

CLASSES CARACTERISTIQUES LAGRANGIENNES

Michèle Audin
Université de Paris-Sud
Mathématique, Bât 425
F-91405 Orsay-Cedex, France

La première classe caractéristique lagrangienne a été inventée par [Maslov] pour sa théorie des solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles. C'est Arnold qui a expliqué pourquoi cet "indice de Maslov" est une classe caractéristique au sens classique du terme : elle provient d'un espace classifiant.

Cette classe, et ses généralisations possibles, ont suscité une abondante littérature, principalement du fait de géomètres, donc beaucoup de descriptions à la Chern-Weil ou à la Chern-Simons.

Dans une première partie, je vais essayer de faire le point sur la question, dans l'esprit (et la lettre) d'[Arnold]. Je ne prétends là à aucune originalité, ni à une quelconque exhaustivité des références.

Dans la deuxième partie, je montrerai comment on peut théoriquement calculer les classes de cohomologie d'une variété V qui sont des classes caractéristiques pour les immersions lagrangiennes de V , et je finirai le calcul si V est une sphère ou un tore.

Dans la troisième partie, j'expliquerai quels "nombres caractéristiques" d'immersions lagrangiennes on peut effectivement réaliser.

0. Définitions et rappels

Le cadre est celui de la géométrie symplectique. Pour faire le point sur les diverses classes en circulation, je vais devoir me placer dans des situations plus générales que celle que j'étudierai dans la partie 2. Voici donc quelques définitions.

0.1. Symplectique

On appelle

Espace vectoriel symplectique un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire alternée non-dégénérée. Le seul invariant du type d'isomorphisme d'un tel espace est sa dimension, qui est paire.

Le modèle le plus agréable à utiliser dans notre contexte est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, avec la forme ω définie par

$$\omega(X, Y) = \text{Im}\langle X, Y \rangle$$

(partie imaginaire de la forme hermitienne standard).

Fibré vectoriel symplectique un fibré vectoriel $E \rightarrow X$, dont chaque fibre E_x est munie d'une forme ω_x qui en fait un espace vectoriel symplectique, la correspondance $x \mapsto \omega_x$ étant C^∞ (la base X sera toujours une variété).

Variété symplectique une variété Y munie d'une 2-forme différentielle ω qui fasse de $TY \rightarrow Y$ un fibré symplectique (c'est-à-dire, si $\dim Y = 2n$, que ω^n est une forme volume). Pour des raisons qui nous concernent assez peu ici, on demande en plus que ω soit fermée ($d\omega = 0$).

L'exemple fondamental est celui où Y est le fibré cotangent d'une variété X

$$Y = T^*X \longrightarrow X,$$

il y a alors une 1-forme λ (pour "Liouville") sur Y , qui dans des coordonnées locales $(x_i$ sur X , ξ_i les coordonnées cotangentes) s'écrit :

$$\lambda = \sum \xi_i dx_i$$

et $\omega = -d\lambda$ est une forme symplectique sur Y .

Si $X = \mathbb{R}^n$, l'identification

$$T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$(x, \xi) \mapsto x + i\xi$$

identifie aussi $\omega = -d\lambda$ et $\omega = \text{Im}\langle, \rangle$: c'est la forme $\sum dx_i \wedge d\xi_i$.

0.2. Lagrangien

un sous-espace réel L de $\mathbb{C}^n$ est dit lagrangien s'il est totalement isotrope ($\omega|_L = 0$) maximal ($\dim L = n$). Si $\perp$ désigne l'orthogonalité pour le produit scalaire euclidien $X.Y = \text{Re}\langle X, Y \rangle$, il est clair que

$$0.2.1. L \text{ est lagrangien si et seulement si } L = (iL)^\perp$$

un sous-fibré $L \rightarrow X$ d'un fibré symplectique est un sous-fibré lagrangien si toutes les fibres $L_x \subset E_x$ sont lagrangiennes.

une immersion $f : L \rightarrow Y$ dans une variété symplectique est dite lagrangienne si TL est un sous-fibré lagrangien de f^*TY , c'est-à-dire si $f^*\omega=0$ et $\dim L = \frac{1}{2} \dim Y$. Par exemple, les fibres et la section nulle du fibré cotangent T^*X sont lagrangiennes.

1. Maslov, Arnold, Borel, Fuks, et les autres...

1.1. Les remarques de base

1.1.1. Le groupe $Sp(2n, \mathbb{R})$ des isomorphismes $\mathbb{R}$ -linéaires de $\mathbb{C}^n$ qui préservent la forme ω se rétracte sur son sous-groupe $U(n)$ (c'est sa composante compacte). En particulier, si $E \rightarrow X$ est un fibré vectoriel symplectique, il existe "une" structure de fibré vectoriel hermitien sur E , dont ω est la partie imaginaire (il y en a beaucoup, mais elles sont toutes homotopes). Une telle structure sera toujours sous-entendue dans la suite.

1.1.2. Si E contient un sous-fibré lagrangien, on a un isomorphisme

$$L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow E$$

d'après 0.2.1. On voit ainsi que, s'il existe beaucoup de fibrés vectoriels symplectiques (tous les fibrés vectoriels hermitiens), il y en a assez peu parmi eux qui possèdent des sous-fibrés lagrangiens !

1.1.3. Toujours d'après 0.2.1, le groupe $U(n)$ opère transitivement sur la grassmannienne Λ_n des lagrangiens de $\mathbb{C}^n$ avec sous-groupe d'isotropie $O(n)$: toute base orthonormée d'un lagrangien est une $\mathbb{C}$ -base de $\mathbb{C}^n$ et réciproquement. La grassmannienne $\Lambda_n \cong U(n)/O(n)$, avec son fibré vectoriel tautologique, est l'espace classifiant pour les fibrés vectoriels réels de rang n dont le complexifié est trivialisé.

1.1.4. Dans Λ_n , le sous-espace des lagrangiens transverses à un lagrangien fixé L s'identifie à l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de L : la correspondance est

$$(\varphi : L \rightarrow L) \mapsto (\text{graphe de } \varphi \circ i : iL = L^\perp \rightarrow L)$$

En particulier, cet espace est contractile.

1.1.5. Si L_0 et L_1 sont deux sous-fibrés lagrangiens d'un fibré symplectique $E \rightarrow X$ de rang $2n$, ils définissent une "différence" :

$$d(L_0, L_1) : X \longrightarrow \Lambda_m \text{ (m assez grand)}$$

dont voici deux descriptions :

a) $L_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong E \cong L_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, donc $L_0 - L_1$ est classifié dans U/O , et, plus géométriquement :

b) Soit M_0 un fibré vectoriel réel tel que $L_0 \oplus M_0$ soit trivial de rang m , alors $L_1 \oplus M_0$ est un sous-fibré lagrangien du fibré symplectique trivial $E \oplus (M_0 \otimes \mathbb{C})$. Pour chaque x de X , la fibre en x de ce sous-fibré diffère de $\mathbb{R}^m = (L_0 \oplus M_0)_x$ par un élément de $U(m)$, bien défini modulo $O(m)$; on obtient ainsi une application

$$d(L_0, L_1) : X \longrightarrow \Lambda_m.$$

Cette application permet de rappeler en arrière les éléments de $H^*(\Lambda_m)$ pour définir des classes caractéristiques lagrangiennes qui, d'après 1.1.4, sont des obstructions à la transversalité des deux sous-fibrés L_0 et L_1 , en particulier des obstructions à la transversalité de deux feuilletages lagrangiens d'une variété symplectique, ce qui explique qu'elles intéressent les géomètres : je renvoie à [Morvan], [Morvan-Niglio], [Vaisman], entre autres, pour des descriptions de classes de cohomologie de de Rham ainsi obtenues.

1.1.6. Un autre cas particulier important est celui fourni par une immersion lagrangienne $f : L \rightarrow T^*X$, où l'on dispose

a) d'un fibré symplectique $f^*(T(T^*X)) \longrightarrow L$

b) de deux sous-fibrés lagrangiens :

le fibré tangent aux fibres de $T^*X \longrightarrow X$, rappelé sur L

le fibré tangent TL .

La construction de 1.1.5 fournit dans ce cas des classes caractéristiques pour l'immersion f , reliées à la transversalité de f aux fibres de $T^*X \rightarrow X$, donc aux singularités de la projection $L \rightarrow T^*X \rightarrow X$.

Les classes caractéristiques lagrangiennes provenant, par définition, de la cohomologie de $U(m)/O(m)$, il nous reste à calculer cette dernière. Commençons par la dimension 1, à cause de l'importance de la classe de Maslov.

1.2. Classe de Maslov

Elle est définie comme indice de Morse le long d'un chemin par [Maslov], je n'ai évidemment pas la place de citer toute la littérature qui lui est consacrée, cependant, pour évoquer le parfum de certaines applications (approximation semi-classique à la mécanique quantique) je renvoie à la très belle utilisation dans la quantification de l'énergie (spectre de l'équation de Schrödinger) expliquée par Maslov, Arnold et [Duistermaat].

Le § 1.1 était écrit dans l'esprit d'[Arnold], voici donc la définition de la classe de Maslov qu'on y trouve : on a une fibration

$$SU(n)/SO(n) \subset U(n)/O(n) \xrightarrow{D} S^1$$

où D est induite par le carré du déterminant dans $U(n)$. On en déduit immédiatement que $H^1(\Lambda_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, engendré par l'image m du générateur de $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ par D^* .

Arnold a montré aussi, dans l'optique "transversalité/singularités" évoquée plus haut, que, pour une immersion lagrangienne générique

$$f : L \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n$$

la classe induite par m est duale au cycle des points singuliers de la projection

$$L \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

C'est la source de généralisations de la définition de m en dimensions plus grandes que je signalerai au §1.3.

Une autre façon possible de généraliser la classe de Maslov a été proposée par [Viterbo]. Il s'agit de construire une classe analogue pour des immersions lagrangiennes dans une variété symplectique qui n'est pas forcément un cotangent (il y a des applications intéressantes). Soit donc $E \rightarrow X$ un fibré symplectique quelconque. On considère le fibré en grassmanniennes $\Lambda_n \subset \Delta E \rightarrow X$. On cherche s'il existe une classe $\tilde{m} \in H^1(\Delta E; \mathbb{Z})$ dont la restriction à chaque fibre soit m . Remarquons que, si $\mathcal{U}$ est un ouvert trivialisant E (et ΔE), alors

$$\Delta E|_{\mathcal{U}} = \Lambda_n \times \mathcal{U} \xrightarrow{D} S^1$$

définit localement une extension de m à E . L'application D ($=\det^2$) se définit globalement, c'est-à-dire "traverse" les changements de cartes complexes de E , exactement quand le fibré en droites complexes $\det(E)^{\otimes 2}$ est trivialisable, c'est-à-dire quand $2c_1(E) = 0 \in H^2(X; \mathbb{Z})$ (les choix de trivialisations et de $\tilde{m}$ sont

paramétrés par $H^1(X; \mathbb{Z})$). Il est clair aussi que cette condition ($2c_1(E)=0$) est une, mais seulement une des obstructions à ce que E soit complexifié d'un fibré vectoriel réel.

Le lecteur aura vu apparaître dans cette remarque la transgression de la fibration

$$U(n)/O(n) \longrightarrow BO(n) \xrightarrow{\otimes \mathbb{C}} BU(n)$$

ce qui est une transition avec

1.3. Classes de Borel–Fuks

Quand j'entends parler de cohomologie d'un espace homogène, j'ouvre mon [Borel], et plus précisément je considère la fibration

$$\Lambda = U/O \longrightarrow BO \xrightarrow{\otimes \mathbb{C}} BU$$

Voici donc la cohomologie de Λ :

Il existe des classes $\beta_{2k} \in H^{4k+1}(\Lambda; \mathbb{Z})$ telles que

- a) $\beta_0 = m$.
- b) la transgression de β_{2k} est $2c_{2k+1} \in H^{4k+2}(BU; \mathbb{Z})$, ce qui définit β_{2k} à un élément d'ordre 2 près.
- c) la réduction modulo 2 de β_{2k} est $w_{2k}w_{2k+1}$ (w_i désigne la i -ème classe de Stiefel–Whitney).
- d) si A est un anneau contenant $\frac{1}{2}$, $H^*(\Lambda; A)$ est l'algèbre extérieure sur les (images des) β_{2k} , qui sont primitives pour le coproduit naturel (c'est vrai aussi dans $H^*(\Lambda; \mathbb{Z})$ mod. torsion, d'après [Fuks]).
- e) $H^*(BO; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(\Lambda; \mathbb{Z}/2)$ est surjective, et son noyau est formé des carrés.
- f) les classes $\beta_0, \dots, \beta_{2k}$ sont déjà dans $H^*(\Lambda_{2k+1}; \mathbb{Z})$ et suffisent à engendrer $H^*(\Lambda_{2k+1}; A)$.

[Fuks] a décrit la cohomologie de $U(n)/O(n)$ à l'aide de classes duales à des cycles de Schubert, bien reliées aux questions de transversalité et de singularités. Une façon plus abstraite de définir des classes caractéristiques en petites dimensions à l'aide de singularités a été proposée par [Vassiliev] (voir aussi [M.A.₁]).

2. Réalisation de classes caractéristiques lagrangiennes

2.1. Le problème

La question qui nous intéresse dans cette partie est la suivante :

Soit V une variété compacte de dimension n . Quelles sont les classes x de $H^*(V)$ qui sont des classes caractéristiques d'immersions lagrangiennes de V dans $\mathbb{C}^n$?

La première réponse possible est bien simple et classique : si $\dim V=1$, toutes les classes divisibles par 2 sont des classes de Maslov d'immersions lagrangiennes : en dimension 1 en effet, toutes les courbes sont lagrangiennes et $\Lambda_1 \cong P^1(\mathbb{R})$ puisque toutes les droites sont isotropes ; la classe de Maslov n'est autre que le degré de l'application tangente (non-orientée), qui est évidemment pair, et toutes les classes paires sont atteintes. Une conséquence est que toutes les classes divisibles par 2 dans $H^1(T^n)$ sont des classes de Maslov.

En dimensions plus grandes que 1, nous allons devoir remplacer notre connaissance de toutes les immersions lagrangiennes (cas des courbes) par le théorème de classification des immersions lagrangiennes de [Gromov] et [Lees].

Note : les méthodes et résultats de cette partie s'adaptent sans mal au cas où la variété symplectique considérée est n'importe quel cotangent.

2.2. Ce que dit le théorème de Gromov-Lees

Soit $f_0 : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ une immersion lagrangienne et soit

$$\psi_0 : TV \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}^n$$

la trivialisatation associée. Si $f : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une autre immersion lagrangienne, elle définit une nouvelle trivialisatation $\psi(f)$ de $TV \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ qui diffère de ψ_0 par une application $\psi(f_0, f) : V \rightarrow U$ (les fibrés vectoriels complexes de rang n sur les variétés de dimension n sont déjà stables).

Le théorème de Gromov-Lees affirme, entre autres choses, qu'inversement, si $\psi : V \rightarrow U$ est une application continue, il existe une immersion lagrangienne $f : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\psi(f_0, f)$ soit homotope à ψ .

Identifions maintenant

$$[V, U] = K^{-1}(\Sigma V) \xrightarrow{\sigma} \tilde{K}(V)$$

où Σ désigne la suspension et K la K -théorie complexe. Une conséquence du théorème de Gromov-Lees et de la définition des classes β_{2k} est alors :

2.2.1. Théorème :

$$\beta_{2k}(f) - \beta_{2k}(f_0) = \sigma^{-1}[2c_{2k+1}(\sigma\psi(f_0, f))]$$

où σ est la suspension et $c_{2k+1} : K(\Sigma V) \rightarrow H^{4k+2}(\Sigma V; \mathbb{Z})$ la classe de Chern.

Démonstration : Soit $a : U \times U/O \rightarrow U/O$ l'opération de U , de telle sorte que, si γ désigne les applications de Gauss (stables), on ait :

$$a \circ [\psi(f_0, f) \times \gamma(f_0)] = \gamma(f) : V \rightarrow U/O$$

alors

$$\beta_{2k}(f) = \gamma(f)^* \beta_{2k} = [\psi(f_0, f) \times \gamma(f_0)]^* a^* \beta_{2k}$$

2.2.2. Lemme :

$$a^* \beta_{2k} = 2\alpha_{2k} \otimes 1 + 1 \otimes \beta_{2k}$$

où α_i est l'élément transgressif universel, classe dans $H^{2i+1}(U; \mathbb{Z})$ dont la transgression pour la fibration universelle $U \rightarrow EU \rightarrow BU$ est c_{2i+1} .

$$\text{donc } \beta_{2k}(f) = 2\psi(f_0, f)^* \alpha_{2k} + \beta_{2k}(f_0)$$

2.2.3. Lemme : Soit $f \in [V, U]$, alors

$$f^* \alpha_{2k} = \sigma^{-1}(c_{2k+1}(\sigma f))$$

On en déduit immédiatement 2.2.1. ■

Démonstration de 2.2.2 : a est le quotient de la multiplication du groupe

$$b : U \times U \longrightarrow U$$

par la projection $\pi : U \rightarrow U/O$, les β et les α sont primitifs, et

$$\pi^* \beta_{2k} = 2\alpha_{2k}$$

par définition, donc

$$a^* \beta_{2k} = \pi^* \beta_{2k} \otimes 1 + 1 \otimes \beta_{2k} = 2\alpha_{2k} \otimes 1 + 1 \otimes \beta_{2k}. \blacksquare$$

Démonstration de 2.2.3 : $\sigma f : \Sigma V \longrightarrow BU$ est l'adjointe de

$$f : V \longrightarrow U \sim \Omega BU$$

Il est alors classique que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H^{2k+1}(U) & \xrightarrow{f^*} & H^{2k+1}(V) \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 H^{2k+2}(BU) & \xrightarrow{(\sigma f)^*} & H^{2k+2}(\Sigma V)
 \end{array}$$

(où τ est la transgression) commute. ■

Je vais expliquer maintenant sur des exemples pourquoi 2.2.1 donne lieu à des calculs explicites : en toute généralité, il faut déjà connaître les classes $\beta_{2k}(f_0)$, et l'image de c_{2k+1} pour calculer toutes les classes $\beta_{2k}(f)$. Il y a au moins une situation où l'on sait qu'il existe une immersion lagrangienne f_0 dont les classes caractéristiques sont nulles, c'est celle où V est stablement parallélisable.

2.3. Les variétés stablement parallélisables, sphères et tores

Si V est stablement parallélisable, soit ψ_0 une trivialisation de $TV \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ complexifiée d'une trivialisation stable de TV . Grâce à Gromov–Lees, on sait que ψ_0 correspond à "une" immersion lagrangienne f_0 dont il est bien clair que l'application de Gauss dans U/O est homotopiquement triviale. Voici la reformulation de 2.2.1 dans ce cas :

2.3.1. Corollaire : Si V est stablement parallélisable, les valeurs possibles des classes $\beta_{2k}(f)$ quand f parcourt les immersions lagrangiennes $V \rightarrow \mathbb{C}^n$ sont les valeurs de

$$\sigma^{-1}(2c_{2k+1}) : K(\Sigma V) \longrightarrow H^{4k+1}(V; \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$$

Ceci donne immédiatement, par intégralité du caractère de Chern :

2.3.2. Corollaire : Soit $x \in H^{4k+1}(S^{4k+1}; \mathbb{Z})$. Pour qu'il existe une immersion lagrangienne $f : S^{4k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{4k+1}$ telle que $\beta_{2k}(f) = x$, il faut et il suffit que x soit divisible par $Z(2k)!$ ■

Remarquons que si $f_0 : V^{4k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{4k+1}$ est une immersion lagrangienne d'une variété quelconque, on peut modifier le ψ_0 associé par une application

$$V^{4k+1} \xrightarrow{e} S^{4k+1} \longrightarrow U$$

(où e écrase le $4k$ -squelette) et qu'on a donc :

2.3.3. Corollaire : Soit $f_0 : \mathbb{V}^{4k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{4k+1}$ une immersion lagrangienne. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe une immersion lagrangienne $f_n : \mathbb{V}^{4k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{4k+1}$ telle que

$$\beta_{2k}(f_n) = \beta_{2k}(f_0) + 2(2k)! n \blacksquare$$

Revenons aux variétés stablement parallélisables pour examiner le cas des tores.

2.3.4. Proposition : Soit $(x_{2i})_{i \geq 0}$ une famille d'éléments de $H^*(T^n; \mathbb{Z})$ ($\deg x_{2i} = 4i+1$). Pour qu'il existe une immersion lagrangienne $f : T^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\beta_{2i}(f) = x_{2i}$ ($i \geq 0$), il faut et il suffit que x_{2i} soit divisible par $2(2i)!$

Démonstration : L'équivalence d'homotopie

$$\Sigma(A \times B) \sim S^1 \vee \Sigma A \vee \Sigma B \vee \Sigma(A \wedge B)$$

donne par récurrence

$$\Sigma T^n \sim S^1 \vee n S^2 \vee \dots \vee n S^n \vee S^{n+1}$$

(où $a S^k$ désigne le bouquet de a exemplaires de S^k et les coefficients sont les coefficients binômiaux).

On déduit immédiatement de 2.2.1 que les classes β_{2i} sont indépendantes et le calcul de chacune d'elles est très simple. On a :

$$\begin{array}{ccc} \oplus_I K(S_I^{4i+2}) & \xrightarrow{c_{2i+1}} & \oplus_I H^{4i+2}(S_I^{4i+2}) \\ \downarrow \sigma & & \\ & & H^{4i+1}(T^n) \end{array}$$

Si I parcourt les suites strictement croissantes de $4i+1$ entiers compris entre 1 et n , $(t_1, \dots, t_n)$ désigne la base de $H^1(T^n; \mathbb{Z})$ déduite de l'écriture $T^n = (S^1)^n$, et (t_I) la base de $H^{4i+1}(T^n; \mathbb{Z})$ associée, alors σt_I est le générateur de $H^{4i+2}(S_I^{4i+2})$.

Comme dans 2.3.2, l'image de c_{2i+1} est formée des

$$2(2i)! \sum a_I \sigma(t_I), \quad a_I \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

En particulier, les classes de Maslov des immersions lagrangiennes de T^n dans $\mathbb{C}^n$ sont exactement celles que nous avons exhibées dans 2.1 (pour les produits

d'immersions de S^1), mais il y a évidemment beaucoup plus d'immersions que les produits, puisque ceux-ci ont des classes β_{2i} nulles pour $i \geq 1$.

Note : la démonstration de 2.3.4 s'adapte facilement à tel produit de sphères que le lecteur voudra considérer.

3. Réalisation des nombres caractéristiques lagrangiens

La question générale peut être formulée ainsi :

Etant donnée une classe $y \in H^n(\Lambda)$, quelles sont les valeurs possibles du nombre $\langle \gamma(f)^* y, [L] \rangle$ quand $\gamma(f)$ parcourt les applications de Gauss des immersions lagrangiennes de variétés compactes de dimension n

$$f : L \rightarrow \mathbb{C}^n ?$$

Pour alléger les notations, nous écrirons ce nombre $y(f)$. Le cas des nombres caractéristiques modulo 2 est facile : ce sont des nombres de Stiefel–Whitney, ils dépendent de L mais pas de f , ceux qui sont effectivement obtenus sont déterminés dans [M.A.₂] (seules les conditions $w_1^2 = 0$ imposent des restrictions). Nous nous limiterons donc ici au cas des classes entières, et donc aux variétés L orientées.

Nous connaissons déjà la réponse si $n = 1$ (voir 2.1).

La stratégie que je vais adopter en dimensions plus grandes est la suivante :

- 1) définir un groupe L_n de façon que y définisse un homomorphisme

$$y : L_n \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dont l'image soit exactement l'ensemble des valeurs possibles des $y(f)$,

- 2) calculer si possible ces groupes et ces homomorphismes.

Une fois que les mots auront été définis, il sera clair que $y(f)$ est un invariant de la classe de cobordisme de f , L_n sera donc un des groupes de cobordisme lagrangien d'[Arnold₂].

3.1. Cobordisme lagrangien

Je renvoie à la source, c'est-à-dire à [Arnold₂] pour la définition géométrique. Pour nous, via le théorème de [Gromov]–[Lees] et les constructions de Thom–Pontrjagyn d'[Eliashberg], il s'agira essentiellement du bordisme des variétés orientées dont le fibré tangent complexifié est trivialisé.

Comme je ne vais plus travailler qu'avec des variétés orientées, je modifie les notations : la grassmannienne Λ_n est maintenant celle des lagrangiens orientés de $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire $U(n)/SO(n)$. Ceci ne change rien à la cohomologie stable en dimensions >1 (instablement, il y a en plus la classe d'Euler quand n est pair ; en dimension 1, la classe de Maslov est modifiée de façon évidente : $U(n)/SO(n)$ est le revêtement double non trivial de $U(n)/O(n)$).

Soit λ_n le fibré vectoriel tautologique, et $M\lambda$ le spectre de Thom construit sur les λ_n .

3.1.1. Définition : L_* est l'anneau gradué $\pi_*(M\lambda)$.

L_* n'est en fait qu'un sous-anneau de l'anneau de cobordisme lagrangien, celui des cobordismes lagrangiens exacts (i.e. on demande que la forme de Liouville λ soit exacte), mais c'est une conséquence du théorème de Gromov-Lees que l'image de L_* dans $\mathbb{Z}$ est bien l'ensemble cherché :

3.1.2. Proposition : Soit $y \in H^n(\Lambda; \mathbb{Z})$, y définit un homomorphisme

$$y : L_n \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dont l'image est l'ensemble des valeurs des nombres $y(f)$ quand f parcourt les immersions lagrangiennes des variétés compactes orientées de dimension n dans $\mathbb{C}^n$. ■

La question est maintenant de calculer l'image de y . Les réponses que je vais donner sont issues des calculs de [M.A.2] et [M.A.3]. La première remarque est un corollaire de 2.3.2 :

3.1.3. Proposition : L'algèbre extérieure $L_* \otimes \mathbb{Q}$ est engendrée par des immersions lagrangiennes de sphères. Si $y \in H^*(\Lambda)$ est non nul dans $H^*(\Lambda; \mathbb{Q})$, alors il existe une immersion lagrangienne f d'une réunion de produits de sphères telle que $y(f)$ soit non nul. ■

3.2. Les nombres β_{2k}

En dimension 5, la réponse est aussi complète qu'en dimension 1 :

3.2.1. Théorème : $\beta_2 : L_5 \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Il existe une immersion lagrangienne $SU(3)/SO(3) \rightarrow \mathbb{C}^5$ dont le nombre β_2 vaut 1.

et, plus généralement :

3.2.2. Théorème : Pour $k \geq 1$, l'image de $\beta_{2k} : L_{4k+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ est le sous-groupe des multiples de la partie impaire de $(2k)!$.

Esquisse de démonstration de 3.2.1 et 3.2.2 :

a) On montre que $L_5 \cong \mathbb{Z}$ par les voies naturelles, c'est-à-dire en considérant $H^*(M\lambda; \mathbb{Z}/p)$ en petites dimensions, comme module sur l'algèbre de Steenrod modulo p .

b) Reste à étudier la variété $V = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$: le complexifié de son fibré tangent est trivialisable, et son nombre $w_2 w_3$ est non nul, donc il existe une immersion lagrangienne $f : V \rightarrow \mathbb{C}^5$ dont le nombre β_2 est impair. Grâce à 2.3.3, on peut supposer que ce nombre est 1 ou -1 , il n'y a plus qu'à éventuellement changer l'orientation pour obtenir $\beta_2 = 1$. Ceci montre 3.2.1. ■

c) L'image de β_{2k} contient un nombre impair, c'est-à-dire qu'il existe une variété avec $w_{2k} w_{2k+1} = 1$ qui possède des immersions lagrangiennes : on étudie la structure du module $H^*(M\lambda; \mathbb{Z}/2)$ sur l'algèbre de Steenrod.

d) Pour montrer 3.2.2, il suffit alors de calculer l'image de

$$\beta_{2k} : L_{4k+1} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$$

Voici les étapes

* On montre que $L_* \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \Omega_*^{\mathrm{fr}}(\Lambda) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, tout revient donc à calculer l'image par l'homomorphisme de Hurewicz

$$\pi_{4k+1}^S(\Lambda) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \longrightarrow H_{4k+1}(\Lambda) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$$

des éléments qui sont indécomposables sur $\mathbb{Q}$ (β_{2k} est primitive).

* $\Lambda = U/\mathrm{SO}$ est facteur direct dans U (loin de 2). On s'inspire maintenant des méthodes de [Schwartz].

* Les indécomposables de $\pi_*^S(U)$ sont les éléments de l'image de R_* : $\pi_*^S(\Sigma(\mathbb{C}P^\infty)^+) \rightarrow \pi_*^S(U)$, où $R : \Sigma(\mathbb{C}P^\infty)^+ \rightarrow U$ est l'application de [James].

* [Mosher] a montré que l'image de l'homomorphisme de Hurewicz

$$\pi_*^S(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow H_*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$$

en dimension $4k$ est formée des multiples de $(2k)!t_{4k}$, où t_{4k} est le générateur usuel. Ceci achève la preuve de 3.2.2. ■

(Je renvoie à [M.A.3] pour les détails.)

3.3. Les produits de classes β_{2k}

Le lecteur sagace aura compris, à la lecture de la démonstration précédente, qu'il y a peu d'espoir d'obtenir des résultats beaucoup plus généraux : la structure d'anneau de L_* "ressemble" beaucoup à celle de $\pi_*^S(U)$... c'est-à-dire est assez compliquée. S'il est pratiquement évident que $L_* \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre extérieure, on voit aussi que $L_*/\text{Torsion}$ n'en est pas une. Je renvoie à [Franjou-Schwartz] pour une étude des relations dans $\pi_*^S(U)/\text{Torsion}$, dont la proposition suivante est un corollaire.

Pour tout $k \geq 1$, choisissons un élément x_{4k+1} de $L_{4k+1}/\text{Torsion}$ qui soit indécomposable, c'est-à-dire tel que $\beta_{2k}(x_{4k+1})$ soit la partie impaire de $(2k)!$.

3.3.1. Proposition : Si $p = 2s+1$ est un nombre premier impair, alors

$$x_{4i+1} \cdot x_{4(j+s)+1} - x_{4(i+s)+1} \cdot x_{4j+1}$$

est divisible par p dans $L_*/\text{Torsion}$. ■

Plutôt que d'énoncer un résultat général sur l'image de $\beta_{2k}\beta_{2l}$, qui serait forcément illisible, déduisons de 3.3.1 les images de $\beta_2\beta_4$ et $\beta_2\beta_6$.

3.3.2. Corollaire : (i) l'image de $\beta_2\beta_4$ est $\mathbb{Z}$ tout entier

(ii) l'image de $\beta_2\beta_6$ est formée des multiples de 3.

En effet, (i) $\beta_2\beta_4(x_5x_9)=3$ d'après 3.2.2 et x_5x_9 est divisible par 3 d'après 3.2.1.

(ii) $\beta_2\beta_6(x_5x_{13})=45$ d'après 3.2.2, et x_5x_{13} est divisible par 3 et 5 d'après

3.3.1. ■

3.4. Miscellanées

Revenons aux variétés stablement parallélisables :

3.4.1. Proposition : Soit V une variété stablement parallélisable, et soit $f: V \rightarrow \mathbb{C}^{4k+1}$ une immersion lagrangienne. Alors $\beta_{2k}(f)$ est divisible par $2(2k)!$.

C'est une conséquence de la démonstration de 3.2.2. : on considère maintenant l'image de

$$\Omega_*^{Ir}(U) \longrightarrow L_*. \blacksquare$$

D'autre part, $SU(2k+1)/SO(2k+1)$ possède des immersions lagrangiennes et sa dimension est le degré de $\beta_2 \dots \beta_{2k}$: ce n'est pas un hasard : $SU(2k+1)/SO(2k+1)$ est une sous-variété de codimension 1 de Λ_{2k+1} , duale à $\beta_2 \dots \beta_{2k}$. On en déduit facilement :

3.4.2. Proposition : Il existe une immersion lagrangienne

$$f : SU(2k+1)/SO(2k+1) \longrightarrow \mathbb{C}^{\text{ad hoc}}$$

telle que $\beta_2 \dots \beta_{2k}(f) = (2^2 + 2k + 1) \dots (2^{2k} + 2k + 1)$. ■

Références

[Arnold₁] V.I. Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, Funkt. Anal. Ego Prilozh. 1 (1965) [traduction française en appendice de la traduction de [Maslov]].

[Arnold₂] V.I. Cobordismes lagrangiens et legendriens I et II, Funkt. Anal. Ego Prilozh. 14 (1980) 3, 1–13 et 4, 8–17.

[M.A.₁] (M. Audin) Classes caractéristiques d'immersions lagrangiennes définies par des variétés de caustiques (d'après V.A. Vassiliev) Séminaire Sud–Rhodanien de Géométrie I, Travaux en cours, Hermann, Paris (1984).

[M.A.₂] (M. Audin) Quelques calculs en cobordisme lagrangien, Ann. Inst. Fourier 35(1985) 159–194.

[M.A.₃] (M. Audin) Cobordismes d'immersions lagrangiennes et legendriennes, Thèse d'Etat, Orsay (1986) et "Travaux en cours", Hermann, Paris (1987).

[Borel] A. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math. 57 (1953) 115–207.

[Duistermaat] J.J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974) 207–281.

[Eliashberg] J. Cobordisme des solutions de relations différentielles, Séminaire Sud–Rhodanien de Géométrie I, Travaux en cours, Hermann, Paris (1984).

[Franjou–Schwartz] V. et L. Hypersurfaces et homotopie stable de U, C. R. Acad. Sc. Paris 299 (1984) 619–622.

[Fuks] D.B. Classes caractéristiques de Maslov–Arnold, Dokl. Akad. Nauk SSSR 178 (1968) 303–306.

[Gromov] M. A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities, Actes Congrès Intern. Math. Nice (1970) tome 2, 221–225.

[James] I. The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lecture notes series 24 (1976).

[Lees] J.A. On the classification of Lagrange immersions, Duke Math. J. 43 (1976) 217–224.

[Maslov] V.P. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Moscou (1965) [traduction française : Dunod, Paris (1972)].

[Morvan] J.–M. Une obstruction à la transversalité de deux champs de plans lagrangiens, Séminaire Sud–Rhodanien de Géométrie I, Travaux en cours, Hermann, Paris (1984)

[Morvan–Niglio] J.–M. et L. à paraître aux Ann. Inst. Fourier.

[Mosher] R.E. Some stable homotopy of complex projective spaces, Topology 7 (1968) 179–193.

[Schwartz] L. Opérations d’Adams en K–homologie et applications, Bull. Soc. Math. France 109 (1981).

[Vaisman] I. Lagrangian foliations and characteristic classes, Differential geometry, édité par L.A. Cordero, Pitman, Boston (1985).

[Vassiliev] V.A. Classes caractéristiques d’immersions lagrangiennes et legendriennes duales aux caustiques et fronts d’onde, Funkt. Anal. Ego Prilozh. 15 (1981) 3, 10–22.

[Viterbo] C. prépublication (1985), à paraître au Bull. Soc. Math. France.