer que le groupe de Galois est $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ tout entier. Voir [44] dont cette démonstration « algébrique » est tirée.

A.5.b. Sous-groupes de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$. — Dans un souci de complétude (?), je démontre ici les propriétés des sous-groupes de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ que j'ai utilisées dans la démonstration de la proposition A.5.1.

Proposition A.5.5. — Soit G un sous-groupe algébrique de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ dont la composante neutre G° est un groupe abélien. Alors

- le groupe G est fini
- ou G a un sous-groupe d'indice 2 formé d'éléments diagonalisés dans une même base
- ou tous les éléments de G sont trigonalisés dans une même base.

Démonstration. — Commençons par examiner la composante neutre G° .

- Soit $G^\circ = \{\mathrm{Id}\}$,
- soit G° contient un élément $h \neq \pm \mathrm{Id}$, et alors
 - soit h est diagonalisable dans une base (u, v) ; comme $G \subset \mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$, les valeurs propres de h sont distinctes et comme G° est abélien, tous les éléments de G° sont diagonalisables dans la base (u, v) ;
 - soit h n'est pas diagonalisable, il a un vecteur propre u (h est un endomorphisme complexe), qui est vecteur propre de tous les éléments du groupe commutatif G° , tous sont triangulaires dans une base (u, v) .

Venons en maintenant au groupe G lui-même. Quand $G^\circ = \{\mathrm{Id}\}$, G est fini (on utilise le fait que G a un nombre fini de composantes connexes, c'est le seul endroit où j'utilise, de façon très faible, que G est algébrique). Si $G^\circ \neq \{\mathrm{Id}\}$, montrons que G préserve l'ensemble des vecteurs propres communs des éléments de G° . Soient u un tel vecteur, $g \in G$, $h \in G^\circ$, on a

$$(ghg^{-1})(g(u)) = gh(u) = g(\lambda u) = \lambda g(u)$$

donc $g(u)$ est un vecteur propre de ghg^{-1} . Rappelons que la composante neutre G° est un sous-groupe distingué de G , de sorte que ghg^{-1} est un élément de G° .

- Si le sous-groupe G° n'est pas diagonalisable, on conclut que l'unique droite propre (commune) de ses éléments est stable par G et donc que tous les éléments de G sont triangulaires dans une base (u, v) dont le premier vecteur est un vecteur propre.
- Si (u, v) est une base dans laquelle le sous-groupe G° est diagonal, tout élément de G envoie u sur un vecteur propre de G° , c'est-à-dire sur un λu ou un λv .
 - Si tous préservent la droite engendrée par u , ils préservent aussi celle engendrée par v et tous les éléments de G sont diagonaux dans la base (u, v) .

- Si un élément g de G envoie u sur λv , alors la matrice de g dans la base (u, v) est $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $g^2 = -\text{Id}$. Donc G a un sous-groupe d'indice 2 formé d'éléments diagonaux dans la base (u, v) .

□

Exercices faciles sur la théorie de Galois différentielle

Exercice A.1. — L'anneau des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbf{R}$ est-il un anneau différentiel (pour la dérivation habituelle des fonctions) ? Et celui des fonctions $\mathcal{C}^\infty$?⁽⁵⁾

Exercice A.2. — Montrer qu'une dérivation sur un anneau intègre s'étend de façon unique en une dérivation de son corps de fractions.

Exercice A.3 (Corps des constantes). — Soit k un corps différentiel et soit $C \subset k$ l'ensemble de ses *constantes*, c'est-à-dire des éléments a tels que $a' = 0$. Montrer que C est un corps, que $'$ est un opérateur C -linéaire et que k est une C -algèbre.

Exercice A.4. — Soit Γ la droite projective complexe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, considérée comme $\Gamma = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Vérifier que le corps des fonctions méromorphes sur Γ est le corps $\mathbf{C}(t)$ des fractions rationnelles et que le champ de vecteurs $\frac{d}{dt}$ sur $\mathbf{C}$ se prolonge en un champ de vecteurs X sur Γ dont on précisera les zéros (voir la figure 1).

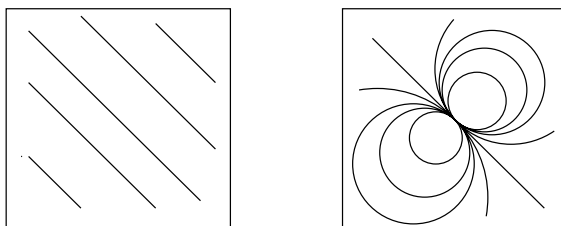


FIGURE 1. Trajectoires de $\frac{d}{dt}$ aux voisinages de 0 et de ∞

Exercice A.5. — Écrire un système $Y' + AY = 0$ équivalent à l'équation $L \cdot y = 0$.

Exercice A.6. — On considère le corps différentiel $k = \mathbf{C}(t)$, l'anneau $\mathbf{C}[[t]]$ des séries formelles et son corps des fractions K , de sorte que K est une extension différentielle de k .

⁽⁵⁾L'anneau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ n'est jamais intègre, contrairement à l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, qui l'est grâce au principe des zéros isolés. C'est une des raisons pour lesquelles la théorie de Galois différentielle est cantonnée aux fonctions analytiques.

Vérifier que l'équation $y' = y$ n'a aucune solution non triviale dans k mais a des solutions dans K . Pourquoi K n'est-il pas une extension de Picard-Vessiot pour cette équation ?

Exercice A.7. — Soient k un corps différentiel de corps de constantes C et $\mathfrak{B}$ une k -algèbre différentielle. On suppose que $\mathfrak{B}$ n'a pas d'idéal différentiel propre. Montrer que les constantes du corps des fractions de $\mathfrak{B}$ sont les constantes de $\mathfrak{B}$. Appelons $C_{\mathfrak{B}}$ ce corps de constantes.

On suppose maintenant que $C = \mathbf{C}$ et que $\mathfrak{B}$ est une k -algèbre de type fini. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal (ordinaire) maximal de $\mathfrak{B}$. La projection $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{m}$ identifie k à un sous-corps. Montrer que l'extension $(\mathfrak{B}/\mathfrak{m})/k$ est algébrique. Montrer que toute constante de $\mathfrak{B}$ est algébrique sur $\mathbf{C}$ et enfin que $C_{\mathfrak{B}} = \mathbf{C}$.

Exercice A.8. — On considère le corps différentiel $k = \mathbf{C}(t)$ et l'équation différentielle

$$y' = \frac{\alpha}{t}y \quad (\text{pour } \alpha \in \mathbf{C}).$$

Montrer qu'elle a une solution rationnelle si et seulement si $\alpha \in \mathbf{Z}$, puis qu'elle a une solution algébrique sur $\mathbf{C}(t)$ si et seulement si $\alpha \in \mathbf{Q}$.

Montrer que $K = k(t^{\frac{1}{\alpha}})$ est une extension de Picard-Vessiot de cette équation.

Exercice A.9. — On donne deux nombres complexes a et b . On demande de déterminer le groupe de Galois sur $\mathbf{C}(t)$ de l'équation différentielle linéaire (à coefficients constants)

$$y'' - 2by' + a^2y = 0.$$

Exercice A.10. — Soit k un corps différentiel dont le corps de constantes est $\mathbf{C}$ et dont la dérivation est notée $a \mapsto a'$. On considère l'équation différentielle

$$y'' - ay' + by = 0$$

et une extension de Picard-Vessiot K pour cette équation. Si u et v sont deux solutions indépendantes, on note

$$w = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \text{ leur wronskien.}$$

C'est un élément de K . Montrer que $w \in k$ si et seulement si le groupe de Galois est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$. Calculer w' et en déduire que le groupe de Galois est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ si et seulement si a est de la forme c'/c pour un élément c de k .

Exercice A.11. — Préciser le groupe de Galois de l'équation de Cauchy

$$y'' - \frac{a}{t^2}y = 0$$

selon que les racines de $\alpha^2 - \alpha - a = 0$ sont ou ne sont pas dans $\mathbf{Q}$.

APPENDICE B

CE QU'IL FAUT SAVOIR SUR LES COURBES ALGÈBRIQUES

Je décris ici ce qui est utilisé dans ces notes sur les courbes et leurs jacobiniennes. Pour les courbes complexes (ou surfaces de Riemann), je renvoie les lecteurs aux livres de Griffiths et Harris [34], Farkas et Kra [25] et Reyssat [68].

B.1. Courbes complexes et surfaces de Riemann

B.1.a. Complétion des courbes affines. — Les courbes algébriques qui apparaissent au chapitre IV de ce livre sont données par des équations polynomiales $P(x, y) = 0$, c'est ce qu'on appelle des courbes « affines » (parce qu'elles vivent dans le plan affine $\mathbf{C}^2$). Comme telles, elles ne sont pas compactes : elles ont toujours des points à l'infini. Elles peuvent même être singulières. On peut toutefois les désingulariser et les compléter en surfaces de Riemann.

Une *surface de Riemann* est une variété analytique complexe de dimension 1, que nous supposons ici compacte et connexe⁽¹⁾. À la courbe C_P définie par

$$C_P = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid P(x, y) = 0\}$$

est associée une surface de Riemann compacte X_P (bien définie) telle qu'il existe deux parties finies $E \subset C_P$, $F \subset X_P$ avec $C_P - E = X_P - F$. Ainsi les deux surfaces coïncident-elles en dehors d'un nombre fini de points : X_P est compacte alors que C_P ne l'est jamais, X_P est lisse alors que C_P peut être singulière en certains points de E (précisons que si C_P est lisse, $E = \emptyset$ et X_P est une complétion de C_P).

On dit que la surface de Riemann X_P est la « normalisée » de C_P . On peut aussi compléter une courbe affine singulière en lui ajoutant des points « à l'infini », c'est-à-dire sans changer ses points singuliers. Ceci est d'ailleurs inévitable si on veut compléter assez uniformément des familles de courbes comme celles que l'on rencontre dans les systèmes intégrables et donc dans ces notes.

⁽¹⁾Bien qu'on ait utilisé des surfaces de Riemann non compactes au chapitre III.

C'est une opération très concrète, qu'on peut réaliser en « séparant les branches à l'infini » sans se préoccuper de ce qui se passe à distance finie. On trouvera un exemple simple dans l'exercice B.1.

Exemples B.1.1

- On complète $\mathbf{C}$ (la courbe affine plane d'équation $y = 0$, si on veut) en lui ajoutant un point à l'infini. La surface de Riemann obtenue est la droite projective complexe $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ou « sphère de Riemann ».
- Considérons la courbe affine d'équation $y^2 = Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 3. Si les racines de Q sont distinctes, la courbe est lisse. On peut la compléter en lui ajoutant un unique point à l'infini. La surface de Riemann obtenue est une « courbe elliptique ».

B.1.b. Genre d'une courbe. — L'invariant le plus fondamental attaché à une courbe est son « genre », un entier g qui accepte de nombreuses définitions⁽²⁾.

Il décrit complètement la topologie de la surface de Riemann X , puisqu'il est le nombre de ses anses, c'est-à-dire qu'on a

$$H_1(X; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{2g}.$$

Il a aussi beaucoup à dire sur la structure analytique, puisqu'il est aussi la dimension de l'espace vectoriel complexe des formes holomorphes sur X , ce qu'on écrira (avec une notation qui sera expliquée au § B.3)

$$g = \dim H^0(\Omega_X^1),$$

écriture dans laquelle Ω_X^1 désigne le *faisceau* des germes de formes holomorphes et $H^0(\Omega_X^1)$ l'espace de ses sections globales, l'espace des formes holomorphes.

Exemples B.1.2

- La droite projective $\mathbf{P}^1$ est une surface de Riemann de genre 0 (c'est une sphère).
- Les courbes elliptiques. On les obtient comme quotients de $\mathbf{C}$ par les réseaux. Ce sont donc, topologiquement, des tores... et donc des courbes de genre 1. La fonction $\wp$ de Weierstrass associée au réseau Λ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

de sorte que $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ paramètre la courbe d'équation $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, d'où un isomorphisme de $\mathbf{C}/\Lambda$ sur la complétion de cette courbe (les pôles de $\wp$ étant envoyés sur le point à l'infini).

⁽²⁾Il y en a dix-huit dans [68].

Le résultat le plus utile sur les courbes est certainement le théorème de Riemann-Roch, un théorème d'existence de fonctions méromorphes très précis (voir le § B.4.b) et dont l'une des conséquences est l'équivalence des deux définitions du genre que je viens d'évoquer.

Un résultat plus facile mais très utile est la formule de Riemann-Hurwitz. Il y est question d'une application $f : X \rightarrow X'$ entre deux surfaces de Riemann. La formule en question est le résultat d'un simple calcul de caractéristique d'Euler qui permet de comparer les genres de X et X' .

Par exemple, si l'application f est de degré 2, la formule de Riemann-Hurwitz affirme que la caractéristique d'Euler $2 - 2g$ de X est le double de celle $2 - 2g'$ de X' , à laquelle il faut retirer le nombre de points de ramification.

Exemples B.1.3

- Un revêtement double de $\mathbf{P}^1$ ramifié en quatre points est une courbe de genre 1.
- Les courbes qui ont une application de degré 2 à valeurs dans $\mathbf{P}^1$ sont dites « hyperelliptiques ». Il y en a beaucoup dans ces notes. Ce sont les courbes qui ont une équation affine de la forme $y^2 = Q(x)$ (l'application de degré 2 est $(x, y) \mapsto x$, voir l'exercice B.1). Sur ces courbes, il y a une involution, dite « involution hyperelliptique » et qui n'est autre que l'application $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

En appliquant la formule de Riemann-Hurwitz, on voit que le genre de la courbe est g si $\deg Q = 2g + 1$ ou $2g + 2$.

B.2. Fibrés en droites sur les courbes

Un fibré en droites (holomorphe) sur une surface de Riemann X est une surface complexe L avec une projection $\pi : L \rightarrow X$ dont toutes les fibres sont des espaces vectoriels complexes de dimension 1 et qui est localement triviale au sens où :

- La courbe X est recouverte par des ouverts U tels qu'il existe des homéomorphismes φ_U rendant les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times \mathbf{C} \\ & \searrow \pi \quad \swarrow & \\ & U & \end{array}$$

commutatifs.

- Si U et V sont deux ouverts du recouvrement, au-dessus de $U \cap V$, on a

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}(x, \alpha) = (x, f_{UV}(x) \cdot \alpha)$$

pour une fonction holomorphe f_{UV} qui ne s'annule pas.

Exemples B.2.1

- Le fibré trivial, ou $L = X \times \mathbf{C}$ avec la projection naturelle (on peut prendre $U = X$, $f_U \equiv 1$).
- Le fibré tautologique $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbf{P}^1$ (j'expliquerai la notation au §B.4.a) :

$$\mathcal{O}(-1) = \{(\ell, v) \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^2 \mid v \in \ell\} \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^2$$

(les points ℓ de $\mathbf{P}^1$ sont les droites vectorielles de $\mathbf{C}^2$) avec la projection naturelle sur $\mathbf{P}^1$. On peut trivialisier le fibré sur les deux ouverts U_0 (où $\ell \neq \mathbf{C} \times 0$, c'est-à-dire où $y \neq 0$) et U_∞ ($\ell \neq 0 \times \mathbf{C}$, $x \neq 0$).

Notons φ_0 et φ_∞ pour φ_{U_0} et φ_{U_∞} . Les trivialisations locales sont

$$\begin{aligned} U_0 \times \mathbf{C} &\xrightarrow{\varphi_0^{-1}} \pi^{-1}(U_0) \\ (z, b) &\longmapsto ([z, 1], (bz, b)) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} U_\infty \times \mathbf{C} &\xrightarrow{\varphi_\infty^{-1}} \pi^{-1}(U_\infty) \\ (z', a) &\longmapsto ([1, z'], (a, az')) \end{aligned}$$

de sorte que, si l'on identifie $U_0 \cap U_\infty$ à $\mathbf{C}^*$ en utilisant la coordonnée z de U_0 , $\varphi_\infty \circ \varphi_0^{-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} &\longrightarrow U_0 \times \mathbf{C} \longrightarrow U_\infty \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \\ (z, b) &\longmapsto (z, b) \longmapsto \left(\frac{1}{z}, bz\right) \longmapsto \left(z, \frac{b}{z}\right). \end{aligned}$$

Donc la fonction de transition est $f_{\infty 0}(z) = 1/z$.

- Le fibré tangent. Soit (U, g_U) un atlas de X , c'est-à-dire que $g_U : U \rightarrow \mathbf{C}$ est un homéomorphisme et $g_V \circ g_U^{-1}$ une fonction holomorphe sur $g_U(U \cap V)$. Le fibré défini en recollant les $U \times \mathbf{C}$ par $f_U(x) = (g_V \circ g_U^{-1})'(x)$ est le fibré tangent à X , noté TX .
- Son dual est le fibré cotangent, T^*X ou K_X , dit aussi « canonique⁽³⁾ ».

Il y a une notion évidente d'isomorphisme de fibrés.

Structure de groupe. — Le produit tensoriel de deux fibrés en droites holomorphes est encore un fibré en droites holomorphe. De même pour le dual d'un fibré en droites. Le produit tensoriel munit l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X d'une structure de groupe, l'élément neutre est le fibré trivial et l'inverse d'un fibré est son dual (voir les exercices B.2, B.3 et B.4).

⁽³⁾ Si X est une variété analytique de dimension n , T^*X est un fibré vectoriel de rang n et K_X , sa puissance extérieure maximale $\wedge^n T^*X$, le canonique, est toujours un fibré en droites. Pour les courbes ($n = 1$), ils coïncident.

Exemple B.2.2. — Sur $\mathbf{P}^1$, on appelle $\mathcal{O}(1)$ le dual du fibré tautologique $\mathcal{O}(-1)$ et $\mathcal{O}(n)$ la puissance tensorielle $|n|$ -ième de $\mathcal{O}(1)$ (si n est positif) ou de $\mathcal{O}(-1)$ (si n est négatif). Voir l'exercice B.5.

Sections. — Sur une surface de Riemann (supposée compacte) les seules fonctions holomorphes sont les constantes, une conséquence du principe du maximum. Certains fibrés en droites ont, eux, des *sections* holomorphes... c'est ce qu'on peut faire de plus proche des fonctions.

Une « section » holomorphe, resp. méromorphe de $\pi : L \rightarrow X$ est une application $s : X \rightarrow L$ telle que $\pi \circ s = \text{Id}_X$. Dans une trivialisation locale, une section n'est autre qu'une fonction holomorphe, resp. méromorphe, puisque $\varphi_U \circ s$

$$U \xrightarrow{s} \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi_U} U \times \mathbf{C}$$

est de la forme $\varphi_U \circ s(z) = (z, s_U(z))$ (on a $\pi \circ s = \text{Id}$). Sur $U \cap V$, on a $s_U = f_{UV} s_V$.

Tous les fibrés en droites ont des sections méromorphes. Ceci n'est pas une trivialité mais découle des résultats généraux d'existence de fonctions (Riemann-Roch).

B.3. Faisceaux et cocycles

L'ensemble des germes de sections d'un fibré constitue un faisceau⁽⁴⁾. Je ne vais pas faire ici une théorie générale (voir [31]).

Exemples B.3.1

- Le faisceau $\mathcal{O}_X$ des germes de fonctions holomorphes est associé au fibré trivial $X \times \mathbf{C}$.
- Le faisceau Ω_X^1 des germes de formes holomorphes est le faisceau associé au fibré T^*X (ou K_X puisque X est une courbe).

Les faisceaux servent à faire de la cohomologie. Contentons-nous de décrire ici les groupes $H^0(X; \mathcal{F})$ et $H^1(X; \mathcal{F})$.

L'espace vectoriel $H^0(X; \mathcal{F})$ est l'espace des sections globales du faisceau $\mathcal{F}$. Par exemple, dire que les fonctions holomorphes sur X sont constantes, c'est dire que $H^0(X; \mathcal{O}_X) = \mathbf{C}$; dire que les formes holomorphes forment un espace de dimension g , c'est dire que $\dim H^0(X; \Omega_X^1) = g$.

Exemple B.3.2. — On vérifie (exercice B.6) que $H^0(\mathbf{P}^1; \mathcal{O}(n))$ est isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n si n est positif et que c'est l'espace vectoriel nul sinon.

⁽⁴⁾ mais il y a beaucoup de faisceaux qui ne proviennent pas de fibrés en droites... ni même de fibrés vectoriels

Le groupe $H^1(X; \mathcal{F})$ est celui des 1-cocycles. On se donne un recouvrement de X . Un 1-cocycle est la donnée de sections du faisceau $\mathcal{F}$ au-dessus de chaque intersection $U \cap V$ de deux ouverts du recouvrement, satisfaisant une condition de compatibilité (dite « condition de cocycle », précisément) sur les intersections de trois ouverts. Comme tout groupe de cohomologie, $H^1(X; \mathcal{F})$ est un quotient : on quotiente le groupe des cocycles par celui des cobords, c'est-à-dire des cocycles de la forme $f_{UV} = f_U - f_V$ (où f_U et f_V sont définies sur U et V).

Le résultat de cette opération *dépend* du recouvrement choisi. Pour définir $H^1(X; \mathcal{F})$, il faut tenir compte de tous les recouvrements. On peut démontrer que, dans le cas d'une courbe X recouverte par deux ouverts affines U_0 et U_∞ (le cas qui nous intéresse), $H^1(X; \mathcal{F})$ est bien le groupe quotient des 1-cocycles du recouvrement $X = U_0 \cup U_\infty$ par celui des cobords.

Remarque B.3.3. — Le même résultat vaut pour la surface espace total du fibré $\mathcal{O}(n)$ sur $\mathbf{P}^1$, recouverte par les deux ouverts $U_0 \times \mathbf{C}$ et $U_\infty \times \mathbf{C}$ — ce qu'on a utilisé au §IV.2.d.

Exemple B.3.4. — Considérons le fibré $\mathcal{O}_X^*$ des germes de fonctions holomorphes *non nulles* sur la courbe X . Un 1-cocycle est exactement la même chose qu'une famille de fonctions de transition définissant un fibré en droites sur X . De plus, un cocycle définit le fibré trivial si et seulement si c'est un cobord.

L'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X s'identifie à $H^1(X; \mathcal{O}_X^*)$. On aura remarqué que c'est un groupe.

Il reste à mentionner l'inévitable « suite exacte exponentielle », au niveau des faisceaux d'abord

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

au niveau des groupes de cohomologie ensuite

$$\longrightarrow H^1(X; \mathbf{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\deg} H^2(X; \mathbf{Z}) \longrightarrow$$

avec un homomorphisme « degré » dont on reparlera.

Finitude. — Quand X est compacte et quand $\mathcal{F}$ est le faisceau des sections d'un fibré, les espaces $H^*(X; \mathcal{F})$ sont de dimension finie, un résultat non trivial pour lequel je renvoie à [68] ou [34] par exemple.

B.4. Groupe de Picard, Riemann-Roch, jacobienne

B.4.a. Diviseurs et groupe de Picard. — À toute section méromorphe d'un fibré en droites est associé un diviseur sur la courbe. Un diviseur est une combinaison linéaire formelle

$$D = \sum_{i \in I} m_i P_i$$

(I un ensemble fini, $m_i \in \mathbf{Z}$, $P_i \in X$). Par exemple une fonction méromorphe f sur X définit un diviseur

$$(f) = \text{zéros de } f - \text{pôles de } f$$

(comptés avec multiplicités). De même une forme méromorphe définit aussi un diviseur.

Les diviseurs forment un groupe noté $\text{Div}(X)$, le groupe abélien libre engendré par les points de X .

Il y a un homomorphisme naturel du groupe $\text{Div}(X)$ sur $\mathbf{Z}$, le *degré* :

$$\text{deg} : \sum m_i P_i \longmapsto \sum m_i.$$

Par exemple, les fonctions ont autant de zéros que de pôles, donc les diviseurs des fonctions sont de degré 0. Ceux des formes méromorphes sont de degré $2g - 2$ (encore une conséquence du théorème de Riemann-Roch).

Groupe de Picard. — Le groupe $\text{Div}(X)$ est à la fois énorme et sans grande signification. Pour lui donner un peu plus de sens, on le munit d'une relation d'équivalence qui prend en compte la structure analytique de la surface, c'est l'« équivalence linéaire »

$$D \sim D' \iff \text{il existe une fonction méromorphe } f \text{ telle que } D - D' = (f).$$

Le groupe quotient est le *groupe de Picard* $\text{Pic}(X)$. Puisque les diviseurs des fonctions sont de degré nul, l'homomorphisme « de degré » est bien défini sur $\text{Pic}(X)$. La composante de degré d est appelée $\text{Pic}^d(X)$. La composante $\text{Pic}^0(X)$ est un sous-groupe.

Diviseurs et fibrés. — À une section méromorphe s d'un fibré $L \rightarrow X$, on associe un diviseur (exactement comme à une fonction)

$$(s) = \text{zéros de } s - \text{pôles de } s.$$

Par exemple, le fibré $\mathcal{O}(n)$ sur $\mathbf{P}^1$ a une section dont le diviseur est de degré n .

Si s et s' sont deux sections méromorphes du même fibré L , s/s' est une fonction méromorphe sur X . En effet, sur chaque ouvert U trivialisant L , s_U/s'_U est une fonction méromorphe g_U et toutes les g_U se recollent pour former une fonction globale parce que, sur une intersection $U \cap V$, on a

$$s_U = f_{UV} s_V, \quad s'_U = f_{UV} s'_V$$

donc

$$\frac{s_U}{s'_U} = \frac{s_V}{s'_V}$$

et $g_U = g_V$ sur $U \cap V$.

On a ainsi un homomorphisme du groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites dans le groupe $\text{Pic}(X)$. Cet homomorphisme est un isomorphisme. La

remarque essentielle menant à ce résultat est le fait qu'un diviseur définit un fibré, ce que j'explique maintenant.

Fibrés et diviseurs. — Commençons par le cas d'un point P . On recouvre X par un ouvert de carte U au voisinage de P et par $V = X - \{P\}$. Si z est une coordonnée locale centrée en P , alors c'est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur $U \cap V = U - \{P\}$. On recolle $U \times \mathbf{C}$ et $V \times \mathbf{C}$ au-dessus de $U \cap V$ par

$$(z, \alpha) \longmapsto (z, z\alpha).$$

Il est bien clair que le fibré en droites obtenu possède une section holomorphe dont le diviseur est P : c'est la section identiquement égale à 1 sur V et égale à z sur U . Appelons L_P ce fibré.

Plus généralement, si $D = \sum m_i P_i$ est un diviseur, on définit $L_D = \bigotimes L_{P_i}^{\otimes m_i}$, où, bien sûr, $L^{\otimes m}$ désigne $(L^*)^{\otimes (-m)}$ si $m < 0$.

Degré. — Remarquons enfin que, par définition du degré d'un fibré comme « connectant » dans la suite exacte exponentielle, le degré du fibré L_P vaut 1. Ainsi les deux notions de degré coïncident elles. On en déduit par exemple que le degré de $\mathcal{O}(n)$ est n , ce qui justifie la notation.

B.4.b. Théorème de Riemann-Roch. — Si D est un diviseur sur la courbe X de genre g , appelons L_D le fibré en droites ainsi associé à D ou le faisceau de ses sections locales. Le théorème de Riemann-Roch affirme alors qu'on a l'égalité :

$$\dim H^0(X; L_D) - \dim H^1(X; L_D) = \deg D - g + 1.$$

Remarque B.4.1. — L'espace $H^0(X; L_D)$ est celui des sections holomorphes globales de L_D . Par définition de L_D , il s'agit de l'espace des fonctions *méromorphes* sur X dont le diviseur satisfait à

$$(f) + D \geq 0$$

(au sens où tous les coefficients sont positifs ou nuls). De même, $H^1(X; L_D)$ est isomorphe au dual de $H^0(X; \Omega_X^1 \otimes L_D^*)$ (dualité de Serre), de sorte que cet espace a même dimension que l'espace des formes méromorphes η sur X dont le diviseur est tel que

$$(\eta) - D \geq 0$$

(voir l'exercice B.10). Le théorème de Riemann-Roch est donc un théorème d'existence de fonctions. Je renvoie à [68] ou [34]⁽⁵⁾.

⁽⁵⁾Certaines démonstrations semblent courtes et élémentaires. C'est le cas de celles qui restent dans le cadre algébrique [34]. C'est aussi le cas de certaines démonstrations écrites dans le cadre analytique... on ne s'y trompera pas, il faut, au moins, utiliser le fait non trivial que les espaces $H^k(X; L)$ sont de dimension finie.

B.4.c. Jacobienne. — À toute courbe de genre g est associé un tore complexe de dimension g , sa jacobienne, que l'on peut décrire à l'aide de l'intégration des formes différentielles ou par les diviseurs et fibrés en droites.

Commençons par l'intégration des formes holomorphes. Soit X une courbe complexe. Il y a une application naturelle (intégration)

$$\begin{aligned} H_1(X; \mathbf{Z}) &\longrightarrow H^0(\Omega_X^1)^* \\ \gamma &\longmapsto \left(\omega \mapsto \int_\gamma \omega \right), \end{aligned}$$

dont on peut montrer qu'elle est injective; son image est le « réseau des périodes » $\Lambda \cong \mathbf{Z}^{2g}$ dans $H^0(\Omega_X^1)^* \cong \mathbf{C}^g$ (en utilisant le théorème de Riemann-Roch). La jacobienne est le tore quotient

$$\text{Jac}(X) = H^0(\Omega_X^1)^* / \Lambda,$$

un tore complexe de dimension g . L'espace tangent de $\text{Jac}(X)$ en chaque point est canoniquement isomorphe à $H^0(\Omega_X^1)^*$, qui est lui-même isomorphe à $H^1(\mathcal{O}_X)$, le premier groupe de cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_X$ des germes de fonctions holomorphes sur X . Cet isomorphisme est un cas particulier simple de la dualité de Serre.

B.4.d. Application d'Abel-Jacobi. — L'application d'Abel-Jacobi est simplement l'intégration

$$\begin{aligned} \text{Div}^0(X) &\longrightarrow H^0(\Omega_X^1)^* / \Lambda \\ \sum (P_j - Q_j) &\longmapsto \left(\omega \mapsto \int_{Q_j}^{P_j} \omega \right) \end{aligned}$$

(on intègre sur n'importe quel chemin, le résultat dans le quotient ne dépend pas du choix) dont le théorème d'Abel-Jacobi affirme qu'elle définit un isomorphisme

$$\text{Pic}^0(X) \longrightarrow \text{Jac}(X).$$

Si Q est un point fixé sur X , l'application

$$\begin{aligned} u : X &\longrightarrow \text{Jac}(X) \\ P &\longmapsto \left(\omega \mapsto \int_Q^P \omega \right), \end{aligned}$$

est une injection si $g \geq 1$, et en particulier un isomorphisme si $g = 1$: les courbes de genre 1 sont, au choix près d'un point P , des groupes, étant isomorphes à leurs jacobiniennes.

Remarquons encore que u induit un isomorphisme

$$u_* : H_1(X; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\text{Jac}(X); \mathbf{Z})$$

(par définition de $\text{Jac}(X)$).

Les diviseurs combinaisons linéaires de points avec des coefficients tous positifs sont dits « effectifs ». Remarquons que les diviseurs effectifs de degré d sont exactement les points du « produit symétrique »

$$X^{(d)} = X^d / \mathfrak{S}_d.$$

L'application naturelle

$$X^{(d)} \longrightarrow \mathrm{Pic}^d(X)$$

est surjective pour $d \geq g$.

Exercices de compréhension des définitions

Exercice B.1. — Soit P un polynôme de degré $2n + 2$ dont toutes les racines sont simples. On considère la courbe affine C d'équation $y^2 = P(x)$. Montrer qu'elle est lisse.

On considère la complétion projective de cette courbe (dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$). Vérifier qu'elle a un unique point à l'infini, toujours singulier et qu'elle se compose, au voisinage de ce point, de deux branches lisses tangentes au point à l'infini. Construire une surface de Riemann (compacte connexe) X en ajoutant deux points à C .

Montrer que la fonction $x : C \rightarrow \mathbf{C}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur X . Montrer que le genre de X est n .

Exercice B.2. — Si les fibrés L et L' sont donnés respectivement par les fonctions de transition f_{UV} et f'_{UV} (pour le même recouvrement), par quelles fonctions de transition le fibré $L \otimes L'$ est-il décrit ?

Exercice B.3. — Si L est décrit par les fonctions de transition f_{UV} , quelles sont les fonctions de transition du dual L^* ?

Exercice B.4. — Montrer que, si L est un fibré en droites sur une courbe, $L \otimes L^*$ est canoniquement trivial.

Exercice B.5. — Montrer que la fonction de transition du fibré $\mathcal{O}(n) \rightarrow \mathbf{P}^1$ sur $U_0 \cap U_\infty$ est $f_{\infty,0}(z) = z^n$.

Exercice B.6. — Une section de $\mathcal{O}(n)$ est donnée par deux fonctions holomorphes s_0 et s_∞ reliées par $s_0(z) = z^n s_\infty(z')$ sur $\mathbf{C}^*$.

On suppose n positif. Montrer qu'alors s_0 est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et inversement qu'un tel polynôme définit une section de $\mathcal{O}(n)$.

Que se passe-t-il pour n négatif ?

Exercice B.7. — Soit P un point de $\mathbf{P}^1$. Montrer que L_P est isomorphe à un fibré $\mathcal{O}(n)$ (pour un entier n qu'on précisera). Montrer que le groupe $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Exercice B.8. — Soit Λ un réseau dans $\mathbf{C}$. Montrer que la forme dz (sur $\mathbf{C}$) définit une forme holomorphe sur $X = \mathbf{C}/\Lambda$ qui ne s'annule pas. Que peut-on dire du fibré cotangent à X ?

Exercice B.9 (Le fibré cotangent à $\mathbf{P}^1$). — Montrer que la forme dz (sur $\mathbf{C}$) définit une forme méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ et que le fibré cotangent à $\mathbf{P}^1$ est isomorphe au fibré⁽⁶⁾ $\mathcal{O}(-2)$.

Exercice B.10. — Soit P un point de la courbe X , de sorte que le fibré en droites L_P possède une section dont le diviseur est P . Montrer que $H^0(X; L_P)$ s'identifie à l'espace des fonctions méromorphes sur X qui ont, au pire, un pôle simple en P (et aucun autre pôle). Plus généralement, si D est un diviseur, montrer que $H^0(X; L_D)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des fonctions f méromorphes telles que

$$(f) + D \geq 0.$$

Fixons une forme méromorphe ω sur X . Montrer que $H^0(X; \Omega_X^1 \otimes L_D^*)$ s'identifie à l'espace vectoriel des fonctions méromorphes f sur X telles que

$$(f\omega) - D \geq 0$$

et à l'espace vectoriel des formes méromorphes η telles que

$$(\eta) - D \geq 0.$$

Exercice B.11. — On considère la surface de Riemann construite dans l'exercice B.1, avec ses fonctions méromorphes x et y . Déterminer les diviseurs des fonctions x et y et de la forme dx .

Montrer que les formes $x^m dx/y$ sont holomorphes sur X pour $0 \leq m \leq n-1$. On a ainsi construit n formes holomorphes (indépendantes sur X , donc une base de $H^0(X; \Omega_X^1)$)

Exercice B.12. — On considère comme au §IV.3 la courbe C d'équation

$$\lambda^2 = \frac{Q(z)}{\prod(\alpha_j - z)}.$$

On appelle ∞ son unique point au-dessus de $z = \infty$, $S_1, \dots, S_n$ les points de ramification où $Q = 0$, $A_1, \dots, A_{n+1}$ les points (∞, α_j) . Montrer que les diviseurs de λ et de dz sont

$$(\lambda) = S_1 + \dots + S_n + \infty - A_1 - \dots - A_{n+1}$$

et

$$(dz) = S_1 + \dots + S_n + A_1 + \dots + A_{n+1} - 3\infty.$$

En déduire que λdz a un pôle double en ∞ et pas d'autre pôle.

⁽⁶⁾Le fibré tangent est (donc) $\mathcal{O}(2)$. La figure 1 de l'Appendice A représente sa section holomorphe d/dz avec son zéro double à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ADLER & P. VANMOERBEKE – « Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves », et « Linearization of hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory », *Advances in Math.* **38** (1980), p. 267–317 et 318–379.
- [2] V. I. ARNOLD – *Équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1974.
- [3] ———, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.
- [4] V. I. ARNOLD & A. B. GIVENTAL – « Symplectic geometry », *Dynamical systems*, Encyclopædia of Math. Sci., Springer, 1985.
- [5] M. F. ATIYAH – « Convexity and commuting Hamiltonians », *Bull. London Math. Soc.* **14** (1982), p. 1–15.
- [6] M. AUDIN – *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Math., Birkhäuser, 1991.
- [7] ———, « Courbes algébriques et systèmes intégrables : géodésiques des quadriques », *Expositiones Math.* **12** (1994), p. 193–226.
- [8] ———, « Vecteurs propres de matrices de Jacobi », *Ann. Inst. Fourier* **44** (1994), p. 1505–1517.
- [9] ———, *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999, traduction en japonais, Kyoritsu, 2000.
- [10] ———, « Lectures on gauge theory and integrable systems », *Gauge Theory and Symplectic Geometry, Montréal 1995* (J. Hurtubise & F. Lalonde, eds.), NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1997, p. 1–48.
- [11] ———, « Eigenvectors of Lax matrices, spaces of hyperelliptic curves and action coordinates for Moser systems », *Regular and chaotic dynamics* **5** (2000), p. 67–88.

- [12] ———, « Monodromy of the spherical pendulum, via algebraic geometry », *preprint* (2000).
- [13] ———, « Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens (d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...) », Séminaire Bourbaki exposé n° 884, mars 2001.
- [14] M. AUDIN & R. SILHOL – « Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski », *Compositio Math.* **87** (1993), p. 153–229.
- [15] A. BAIDER, R. C. CHURCHILL, D. L. ROD & M. F. SINGER – « On the infinitesimal geometry of integrable systems », *Fields Institute communications*, vol. 7, Amer. Math. Soc., 1996, p. 5–56.
- [16] A. I. BOBENKO, A. G. REIMAN & M. A. SEMENOV-TIAN-SHANSKY – « The Kowalevski top 99 years later », *Commun. Math. Phys.* **122** (1989), p. 321–354.
- [17] T. BOUNTIS, H. SEGUR & F. VIVALDI – « Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property », *Phys. Rev. A* (3) **25** (1982), p. 1257–1264.
- [18] G. E. BREDON – *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 46, Academic Press, New York, 1972.
- [19] R. CUSHMAN & L. BATES – *Global aspects of classical integrable systems*, Birkhäuser, 1997.
- [20] N. DESOLNEUX-MOULIS – « Dynamique des systèmes hamiltoniens complètement intégrables sur les variétés compactes », *Géométrie symplectique et mécanique* (La Grande Motte, 1988), Springer, Berlin, 1990, p. 75–83.
- [21] J. J. DUISTERMAAT – « On global action-angle coordinates », *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), p. 687–706.
- [22] C. EHRESMANN – « Sur les espaces fibrés différentiables », *C. R. Acad. Sc. Paris* **224** (1947), p. 1611–1612.
- [23] C. EHRESMANN – « Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable », *Colloque de topologie (espaces fibrés)*, Bruxelles, 1950, Georges Thone, Liège, 1951, p. 29–55.
- [24] L. H. ELIASSEN – « Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals—elliptic case », *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), n° 1, p. 4–35.
- [25] H. FARKAS & I. KRA – *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Math., vol. 71, Springer-Verlag, 1980.
- [26] O. FORSTER – *Lectures on Riemann surfaces*, Graduate Texts in Math., vol. 81, Springer-Verlag, 1981.
- [27] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 1987.

- [28] L. GAVRILOV – « Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Hénon-Heiles system », *Physica D* **34** (1989), p. 223–239.
- [29] L. GAVRILOV & A. ZHIVKOV – « The complex geometry of the Lagrange top », *Enseign. Math. (2)* **44** (1998), p. 133–170.
- [30] S. GÉRARDY – « Le système de Hénon-Heiles », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **6** (1997), p. 633–652.
- [31] R. GODEMENT – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973, Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 1252.
- [32] W. GOLDMAN – « The symplectic nature of fundamental groups of surfaces », *Advances in Math.* **54** (1984), p. 200–225.
- [33] P. A. GRIFFITHS – « Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations », *Amer. J. Math.* **107** (1985), p. 1445–1483.
- [34] P. A. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.
- [35] V. GUILLEMIN & S. STERNBERG – « Convexity properties of the moment mapping », *Invent. Math.* **67** (1982), p. 491–513.
- [36] G.-H. HALPHEN – *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1886.
- [37] D. HILBERT & S. COHN-VOSSEN – *Anschaulige Geometrie*, Springer-Verlag, 1932.
- [38] N. HITCHIN – « Stable bundles and integrable systems », *Duke Math. J.* **54** (1987), p. 91–114.
- [39] N. HITCHIN, G. SEGAL & R. WARD – *Integrable systems, twistors, loop groups and Riemann surfaces*, Oxford Graduate texts in mathematics, Oxford Science Publications, 1999.
- [40] E. HUSSON – « Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** (1906), p. 73–152.
- [41] H. ITO – « Action-angle coordinates at singularities for analytic integrable systems », *Math. Z.* **206** (1991), p. 363–407.
- [42] C. JACOBI – *Vorlesungen über Dynamik*, Gesammelte Werke, Supplementband, Berlin, 1884.
- [43] E. JULLIARD-TOSEL – « Non intégrabilité algébrique et méromorphe de problèmes de N corps », Thèse, Université Paris 7, 1999.
- [44] I. KAPLANSKY – *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1976, Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 1251, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, N° V.

- [45] A. A. KIRILLOV – *Éléments de la théorie des représentations*, MIR, Moscou, 1974.
- [46] F. KLEIN & A. SOMMERFELD – *Theorie des Kreisels*, Teubner, Leipzig, 1897.
- [47] H. KNÖRRER – « Geodesics on the ellipsoid », *Invent. Math.* **39** (1980), p. 119–143.
- [48] E. KOLCHIN – *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York, 1973.
- [49] B. KOSTANT – « Quantization and representation theory I : prequantization », *Lectures in modern analysis and applications III*, Lect. Notes in Math., vol. 170, Springer, 1970.
- [50] S. KOWALEVSKI – « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177–232.
- [51] J. LAFONTAINE – *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.
- [52] A. H. M. LEVELT – « Differential Galois theory and tensor products », *Indag. Math. (N.S.)* **1** (1990), p. 439–449.
- [53] P. LIBERMANN & C. M. MARLE – *Symplectic geometry and analytic mechanics*, Reidel, Boston, 1987.
- [54] A. MAGID – *Lectures on differential Galois theory*, University Lecture Series, vol. 7, Amer. Math. Soc., 1994.
- [55] S. V. MANAKOV – « Note on the integration of Euler's equations of the dynamics of an n -dimensional rigid body », *Funct. Anal. Appl.* **11** (1976), p. 328–329.
- [56] H. MINEUR – « Réduction des systèmes mécaniques à n degrés de liberté admettant n intégrales premières uniformes en involution aux systèmes à variables séparées », *Journ. de Math.* **15** (1936), p. 385–389.
- [57] J. MORALES-RUIZ – *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.
- [58] J. MORALES-RUIZ & J.-P. RAMIS – « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems », *preprint* (1998).
- [59] ———, « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, II », *preprint* (1998).
- [60] J. MOSER – « On the volume elements on a manifold », *Trans. Amer. Math. Soc.* **120** (1965), p. 286–294.
- [61] J. MOSER – « Geometry of quadrics and spectral theory », *The Chern Symposium*, Springer, 1980, p. 147–188.

- [62] ———, *Integrable Hamiltonian systems and spectral theory*, Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1983.
- [63] D. MUMFORD – *Tata lectures on theta II*, Progress in Math., Birkhäuser, 1984.
- [64] G. PEREC – *Espèces d'espaces*, Galilée, 1985.
- [65] H. POINCARÉ – *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987, Réimpression de l'édition originale de 1899.
- [66] A. G. REIMAN – « Integrable Hamiltonian systems connected with graded Lie algebras », *J. Soviet Math.* **19** (1982), p. 1507–1545.
- [67] A. G. REYMAN & M. A. SEMENOV-TIAN-SHANSKI – « Group theoretical methods in the theory of finite dimensional integrable systems », *Dynamical systems VII*, Encyclopaedia of Math. Sci., vol. 16, Springer, 1994.
- [68] E. REYSSAT – *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progress in Math., vol. 77, Birkhäuser, 1990.
- [69] M. A. SEMENOV-TIAN-SHANSKI – « What a classical r -matrix is », *Funct. Anal. Appl.* **17** (1983), p. 259–272.
- [70] J.-M. SOURIAU – *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1969.
- [71] M. SPIVAK – *Differential geometry*, Publish or perish, 1975.
- [72] S. TABACHNIKOV – *Billiards*, Panoramas et Synthèses, vol. 1, Soc. Math. France, 1995.
- [73] P. VANHAECKE – *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, Lect. Notes in Math., vol. 1638, Springer, 1996.
- [74] S. VŨ-NGŨC – « Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités », Thèse, Université de Grenoble, 1998.
- [75] K. WEIERSTRASS – « Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid », *Math. Werke I*, p. 257–266.
- [76] A. WEINSTEIN – *Lectures on symplectic manifolds*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 29, Amer. Math. Soc., 1977.
- [77] A. WEINSTEIN – « The local structure of Poisson manifolds », *Journal Diff. Geom.* **18** (1983), p. 523–557.
- [78] J. WILLIAMSON – « On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems », *Amer. J. Math.* **58** (1936), p. 141–163.
- [79] ———, « An algebraic problem involving the involutory integrals of linear dynamical systems », *Amer. J. Math.* **62** (1940), p. 881–911.

- [80] S. L. ZIGLIN – « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I », *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982), p. 181–189.
- [81] ———, « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II », *Funct. Anal. Appl.* **17** (1983), p. 6–17.

INDEX

- Abel, *voir* application d'Abel-Jacobi
- action, 41, 46, 51, 54, 114
- action-angle, 46, 47, 54, 68, 91
- adjointe, 121, 130
- Adler, 102
- Airy, *voir* équation d'Airy
- algèbre
 - de lacets, 122
 - de lacets tordue, 122, 124
 - de Lie, 4, 12, 35, 72
 - de Lie symplectique, 8, 28, 30, 66
 - différentielle, 135
- algorithme de Kovacic, 77
- angle, 45, 46, 54
- anharmonique
 - oscillateur, 15, 19, 63, 75, 90
- anneau, 51
 - différentiel, 135
- application
 - d'Abel-Jacobi, 157
 - de vecteurs propres, 100, 104, 111–113
 - moment, 37, 39, 44, 45, 50, 52, 124, 131
- Arnold, *voir* équation d'Euler-Arnold, théorème d'Arnold-Liouville
- Atiyah, 53
- base symplectique, 7, 28
- Baxter, 121
- canonique
 - forme, 10
- caractéristique d'Euler, 151
- caractéristiques, 22, 29
- Cartan, *voir* formule de Cartan
- Cauchy, *voir* équation de Cauchy
- cercle, 36
- champ
 - de Jacobi, 61, 67
 - de vecteurs, 7, 136
 - fondamental, 35, 130
 - hamiltonien, 11, 29, 120
- champs
 - hamiltonien, 11
- Chasles, *voir* repère de Chasles, théorème de Chasles
- choux, iii, 42
- Clairaut, *voir* intégrale de Clairaut
- co-isotrope, 8
- coadjointe, 121, 130
- cobord, 154
- cocycle, 102, 104, 154
- cohomologie, 153
- complexification, 65
- connexion, 59, 67
- corps
 - des constantes, 135, 147
 - différentiel, 135
- correspondance de Galois, 140
- cotangent, 10
- courbe
 - affine, 99, 149
 - algébrique, 2, 95, 123
 - elliptique, 56, 95, 97, 126, 150
 - hyperelliptique, 108, 151
 - spectrale, 95, 99, 103, 106, 108, 123
- courbure, 27
- crochet
 - de Lie, 12, 91, 120
 - de Poisson, 12, 29, 65, 119
- Darboux, *voir* théorème de Darboux
- de Vries, 4
- déformation isospectrale, 99, 127
- degré, 154–156
- dérivation, 135, 136
- dérivée de Lie, 4
- deuxième
 - intégrale première, 18, 85

- diagramme de Melrose, 21
- différentiel
 - anneau, 135
 - corps, 135
 - idéal, 135
- différentielle
 - algèbre, 135
 - extension, 136
- diffusion inverse, 4
- diviseur, 154
- dual d'une algèbre de Lie, 119, 130, 131
- dualité de Serre, 157
- Duistermaat, 35, 47
- effective, 39, 45
- Ehresmann, *voir* théorème de fibration d'Ehresmann
- Eliasson, 91
- ellipsoïde, 1, 23
- équation
 - aux variations, 57, 60, 63, 66
 - aux variations normales, 67
 - d'Airy, 3, 84, 85, 93, 142
 - d'Euler-Arnold, 98, 106
 - d'Euler-Lagrange, 21
 - de Cauchy, 84, 86, 140, 148
 - de Korteweg-de Vries, 4
 - de Lamé, 72
 - de Lax, 2, 95, 97, 99, 104, 121, 122, 125, 127
 - de Riccati, 144
 - de Whittaker, 77, 84, 85
 - de Yang-Baxter, 121
- équivalence linéaire, 155
- espace
 - des caractéristiques, 22, 29
 - des droites, 10, 21
 - des géodésiques, 29
 - projectif complexe, 53
- Euler, *voir* caractéristique d'Euler, équation d'Euler-Arnold, équation d'Euler-Lagrange, solide d'Euler-Poinsot
- extension
 - de Picard-Vessiot, 64, 69, 72, 84, 93, 135, 137–139, 143
 - différentielle, 136
- faisceau, 150, 153
- fibré
 - canonique, 152
 - cotangent, 10, 152
 - en droites, 151
 - tautologique, 152
 - trivial, 152
- fibration
 - lagrangienne, 45, 53
- flot géodésique, 20, 21, 61, 98
- fonction $\wp$ de Weierstrass, 71, 95, 97, 126, 150
- fondamental
 - champ, 35, 130
- forme
 - canonique, 10
 - de Liouville, 10, 28, 114
 - holomorphe, 11
 - initiale, 61, 64, 65, 71, 74, 79, 87
 - méromorphe, 93, 155, 156
 - quadratique, 30, 33
 - symplectique, 9, 131
 - symplectique canonique, 10
 - symplectique complexe, 11
 - volume, 9
- formule
 - de Cartan, 12, 27, 36, 45
 - de Künneth, 47
 - de Riemann-Hurwitz, 151
- Galois, *voir* correspondance de Galois, groupe de Galois, théorème fondamental de la théorie de Galois
- genre, 150
- géodésiques, 21, 51, 61
 - de l'ellipsoïde, 23, 51
 - de la sphère, 56
 - des hypersurfaces, 21
 - des quadriques, 23, 47, 51, 96, 104, 123, 126
 - des surfaces de révolution, 22, 51, 55, 97
- germe, 64, 86
- Goldman, 20
- Griffiths, 102, 104
- groupe
 - algébrique, 8, 71, 79, 91, 139, 142
 - de Galois, 2, 57, 63–65, 67, 69, 71, 72, 74, 77, 79, 85, 92, 135, 138–140, 146
 - de Lie, 4, 35
 - de monodromie, 57
 - de Picard, 101, 154
 - des rotations, 14, 19, 37, 40, 50, 52
 - linéaire, 138, 142
 - symplectique, 8, 28, 74, 141
- Guillemin, 53
- hamiltonien
 - champ de vecteurs, 11
 - périodique, 36, 37
- hamiltonienne
 - opération, 35, 36
- harmonique
 - oscillateur, 13, 18, 37, 40, 48
- Heiles, *voir* système de Hénon-Heiles
- Hénon, *voir* système de Hénon-Heiles
- Hitchin, 20

- homofocales
 - quadriques, 24, 109, 130
- Hurwitz, 151
- Husson, 20
- Huygens, 54
- hyperboloïde à une nappe, 109
- idéal différentiel, 135
- identité
 - de Jacobi, 12, 120
 - de Leibniz, 12, 120
- indépendance, 18, 64, 74, 86
- inertie, 16, 20
- initiale
 - forme, 61, 64, 65, 71, 74, 79, 87
- intégrabilité
 - de l'oscillateur harmonique, 18
 - des hamiltoniens quadratiques, 33
 - du flot géodésique, 23, 31
 - du pendule simple, 18
 - du pendule sphérique, 19
 - du solide, 19, 20
 - du système de Hénon-Heiles, 18, 31, 86
- intégrable
 - champ de vecteurs, 18
 - système, 18, 40, 46
- intégrale
 - d'Uhlenbeck, 107
 - de Clairaut, 23, 31
 - de Kowalevski, 20
 - méromorphe, 20
 - polynomiale, 20
 - première, 1, 17, 57, 62–64
- involution
 - en, 18
- isotrope, 8, 18, 27, 39
- Jacobi, *voir* application d'Abel-Jacobi, champ de Jacobi, identité de Jacobi, théorème de Jacobi
- jacobienne, 2, 95, 112, 123, 157
- Kirillov, 120
- Klein, 20
- Kolchin, *voir* théorème de Kolchin
- Korteweg, 4
- Kostant, 120
- Kovacic, 77
- Kowalevski, *voir* intégrale de Kowalevski, toupie de Kowalevski
- Künneth, 47
- Lagrange, *voir* toupie de Lagrange, équation d'Euler-Lagrange
- lagrangien, 21
 - sous-espace, 8
 - tore, 41, 45
- lagrangienne
 - fibration, 45, 53, 54
 - sous-variété, 27
- Lamé, *voir* équation de Lamé
- Lax, *voir* équation de Lax
- lemme de Ziglin, 64, 74, 86, 89
- Lie, *voir* groupe de Lie, algèbre de Lie, dérivée de Lie, crochet de Lie
- Liouville, *voir* forme de Liouville, tore de Liouville, théorème d'Arnold-Liouville
- Lisbonne, 4, 98
- Manakov, 98
- Marseille, 4
- matrice
 - R , 121, 122, 132
 - fondamentale, 137, 138, 141
- mécanique hamiltonienne, 1
- Melrose, 21
- méridienne, 22
- méromorphe
 - fonction, 63, 85
 - forme, 85, 155, 156
- méthode de Moser, 26
- Mineur, 35
- moment, 16, 17, 19, 20, 23, 37, 39, 44, 45, 50
 - angulaire, 16
- monodromie, 47, 57, 85, 129
- Morales, *voir* théorème de Morales et Ramis
- Moser, 4, 26, 106, 123
- opération
 - adjointe, 130
 - coadjointe, 130
 - effective, 39, 45
 - hamiltonienne, 36, 40, 44
 - localement libre, 40, 53
 - symplectique, 35, 52
- orbite coadjointe, 120, 131
- oscillateur
 - anharmonique, 15, 19, 63, 75, 90
 - harmonique, 13, 18, 37, 40, 48
- paramètre spectral, 95, 97
- pendule
 - simple, 15, 18, 30, 48, 54
 - sphérique, 16, 19, 31, 47, 49, 51, 54, 96, 98, 99, 104, 123, 125–129
- Perec, iii
- périodes, 42, 157
- périodique
 - hamiltonien, 37
- Picard, *voir* extension de Picard-Vessiot, groupe de Picard, théorie de Picard-Vessiot

- Poincaré, 57, 60
 Poinot, 19
 Poisson, *voir* crochet de Poisson
 première
 intégrale, 1, 17, 57, 62–64
 quadrature, 1, 46
 quadriques, 23
 homofocales, 24, 109, 130
 Ramis, *voir* théorème de Morales et Ramis
 réduction, 28, 29, 52, 66, 67, 77
 repère de Chasles, 110
 réseau, 150, 157
 des périodes, 42, 43, 157
 Reyman, 98, 102, 123
 Riccati, 144
 Riemann, *voir* formule de Riemann-Hurwitz,
 sphère de Riemann, surface de Riemann,
 théorème de Riemann-Roch
 Roch, *voir* théorème de Riemann-Roch
 section, 42, 45, 153
 Segal, 4
 Semenov-Tian-Shanski, 123
 Serre, *voir* dualité de Serre
 solide, 16, 19
 d'Euler-Poinot, 19
 libre, 19, 98
 Sommerfeld, 20
 Souriau, 120
 sphère, 11, 14, 52
 de Riemann, 150
 Sternberg, 53
 Strasbourg, 4
 structure affine, 53, 54
 suite exacte exponentielle, 102, 154
 surface, 11
 de révolution, 1, 22, 51, 55, 97
 de Riemann, 58, 99, 135, 149, 151
 symplectique
 algèbre de Lie, 8, 28, 66
 algèbre de Lie, 30
 base, 7, 28
 espace vectoriel, 7
 forme, 9, 131
 géométrie, 1
 groupe, 8, 28, 74, 141
 opération, 35, 52
 réduction, 28, 29, 52, 66, 67, 77
 sous-variété, 29
 variété, 9, 10
 système
 de Goldman, 20
 de Hénon-Heiles, 3, 15, 18, 30, 41, 61, 62,
 67, 71, 83
 de Hitchin, 20
 de Toda, 41, 133
 hamiltonien, 13, 46
 intégrable, 18, 40, 46
 mécanique, 1
 terme junior, 62
 théorème
 d'Arnold-Liouville, 1, 35, 40, 48, 57, 67, 95
 de Chasles, 24, 110
 de convexité d'Atiyah, Guillemin et Sterberg,
 53
 de Darboux, 11, 26
 de fibration d'Ehresmann, 42, 48
 de Jacobi, 24
 de Kolchin, 66, 137
 de Morales et Ramis, 2, 20, 57, 74, 84
 de Riemann-Roch, 111, 116, 151, 155, 157
 de Ziglin, 20, 57
 fondamental de la théorie de Galois, 140
 théorème
 de Kolchin, 139
 théorie de Picard-Vessiot, 2
 Toda, *voir* système de Toda
 tore, 1, 28, 39, 51, 52, 54
 de Liouville, 41, 47, 50, 51, 54, 95, 114, 130
 lagrangien, 41, 45
 toupie, 1, 20, 47, 49, 51, 56, 98, 123, 125, 126,
 128
 de Kowalevski, 20, 96, 123, 125
 de Lagrange, 20
 trajectoire, 11, 17, 58
 Uhlenbeck, 107
 vanMoerbeke, 102
 variété
 de Poisson, 120
 symplectique, 9, 10
 symplectique complexe, 11
 symplectique réduite, 50, 53
 variationnelle
 tradition, 57
 Vessiot, *voir* extension de Picard-Vessiot, théorie
 de Picard-Vessiot
 Vũ-Ngọc, 35
 Weierstrass, *voir* fonction $\wp$ de Weierstrass
 Whittaker, *voir* équation de Whittaker
 wronskien, 137, 143, 148
 Yang, 121
 Ziglin, *voir* lemme de Ziglin, théorème de Ziglin

COLLECTION SMF

Série SÉMINAIRES ET CONGRÈS

4. Global Analysis and Harmonic Analysis, J.-P. BOURGUIGNON, T. BRANSON et O. HIJAZI, éditeurs
3. Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e siècle (Actes du colloque à la mémoire de J. Dieudonné)
2. Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants, J. ALEV et G. CAUCHON, éditeurs
1. ARTHUR L. BESSE – *Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger*

Série COURS SPÉCIALISÉS

8. M. AUDIN – *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*
7. F. BERTELOOT, V. MAYER – *Rudiments de dynamique holomorphe*
6. O. DEBARRE – *Tors et variétés abéliennes complexes*
5. G. ROYER – *Une initiation aux inégalités de Sobolev logarithmiques*
4. Y. COLIN DE VERDIÈRE – *Spectres de graphes*
3. L. MANIVEL – *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*
2. G. TENENBAUM – *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres (en collaboration avec J. WU)*
1. G. TENENBAUM – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*

