

MICHELE AUDIN
Classes caractéristiques
d'immersions lagrangiennes définies
par des variétés de caustiques
(d'après V.A. Vassiliev)

Soient X une variété C^∞ de dimension n et $T^*X \xrightarrow{\pi} X$ son fibré cotangent muni de sa structure symplectique naturelle $\omega = -d\lambda$, où λ est la forme de Liouville.

Si L est une variété de dimension n et $i: L \hookrightarrow T^*X$ une immersion, on dit que i est lagrangienne si $i^*\omega = 0$.

On appelle alors projection lagrangienne une composition $f = \pi \circ i$, où i est une immersion lagrangienne :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & T^*X \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

Les singularités de f seront dites "caustiques" (dans la terminologie de l'optique classique, ce sont plutôt leurs images dans X qui portent ce nom).

Dans la théorie classique des singularités d'une application C^∞ , $f: V \rightarrow W$, on peut trouver trois types de théorèmes :

- a) Définition de variétés de singularités universelles dans un espace de jets $J^k(V, W)$ (Thom, Boardmann), auxquelles les jets $j^k f$ sont transverses pour presque toutes les applications f (lemme de transversalité) et dont les images inverses dans V sont les variétés de singularité de f .
- b) Sous certaines hypothèses, ces variétés portent des classes de l'homologie de V , dont les classes duales peuvent s'exprimer comme l'évaluation de classes caractéristiques universelles sur le fibré normal stable $f^*TW - TV$ [HK].
- c) Calcul explicite de ces classes, théorèmes de type énumératif ([T], [R] ...).

Dans le cas d'une immersion lagrangienne "générique" i , on sait par exemple que l'ensemble des points singuliers $\Sigma^1(\pi \circ i)$ définit une classe dans $H^1(L; \mathbb{Z})$ qui n'est autre que l'indice de Maslov de l'immersion i $[A_1]$.

Pour généraliser ce fait, Vassiliev construit dans les petites dimensions un complexe différentiel abstrait dont l'homologie porte des renseignements de type énumératif sur les caustiques génériques $[V_1]$. Nous allons présenter ici cette construction, en insistant plutôt sur l'aspect "classes caractéristiques" (résultats de types a) et b) plus haut) que sur les calculs explicites de $[V_1]$ et les résultats "énumératifs", que nous présenterons assez rapidement dans le dernier paragraphe.

0. NOTATIONS

- La donnée d'une métrique sur X munit T^*X d'une structure presque complexe J ; nous écrirons : $T_X(T^*X) = T_{\pi(x)}X \oplus JT_{\pi(x)}X$.
- Nous identifierons donc $T^*\mathbb{R}^N = \mathbb{C}^N$, notant encore J la multiplication par i dans $\mathbb{C}^N$. La forme symplectique $\omega = -d\lambda$ s'identifie à la partie imaginaire de la forme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^N$.
- Λ_N est la grassmannienne des lagrangiens de $\mathbb{C}^N$ et λ est un lagrangien quand $\lambda^\perp = J\lambda$.

1. RAPPELS SUR LES FONCTIONS GENERATRICES

Nous allons dans ce paragraphe décrire un aspect très partiel de la construction d'Hörmander $[H]$.

Soit $I \subset \{1 \dots N\}$ et $\bar{I}$ son complémentaire; $(e_1 \dots e_N)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^N$. $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{Je_j\}_{j \in \bar{I}}$ est une base unitaire de $\mathbb{C}^N$, elle décrit donc un lagrangien λ_I , on appelle $\pi_I: \mathbb{C}^N \rightarrow \lambda_I$ la projection orthogonale (parallèlement à $J\lambda_I$).

Soit $U_I = \{\lambda \in \Lambda_N \mid \lambda \cap J\lambda_I = 0\} \subset \Lambda_N$. Les U_I recouvrent Λ_N . Si L est un germe en 0 de lagrangienne dans $\mathbb{C}^N$, son espace tangent TL est au moins dans un des U_I . Alors $\pi_I|_L: L \rightarrow \lambda_I$ est un difféomorphisme. On peut trouver un germe de fonction C^∞ :

$$F: (\lambda_I, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0) \quad dF(0) = 0,$$

tel que L soit le graphe de dF , soit :

$$y \in L \iff y = x + JdF(x) \in \lambda_I \oplus J\lambda_I = \mathbb{C}^N.$$

Si $(z_j = x_j + i y_j)_{1 \leq j \leq N}$ sont les coordonnées dans $\mathbb{C}^N$, $(x_i, y_j)_{i \in I, j \in \bar{I}}$ sont des coordonnées sur λ_I , $F = F(x_i, y_j)$.

Nous utiliserons dans la suite une forme faible du théorème d'équivalence (Hörmander, Duistermaat, Weinstein $[W]$).

PROPOSITION 1. Si $TL \in U_I \cap U_{I'}$, et si L est décrite par des fonctions :

$$\begin{cases} F(x_i, y_j)_{i \in I, j \in \bar{I}} & (\text{dans } U_I) \\ G(x_i, y_j)_{i \in I', j \in \bar{I}'} & (\text{dans } U_{I'}) \end{cases},$$

$$\text{alors, les fonctions } \begin{cases} F(0, y_j) : \mathbb{R}^{\bar{I}} \rightarrow \mathbb{R} \\ G(0, y_j) : \mathbb{R}^{\bar{I}'} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

sont stablement équivalentes comme fonctions $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

2. ESPACE DES JETS, FAMILLES DE CAUSTIQUES, COMPLEXE $\Gamma^*(s; A)$.

2.1. Stratification de profondeur r d'une variété analytique.

Si $\mathcal{J}$ est une variété analytique réelle de dimension M , on appelle stratification de profondeur r ($r \in \mathbb{N}$) la donnée d'une famille $\mathcal{S}$ de parties de $\mathcal{J}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) Les éléments de $\mathcal{S}$ sont disjoints, sont des ensembles semi-analytiques, et des sous-variétés de $\mathcal{J}$ de codimensions $\leq r$.

b) Si $S \in \mathcal{S}$ et $\text{codim } S \leq r-1$, $\bar{S} - S$ est une réunion finie d'éléments de $\mathcal{S}$; si $S \in \mathcal{S}$, $\pi_0(S)$ est fini.

c) Le complémentaire $\nabla = \mathcal{J} - \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ est analytique, et, pour tout $\ell \leq r$,

$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ est analytique; $\text{codim } \nabla \geq r+1$.

Si $\ell \leq r$, on définit $Y_S^\ell = \bigcup_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ \text{codim } S \geq \ell}} S \cup \nabla$, et on obtient une filtration :

$$\mathcal{J} = Y_S^0 \supset \dots \supset Y_S^\ell \supset Y_S^{\ell+1} \dots \supset Y_S^r \supset \nabla.$$

On peut alors construire un complexe différentiel. Soit A un anneau principal (on utilisera $A = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2$); on appelle $H_*(\mathcal{J}; A)$ l'homologie de Borel-Moore

(avec supports : tous les fermés) à coefficients dans A . Comme $Y_g^{\ell+1}$ est fermé dans Y_g^ℓ , on a des suites exactes qui forment les lignes horizontales et verticales du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \downarrow & & & \\
 \rightarrow & H_{M-\ell+1}(Y_g^{\ell-1} - Y_g^\ell; A) & \rightarrow & H_{M-\ell}(Y_g^\ell; A) & \rightarrow & & \\
 & \searrow \Delta & & \downarrow & & & \\
 (*) & & & H_{M-\ell}(Y_g^\ell - Y_g^{\ell+1}; A) & & & \\
 & & & \downarrow & \searrow \Delta & & \\
 & & & H_{M-\ell-1}(Y_g^{\ell+1}; A) & \rightarrow & H_{M-\ell-1}(Y_g^{\ell+1} - Y_g^{\ell+2}; A) & \rightarrow
 \end{array}$$

(Δ est défini par composition).

On a évidemment $\Delta^2 = 0$. Posons $C^\ell(\mathcal{S}; A) = H_{M-\ell}(Y_g^\ell - Y_g^{\ell+1}; A)$; on définit donc un complexe :

$$C^0(\mathcal{S}; A) \xrightarrow{\Delta} \dots \rightarrow C^\ell(\mathcal{S}; A) \xrightarrow{\Delta} C^{\ell+1}(\mathcal{S}; A) \dots \rightarrow C^{r-1}(\mathcal{S}; A).$$

Remarque 2.1. Si $S \in \mathcal{S}$ et $\Delta[S] = 0$, alors $\bar{S}$ définit un unique élément de $H_{M-\ell}(Y_g^\ell; A)$.

Démonstration. On considère le diagramme (*) et ses suites exactes, en remarquant que $H_{M-\ell}(Y_g^{\ell+1}; A) = 0$ pour des raisons de dimension.

Remarque 2.2. Si $\bar{S}$ est analytique (et pas seulement semi-analytique), et si $A = \mathbb{Z}/2$, $\bar{S}$ porte une classe fondamentale à coefficients $\mathbb{Z}/2$ [BH], et donc $\Delta[S] = 0$.

2.2. Espace de jets.

$J^{k+1}(N)$ désigne l'espace des $k+1$ -jets d'applications $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ avec $j^1 F(0) = 0$; il est muni de la topologie C^{k+1} .

Le groupe G_N des difféomorphismes de $(\mathbb{R}^N, 0)$ opère (algébriquement) sur $J^{k+1}(N)$ par composition.

Une stratification de profondeur r de $J^{k+1}(N)$ sera dite famille de caustiques (de profondeur r) si elle vérifie :

- d) $S \in \mathcal{S}$, alors S est une réunion d'orbites de G_N .
- e) G_N opère transitivement sur $\pi_0(S)$.
- f) Si $S \in \mathcal{S}$, $S = \bigcup_{t \in T} G_N \cdot F_t$, et F_t est stablement équivalente à H_t , alors $\bigcup_{t \in T} G_N \cdot H_t \in \mathcal{S}$.

2.3. Caustiques A -coorientées, complexe $\Gamma^*(\mathcal{S}; A)$.

On dira qu'une classe $S \in \mathcal{S}$ est A -coorientée si :

. Le fibré normal de la variété S dans $J^{k+1}(N)$ est muni d'une A -orientation.

. Celle-ci est stable par G_N ; plus précisément : si $a \in S$, $b \in S$ et $g \in G_N$ sont tels que $g \cdot a = b$, alors g envoie la A -orientation de l'espace normal à S en a sur celle de l'espace normal en b .

De plus, nous orienterons de façon compatible les classes stablement équivalentes :

. Si $a \in S$, $a = F + Q_1$ ($j^2 F(0) = 0$, Q_1 une forme quadratique), soit $b = F + Q_2$; le difféomorphisme $x \rightarrow x + Q_2 - Q_1$ de $J^{k+1}(N)$ envoie la coorientation de S en a sur la coorientation de la caustique contenant b (2.2.f) en b .

Comme $J^{k+1}(N)$ est orientable, une caustique S A -coorientée possède une classe fondamentale dans $H_*(Y_g^\ell - Y_g^{\ell+1}; A)$ ([BH]), soit dans $C^\ell(\mathcal{S}; A)$ ($\ell = \text{codim } S$).

Définition du complexe $\tilde{\Gamma}^*(\mathcal{S}; A)$:

$\tilde{\Gamma}^\ell(\mathcal{S}; A)$ est le sous A -module de $C^\ell(\mathcal{S}; A)$ engendré par les classes fondamentales des caustiques $S \in \mathcal{S}$, A -coorientées de codimension ℓ .

D'après la propriété b) des stratifications de profondeur r , $\tilde{\Delta} \tilde{\Gamma}^\ell(\mathcal{S}; A) \subset \tilde{\Gamma}^{\ell+1}(\mathcal{S}; A)$, et donc la restriction $\tilde{\delta}$ de Δ définit un complexe

$$\tilde{\Gamma}^0(\mathcal{S}; A) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \dots \rightarrow \tilde{\Gamma}^\ell(\mathcal{S}; A) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \tilde{\Gamma}^{\ell+1}(\mathcal{S}; A) \dots \rightarrow \tilde{\Gamma}^{r-1}(\mathcal{S}; A).$$

Définition du complexe $\Gamma^*(\mathcal{S}; A)$:

On appelle $\Gamma^\ell(\mathcal{S}; A)$ le quotient de $\tilde{\Gamma}^\ell(\mathcal{S}; A)$ par la relation d'équivalence qui identifie les caustiques stablement équivalentes (2.2.f). Le cobord $\tilde{\delta}$ passe au quotient en un cobord δ , on obtient un complexe :

$$\Gamma^0(\mathcal{S}; A) \xrightarrow{\delta} \dots \rightarrow \Gamma^\ell(\mathcal{S}; A) \xrightarrow{\delta} \Gamma^{\ell+1}(\mathcal{S}; A) \dots \rightarrow \Gamma^{r-1}(\mathcal{S}; A).$$

Nous appellerons $H^*(\mathcal{S}; A)$ l'homologie de ce complexe ($* \leq r-2$).

Dans la suite, on suppose donnée une famille de caustiques $\mathcal{S}$ de profondeur r d'un espace $J^{k+1}(N')$ pour un N' très grand. On appellera encore $\mathcal{S}$ la famille de caustiques qu'elle induit sur les $J^{k+1}(N) \subset J^{k+1}(N')$.

Il n'y aura pas de confusion, en effet il est clair que l'inclusion $J^{k+1}(N) \subset J^{k+1}(N+1)$ induite par $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N \times 0 \subset \mathbb{R}^{N+1}$ induit un morphisme naturel $H^*(\mathcal{S}_{N+1}; A) \rightarrow H^*(\mathcal{S}_N; A)$ où $\mathcal{S}_K$ désigne $\mathcal{S}$ sur $J^{k+1}(K)$.

3. CLASSES CARACTERISTIQUES ASSOCIEES A UNE FAMILLE DE CAUSTIQUES §

3.1. k-jets de lagrangiennes dans $\mathbb{C}^N$.

Pour $k \geq 1$, on appelle $\Lambda^k(N)$ l'ensemble des k-jets en 0 de lagrangiennes dans $\mathbb{C}^N$ (on identifie deux germes s'ils ont un contact d'ordre au moins k). Les k-jets qui se projettent "bien" (diffeomorphiquement) sur un lagrangien λ donné dans $\mathbb{C}^N$ s'identifient aux k+1-jets de fonctions $(\lambda, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ singulières en 0; on peut donc mettre sur $\Lambda^k(N)$ la topologie, dite C^k , induite par la topologie C^{k+1} sur $J^{k+1}(N)$, et une structure de variété analytique réelle (localement isomorphe à $J^{k+1}(N)$). $\Lambda^1(N)$ s'identifie à la grassmannienne Λ_N , plus généralement :

PROPOSITION 3.1. L'application, qui à une lagrangienne associe son espace tangent, induit une fibration localement triviale à fibres contractiles $p: \Lambda^k(N) \rightarrow \Lambda_N$.

En effet, la fibre $p^{-1}(\lambda)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des k+1-jets de fonctions $F: \lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $j^2 F(0) = 0$.

En particulier, $p^*: H^*(\Lambda_N; A) \rightarrow H^*(\Lambda^k(N); A)$ est un isomorphisme.

3.2. Classes caractéristiques associées à une famille de caustiques.

On reprend les notations du paragraphe 1.

Soit $V_I \subset \Lambda^k(N)$: $V_I = \{L \in \Lambda^k(N) \mid \pi_I|_L : L \rightarrow \lambda_I \text{ est un difféomorphisme}\}$, et soit h_I le difféomorphisme analytique $J^{k+1}(N) \rightarrow V_I$ qui, à une fonction $\lambda_I \rightarrow \mathbb{R}$, associe le graphe de sa différentielle. Si $S \in \mathcal{S}$, notons encore par S la réunion des classes stablement équivalentes, et $S_I = h_I(S) \subset V_I \subset \Lambda^k(N)$.

PROPOSITION 3.2.1. $\tilde{S} = \bigcup_{I \in \{1..N\}} S_I$ est une sous-variété semi-analytique de $\Lambda^k(N)$, de même codimension que S , A-coorientée dans $\Lambda^k(N)$ si S est A-coorientée au sens de 2.3. Si, de plus, $\delta[S] = 0$ dans $\Gamma^{\ell+1}(\mathcal{S}; A)$, alors $\tilde{S}$ définit un élément de $H_{M'-\text{codim} S}(\Lambda^k(N); \mathcal{G})$, où $M' = \dim \Lambda^k(N)$, et $\mathcal{G}$ est le faisceau des A-orientations de $\Lambda^k(N)$.

En effet, la proposition 1 dit précisément que les S_I se recollent bien; la notion de coorientation pour les classes $S \in \mathcal{S}$ est la bonne notion pour que les coorientations des S_I se recollent en une A-orientation du fibré normal de $\tilde{S}$ dans $\Lambda^k(N)$. La dernière assertion se montre comme 2.1.

PROPOSITION 3.2.2. Il existe un homomorphisme préservant les degrés

$$\tilde{\kappa}_{\mathcal{S}} : H^*(\mathcal{S}; A) \longrightarrow H^*(\Lambda^k(N); A) \quad (* \leq r-2).$$

Fixons une triangulation de $\Lambda^k(N)$, en position générale avec les variétés $\tilde{S}$. Appelons $C^{\ell}(\Lambda^k(N); A)$ le groupe des ℓ -A-cochaînes simpliciales de cette triangulation. Si c est une ℓ -A-chaîne et $S \in \mathcal{S}$, $c \cdot \tilde{S} \in A$ désigne le nombre de points d'intersection de c et $\tilde{S}$ compté dans A grâce à la A-coorientation de $\tilde{S}$.

On pose $K_{\mathcal{S}}([S]) = (x \mapsto c \cdot \tilde{S}) \in C^{\ell}(\Lambda^k(N); A)$ pour $[S] \in \Gamma^{\ell}(\mathcal{S}; A)$.

L'existence d'une triangulation de $\Lambda^k(N)$ qui induit des triangulations des $\tilde{S}$ (par le théorème de Łojasiewicz par exemple) montre que cette flèche est une flèche de complexes.

$\tilde{\kappa}_{\mathcal{S}}$ sera le morphisme induit sur l'homologie des deux complexes :

$$\tilde{\kappa}_{\mathcal{S}} : H^*(\mathcal{S}; A) \longrightarrow H^*(\Lambda^k(N); A).$$

Notons que $\tilde{\kappa}_{\mathcal{S}}$ envoie la classe d'un cycle S de $\Gamma^*(\mathcal{S}; A)$ sur la classe de cohomologie duale à la classe d'homologie définie par $\tilde{S}$.

On appellera "classes caractéristiques associées à la famille de caustiques $\mathcal{S}$ " l'image dans $H^*(\Lambda_N; A)$ du morphisme composé :

$$\kappa_{\mathcal{S}} = (p^*)^{-1} \circ \tilde{\kappa}_{\mathcal{S}} : H^*(\mathcal{S}; A) \rightarrow H^*(\Lambda_N; A).$$

4. CLASSES DES CAUSTIQUES D'UNE IMMERSION LAGRANGIENNE GÉNÉRIQUE

Plaçons-nous maintenant dans la situation d'une projection lagrangienne :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & T^*X \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

Soit $n = \dim X = \dim L$.

On suppose que L est compacte.

4.1. Application de Gauss associée à i .

Rappelons que si N est assez grand et $j: X \subset \mathbb{R}^N$ est un plongement, la composition

$$T_x L \xrightarrow{T_x i} T_{i(x)}(T^*X) = T_{f(x)}X \oplus J T_{f(x)}X \subset T_{j f(x)}\mathbb{R}^N \oplus J T_{j f(x)}\mathbb{R}^N = \mathbb{C}^N$$

fait de $T_x i(T_x L)$ un isotrope de dimension n dans $\mathbb{C}^N$, et que, si νX est le fibré

normal du plongement j

$$\nu_X X \subset T_{j(x)} \mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N,$$

$T_X i(T_X L) \oplus \nu_{f(x)} X$ est alors un lagrangien de $\mathbb{C}^N$.

On définit ainsi une application de Gauss $\gamma(i) : L \rightarrow \Lambda_N$, qui décrit la trivialisation complexe déduite de i du fibré $(TL \oplus f^* \nu X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. La classe d'homotopie de $\gamma(i)$ ne dépend pas du plongement de X choisi pour N assez grand.

L'image de $\gamma(i)^*$ dans $H^*(L; A)$ est l'ensemble des classes caractéristiques du fibré lagrangien (i.e. muni d'une trivialisation de son complexifié) défini par i et $TL \oplus f^* \nu_X$.

De même, on peut définir l'application de k -jet de i :

$$\gamma^k(i) : L \longrightarrow \Lambda^k(N)$$

$$x \longmapsto L_x \times \nu_{f(x)} X \subset \mathbb{C}^N,$$

où L_x est le k -jet du germe de sous-variété isotrope de $\mathbb{C}^N$ défini par i au voisinage de $x \in L$.

Bien évidemment, $p \circ \gamma^k(i) = \gamma(i)$.

4.2. Immersions lagrangiennes génériques.

Définition 4.2.1. On dit que l'immersion i est $\mathcal{S}$ -générique si $\gamma^k(i)$ est transverse à $\tilde{S} \subset \Lambda^k(N)$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Il y a bien sûr une version ad hoc du lemme de transversalité :

PROPOSITION 4.2.2. L'ensemble des immersions $\mathcal{S}$ -génériques $L \rightarrow T^*X$ est résiduel (ouvert si $\mathcal{S}$ est fini et L compacte) pour la topologie C^∞ dans l'espace des immersions lagrangiennes $L \rightarrow T^*X$.

Pour $S \in \mathcal{S}$, on appelle $S(i) = \gamma^k(i)^{-1}(\tilde{S})$, caustique de type S de i ; si i est générique, c'est une sous-variété localement fermée de L .

4.3. Classes duales aux caustiques d'une immersion générique.

En mettant bout à bout les résultats précédents, on obtient le

THEOREME 4.3.1. Soit $i : L \hookrightarrow T^*X$ une immersion lagrangienne $\mathcal{S}$ -générique, et soit G_L le faisceau des A -orientations de L . Si $S \in \mathcal{S}$ est A -coorientée, et si la classe de S est un cycle de Γ^* ,

(i) $\overline{S(i)}$ porte une classe fondamentale dans $H_*(L; G_L)$.

(ii) La classe duale à $\overline{S(i)}$ dans $H^*(L; A)$ est l'évaluation d'une classe caractéristique lagrangienne stable sur le fibré lagrangien défini par i et $TL \oplus f^* \nu X$.

(En particulier, si $\overline{S}$ est analytique, $\overline{S(i)}$ porte une classe fondamentale à coefficients $\mathbb{Z}/2$).

On a aussi un morphisme composé $\kappa_g(i) = \gamma(i)^* \circ \kappa_g$:

$$\kappa_g(i) : H^*(\mathcal{S}; A) \rightarrow H^*(L; A), \quad * \leq r-2,$$

qui (pour une immersion lagrangienne générique i) associe à $[S]$ la classe duale à $\overline{S(i)}$.

COROLLAIRE 4.3.2. La classe duale à $\overline{S(i)}$ dans $H^\ell(L; A)$ est nulle si $[S] = \delta[T]$ pour $[T] \in \Gamma^{\ell-1}(\mathcal{S}; A)$ ($\ell \leq r-2$).

Puisqu'on a des classes caractéristiques, on doit avoir des invariants de cobordisme. Nous utiliserons la notion de cobordisme lagrangien cylindrique $[A_2]$ (i.e. le cobordisme a lieu dans $T^*(X \times [0, 1])$) d'immersions lagrangiennes dans T^*X . Il est facile de voir que

PROPOSITION 4.3.3. Si $x \in H^n(\Lambda_N; A)$ est une classe caractéristique (stable), si $\dim X = \dim L = n$, et si L est A -orientée, $\langle \gamma(i)^* x, [L] \rangle \in A$ est un invariant de cobordisme lagrangien cylindrique de l'immersion i .

COROLLAIRE 4.3.4. Si $n \leq r-2$, si $S \in \mathcal{S}$ est une caustique de codimension n , et si $\delta[S] = 0 \in \Gamma^{n+1}(\mathcal{S}; A)$, la classe duale à $\overline{S(i)}$ évaluée sur la classe fondamentale de L , est un invariant de la classe de cobordisme lagrangien cylindrique de l'immersion i .

Notons aussi une application "énumérative" de ces constructions :

Application 4.3.4. Si S est une caustique $\mathbb{Z}$ -orientée, de codimension n avec $\delta[S] = 0$ et $H^n(\Lambda_N; \mathbb{Q}) = 0$ (par exemple $n = 2, 3, 4, 7, \dots$), le nombre de points (comptés avec les orientations) de type S pour une immersion lagrangienne $L^n \hookrightarrow T^*X$ (L orientable) est nul (en particulier, ce nombre est nul modulo 2).

Démonstration. Soit k ce nombre dans $\mathbb{Z}$. Considérons $[S]$ dans $H^n(\mathcal{S}; \mathbb{Z})$, on a : $k = \langle \kappa_g(i)[S], [L] \rangle = \langle \gamma(i)^* \kappa_g[S], [L] \rangle$. Mais $\kappa_g[S] \in H^n(\Lambda_N; \mathbb{Z})$ qui est de la 2-torsion ($[F]$), et donc $\gamma(i)^* \kappa_g[S] = 0 \in H^n(L; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

5. UNE FAMILLE DE CAUSTIQUES, LES RESULTATS DE VASSILIEV

Vassiliev décrit une famille de caustiques en petites codimensions (profondeur 7) pour laquelle il donne une méthode pratique de calcul du complexe $(\Gamma^*(\mathfrak{s}; A), \delta)$. Dans la suite, $A = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2$.

5.1. Description de la famille $\mathfrak{s}$.

En petites codimensions, on connaît une classification complète des fonctions $(\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ à singularité isolée.

Le tableau suivant est la liste des caustiques de la famille $\mathfrak{s}$:

Nom.	Fonctions	Codimension de la classe	$\mathbb{Z}$ -orientabilité
A_{2s}	x^{2s+1}	$2s-1$ ($s \leq 4$)	oui
A_{2s+1}^ϵ	ϵx^{2s+2}	$2s$ ($s \leq 3$)	oui si s est pair
D_s^ϵ	$x^2 y - \epsilon y^{s-1}$	$s-1$ ($4 \leq s \leq 8$)	non
E_6^ϵ	$x^3 + \epsilon y^4$	5	oui
E_7	$x^3 + xy^3$	6	oui
E_8	$x^3 + y^5$	7	oui
P_8^ϵ	$x^2 y + y^3 + azy^2 + by^3$ ($\text{sgn } 4a^3 + 27b^2 = \text{sgn } \epsilon$)	6	oui
$P_9^{\times \epsilon}$	$x^3 + y^3 + xyz + az^4$ ($\text{sgn } a = \text{sgn } \epsilon$)	7	oui
$P_9^\bullet$	$x^3 + y^3 + (x^2 + y^2)z + az^4$ ($\text{sgn } a = \text{sgn } \epsilon$)	7	oui
X_9^1	$xy(x^2 + axy + y^2)$ $ a < 2$	7	non
X_9^2	$xy(x+y)(x+ay)$ $a \neq 0, 1$	7	non
X_9^ϵ	$\epsilon(x^4 + ax^2 y^2 + y^4)$ $ a < 2$	7	non

Lecture du tableau.

. N est grand ≥ 3 , k est grand $k \geq 9$.

. S^ϵ : $\epsilon = \pm$; S^+ et S^- sont deux classes distinctes.

. La (ou les) fonction (s) qui figure (nt) en regard de la classe S définit la classe S de la façon suivante : - ajouter une forme quadratique non dégénérée en les variables restantes (N variables) ;

- on obtient ainsi en faisant varier la signature des formes quadratiques ajoutées, les différentes classes intervenant dans $\tilde{\Gamma}^*$ et qu'on identifie dans $\Gamma^*(\mathfrak{s}; A)$.

PROPOSITION 5.1. La famille $\mathfrak{s}$ ainsi définie est une famille de caustiques au sens de 2.2, de profondeur 7.

5.2. Calcul du complexe $(\Gamma^*(\mathfrak{s}; A), \delta)$.

PROPOSITION 5.2.1. Si $S \in \mathfrak{s}$ est une classe de codimension $\ell+1$, et si a est un point de S , il existe un voisinage U de a dans $J^{k+1}(N)$ tel que, si T est une classe de codimension ℓ , $U \cap T = T_1 \cup \dots \cup T_s$ (composantes connexes), avec $U \cap \overline{T_i}$ est une variété à bord, de bord $U \cap S$

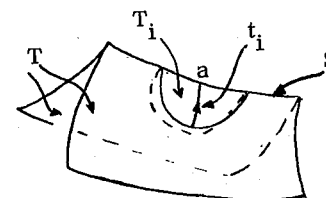
$$i \neq j, \overline{T_i} \cap \overline{T_j} = U \cap S.$$

On peut alors définir un coefficient d'incidence en a : $[T, S]_a \in A$, de la façon suivante :

. $A = \mathbb{Z}/2$, $[T, S]_a = s$ modulo 2 ($s = \# \pi_0(U \cap T)$).

. $A = \mathbb{Z}$, si T et S sont $\mathbb{Z}$ -coorientées, chacun des T_i fournit un signe ± 1 , suivant que la coorientation de S en a coïncide ou non avec : {orientation d'une transversale t_i à S dans $\overline{T_i}$ dirigée vers a , coorientation de T_i près de a }.

En sommant ces signes sur les T_i , on obtient $[T, S]_a \in \mathbb{Z}$.



PROPOSITION 5.2.2. (i) $\Gamma^{\ell}(s; A)$ est le A -module libre de base les classes (stables) des caustiques S de s qui sont A -coorientées.

(ii) Si T est une classe A -coorientée de codimension ℓ , S une classe A -coorientée de codimension $\ell + 1$ et $a \in S$, $[T, S]_a \in A$ ne dépend pas de $a \in S$, on le note $[T, S]$.

(iii) Si T est une classe A -coorientée de codimension ℓ , $\delta[T] = \Sigma [T, S][S]$ où la somme est prise sur toutes les classes de caustiques $S \in s$, A -coorientées, de codimension $\ell + 1$.

(i) suit d'un théorème de triangulation ad hoc, Łojaciewicz par exemple ; (ii) est clair, on en déduit (iii).

Cette proposition est une méthode explicite de calcul des complexes $\Gamma^*(s; A)$, $A = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2$. Il ne reste plus qu'à calculer... ce qui laisse un gros volume de travail. Nous donnons ici les résultats ; voir $[V_1]$ pour leurs justifications.

THEOREME 5.2.3.

$$(i) \quad A = \mathbb{Z} \quad \begin{cases} \delta A_1^{\pm} = 0 & \delta A_2 = 0 \\ \delta A_4 = -2A_5^+ - 2A_5^- \\ \delta A_5^+ = -\delta A_5^- = -A_6 + E_6^+ + E_6^- \\ \delta A_6 = 0 \\ \delta E_6^+ = -\delta E_6^- = E_7 + 3P_8^1 + 3P_8^2 \\ \delta E_7 = 0 \\ \delta P_8^1 = -\delta P_8^2 = P_9^{x+} + P_9^{x-} + P_9^{+} + P_9^{-} \end{cases}$$

(ii) $A = \mathbb{Z}/2$, les bords du complexe $\Gamma^*(s; \mathbb{Z}/2)$ s'obtiennent en réduisant modulo 2 les expressions précédentes et en rajoutant

$$\begin{cases} \delta A_3^+ = \delta A_3^- = A_4 + D_4^+ + D_4^- \\ \delta D_s^{\pm} = D_{s+1}^+ + D_{s+1}^-, \quad 4 \leq s \leq 6 \\ \delta D_7^{\pm} = E_8 + D_8^+ + D_8^- \\ \delta A_7^+ = \delta A_7^- = A_8 + E_8 \end{cases}$$

COROLLAIRE 5.2.4.

i	1	2	3	4	5	6
$H^i(s; \mathbb{Z}) =$ générateurs et relations	$\mathbb{Z}, \text{gén. } A_2$	0	0	$\mathbb{Z}/2, A_5$	$\mathbb{Z}, A_6 = E_6$	$\mathbb{Z}, P_8$ $E_7 = -3P_8$
$H^i(s; \mathbb{Z}/2) =$ "	$\mathbb{Z}/2$ "	$\mathbb{Z}/2, A_3$	$\mathbb{Z}/2, A_4 = D_4$	"	$\mathbb{Z}/2$ "	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ $A_7, E_7 = P_8$

5.3. Remarques.

Notons par exemple que la caustique A_4 , bien que d'adhérence analytique, et bien que $\mathbb{Z}$ -coorientable ne définit pas en général une classe $\bar{A}_4(i) \in H_*(L; \mathbb{Z})$, par contre elle définit un élément de $H_*(L; \mathbb{Z}/2)$ d'après la remarque suivant 4.3.1. ou 5.2.3 (ii). La même remarque indique (sans aucun calcul) que $A_{2k}^+, A_{2k+1}^+ + A_{2k+1}^-, D_k^+ + D_k^-, E_6^+ + E_6^-, E_7, P_8^1 + P_8^2$ sont des cycles de $\Gamma^*(s; \mathbb{Z}/2)$.

Les résultats les plus intéressants des calculs donnant 5.2.3. (ii) sont donc les relations du type :

. $A_4 + D_4^+ + D_4^- = \delta A_3^+$ (qui dit $[\bar{A}_4(i)] = [\bar{D}_4(i)]$) qu'on voit très bien sur les figures 3, 4, 5 ... et la relation $A_4 = D_4$ découle précisément du fait que A_3^+ et A_3^- ne sont pas équivalentes.

. $\delta E_6^+ = E_7 + 3P_8^1 + 3P_8^2$ ($E_7 = -3P_8$) ... que bien sûr on voit moins facilement...

5.4. Résultats énumératifs, en vrac.

. Le premier résultat est bien entendu que $\bar{A}_2(i)$ est duale à l'indice de Maslov $[A_1]$, et donc :

Si $n = 1$, comme les courbes sont orientables, cet indice de Maslov est pair sur une courbe.

. La notion "transversalité à $\tilde{A}_3$ " coïncide avec la notion usuelle de $\Sigma^{1,1}$ -générécité pour une application f différentiable $L \rightarrow X$ (les droites sont toutes isotropes). D'après les calculs de $[R]$, la classe de cohomologie de Λ_N associée est $w_1^2 + w_2 = w_2$ ($w_1^2 = 0$ pour un fibré lagrangien) et donc :

Si $n = 2$, L ou X orientable $\Rightarrow \bar{A}_3(i)$ est un nombre pair de points (en fait, le résultat est vrai en toute généralité, par un argument de points doubles, voir $[V_2]$).

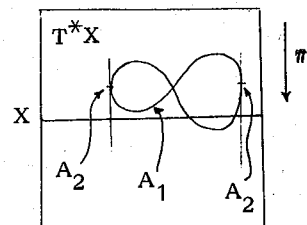


Figure 1 (n = 1)

Rappelons que la classe duale à $\bar{A}_2(i)$ est l'indice de Maslov de l'immersion $i[A_1]$.

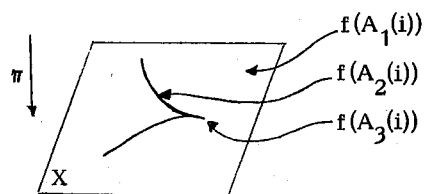


Figure 2 (n = 2)

i présente en $x \in L^2$ une singularité de type A_3 si $f: L^2 \rightarrow X^2$ a une fronce en x .

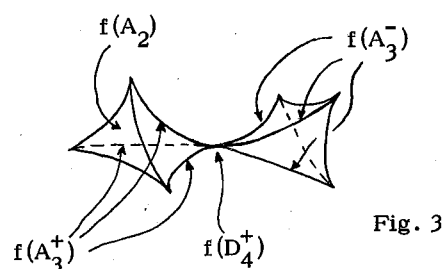


Fig. 3

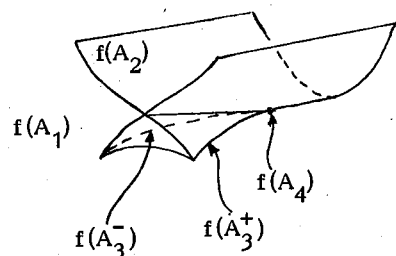


Fig. 4

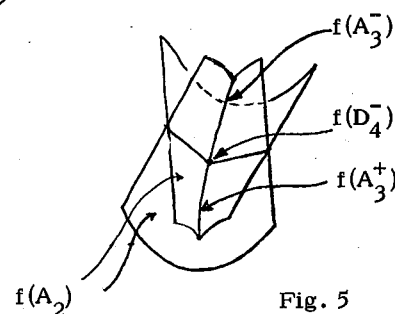


Fig. 5

Figures 3, 4, 5 (n = 3)

Formes dans X^3 des images par f des caustiques $S(i)$.

Si $n = 3$, un argument de points doubles évident sur les figures dit que le nombre de points de $\bar{A}_4(i)$ est pair ; par ailleurs, d'après 5.2.3. (ii), il est égal (mod 2) au nombre de points de D_4 . Dans cette dimension, la classe de cohomologie duale à $\bar{D}_4(i)$ dans $H^3(L; \mathbb{Z}/2)$ est $w_1 w_2$ (ce sont les points de Σ^2 , voir [F]), et donc

$$w_1(TL \oplus f^* \nu X) w_2(TL \oplus f^* \nu X) = 0 \quad (n = 3)$$

(c'est clair si $X = \mathbb{R}^3$, car alors on a $w_1(L) w_2(L) = 0$ puisque L est cobordante à zéro).

etc...

5.5. Question.

Bien entendu, le résultat le plus intéressant sur l'indice de Maslov dans notre contexte n'est pas qu'il soit nul modulo 2, mais que, pour une courbe, la moitié de l'indice de Maslov soit un invariant de cobordisme $[A_2]$. De façon analogue, ce ne sont pas les résultats de 5.4 (nullité modulo 2) qui peuvent permettre de trouver des invariants de cobordisme non triviaux !

Notons donc deux résultats (théoriques) de "non nullité" de classes définies par Vassiliev (+) :

V.I. Arnold possède une lettre d'Eliashberg, où celui-ci annonce qu'il sait "calculer" les groupes de cobordisme lagrangien cylindrique dans $T^* \mathbb{R}^n$, malheureusement ni les démonstrations, ni même les résultats ne sont publiés (voir toutefois la note ajoutée aux épreuves dans $[A_2]$, où il faut stabiliser les groupes d'homotopie indiqués). Une conséquence de ces résultats serait, dans les petites dimensions concernées ici, qu'il existe des immersions lagrangiennes (génériques) de variétés orientées :

$$a) V^5 \hookrightarrow T^* \mathbb{R}^5$$

$$b) V^6 \hookrightarrow T^* \mathbb{R}^6$$

telles que :

$$\alpha) \langle \gamma(i)^* b_2, [V^5] \rangle \neq 0 \in \mathbb{Z}$$

$$\beta) \langle \gamma(i)^* \lambda_3, [V^6] \rangle \neq 0 \in \mathbb{Z} \text{ (resp.) ,}$$

où $b_2 \in H^5(\Lambda_N; \mathbb{Z})$, $\lambda_3 \in H^6(\Lambda_N; \mathbb{Z})$ sont définies dans [F]. Dans le langage de Vassiliev, la traduction de ces résultats est, pour ces immersions :

$\alpha')$ Le nombre de points de type A_6 ou E_6 est non nul.

(+) Je remercie le Professeur V.I. Arnold d'avoir bien voulu m'expliquer cette remarque contenue dans $[A_2]$.

(+) Voir J. Eliashberg : Cobordisme de solutions de relations différentielle, ce volume.

β') Le nombre de points de type E_7 ou P_8 est non nul (resp.).

A ma connaissance, aucun exemple explicite n'a été construit.

(§) Voir M. Audin, Quelques remarques sur les nombres caractéristiques entiers de certaines immersions Lagrangiennes, C.R. Acad. Sc. Paris (nombre 1983).

[A₁] V.I. ARNOLD, Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, Funkt. Anal. 1 (1965) [traduction française : Complément I dans Maslov, théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod-Gauthier-Villars, 1972].

[A₂] V.I. ARNOLD, Lagrangian and Legendre cobordisms I & II, Funkt. Anal. 14 (1980) [167-177 et 252-260 dans la traduction américaine].

[A₃] V.I. ARNOLD, Singularités de systèmes de rayons, Uspekhi Math. Nauk. 38 (1983), fasc. 2, 77-147 (en russe).

[BH] A. BOREL et A. HAEFLIGER, La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 461-513.

[F] D.B. FUKS, Maslov-Arnold characteristic classes, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 178 (1968) [en anglais dans Soviet. Math. Dokl. 9 (1968) 96-99].

[H] L. HÖRMANDER, Fourier integral operators I, Acta Math. 127 (1971), 79-183.

[HK] A. HAEFLIGER et A. KOSINSKI, Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables, Séminaire H. Cartan, E.N.S. 1956-57, exposé 8.

[R] F. RONGA, Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux, Comment. Math. Helv. 47 (1972), 15-35.

[T] R. THOM, Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 43-87.

[V₁] V.A. VASSILIEV, Characteristic classes of Lagrangian and Legendre manifolds dual to singularities of caustic and wave-fronts, Funkt. Anal. 15 (1981) [164-173 dans la traduction américaine].

[V₂] V.A. VASSILIEV, Self-intersections of wave-fronts and Legendre (Lagrangian) characteristic numbers, Funkt. Anal. 16 (1982) [131-133 dans la traduction américaine].

[W] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds, A.M.S. regional Conf. series 29 (1977).

Université Paris-Sud
Mathématiques, bâtiment 425
F - 91405 ORSAY cedex
Août 1983