ISSN 0374-1990

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ • ТОМ 21 • ВЫПУСК 3

МОСКВА • 1987

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 3, 61—64

УДК 512.7

КОБОРДИЗМЫ ЛАГРАНЖЕВЫХ ИММЕРСИЙ В ПРОСТРАНСТВО КОКАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ МНОГООБРАЗИЯ

М. Одэн[1])

В предыдущей работе [2] мы показали, как вычисляются определенные В. И. Арнольдом группы кобордизма лежандровых иммерсий в пространство 1-струй $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Здесь мы покажем, как сводить к ним вычисление групп лагранжева кобордизма в пространствах кокасательных расслоений многообразий. В частности, мы покажем, что группа ориентированного лежандрова бордизма (лежандровых иммерсий в $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$) является естественным прямым слагаемым в группе ориентированного лагранжева бордизма (лагранжевых иммерсий в $T^*\mathbf{R}^n$), а дополнительные слагаемые задаются непрерывными инвариантами, которые обобщают описанный Арнольдом [1] в одномерном случае: инвариант Арнольда — это ориентированная площадь, ограниченная иммерсированной кривой. В неориентированном случае мы покажем, что очевидное отображение из группы лежандрова бордизма в лагранжевы бордизмы является изоморфизмом.

0. Обозначения. Пусть X — бесконечно дифференцируемое многообразие, T^*X обозначает пространство его кокасательного расслоения, α — форма Лиувилля $(p\,dq)$, а $\omega = -d\alpha$ — каноническая симплектическая форма. $M\lambda$ (соответственно $M\widetilde{\lambda}$) — это спектр Тома, построенный по тавтологическим расслоениям $\lambda_n \to \Lambda_n = U(n)/O(n)$ (соответственно $\widetilde{\lambda}_n \to \widetilde{\Lambda}_n = U(n)/SO(n)$) над грассманианами лагранжевых неориентированных (ориентированных) подпространств в $\mathbf{R}^{2n}$.

1. Конструкция Понтрягина—Тома. Иммерсия $f\colon V \to T^*X$ называется лагранжевой, если $\dim V = \dim X$ и $f^*\omega = 0$. В этом случае 1-форма $f^*\alpha$ замкнута; если она к тому же точна, то говорят, что иммерсия f — точная лагранжева. Точные лагранжевы иммерсии получаются проекцией лежандровых иммерсий в пространство $J^1(X, \mathbf{R}) \cong T^*X \times \mathbf{R}$.

Лагранжевы кобордизмы были определены и изучены в очень общей ситуации В. И. Арнольдом в работе [1], к которой мы и отсылаем читателя. Здесь мы ограничимся так называемым «цилиндрическим» случаем: кобордизмы лежат в $T^*(X \times \mathbf{R})$.

Теорема Громова—Лиса [5; 6] позволяет применить к этим задачам конструкции Понтрягина—Тома; ранее и в более общей ситуации такие конструкции использовал Я. М. Элиашберг [4].

Для упрощения формулировок будем считать, что многообразие X ориентировано.

П р е д л о ж е н и е 1 (см. [4; 3]). *Если X — компактное многообразие, то группа ориентированных (соответственно неориентированных) кобордизмов точных лагранжевых иммерсий в $T^*(X \times \mathbf{R}^m)$ изоморфна $L^{-m}(X)$ (соответственно $\mathfrak{R}L^{-m}(X)$), где $L^*(\cdot)$ (соответственно $\mathfrak{R}L^*(\cdot)$) означает обобщенную теорию когомологий, определенную спектром $M\widetilde{\lambda}$ $(M\lambda)$.*

Это то же самое, что группы лежандровых кобордизмов в $J^1(X, \mathbf{R})$. Приведем более общее утверждение. Назовем L-регулярной гомотопией

---

[1]) Перевод с французского В. А. Васильева.

такое отображение $H\colon V\times[0,1]\to T^*X$, что для любого t, $H_t=H(\cdot,t)$ является лагранжевой иммерсией, и класс элемента $H_t^*\alpha$ в группе $H^1(V,\mathbf{R})$ не зависит от t. Тогда теорема Громова—Лиса позволяет отождествить класс L-регулярно гомотопных лагранжевых иммерсий $f\colon V\to T^*X$ с тройкой, состоящей из гомотопического класса изоморфизмов комплексных пучков $((\pi\circ f)^*TX)\otimes\mathbf{C}\to TV\otimes\mathbf{C}$ на V (где $\pi\colon T^*X\to X$ — проекция расслоения), класса формы $f^*\alpha$ в $H^1(V,\mathbf{R})$ и гомотопического класса сквозного отображения $\pi\circ f\colon V\to X$.

Поскольку, как легко убедиться, L-регулярные гомотопии — это в точности те гомотопии, которые поднимаются до лагранжевых кобордизмов $\tilde{H}(x,t)=(H(x,t),\ t,u(x,t))\in T^*X\times\mathbf{R}^2\cong T^*(X\times\mathbf{R})$, отсюда вытекает

Предложение 2 (см. [4; 3]). *Для компактного многообразия X группа ориентированных (соответственно неориентированных) кобордизмов лагранжевых иммерсий в $T^*(X\times\mathbf{R}^m)$ изоморфна $\mathrm{Lag}^{-m}(X)$ (соответственно $\mathfrak{N}\mathrm{Lag}^{-m}(X)$), где $\mathrm{Lag}^*(\cdot)$ (соответственно $\mathfrak{N}\mathrm{Lag}^*(\cdot)$) обозначает обобщенную теорию когомологий, заданную спектром $M\tilde{\lambda}\wedge K(\mathbf{R},1)$ (соответственно $M\lambda\wedge K(\mathbf{R},1)$).*

$K(\mathbf{R},1)$ — это пространство Эйленберга — Маклейна, отвечающее за $H^1(\cdot,\mathbf{R})$, мы обозначим его через K. Для вычисления групп лагранжева кобордизма в T^*X теоретически достаточно знать гомотопии пространств $M\lambda$ и $M\tilde{\lambda}$, гомологии K и когомологии X.

Напоминание (см. [7]). $H_*(K,\mathbf{Z})$ изоморфна $\Lambda_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ (внешней алгебре над $\mathbf{Z}$-модулем $\mathbf{R}$ с естественной градуировкой).

Заметим сразу, что K является рациональным пространством; ясно также, что $M\lambda$ 2-примарно ($\mathfrak{N}L^\circ(X)$ является векторным пространством над $\mathbf{Z}_2$). Следовательно, естественное отображение

$$\mathfrak{N}L^\circ(X)\to\mathfrak{N}\,\mathrm{Lag}^\circ(X)$$

является изоморфизмом.

Следствие. *Любая лагранжева иммерсия неориентированно кобордантна точной лагранжевой иммерсии.*

Хорошо известно, что ориентированный случай намного сложнее. Действительно, если $x\in H^{n-1}(U/SO,R)$ а f — лагранжева иммерсия ориентированного многообразия в $T^*\mathbf{R}^n$, то x определяет класс $\gamma(f)^*x\in H^{n-1}(V,\mathbf{R})$ и число $\int_V\gamma(f)^*x\wedge f^*\alpha$ зависит только от класса кобордизма f. Например, ориентированная площадь, ограниченная плоской ориентированной кривой в $\mathbf{R}^2$, является инвариантом кобордизма (см. [1]).

В дальнейшем мы ограничиваемся ориентированным случаем и считаем, что $X=\mathbf{R}^n$, т. е. рассматриваем группы L_n (в «точном» случае) и Lag_n (в общем случае); эти группы являются группами «коэффициентов» рассматриваемых когомологических теорий (т. е. когомологиями точки). Декартовы произведения иммерсий задают на суммах $L_*=\bigoplus L_n$, $\mathrm{Lag}_*=\bigoplus\mathrm{Lag}_n$ структуру градуированных колец. В [2] показано, как вычислять L_*, здесь же мы покажем, как, зная L_*, вычислять Lag_*.

2. Вычисление кольца Lag_*. Прежде всего, заметим, что предложение 2 можно переформулировать так: группа Lag_n равна группе $L_n(K)$ (обобщенных гомологий пространства K).

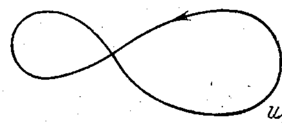
Теорема 1. $\mathrm{Lag}_*\cong L_*\otimes H_*(K,\mathbf{Z})$.

Доказательство. Запишем $\mathrm{Lag}_n\cong L_n\oplus\tilde{L}_n(K)$ (где $\tilde{L}$ — приведенная теория гомологий). Поскольку пространство K рационально, из спектральной последовательности Атьи—Хирцебруха получаем, что $\tilde{L}_n(K)\cong\bigoplus_{p\geq 1}L_{n-p}\otimes H_p(K)$.

Замечание. Теперь имеем $\mathrm{Lag}_n \cong L_n \oplus \bigoplus\limits_{p\geqslant 1} L_{n-p} \otimes H_p(K) \cong$ $\cong L_n \oplus \bigoplus\limits_{p\geqslant 1} H_{n-p}(U/SO) \otimes H_p(K)$, поскольку при $p \geqslant 1$, $H_p(K)$ является векторным пространством над Q, а $L_{n-p} \otimes Q \cong H_{n-p}(U/SO; Q)$ согласно одной знаменитой теореме Серра ($L_k \cong \pi_k(M\widetilde{\lambda})$).

Следствие 1 (см. [1]). $\mathrm{Lag}_1 \cong L_1 \oplus \mathbf{R} \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{R}$.

В дальнейшем мы будем использовать гомоморфизм $\mathbf{R} \to \mathrm{Lag}_1$, образ которого в L_1 равен 0: любому действительному числу x сопоставляется класс иммерсии w_x: $S^1 \to \mathbf{R}^2$, регулярно гомотопной иммерсии Уитни (а следовательно, имеющей нулевой класс Маслова) и окружающей ориентированную площадь, равную x. Из следствия 1 вытекает, что это корректно задает искомый гомоморфизм.


w_x

Для того чтобы лучше представлять геометрическое содержание сомножителя $H_*(K)$, рассмотрим более подробно проекцию $\mathrm{Lag}_n \to H_n(K)$. Для лагранжевой иммерсии f: $V^n \to T^*\mathbf{R}^n$ обозначим через φ_f отображение $V \to K$, определяющее класс $[f^*\alpha] \in H^1(V, \mathbf{R}) \cong [V, K]$. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_n(V) & \xrightarrow{\Delta} & \Lambda^n H_1(V) \\ {\scriptstyle (\varphi_f)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda^n(\varphi_f)_*} \\ H_n(K) & \xrightarrow{\cong} & \Lambda^n H_1(K), \end{array}$$

где нижний изоморфизм задан естественным коумножением, а Δ — это композиция $H_n(V) \to H_n(V \times \ldots \times V) \cong (\otimes H_* V)_n \oplus T \to \Lambda^n H_1(V)$ диагонального отображения $V \to V \times \ldots \times V$, изоморфизма Кюннета (который хотя и не является естественным, но его Tor-часть аннулируется в $H_*(K)$) и естественной проекции. Следовательно, проекция $\mathrm{Lag}_n \to H_n(K)$ классу иммерсии f ставит в соответствие элемент $\Lambda^n(\varphi_f)_*\Delta[V]$, где $(\varphi_f)_*$: $H_1(V, \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$ — это в точности интегрирование формы Лиувилля $f^*\alpha$ по циклам. Например, если V — поверхность рода g, и $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ — базис в $H_1(V, \mathbf{Z})$, в котором форма пересечений задается формулами $(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_i^j$, то образ элемента $[f] \in \mathrm{Lag}_2$ в группе $H_2(K) = \Lambda^2_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ — это $x_1 \wedge y_1 + \ldots + x_g \wedge y_g$, где $x_i = \int\limits_{a_i} f^*\alpha$, $y_i = \int\limits_{b_i} f^*\alpha$. Поскольку $L_2 = 0$ (см. [2]), отсюда получаем

Следствие 2. $\mathrm{Lag}_2 \cong L_1 \otimes \mathbf{R} \oplus H_2(K) \cong \mathbf{R} \oplus \Lambda^2_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$. Этот изоморфизм любой лагранжевой иммерсии f поверхности V рода g в $T^*\mathbf{R}^2$ ставит в соответствие пару

$$\left(\int\limits_m f^*\alpha, \sum_{i=1}^{g} \left(\int\limits_{a_i} f^*\alpha\right) \wedge \left(\int\limits_{b_i} f^*\alpha\right)\right),$$

где m — цикл, двойственный классу Маслова иммерсии f, а $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ — описанный выше базис в $H_1(V, \mathbf{Z})$.

Эти же рассуждения немедленно доказывают

Следствие 3. *Иммерсия* $w_{x_1} \times \ldots \times w_{x_n}$: $S^1 \times \ldots \times S^1 \to T^*\mathbf{R}^n$ *кобордантна нулю, если и только если числа* $x_1, \ldots, x_n$ *линейно зависимы над* $\mathbf{Q}$.

Такие специальные иммерсии мы рассмотрели неспроста.

Теорема 2. *Отображение* $L_* \otimes H_*(K) \to \mathrm{Lag}_*$, *которое элементу вида* $[f] \otimes (x_1 \wedge \ldots \wedge x_q)$ (*где* $f\colon V^p \to T^*\mathbf{R}^p$ — *точная лагранжева иммерсия*) *ставит в соответствие класс иммерсии* $f \times w_{x_1} \times \ldots \times w_{x_q}\colon V^p \times T^q \to T^*R^{p+q}$, *является изоморфизмом.*

Доказательство. Из следствия 3 вытекает, что это отображение корректно определено и является гомоморфизмом групп. Ясно, что композиция $L_p \otimes H_q(K) \to \mathrm{Lag}_{p+q} \to H_p(U/SO) \otimes H_q(K)$ при $q \geqslant 1$ является изоморфизмом, откуда в силу теоремы 1 вытекает требуемое.

Следствие. *Любая лагранжева иммерсия в* $T^*\mathbf{R}^n$ *кобордантна несвязному объединению лагранжевых иммерсий вида* $f \times g\colon V^p \times T^q \to T^*R^n$, *где* $f\colon V^p \to T^*\mathbf{R}^p$ *точна, а* $g\colon T^q \to T^*R^q$ — *лагранжева иммерсия тора такая, что соответствующее гауссово отображение этого тора в* $\widetilde{\Lambda}_q \cong U(q)/SO(q)$ *гомотопно тривиальному.*

Итак, всю «неточность» иммерсий можно сосредоточить в иммерсиях торов: это неудивительно, поскольку $K(\mathbf{Q}, 1)$ полезно рассматривать как «рациональное кольцо», а следовательно, $K(\mathbf{R}, 1)$ — как нечто вроде тора.

Следующие вопросы навеяны примерами, рассмотренными в настоящей работе.

А. Может ли лагранжево вложение ориентированного многообразия быть кобордантно нулю (в классе лагранжевых иммерсий)?

Б. Может ли лагранжево вложение тора задавать гауссово отображение, гомотопное постоянному?

В случае кривых ответы на эти вопросы отрицательны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Лагранжевы и лежандровы кобордизмы // Функцион. анализ и его прил.—1980. Т. 14, вып. 3.— С. 1—13; вып. 4.— С. 8—17.
2. *Audin M.* Quelques calculs en cobordisme lagrangien // Ann. Inst. Fourier.—1985. V. 35.— P. 159—194.
3. *Audin M.* Cobordismes lagrangien et legendriens. Paris: Hermann, 1986.
4. *Eliashberg Ja. M.* Cobordisme des solutions de relations differentielles. // Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie 1, Travaux en Cours. Paris: Hermann, 1984.
5. *Громов М. Л.* Топологические методы построения решений дифференциальных уравнений и неравенств. В // Международный конгресс математиков в Ницце. 1970.— М.: Наука, 1972.
6. *Lees J. A.* On the classification of Lagrange immersions. // Duke Math. J.—1976. V. 43.— P. 217—224.
7. *Роже К.* Гомологии аффинных групп и классифицирующие пространства полулинейных слоений. // Функцион. анализ и его прил.—1979. Т. 13, вып. 4.— С. 47—52.

Университет Париж-Юг

Поступило в редакцию
23 июля 1986 г.