

Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels

MICHÈLE AUDIN

Il y a actuellement toute une activité autour des problèmes de plongements lagrangiens dans $\mathbb{C}^n$ (une immersion $f: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ est lagrangienne si, en tout point x de V , $iT_x f(T_x V)$ est l'orthogonal de $T_x f(T_x V)$). La classification des immersions lagrangiennes est un des effets de la méthode de [Gromov–1970] (voir aussi [Lees–1976]). Le problème des *plongements* est autrement plus rigide, et va sûrement donner des résultats surprenants. Par exemple, un sous-produit d'une nouvelle puissante théorie développée par [Gromov–1985] est: pour que V possède un plongement lagrangien dans $\mathbb{C}^n$, il faut que $H^1(V; \mathbb{R})$ ne soit pas nul.

Dans cet article, je vais montrer que la topologie différentielle “molle” a quand même des choses à dire sur le problème de l'existence de plongements lagrangiens. Je vais même l'aborder sous un angle très grossier: pour que V possède un plongement lagrangien dans $\mathbb{C}^n$, il est nécessaire qu'elle possède, dans la même classe d'homotopie régulière *ordinaire*, à la fois une immersion lagrangienne et un plongement (ordinaire).

Un “lemme de Whitney” d'élimination des points doubles a permis à (toujours...)[Gromov–1973] (voir aussi [Forstnerič–1986b]) de montrer que cette dernière condition est *suffisante* pour que V possède un plongement totalement réel (c'est la version “molle” des plongements lagrangiens: on demande seulement que $T_x f(T_x V)$ et $iT_x f(T_x V)$ soient transverses). Il se trouve que les sous-variétés totalement réelles de $\mathbb{C}^n$ sont intéressantes en elles-mêmes: elles permettent par exemple de construire des domaines d'holomorphie (voir [Stout–Zame–1985] par exemple).

La présente approche, fort grossière pour les plongements lagrangiens (elle n'imposera jamais des choses comme $H^1(V; \mathbb{R}) \neq 0$) est ainsi suffisante pour donner des caractérisations des variétés qui possèdent des plongements totalement réels.

Pour présenter simplement les résultats de cet article, je partage la question sous-jacente à la remarque “grossière” précédente en deux:

a) Combien y a-t-il de classes d'homotopie régulière d'immersions ordinaires de la variété V dans $\mathbb{C}^n$ qui contiennent des immersions lagrangiennes?

b) Comment décider, à la vue de la topologie de V , si ces classes contiennent des plongements (ordinaires)?

Voici d'abord des réponses à a):

0.1. THÉORÈME. *Soit V une variété fermée de dimension n . Si $n + 1$ n'est pas une puissance de 2, il existe au plus une classe d'homotopie régulière d'immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui contient des immersions lagrangiennes.*

Sans hypothèses supplémentaires, on ne peut pas supprimer l'hypothèse de dimension, puisqu'on a aussi.

0.2. THÉORÈME. *Pour tout entier q , il existe une variété (orientable) V de dimension $n = 2^q - 1$, dont toutes les classes d'homotopie régulière d'immersions dans $\mathbb{C}^n$ contiennent des immersions lagrangiennes.*

C'est le cas pour toutes les variétés orientables de dimension 1 (trivialement) et 3. En particulier, toutes les variétés orientables de dimension 3 possèdent des plongements totalement réels dans $\mathbb{C}^3$.

On a quand même

0.3. PROPOSITION. *Si V est une variété stablement parallélisable de dimension $n \neq 1$ et 3, il existe une classe d'homotopie régulière d'immersions de V dans $\mathbb{C}^n$ qui contient toutes les immersions lagrangiennes de V .*

Passons maintenant à la question b). Soit $f : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ une immersion lagrangienne, désignons par $d(f)$ le nombre de points doubles d'une approximation à croisements normaux de f , comptés "algébriquement" comme dans [Whitney–1944], ainsi: $d(f) \in \mathbb{Z}$ si V est orientable et n pair, $d(f) \in \mathbb{Z}/2$ dans tous les autres cas. La nullité de $d(f)$ est une condition nécessaire et suffisante (même dans le cas des surfaces dans ce contexte) pour que f soit régulièrement homotope à un plongement, quand V est connexe.

Le cas où n est pair est bien classique (au moins si V est orientable). On trouve

0.4. PROPOSITION. *Soient V une variété de dimension $n = 2k$ et $f : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ une immersion lagrangienne. Alors*

$$d(f) = (-1)^{k+1} \frac{\chi(V)}{2} \pmod{2 \text{ si } V \text{ n'est pas orientable}};$$

$\chi(V)$ désigne la caractéristique d'Euler. Si n est impair ($n = 2k + 1$), on peut

espérer que la semi-caractéristique de Kervaire

$$\hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V) = \sum_{i=0}^k \dim H^i(V; \mathbb{Z}/2) \bmod 2$$

va jouer le même rôle, puisqu'on a

0.5. THÉORÈME. *Soient V une variété fermée de dimension n impaire et $f: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ une immersion lagrangienne. Alors $d(f) = \hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V)$ au moins dans les cas suivants:*

- a) $n \neq 1$ et 3 et V est stablement parallélisable,
- b) $n = 4h + 1$ ($h \geq 1$) et V est orientable,
- c) $n = 8h + 3$ ($h \neq 2^q$) et V est spin.

Voici quelques applications directes.

0.6. COROLLAIRE. *Pour qu'une variété connexe de dimension n possède un plongement totalement réel, il faut et il suffit que son fibré tangent complexifié soit trivialisable et que:*

- a) si $n \equiv 0 \bmod 2$, $\chi(V) = 0 \bmod 4$ si V n'est pas orientable);
- b) si $n \equiv 1 \bmod 4$ et V orientable, $\hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V) = 0$.

0.7. COROLLAIRE. *Si V est une variété stablement parallélisable mais pas parallélisable, elle ne possède aucun plongement totalement réel, a fortiori aucun plongement lagrangien.*

Comme je l'ai déjà dit, le cas des variétés orientables de dimension paire est bien connu. Le cas des variétés stablement parallélisables (au moins pour $n \neq 7$) est aussi facile (0.7 est un exercice, qui peut se faire avant ce qui le précède). Je vais néanmoins les expliquer très en détail pour deux raisons: d'abord, il n'est pas impossible que les lecteurs les plus intéressés par les résultats de ce travail soient des consommateurs de plongements totalement réels, et pas des spécialistes de topologie différentielle; ensuite, la démonstration de 0.3 que je vais donner est une bonne introduction aux voies un peu détournées menant à 0.5 b par exemple.

Les démonstrations de 0.1, 0.2, 0.3, et 0.4 sont fondées sur la classification des immersions de [Whitney-1944], [Smale-1959] et [Hirsch-1959] et sur celle des immersions lagrangiennes par [Gromov-1970] et [Lees-1976]. Un résultat intermédiaire peut-être intéressant est l'énumération (quand n est impair) des fibrés normaux d'immersions en dimension double (3.1.1),* basé sur un beau

* Ce résultat figure déjà dans: W. Sutherland, *Whitehead squares in Thom complexes*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 24 (1981) 221-229.

théorème de [James–Thomas–1965]. J'ai essayé d'être complète en ce qui concerne les plongements réels, mais bien sûr pas sur tout le folklore des immersions en dimension double, dont il n'apparaîtra ici que ce qui sera utilisé dans les démonstrations.

Dans ce souci d'être complète, j'ai inclus une liste d'exemples de tout ce que je connais en fait de plongements totalement réels et lagrangiens, voilà une partie des exemples qui viennent directement des résultats précédents:

0.8. PROPOSITION. *Les variétés suivantes possèdent des plongements totalement réels:*

- a) *les espaces projectifs réels P^1 , P^3 , P^7 (et ceux-là seulement);*
- b) *sauf en dimension 7, toutes les variétés parallélisables, en particulier tous les groupes de Lie compacts;*
- c) *les espaces homogènes $U(n)/O(n)$, $SU(3)/SO(3)$, $SU(4)/SO(4)$ et $U(n)/SO(n)$.*

Remerciements

Les calculs de points doubles menant à 0.5 b) et c) et à 0.4 (cas non-orientable) utilisent la machinerie de [Vogel–1974] d'une manière que j'ai apprise dans un cours Peccot donné par J. Lannes en 1978, et qui n'a malheureusement pas été publié. Le même Jean Lannes a eu la gentillesse de m'expliquer comment finir les calculs (de 5.4 et 5.5). Sans lui, je n'aurais pu achever le programme de démonstration exposé dans 5.2. Je le remercie donc avec plaisir.

Une partie des résultats a été annoncée dans [Audin–1986b]. Je remercie Daniel Bennequin et Julien Duval de m'avoir signalé le théorème de Gromov qui fait que ce que je croyais n'être qu'une condition nécessaire à l'existence de plongements lagrangiens est aussi une condition suffisante pour l'existence de plongements totalement réels.

Je remercie aussi Jean-Claude Sikorav pour m'avoir persuadée d'écrire le §6 (exemples), Thomas Delzant pour m'avoir autorisée à présenter les exemples les plus originaux de ce même paragraphe et Emmanuel Giroux, François Latour et François Laudénbach d'avoir bien voulu écouter certaines versions préparatoires de ce travail.

Le professeur Lee Stout m'a signalé les travaux de Forstnerič, Larry Smith et le *referee* ont eu la gentillesse de me signaler le joli [Brown–1973] et de faire diverses remarques qui m'ont aidée à améliorer une première version de cet article; qu'ils soient, eux aussi, remerciés!

§1. Etude des variétés de dimension paire

Dans ce paragraphe, je démontre 0.1 pour les variétés de dimension paire, et 0.4.

1.1. Démonstration de 0.1 quand n est pair

Elle est folklorique et facile à partir de [Hirsch–1959], qui affirme que la classe d'homotopie régulière de $f : V^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est (pour n pair) bien définie par la classe d'Euler du fibré normal

$$e(Nf) \in H^n(V; \pi_n O/O(n)) = H^n(V; \mathbb{Z}^{w_1}) \cong \mathbb{Z}$$

ou $\mathbb{Z}^{w_1}$ est le faisceau de coefficients tordu par l'orientation de V . Si f est lagrangienne, la multiplication par i fournit un isomorphisme $TV \rightarrow Nf$, ce qui suffit. $\square$

1.2. Démonstration de 0.4 quand V est orientable

1.2.1. PROPOSITION. Soit V une variété fermée orientable de dimension n paire, et soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ une immersion. Alors

$$d(f) = -\frac{1}{2} \langle e(Nf), [V] \rangle.$$

Démonstration de 1.2.1. On suppose f à croisements normaux, et on choisit une section σ du fibré normal Nf , transverse à la section nulle et dont les zéros ne sont pas des (images inverses de) points doubles de f . On considère, pour $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \in \mathbb{R}^{2n}$$

définissant ainsi une approximation de f qui lui est transverse. On calcule ensuite l'intersection homologique $0 = f_*[V] \cdot f_*[V]$ en comptant les points d'intersection de f et f_ε . Il y a :

- * d'une part, les zéros de σ , en nombre "algébrique" $\langle e(Nf), [V] \rangle$;
- * d'autre part, deux points d'intersection pour chaque point double de f , chacun avec le signe de ce point double.

Ainsi, $0 = \langle e(Nf), [V] \rangle + 2d(f)$. $\square$

Maintenant, si f est lagrangienne, on a un isomorphisme $TV \rightarrow Nf$, qui multiplie l'orientation par $(-1)^{n(n-1)/2}$, donc $e(Nf) = (-1)^{n(n-1)/2} e(TV)$, soit si $n = 2k$:

$$d(f) = (-1)^{k+1} \frac{\chi(V)}{2}. \quad \square$$

1.3. Démonstration de 0.4 quand V n'est pas orientable

Elle est fondée sur la généralisation suivante d'un théorème de Whitney et Mahowald concernant les plongements (voir [Massey-1969a]).

1.3.1. PROPOSITION [Lannes-1982]. *Soit V une variété fermée de dimension n paire, et soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ une immersion. Alors,*

$$d(f) = \langle \bar{w}_1 \bar{w}_{n-1}, [V] \rangle + \frac{1}{2} \langle e(Nf), [V] \rangle.$$

Dans cet énoncé, $\bar{w}_i$ désigne la i -ème classe de Stiefel-Whitney normale de V et $\frac{1}{2} \langle e(Nf), [V] \rangle$ est un nombre entier, considéré modulo 2. Je donnerai une démonstration de 1.3.1 (due aussi à Lannes) dans 5.6.

Si f est lagrangienne, on remplace (comme plus haut) Nf par TV . Pour finir la démonstration, il ne reste plus qu'à montrer:

1.3.2. LEMME. *Si V possède une immersion lagrangienne, le nombre $\langle \bar{w}_1 \bar{w}_{n-1}, [V] \rangle$ est nul.*

Démonstration de 1.3.2. Soit $g : V \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ (k assez grand) un plongement, et $\Phi(g) : S^{n+k} \rightarrow M$ la construction de Thom-Pontrjagyn (M est l'espace de Thom du fibré normal de g). Désignons par $u \in \tilde{H}^k(M; \mathbb{Z}/2)$ la classe de Thom mod 2, et calculons dans $\tilde{H}^*(M; \mathbb{Z}/2)$:

$$\begin{aligned} Sq^{n-1}(u\bar{w}_1) &= u\bar{w}_{n-1}\bar{w}_1 + u\bar{w}_{n-2}\bar{w}_1^2 \\ &= u\bar{w}_{n-1}\bar{w}_1; \end{aligned}$$

Comme V possède des immersions lagrangiennes, $\bar{w}_1^2 = 0$. Donc:

$$\langle \bar{w}_1 \bar{w}_{n-1}, [V] \rangle = \langle \Phi(g)^* Sq^{n-1}(u\bar{w}_1), [S^{n+k}] \rangle = 0. \quad \square$$

(En tout état de cause, $\bar{w}_{n-1} = 0$ pour toutes les variétés V si n n'est pas une puissance de 2; et si n est une puissance de 2, on a par récurrence avec la démonstration précédente que $\langle \bar{w}_1 \bar{w}_{n-1}, [V] \rangle = \langle \bar{w}_1^n, [V] \rangle$.)

1.3.3. Remarque sur les surfaces. A priori, la nullité de $d(f)$ n'est pas suffisante pour que f soit régulièrement homotope à un plongement, quand $n = 2$. D'après [Massey-1969b], il faut et il suffit:

a) que $d(f) = 0$, soit ici que $\chi(V)$ soit divisible par 4;

b) et en plus que $-4 + 2\chi(V) \leq \langle e(Nf), [V] \rangle \leq 4 - 2\chi(V)$, ce qui est automatique si f est lagrangienne: il n'y a pas de surface non-orientable dont la caractéristique d'Euler soit plus grande que 1.

Il existe bien des plongements totalement réels de toutes les surfaces non-orientables dont la caractéristique d'Euler est divisible par 4: si $\chi(V) = -4k < 0$, il y a un plongement lagrangien de V dans [Givental-1986]; et il y a un plongement totalement réel (non lagrangien) de la bouteille de Klein dans [Rudin-1981].

§2. Etude des variétés stablement parallélisables de dimension $n \neq 1, 3, 7$

Dans ce paragraphe, je montre 0.3 sauf en dimension 7. Il y aura une autre démonstration incluant la dimension 7 plus bas, mais celle donnée ici est une bonne introduction aux problèmes et méthodes utilisées dans la suite. Elle est fondée sur la proposition suivante, qui est folklorique (voir par exemple [Koschorke-Sanderson-1977]).

2.1. PROPOSITION. Soit $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion d'une variété orientable de dimension n , et soit g la composition $V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Alors, modulo 2, $d(g)$ est l'invariant de Hopf de la parallélisation stable définie par f .

La démonstration de 2.1. que je donne ici est inspirée de – et donc essentiellement due à – [Stong-1968]. On considère le diagramme commutatif de groupes de cobordisme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Omega_n^{fr} & & \\
 & \nearrow \partial & & \nwarrow I_* & \\
 \Omega_{n+1}^{0,fr} & & & & \Omega_n^n \xrightarrow{d} \mathbb{Z}/2 \\
 & \searrow I_* & & \nearrow \partial & \\
 & & \Omega_{n+1}^{0,n} & &
 \end{array}$$

dans lequel:

- * Ω_n^{fr} est le groupe de cobordisme des immersions de variétés orientées de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (ou des variétés stablement parallélisées);

- * $\Omega_{n+1}^{0,fr}$ est le groupe de cobordisme relatif des variétés de dimension $n+1$ dont le bord est orienté et muni d'une immersion dans $\mathbb{R}^{n+1}$;

- * Ω_n^n est le groupe de cobordisme des immersions en codimension n des variétés de dimension n ;

- * $\Omega_{n+1}^{0,n}$ est le groupe de cobordisme des variétés de dimension $n+1$ dont le bord est muni d'une immersion en codimension n ;

* ∂ désigne les applications “bord” et j_* les applications induites par l’inclusion $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$;

* l’application de “points doubles” d est considérée dans $\mathbb{Z}/2$ même si n est pair.

Soit (W^{n+1}, f) représentant un élément de $\Omega_{n+1}^{O,n}$: f est une immersion de ∂W dans $\mathbb{R}^{2n}$. L’application classifiant le fibré normal de la paire $(W, \partial W)$ est à valeurs dans $(BO, BO(n))$. La restriction $H^*(BO, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(BO(n); \mathbb{Z}/2)$ est surjective et son noyau contient la classe w_{n+1} , qu’on peut donc considérer comme un élément

$$w_{n+1} \in H^{n+1}(BO, BO(n); \mathbb{Z}/2) \hookrightarrow H^{n+1}(BO, \mathbb{Z}/2).$$

En évaluant sur la classe fondamentale, w_{n+1} définit donc un homomorphisme: $w_{n+1}: \Omega_{n+1}^{O,n} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ nul sur l’image du cobordisme non-orienté $\Omega_{n+1}^O \rightarrow \Omega_{n+1}^{O,n}$: la “dernière” classe de Stiefel–Whitney normale d’une variété fermée est nulle.

Dans le livre de Stong (p. 102 ~) est défini de la même manière un homomorphisme, compatible via j_* avec le précédent:

$$w_{n+1}: \Omega_{n+1}^{O,fr} \rightarrow \mathbb{Z}/2.$$

Comme toutes les variétés stablement parallélisables sont des bords, la longue suite exacte reliant Ω_*^O et Ω_*^{fr} se coupe:

$$0 \rightarrow \Omega_{n+1}^O \rightarrow \Omega_{n+1}^{O,fr} \xrightarrow{\partial} \Omega_n^{fr} \rightarrow 0.$$

L’assertion que $w_{n+1}: \Omega_{n+1}^{O,fr} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ est l’invariant de Hopf a donc un sens, et Stong la démontre.

Pour démontrer 2.1, il suffit donc de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n^n & & \\ \partial \uparrow & \searrow d & \\ \Omega_{n+1}^{0,n} & \xrightarrow{w_{n+1}} & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

est commutatif. On vérifie aisément grâce à une construction de Thom–Pontrjagyn que w_{n+1} définit

* un isomorphisme $\Omega_{n+1}^{O,n} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ si n est impair;

* la surjection $\Omega_{n+1}^{O,n} \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ si n est pair.

Comme il y a assez peu d’homomorphismes de $\mathbb{Z}/2$ ou $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2$, il suffit de

trouver un élément de l'image de ∂ sur lequel d vaut 1. Il est clair que l'immersion de Whitney est un exemple. $\square$

Les variétés stablement parallélisables étant en particulier orientables, le théorème 0.3 a déjà été démontré au §1 quand n est pair. Je suppose donc désormais que n est impair. Dans ce cas, il y a, d'après la classification des immersions de [Hirsch–1959], exactement deux classes d'homotopie régulière d'immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$:

$$H^n(V; \pi_n O/O(n)) = H^n(V; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2.$$

De 2.1 et de la solution du problème de l'invariant de Hopf, on déduit:

2.2. COROLLAIRE. *Soit V une variété stablement parallélisable de dimension impaire $n \neq 1, 3, 7$. Il existe sur V un fibré vectoriel non trivial de rang n (qui est stablement trivial et) qui est le fibré normal des immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ ayant un nombre impair de points doubles. Le fibré normal des immersions ayant un nombre pair de points doubles – en particulier des plongements – est trivial.*

Démonstration de 2.2. Si $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est une immersion dont le fibré normal est trivialisable, elle est régulièrement homotope à une immersion de la forme $V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. De 2.1 et d'[Adams–1960], on déduit que f a un nombre pair de points doubles.

Whitney nous a appris à rejouter un point double à une immersion; il existe donc une immersion f' ayant un nombre impair de points doubles (qui n'est donc pas régulièrement homotope à f), et dont le fibré normal n'est pas trivial. $\square$

On en déduit immédiatement le théorème 0.3 (sauf pour $n = 7$). N.B.: de toute évidence 2.2 est faux pour la sphère S^7 par exemple, ainsi que 2.3.

2.3. COROLLAIRE. *Si n est impair $\neq 1, 3$ et 7 , les immersions lagrangiennes de la variété stablement parallélisable V dans $\mathbb{C}^n$ ont un nombre pair de points doubles si V est parallélisable, et un nombre impair de points doubles sinon. $\square$*

§3. Démonstration de 0.1 pour les variétés de dimension impaire

3.1. Réduction à un résultat énumératif sur des fibrés instables

En dimension impaire, il n'y a pas de classe caractéristique instable comme la classe d'Euler pour distinguer les fibrés normaux des immersions dans $\mathbb{R}^{2n}$.

D'ailleurs, il est tout à fait possible que deux immersions aient des fibrés normaux isomorphes sans être régulièrement homotopes; par exemple sur les sphères S^n de dimension $n = 3$ ou 7 , tous les fibrés de rang n sont triviaux (en particulier isomorphes entre eux); pourtant l'immersion de Whitney, qui a un point double, n'est pas régulièrement homotope au plongement standard $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, qui n'en a pas. Que ces exemples aient des dimensions de la forme $2^q - 1$ n'est pas un hasard, puisque je vais démontrer

3.1.1. PROPOSITION.* *Soit V une variété fermée et connexe, de dimension n impaire. Si $n + 1$ n'est pas une puissance de 2, il existe sur V deux fibrés vectoriels de rang n , non isomorphes entre eux, et stablement isomorphes au fibré normal absolu NV de V .*

Dans ce cas, les deux réductions de NV à la dimension n définies par les deux classes d'homotopie régulière d'immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ correspondent donc à deux fibrés normaux d'immersions non-isomorphes. Un de ces fibrés – au plus – est isomorphe au fibré tangent TV . On en déduit évidemment 0.1 et plus précisément

3.1.2. COROLLAIRE. *Si V est une variété connexe de dimension n impaire, et si $n + 1$ n'est pas une puissance de 2, il existe au plus une immersion de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ dont le fibré normal est isomorphe au fibré tangent TV . $\square$*

3.2. Etude des fibrés instables stablement isomorphes au fibré normal

Je vais démontrer ici la Proposition 3.1.1. La théorie des obstructions (cochaîne de différence) dit que le groupe $H^n(V; \pi_n O/O(n)) = H^n(V; \mathbb{Z}/2)$ opère sur l'ensemble $[V, BO(n)]$ des classes d'isomorphisme des fibrés de rang n sur V . L'orbite de la classe d'isomorphisme du fibré ξ est formée des classes d'isomorphisme des fibrés stablement isomorphes à ξ . Pour compter ces classes d'isomorphisme, il suffit donc de connaître le stabilisateur de ξ dans $H^n(V; \mathbb{Z}/2)$. [James–Thomas–1965] ont montré que ce stabilisateur est l'image de l'application:

$$\Delta(\xi): [V, O] \rightarrow H^n(V; \mathbb{Z}/2)$$

$$\Delta(\xi) \cdot \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^* h_{n-i} \cup w_i(\xi)$$

* Ce résultat figure déjà dans: W. Sutherland, *Whitehead squares in Thom complexes*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 24 (1981) 221–229.

(quand n est impair $\neq 1$ et 3) – les h_i sont les générateurs de $H^*(SO; \mathbb{Z}/2)$ définis par [Borel–1954]. Voici une explication de ce résultat, dans le cas où ξ est le fibré normal Nf d’une immersion f de V dans $\mathbb{R}^{2n}$: cette immersion définit un isomorphisme:

$$TV \oplus \xi \rightarrow V \times \mathbb{R}^{2n} \quad (1)$$

Tout élément φ de $[V, O] \cong [V, O(2n)]$ définit un autre tel isomorphisme, la composition:

$$TV \oplus \xi \rightarrow V \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V \times \mathbb{R}^{2n} \quad (2)$$

$$(x, v) \mapsto (x, \varphi_x(v)).$$

$\Delta(\xi)$ associe à φ la classe de cohomologie de la cochaîne de différence reliant les réductions de NV à la dimension n définies par (1) et (2). Dire que $\Delta(\xi)$ est surjective, c’est bien exactement dire que toutes les réductions possibles sont réalisées par le même fibré ξ .

Il est clair que 3.1.1 est une conséquence directe de ce théorème de James et Thomas et de:

3.2.1. LEMME. Soient V une variété de dimension n , et φ une application continue de V dans SO . Si $n + 1$ n’est pas une puissance de 2, alors $\Delta(NV) \cdot \varphi = 0$.

[N.B. $\Delta(\xi)$ – et c’est heureux, vue son interprétation – ne dépend que de la classe d’isomorphisme stable de ξ .]

Démonstration de 3.2.1. Il s’agit de vérifier que le nombre

$$\langle \sum \varphi^* h_{n-i} \cup \bar{w}_i, [V] \rangle \in \mathbb{Z}/2$$

est nul. Ce nombre ne dépend que de la classe de bordisme non-orienté de l’application φ . Soit donc $\Delta_n: \mathcal{N}_n(SO) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ l’homomorphisme qu’il définit ($\mathcal{N}_*(SO)$ désigne l’homologie de SO pour le spectre MO , $\mathcal{N}_*(pt)$ est déjà apparu sous le nom de Ω_*^O dans la démonstration de 2.1). Désignons par u la classe de Thom dans $H^*(MO; \mathbb{Z}/2)$, et soit

$$\delta_n = \sum u w_i \otimes h_{n-i} \in H^n(MO \wedge SO^+; \mathbb{Z}/2).$$

Grâce à Thom–Pontrjagyn, il suffit de vérifier que, si $n + 1$ n’est pas une puissance de 2, δ_n s’écrit comme combinaison $\mathcal{A}$ -linéaire d’éléments de degrés strictement inférieurs à n – où $\mathcal{A}$ est l’algèbre de Steenrod mod 2.

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned} Sq^j(u \otimes h_{2^k-1}) &= \sum_{r+s=j} Sq^r u \otimes Sq^s h_{2^k-1} \\ &= \sum_{r+s=j} uw_r \otimes h_{s+2^k-1}; \end{aligned}$$

en effet, d'après [Borel-1954], on a $Sq^s h_t = C_t^s h_{s+t}$, mais les coefficients binomiaux C_t^s sont tous impairs quand $t = 2^k - 1$.

Soit $q = [\log_2 n]$ – de façon moins pédante, c'est dire que $n = 2^q - 1 + p$ ($0 \leq p < 2^q$). La formule précédente donne;

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} uw_{n-2^i+1-j} \otimes h_{2^i-1+j} + uw_p \otimes h_{2^q-1} + \cdots + u \otimes h_n \\ &= \sum_{i=1}^{q-1} Sq^{n-2^i+1}(u \otimes h_{2^i-1}) + Sq^p(u \otimes h_{2^q-1}). \end{aligned} \quad (*)$$

Si $p \geq 1$ (c'est-à-dire si $n + 1$ n'est pas une puissance de 2), on a ainsi écrit δ_n comme une combinaison $\mathcal{A}$ -linéaire d'éléments de degrés strictement inférieurs à n . $\square$

Retenons aussi que (*) montre, si $n + 1$ est une puissance de 2 (c'est-à-dire si $p = 0$), que

$$\langle \Delta(NV) \cdot \varphi, [V] \rangle = \langle \varphi^* h_n, [V] \rangle,$$

ce qui nous servira pour étudier les variétés de dimensions $2^q - 1$.

§4. Etude des variétés de dimension $2^q - 1$

Dans ce paragraphe, je vais montrer 0.2 et donner une démonstration de 0.3 qui fonctionne aussi en dimension 7.

4.1. Démonstration de 0.2

Remarquons que la démonstration précédente et la remarque qui la suit disent qu'il existe, pour tout $q \geq 3$, une variété V de dimension $n = 2^q - 1$ dont

toutes les immersions dans $\mathbb{R}^{2n}$ ont des fibrés normaux (instablement) isomorphes entre eux: en effet $H^*(MO; \mathbb{Z}/2)$ est, comme chacun sait depuis [Thom–1954] un $\mathcal{A}$ -module libre, donc $H^*(MO \wedge SO^+; \mathbb{Z}/2)$ aussi, et toute famille d'éléments $\{a \otimes b\}$ où a parcourt une $\mathcal{A}$ -base de $H^*(MO; \mathbb{Z}/2)$ et b une $\mathbb{Z}/2$ -base de $H^*(SO; \mathbb{Z}/2)$ en est une $\mathcal{A}$ -base. En particulier, il existe une $\mathcal{A}$ -base contenant les $u \otimes h_i$, et donc une $\mathcal{A}$ -base contenant δ_n si n est une puissance de 2 d'après la remarque finale du §3. Donc il existe une variété V et une application φ telles que:

$$\Delta(NV)\varphi \neq 0 \in H^n(V; \mathbb{Z}/2), \quad n = 2^q - 1,$$

ce qui suffit pour $n \neq 1$ et 3 d'après James et Thomas.

En fait, ces auteurs ont aussi vérifié que l'espace projectif P^n est un exemple explicite d'une telle variété. Un calcul simple montre que (sauf si $n = 1, 3$ ou 7) cet espace projectif ne possède pas d'immersions lagrangiennes (le dit calcul est très simple quand n n'est pas de la forme $2^q - 1$, puisqu'alors $TP^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a des classes de Chern non nulles et ne peut être trival; dans le cas $n = 2^q - 1$, qui nous intéresse ici, c'est un peu plus délicat: il faut connaître la K -théorie complexe de P^n ... mais c'est classique). L. Smith m'a suggéré que ceci pouvait être lié à un théorème de [Brown–1973], mais ce n'est pas absolument clair pour l'instant.

Le calcul effectué ci-dessus dans $H^*(MO \wedge SO^+; \mathbb{Z}/2)$, si on le transfère dans $H^*(M\lambda \wedge SO^+; \mathbb{Z}/2)$, où $M\lambda$ est le spectre définissant le cobordisme lagrangien non-orienté, montre de même:

4.11. REMARQUE. *Pour tout q , il existe une variété V , de dimension $n = 2^q - 1$, possédant des immersions lagrangiennes dans $\mathbb{C}^n$, et dont toutes les immersions dans $\mathbb{R}^{2n}$ ont des fibrés normaux isomorphes.* $\square$

Je renvoie à [Audin–1986a] où sont étudiés le spectre $M\lambda$ et sa cohomologie mod 2.

Pour montrer 0.2, il faut encore:

- * Montrer qu'on peut supposer que V est orientable;
- * Montrer qu'on peut supposer aussi que l'isomorphisme entre les fibrés normaux provient bien d'un isomorphisme de $TV \otimes \mathbb{C}$.

Revenons aux commentaires sur le théorème de James et Thomas qui figurent au début de 3.2, en supposant que V a les propriétés énoncées dans la remarque 4.1.1.

Une immersion lagrangienne $f: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ fournit un isomorphisme de fibrés

vectoriels complexes

$$TV \otimes \mathbb{C} \rightarrow V \times \mathbb{C}^n.$$

Si φ est une application de V dans $O(2n)$, elle fournit un isomorphisme de fibrés vectoriels réels

$$TV \otimes \mathbb{C} \rightarrow V \times \mathbb{C}^n = V \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V \times \mathbb{R}^{2n}. \quad (*)$$

Si $\langle \varphi^* h_n, [V] \rangle = 1$ ($n = 2^q - 1 \geq 7$), cet isomorphisme décrit l' "autre" immersion de V dans $\mathbb{R}^{2n}$. Pour assurer que cette autre immersion est lagrangienne, le théorème de classification de [Gromov-1970]-[Lees-1976] affirme qu'il suffit que l'isomorphisme (*) soit un isomorphisme de fibrés vectoriels complexes, autrement dit que φ provienne de $U(n)$ via l'inclusion $j: U(n) \subset O(2n)$. Il suffit donc de vérifier:

4.1.2. PROPOSITION. *Pour tout entier n impair, il existe une variété orientable V de dimension n , telle que $TV \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est trivialisable, et une application $\psi: V \rightarrow U(n)$ vérifiant $\langle (j \circ \psi)^* h_n, [V] \rangle = 1$.*

Démonstration de 4.1.2. (dans tout ce qui suit, $n = 2k - 1$). Considérons l'homomorphisme: $j^*: H^n(SO; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^n(U; \mathbb{Z}/2)$.

Dans la fibration universelle $SO \rightarrow ESO \rightarrow BSO$, la classe h_n a pour transgression w_{n+1} . Soit $\alpha_n \in H^n(U; \mathbb{Z})$ tel que, dans la fibration $U \rightarrow EU \rightarrow BU$, la transgression de α_n soit la classe de Chern c_k . Par $j': BU \rightarrow BSO$, l'image de w_{n+1} est la réduction mod 2 de c_k , donc $j^* h_n = \alpha_n$ (en appelant encore α_n la réduction mod 2).

En appelant $L_n(U)$ l'homologie de U pour le spectre $M\tilde{\lambda}$ définissant le cobordisme lagrangien orienté (voir [Audin-1986a] pour ses propriétés), il suffit de vérifier que l'image de l'homomorphisme, défini par $\alpha_n \bmod 2$, $\alpha_n: L_n(U) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ contient 1.

J'ai montré dans l'ouvrage cité que $H^*(M\tilde{\lambda}, \mathbb{Z}/2)$ est un $\mathcal{A}$ -module "simple" (suivant la terminologie de Wall); il s'ensuit que $H^*(M\tilde{\lambda} \wedge U^+, \mathbb{Z}/2)$ est aussi un $\mathcal{A}$ -module simple et que les éléments de la cohomologie de $U \bmod 2$ qui peuvent prendre des valeurs non nulles sur $L_*(U)$ sont les éléments de $\ker Sq^1$ qui ne sont pas dans $\text{Im } Sq^1$. Comme la cohomologie entière de U est sans torsion (c'est l'algèbre extérieure sur les $\alpha_i - i$ impair), tous les éléments α_n sont concernés. $\square$

4.2. Démonstration complète de 0.3

Le Théorème 0.1, que nous avons démontré plus haut, contient 0.3 sauf pour les dimensions $2^q - 1$ ($q \geq 3$). Si on veut démontrer 0.3 sans utiliser la solution du problème de l'invariant de Hopf, précisément réputé difficile dans ces dimensions, il suffit d'étudier ces dimensions.

4.2.1. PROPOSITION. *Si V est une variété stablement parallélisable de dimension impaire $n \geq 5$ et $\varphi: V \rightarrow U$ une application continue, alors $\langle \varphi^* \alpha_n, [V] \rangle$ est un nombre pair.*

Démonstration de 4.2.1. Considérons une décomposition cellulaire de V avec une seule cellule en dimension n , et $e: V \rightarrow S^n$ l'application qui écrase le $(n-1)$ -squelette $V^{(n-1)}$ en un point. On a une cofibration

$$V^{(n-1)} \hookrightarrow V \xrightarrow{e} S^n$$

qui définit des suites exactes et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} K^{-1}(S^n) & \xrightarrow{e^*} & K^{-1}(V) & \longrightarrow & K^{-1}(V^{(n-1)}) & \longrightarrow & 0 \\ \alpha_n \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \\ H^n(S^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{e^*} & H^n(V; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^n(V^{(n-1)}; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où K est la K -théorie complexe [Rappel: $K^{-1}(X) = [X, U]$.] De toute évidence, e^* est un isomorphisme en cohomologie entière.

Comme V est stablement parallélisable, il existe une application *stable* σ de V dans S^n qui scinde (stablement) l'application e . Rappelons sa construction: on plonge V dans $\mathbb{R}^{n+k}$ (k assez grand), et on applique une construction de Thom–Pontrjagyn à ce plongement. Le fibré normal est trivialisable (k est assez grand) et son espace de Thom est donc $S^k \wedge V^+$. On a donc une application $\sigma: S^{n+k} \rightarrow S^k \wedge V^+$ qui est un représentant de l'application stable cherchée.

On peut réécrire le diagramme ci-dessus:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & K^{-1}(S^n) & \xrightleftharpoons[\sigma^*]{e^*} & K^{-1}(V) & \longrightarrow & K^{-1}(V^{(n-1)}) & \longrightarrow 0 \\ & \alpha_n \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & H^n(S^n; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^n(V; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de $\alpha_n: K^{-1}(V) \rightarrow H^n(V; \mathbb{Z})$ s'identifie donc à celle de $\alpha_n: K^{-1}(S^n) = \pi_n U \rightarrow H^n(S^n; \mathbb{Z})$. Autrement dit, il suffit de vérifier 4.2.1 quand V est une sphère.

Ecrivons $n = 2k - 1$. Par définition de α_n , il revient au même de calculer l'image de $c_k : \pi_{2k}(BU) \rightarrow H^{2k}(S^{2k}; \mathbb{Z})$, dont il est classique qu'elle est formée des multiples de $(k-1)!$ (par exemple par intégralité du caractère de Chern). Comme $2k - 1 \geq 5$, $(k-1)!$ est divisible par 2. $\square$

4.3. Les dimensions 1 et 3

Il est bien clair que 0.1 est faux en dimension 1: toutes les immersions sont lagrangiennes. Comme le théorème de James et Thomas ne s'applique pas en dimension 3 non plus, il faut faire une étude spécifique. Prenons comme point de départ le cas de la sphère S^3 , qui est bien connu:

4.3.1. PROPOSITION. [Gromov–1973]. *Toutes les classes d'homotopie régulière d'immersions de S^3 dans $\mathbb{R}^6$ contiennent une immersion lagrangienne.*

Cette proposition figure aussi dans [Kawashima–1981]. La démonstration homotopique la plus simple est celle de Gromov, qui figure maintenant dans son livre ([Gromov–1986]). La démonstration géométrique la plus simple consiste à exhiber une immersion totalement réelle dans chacune des deux classes d'homotopie régulière d'immersions: il y a un plongement totalement réel de S^3 dans [Ahern–Rudin–1985], et il y a une version lagrangienne de l'immersion de Whitney (pour toute dimension n) donnée par $(x, y) \mapsto (1 + 2iy)x$, où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, et $\|x\|^2 + y^2 = 1$. $\square$

N.B. La démonstration homotopique donne le résultat opposé pour S^7 bien plus simplement que par la preuve générale de 0.3: une parallélisation φ_0 de S^7 étant fixée, à toute application $\psi : S^7 \rightarrow U$, on associe une trivialisatation de $TS^7 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, et donc une classe d'homotopie régulière (lagrangienne) d'immersions lagrangiennes. Les immersions ordinaires, elles, sont données par les éléments de $\pi_7(SO/SO(7))$. Ainsi la classe d'homotopie régulière ordinaire d'une immersion lagrangienne définie par ψ est donnée par la composition:

$$S^7 \rightarrow U \rightarrow SO \rightarrow SO/SO(7)$$

mais $\pi_7 SO \rightarrow \pi_7 SO/SO(7)$ est l'homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2$, et $\pi_7 U \rightarrow \pi_7 SO$ est d'indice 2; donc l'image de $\pi_7 U \rightarrow \pi_7 SO/SO(7)$ est nulle, donc il y a une seule classe d'homotopie régulière qui contient des immersions lagrangiennes (et comme il y a un modèle lagrangien de l'immersion de Whitney, ce n'est pas la classe du plongement).

Revenons aux variétés de dimension 3. Le corollaire suivant de 4.3.1 a déjà été remarqué par [Forstnerič–1986b] (le même auteur a généralisé l'exemple

explicite de plongement totalement réel de S^3 mentionné plus haut à beaucoup de quotients de cette sphère, en particulier tous les lenticulaires dans [Forstnerič–1986a]).

4.3.2. COROLLAIRE. *Soit V une variété orientable de dimension 3. Toutes les classes d'homotopie régulière d'immersions de V dans $\mathbb{R}^6$ contiennent des immersions lagrangiennes. En particulier, V possède un plongement totalement réel.*

Démonstration de 4.3.2. La variété V est parallélisable. Comme dans la démonstration précédente, on doit donc considérer l'image de l'application naturelle $[V, U] \rightarrow [V, SO/SO(3)]$ qui entre dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} [V, U] & \longrightarrow & [V, SO/SO(3)] \\ e^* \uparrow & & e^* \uparrow \\ \pi_3 U & \longrightarrow & \pi_3 SO/SO(3) \end{array}$$

où e est défini en écrasant le 2-squelette comme dans 4.2. Comme $SO/SO(3)$ est 2-connexe, le e^* de droite est une bijection. La flèche horizontale du haut est donc aussi surjective. $\square$

§5. Calculs de points doubles

Dans ce paragraphe, je vais montrer le Théorème 0.5 et la Proposition 1.3.1.

5.1. Les variétés stablement parallélisables

Quand V est stablement parallélisable, et $\dim V \neq 7$, on peut déduire 0.5a) de 2.3 et d'un théorème de [Bredon–Kosinski–1966] qui dit que (en dimensions impaires $\neq 1, 3, 7$) $\hat{\chi}_{2/2}(V)$ est l'unique obstruction à la parallélisabilité de V . Cette démonstration ne fonctionnant pas en dimension 7, je vais donner un argument plus géométrique.

Soit $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion de V en codimension 1, et $N = N(f): V \rightarrow S^n$ son application de Gauss (une orientation de V étant choisie). Le couple (N, f) définit une immersion de V dans $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, avec évidemment $N(x) \cdot T_x f(\xi) = 0$ ($\xi \in T_x V$), ce qui fait que la projection sur $TS^n = \{(p, q) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid q \in p^\perp\}$ est automatiquement une immersion lagrangienne $\tilde{f}$ de V dans TS^n (TS^n est considéré comme une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}$ et munie de la forme symplectique qui est la restriction de ω ; elle-ci coïncide, au signe près, avec la structure symplectique canonique de T^*S^n si l'on identifie TS^n à T^*S^n par la métrique euclidienne).

Soit maintenant $F: S^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une immersion lagrangienne. Suivant [Weinstein-1977], elle se prolonge en une immersion symplectique (d'un voisinage de la section nulle) de T^*S^n dans $\mathbb{C}^n$. La composition

$$V \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow TS^n = T^*S^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

est alors clairement une immersion lagrangienne, notée F_f .

5.1.1. PROPOSITION. $d(F_f) = d(\tilde{f}) + d(F) \deg N(f) \bmod 2$.

5.1.2. LEMME. $d(\tilde{f})$ est l'invariant de Hopf de la parallélisation stable définie par f .

Je montrerai 5.1.2 dans 5.3. Admettons 5.1.1 pour un instant; voici comment on en déduit 0.5a): Supposons n (impair) $\neq 1$ et 3. D'après 0.3, toutes les immersions lagrangiennes de V dans $\mathbb{C}^n$ ont le même nombre de points doubles mod 2, et de même pour celles de S^n . Grâce à l'existence de l'immersion (lagrangienne) de Whitney, on a $d(F) = 1$. Pour toute immersion lagrangienne $g: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, on a donc:

$$d(g) = d(F_f) = \text{hopf}(f) + \deg N(f) = \hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V)$$

d'après [Kervaire-1965] et [Kervaire-1957]. $\square$

Démonstration de 5.1.1. On peut supposer que F est à croisements normaux, que les préimages des points doubles de F sont des valeurs régulières de N et que $\tilde{f}$ n'a pas de points doubles au-dessus de ces préimages. On compte les points doubles de F_f .

D'après les hypothèses faites sur F et f , il y a $d(\tilde{f})$ points doubles de F_f à l'extérieur d'un voisinage (fibré) des points doubles de F . Chaque point double de F crée de nouveaux points doubles pour F_f , autant (si $a, b \in S^n$ et $F(a) = F(b)$) que le produit du nombre de feuilles de N au-dessus de a par le nombre de feuilles de N au-dessus de b . Ce produit est (mod 2) $(\deg N)^2 = \deg N$. $\square$

5.2. Stratégie de la démonstration de 0.5b) et c)

Elle va être beaucoup moins géométrique. On sait, si V est une variété de dimension impaire $\neq 2^q - 1$, qu'il y a deux fibrés différents sur V qui sont les fibrés normaux des immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ (3.1.1). Ces fibrés sont stablement isomorphes entre eux, et il s'agit de les distinguer par des moyens instables.

L'idée est de remplacer l'outil "classe d'Euler" des dimensions paires par un outil géométriquement analogue, bien que techniquement plus compliqué: montrer que ces deux fibrés n'ont pas le même nombre de sections indépendantes.

Plus précisément, je vais montrer que l'un est le fibré normal des immersions qui sont régulièrement homotopes à des immersions de la forme $V \rightarrow \mathbb{R}^{2n-k} \subset \mathbb{R}^{2n}$ pour un k bien choisi (et sous certaines hypothèses sur V), et que l'autre a moins de k sections indépendantes.

Pour décider lequel est le fibré normal des immersions lagrangiennes, il n'y aura plus qu'à décider si V a ou n'a pas k champs de vecteurs (tangents) indépendants.

Cette démarche est complètement analogue à celle utilisée au §2 où V est stablement parallélisable et $k = n - 1$.

Voici comment se fait le choix de k :

a) On s'assure que (sous les hypothèses faites sur V et n) V possède une immersion dans $\mathbb{R}^{2n-k}$;

b) On calcule le nombre de points doubles des approximations à croisements normaux de la composition $V \rightarrow \mathbb{R}^{2n-k} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Si celui-ci ne dépend pas du choix de l'immersion donnée par a), on a gagné.

Les hypothèses du Théorème 0.2 sont celles où je sais achever ce programme.

5.3. La machinerie des calculs

Rappelons d'abord quelques définitions et notations classiques.

Si X est un espace pointé, $QX = \Omega^\infty S^\infty X$ désigne la limite de $\Omega^n S^n X \rightarrow \Omega^{n+1} S^{n+1} X$. C'est un espace dont, par construction, les groupes d'homotopie sont les groupes d'homotopie stable de X .

$\mathcal{S}_2 X$ désigne la construction quadratique sur X ; soit $\mathcal{S}_2 X = E\mathcal{S}_2 \wedge \mathcal{S}_2(X \wedge X)$ où $E\mathcal{S}_2$ est un espace contractile sur lequel le groupe $\mathcal{S}_2$ opère sans points fixes, et le quotient est effectué grâce à cette opération conjointement avec l'échange des facteurs de $X \wedge X$.

Si $u \in H^p(X)$, $P_2 u \in H^{2p}(\mathcal{S}_2 X)$ est la construction quadratique de Steenrod.

Stablement, $\mathcal{S}_2 X$ est un facteur dans QX , autrement dit, il existe une application stable $r_2: QX \rightarrow \mathcal{S}_2 X$, qui fait de $H^*(\mathcal{S}_2 X)$ un facteur direct dans $H^*(QX)$.

Voici maintenant ce que je vais utiliser de [Vogel-1974]:

Si $h: V^n \rightarrow Y^m$ ($m \geq n + 1$) est une immersion, on la transforme en un plongement $V \rightarrow Y^m \times \mathbb{R}^k$ grâce à une application séparant les points multiples de h . On effectue ensuite une construction de Thom-Pontrjagyn, obtenant $\varphi: S^k \hat{Y} \rightarrow S^k M\xi$ où $\hat{Y}$ est le compactifié d'Alexandroff de Y et $M\xi$ l'espace de Thom du fibré normal ξ de h . Par adjonction, on en déduit une application

$\Phi(h): \hat{Y} \rightarrow \Omega^k S^k M\xi \rightarrow QM\xi$. Vogel considère la variété de points doubles de h :

$$V_2(h) = \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y \text{ et } h(x) = h(y)\} / \mathfrak{S}_2,$$

où h est supposée à croisements normaux, et calcule la classe d'hormologie, dans $H_* Y$, portée par $V_2(h)$.

Le cas qui nous intéresse est celui où $m = \dim Y = 2n = 2 \dim V$, où la classe portée par $V_2(h)$ est dans $H_0(Y)$; c'est le nombre de points doubles de h . Le calcul de Vogel donne ici:

$$d(h) = \langle \Phi(h)^* r_2^* P_2(u_h), [\hat{Y}] \rangle \quad \text{où } u_h \text{ est la classe de Thom.} \quad (*)$$

N.B. On peut supposer que Y est une variété à bord, alors $\hat{Y} = Y/\partial Y$ et cette formule a un sens; en tout état de cause je ne l'utiliserai que pour $Y = \mathbb{R}^m$, et, exceptionnellement pour $Y = TS^n$ tout de suite:

Démonstration de 5.1.2. On est parti d'une immersion $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, que je vais supposer à croisements normaux; en particulier, le couple $(N, f): V \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ est un plongement, qu'on peut utiliser pour faire la construction de Thom–Pontrjagyn généralisée pour $\tilde{f}$.

Considérons aussi, pour $t \in [0, 1]$,

$$(tN, f): V \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}.$$

Pour $t = 0$, ce n'est que la composition $V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$. Pour t petit (et donc pour tout t), c'est un plongement qui l'approche. L'application (N, f) sert ainsi à faire:

- * d'une part, la construction de Thom–Pontrjagyn pour $\tilde{f}: V \rightarrow TS^n$;
 - * d'autre part, la construction de Thom–Pontrjagyn pour $f': V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$.
- D'après (*), on a donc $d(\tilde{f}) = d(f')$ et on applique 2.1. $\square$

Désormais la variété Y n'est autre que l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$.

Comme $\mathfrak{S}_2 X$ est muni d'une application naturelle dans $B\mathfrak{S}_2$, le générateur de la cohomologie mod 2 de $B\mathfrak{S}_2$ se retrouve dans $H^1(\mathfrak{S}_2 X; \mathbb{Z}/2)$ sous le nom de ε . On déduit facilement de (*) que

5.3.1. PROPOSITION. Soit $g: V^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-k}$ ($k \leq n-1$) une immersion, et $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{2n-k} \subset \mathbb{R}^{2n}$ la composition de g avec l'inclusion naturelle. Alors: $d(f) = \langle \Phi(g)^* r_2^*(\varepsilon^k \cup P_2 u_g), [S^{2n-k}] \rangle$. $\square$

5.4. Le Théorème 0.5 en dimensions 1 mod 4

V est ici une variété de dimension $n \equiv 1 \pmod{4}$ (et $n \geq 5$). Elle possède une immersion g dans $\mathbb{R}^{2n-2}$, d'après [Cohen–1985]. Je vais donc lui appliquer la Proposition 5.3.1 avec $k=2$, c'est-à-dire essayer de calculer: $\langle \Phi(g)^* r_2^*(\varepsilon^2 \cup P_2 u_g), [S^{2n-2}] \rangle$.

D'après [Milgram–1974] et [Zarati–1978], dans $H^*(\mathfrak{S}_2 M\xi; \mathbb{Z}/2)$, on a:

$$Sq^2 P_2 u_g = C_{n-2}^2 \varepsilon^2 \cup P_2 u_g + C_{n-3}^0 P_2 (Sq^1 u_g) + (u_g, Sq^2 u_g),$$

où la notation (x, y) désigne le transfert du produit $x \times y$:

$$x \times y \in H^*(X \wedge X) \cong H^*(E\mathfrak{S}_2 \wedge X \wedge X) \xrightarrow{\text{tr}} H^*(\mathfrak{S}_2 X).$$

Comme $n \equiv 1 \pmod{4}$, C_{n-2}^2 est impair. Si on suppose en plus que V est orientable, alors $Sq^1 u_g = 0$. On obtient:

$$\varepsilon^2 \cup P_2 u_g = Sq^2 P_2 u_g + (u_g, u_g \bar{w}_2).$$

Le terme $Sq^2 P_2 u_g$ va s'annuler dans la cohomologie de la sphère. Il suffit donc de calculer: $\Phi(g)^* r_2^*(u_g, u_g \bar{w}_2)$. Si $r: QX \rightarrow X$ désigne l'application stable évidente (définie par l'identité de QX), Zarati a montré dans le même article que:

$$r_2^*(x, y) = r^*(x \cup y) + r^*x \cup r^*y.$$

Le cup-produit va s'annuler dans la cohomologie de la sphère; il reste:

$$\begin{aligned} d(f) &= \langle \Phi(g)^* r^*(u_g \cup u_g \bar{w}_2), [S^{2n-2}] \rangle \\ &= \langle \Phi(g)^* r^*(u_g \bar{w}_2 \bar{w}_{n-2}), [S^{2n-2}] \rangle \\ &= \langle \bar{w}_2 \bar{w}_{n-2}, [V] \rangle. \end{aligned}$$

Le fait que le résultat ne dépende pas du choix de g fournit une autre démonstration de 3.1.1 et de 0.1 pour les variétés orientables de dimension 1 mod 4 (je ne sais pas si le terme provenant de $Sq^1 u_g$ dans le calcul précédent dépend de g si V n'est pas orientable), avec la précision supplémentaire:

5.4.1. PROPOSITION. *Soit V une variété orientable de dimension $n = 4h + 1 \geq 5$. Il existe sur V deux fibrés de rang n stablement isomorphes entre*

eux et tels que:

- * l'un a deux sections indépendantes et est le fibré normal des immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ ayant $\langle \bar{w}_2 \bar{w}_{n-2}, [V] \rangle$ points doubles;
- * l'autre n'a qu'une section non nulle et est le fibré normal de toutes les autres immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$. $\square$

Démonstration de 0.5b). Soit maintenant $h: V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ une immersion dont le fibré normal est isomorphe au fibré tangent TV (par exemple, h est lagrangienne ou totalement réelle). Alors:

* Soit V a deux champs de vecteurs indépendants et h est régulièrement homotope à une immersion provenant de $\mathbb{R}^{2n-2}$, elle a alors $\langle w_2 w_{n-2}, [V] \rangle$ points doubles ($w_i = \bar{w}_i$);

* Soit elle n'en a qu'un (n est impair!) et h ne peut provenir de $\mathbb{R}^{2n-2}$. Elle a donc $\langle w_2 w_{n-2}, [V] \rangle + 1$ points doubles.

Il y a maintenant un théorème d'[Atiyah–Dupont–1972] qui permet de décider si V a un deuxième champ de vecteurs. Il s'applique aux variétés orientables de dimension $1 \bmod 4$, sur lesquelles $w_{n-1} = 0$. Sous nos hypothèses, $w_{n-1} = \bar{w}_{n-1} = 0$: j'ai déjà utilisé que V a une immersion dans $\mathbb{R}^{2n-2}$!

Atiyah et Dupont affirment alors que V a un deuxième champ de vecteurs si et seulement si la semi-caractéristique réelle $\hat{\chi}_{\mathbb{R}}(V)$ – remplacer $\mathbb{Z}/2$ par $\mathbb{R}$ dans la définition – est nulle. Le nombre de points doubles de l'immersion h est donc:

$$d(h) = \hat{\chi}_{\mathbb{R}}(V) + \langle w_2 w_{n-2}, [V] \rangle = \hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V)$$

d'après [Lusztig–Milnor–Peterson–1969]. $\square$

5.5. Le théorème 0.5 en dimensions $3 \bmod 8$

Il est clair a priori que les calculs ne peuvent pas fonctionner aussi simplement en dimensions $3 \bmod 4$, puisque celles-ci contiennent toutes les dimensions $2^q - 1$, où l'on n'a aucune chance de faire aboutir la stratégie exposée dans 5.2, à cause de 0.2.

De fait, si $n \equiv 3 \bmod 4$, on peut affirmer, grâce à [Cohen–1985] que la variété V s'immerge dans $\mathbb{R}^{2n-3}$, et pas moins si $n = 4 \times 2^q + 3$, mais appliquer 5.3.1 avec $k = 3$ ne fonctionne pas aussi simplement que dans le calcul précédent: dans la formule donnant $Sq^3 P_2 u_g$, le coefficient de $\varepsilon^2 \cup P_2 u_g$ est C_{n-3}^3 qui est pair, essayer $Sq^2 Sq^1 P_2 u_g$ est voué au même échec.

Je vais donc essayer d'appliquer 5.3.1 avec $k = 4$. L'hypothèse faite sur n ($n = 8h + 3$, $h \neq 2^q$) dit que le nombre de chiffres 1 dans l'écriture de n en base 2 est au moins égal à 4. La solution de la conjecture des immersions fournit donc, encore ici, une immersion $g: V \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$.

On calcule comme dans 5.4, avec

$$\begin{aligned} Sq^4 P_2 u_g &= C_{n-4}^4 \varepsilon^4 \cup P_2 u_g + C_{n-5}^2 \varepsilon^2 \cup P_2 Sq^1 u_g \\ &\quad + C_{n-6}^0 P_2 Sq^2 u_g + (u_g, Sq^4 u_g) + (Sq^1 u_g, Sq^3 u_g). \end{aligned}$$

L'hypothèse faite sur n force C_{n-4}^4 à être impair; si V est supposée Spin, $Sq^1 u_g$ et $Sq^2 u_g$ sont nuls. On obtient comme plus haut:

$$d(f) = \langle \Phi(g)^* r^*(u_g \bar{w}_4 \bar{w}_{n-4}), [S^{2n-4}] \rangle = \langle \bar{w}_4 \bar{w}_{n-4}, [V] \rangle$$

dont le lecteur déduira aisément un analogue de 5.4.1, que je n'écris pas.

Toujours d'après [Atiyah–Dupont–1972], V a au moins 3 champs de vecteurs, elle en a 4 si et seulement si $\hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V) = 0$. On conclut, comme dans 5.4, que les immersions lagrangiennes de V ont $\langle \bar{w}_4 \bar{w}_{n-4}, [V] \rangle + \hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V)$ points doubles. Le Théorème 0.5c) découle maintenant du

5.5.1. LEMME. *Si V est une variété Spin de dimension impaire, $\langle \bar{w}_4 \bar{w}_{n-4}, [V] \rangle = 0$.*

qui est une conséquence des relations de Wu: dans la cohomologie de l'espace de Thom du fibré normal de V , on a:

$$Sq^4(u\bar{w}_{n-4}) = u\bar{w}_4\bar{w}_{n-4} + u\bar{w}_3Sq^1\bar{w}_{n-4} \text{ puisque } w_1 = w_2 = 0 \text{ et } Sq^1\bar{w}_{n-4} = \bar{w}_1\bar{w}_{n-4} + (n-5)\bar{w}_{n-3} = 0 \text{ puisque } n \text{ est impair. Donc } u\bar{w}_4\bar{w}_{n-4} = Sq^4(u\bar{w}_{n-4}). \quad \square$$

5.6. Démonstration de 1.3.1

Elle vient du cours Peccot de Lannes dont j'ai parlé dans l'introduction.

Ici, n est pair, $f: V^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est une immersion, $\xi = Nf$ son fibré normal, $u_f \in H^n(M\xi; \mathbb{Z}/2)$ est la classe de Thom mod 2, qu'on peut considérer dans $H^n(M\xi, \mathbb{Z}^{w_1})$, en particulier

$$u_f \cup u_f = u_f e(\xi) \in H^{2n}(M\xi, \mathbb{Z}).$$

[Massey–1969a] a calculé le carré de Pontrjagyn (n est pair):

$$\mathcal{P}: H^n(M\xi; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{2n}(M\xi; \mathbb{Z}/4)$$

et a trouvé:

$$\mathcal{P}u_f = \rho_4(u_f \cup u_f) + 2u_f \bar{w}_1 \bar{w}_{n-1},$$

où ρ_4 est la réduction mod 4 et $2: H^{2n}(M\xi; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{2n}(M\xi; \mathbb{Z}/4)$ est induit par la “multiplication par 2”: $\mathbb{Z}/2 \hookrightarrow \mathbb{Z}/4$. Ainsi

$$\mathcal{P}u_f = \rho_4(u_f e(\xi)) + 2u_f \bar{w}_1 \bar{w}_{n-1}.$$

L'opération cohomologique $\mathcal{P}$ n'est pas une opération stable. Dans le langage de 5.3, c'est dire que:

$$r^* \circ \mathcal{P} - \mathcal{P} \circ r^*: H^{2k}(-; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{4k}(Q-; \mathbb{Z}/4)$$

n'est pas nulle. Ce “défaut de stabilité” est calculé par [Zarati-1978] qui montre que $r^* \circ \mathcal{P} - \mathcal{P} \circ r^* = 2r_2^* P_2$. Toujours avec les notations de 5.3, on a donc, grâce à (*):

$$\begin{aligned} 2d(f) &= \langle 2\Phi(f)^* r_2^* P_2 u_f, [S^{2n}] \rangle \\ &= \langle \Phi(f)^* r^* \mathcal{P} u_f, [S^{2n}] \rangle - \langle \mathcal{P} \Phi(f)^* r^* u_f, [S^{2n}] \rangle. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est nul et l'on applique la formule de Massey au premier pour trouver:

$$\begin{aligned} 2d(f) &= \langle \Phi(f)^* r_2^* \rho_4(u_f e(\xi)), [S^{2n}] \rangle \\ &\quad + \langle 2\Phi(f)^* r^*(u_f \bar{w}_1 \bar{w}_{n-1}), [S^{2n}] \rangle \\ &= \rho_4 \langle e(Nf), [V] \rangle + 2 \langle \bar{w}_1 \bar{w}_{n-1}, [V] \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

§6. Exemples

Dans ce paragraphe, je vais d'abord démontrer les corollaires énoncés au §0, puis je donnerai tous les exemples de constructions de plongements totalement réels et lagrangiens que je connais. Ils sont tous basés sur des constructions assez simples, pour lesquelles, même si je ne cite pas de référence (faute d'en connaître), je ne prétends pas à une grande originalité.

6.7. Démonstration des corollaires

Ils sont des conséquences directes du théorème de [Gromov-1973] et de 0.4 (pour 0.6); quant à 0.7, en voici la preuve:

a) En dimension n paire, soit V^n une variété orientée munie d'une immersion f dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Supposons $\chi(V) = 0$, alors le théorème de Hopf affirme que le degré de l'application de Gauss de f est nul; or celle-ci renvoie le fibré

tangent à la sphère S^n sur le fibré tangent à V , qui est donc trivialisé. Donc si V n'est pas parallélisable, alors $\chi(V) \neq 0$ et V n'a pas de plongement totalement réel d'après 0.4.

b) Si la dimension n de V est impaire, et si V est stablement parallélisable sans être parallélisable, alors $n \neq 1, 3, 7$ et l'on peut appliquer 2.3. De 0.5a), on peut déduire que $\hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V)$ est l'unique obstruction (dans ces dimensions) à la parallélisabilité de V , ce qui est un théorème de [Bredon–Kosinski–1966] dont la démonstration repose sur la solution du problème de l'invariant de Hopf et les résultats de Kervaire, ce que nous avons utilisé aussi.

6.2. Le cas des produits

Comme 0.5 ne couvre pas toutes les dimensions impaires, ne dit rien sur les variétés non orientables, et a une démonstration un peu compliquée, il n'est pas inutile de faire quelques remarques élémentaires. Elles seront basées sur le lemme de position générale suivant:

6.2.1. LEMME. Soit $f: V^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+k}$ ($k \geq 1$) une immersion isotrope d'une variété compacte. Alors, il existe une approximation de f parmi les immersions isotropes, qui est un plongement. $\square$

6.2.2. REMARQUE. Soit $f: V^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une immersion lagrangienne et soit $g: W^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ un plongement lagrangien. Alors, il existe un plongement lagrangien de $V^n \times W^m$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, qui définit la même trivialisations de $T(V \times W) \otimes \mathbb{C}$ que $f \times g$.

Démonstration de 6.2.1. Considérons la composition $V^n \xrightarrow{f} \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+m}$, et soit f_ε un plongement isotrope qui l'approche. Un voisinage tubulaire de $f_\varepsilon(V)$ est (symplectiquement) isomorphe à un voisinage de la section nulle de $T^*V \times \mathbb{C}^m$ vu comme fibré sur V (voir [Weinstein–1977]). On peut plonger $V \times W$ dans ce voisinage tubulaire grâce à la section nulle de T^*V et à g . $\square$

Le cas des plongements totalement réels est autrement moins rigide puisque on a non seulement

6.2.3. REMARQUE. Soit $f: V^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une immersion totalement réelle et soit $g: W^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ un plongement totalement réel. Alors, il existe un plongement totalement réel de $V^n \times W^m$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ qui définit la même trivialisations de $T(V \times W) \otimes \mathbb{C}$ que $f \times g$.

mais encore

6.2.4. REMARQUE. [Stout–Zame–1985]. Si $f: V^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ et $g: W^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ sont deux immersions totalement réelles et si $\chi(V) = 0$, alors il existe un plongement totalement réel de $V \times W$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ qui définit la même trivialisatation de $T(V \times W) \otimes \mathbb{C}$ que $f \times g$.

Pour démontrer 6.2.3, on remplace f par une immersion lagrangienne, comme [Gromov–1970] nous autorise à le faire et on procède comme dans 6.2.2.

Démonstration de 6.2.4. On commence par plonger $V \times W$ dans $T^*V \times \mathbb{C}^m$ par $g_\varepsilon: (x, y) \mapsto (\varepsilon h(y)\sigma(x), g(y))$ où ε est petit (pour que g_ε soit une immersion totalement réelle), h est une fonction qui sépare les points doubles de f (supposée générique) et σ une section partout non nulle de T^*V (dont l'existence est assurée par la nullité de $\chi(V)$). On remplace ensuite f par une immersion lagrangienne $\tilde{f}: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ à qui l'on fait subir le même traitement que dans la démonstration de 6.2.2 pour obtenir le plongement cherché. $\square$

Par exemple, si l'une des variétés est de dimension impaire, le produit a un plongement totalement réel.

Dans le cas lagrangien, un cas particulier intéressant est celui où l'une des variétés est un tore, ou plus simplement un cercle. On a par exemple

6.2.5. REMARQUE. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) V possède une immersion lagrangienne;
- b) $V \times T^m$ possède une immersion lagrangienne;
- c) $V \times T^m$ possède un plongement lagrangien.

Démonstration. Il est équivalent de donner une trivialisatation de $TV \otimes \mathbb{C}$ ou une trivialisatation de $T(V \times T^m) \otimes \mathbb{C}$. L'équivalence de a) et b) est donc un corollaire immédiat du théorème de Gromov–Lees. L'implication c) $\Rightarrow$ b) est triviale, et a) $\Rightarrow$ c) est conséquence de 6.2.2. $\square$

Voici une *application*. Considérons l'espace homogène $U(n)/O(n)$ (grassmannienne des lagrangiens), et l'application $U(n)/O(n) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{C})$ (espace vectoriel complexe des matrices symétriques $n \times n$) définie par passage au quotient de $U(n) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{C})$ $A \mapsto 'AA$.

On se convainc facilement que c'est un plongement lagrangien (voir [Audin–1986a]). On en déduit que le revêtement double $U(n)/SO(n)$ possède des immersions lagrangiennes, et, comme celui-ci s'écrit aussi $S^1 \times SU(n)/SO(n)$, qu'il possède des plongements lagrangiens (l'assertion 0.8c) sur $SU(3)/SO(3)$ et $SU(4)/SO(4)$ est alors une application immédiate de 0.6).

A titre d'autre application, remarquons que 6.2.2 permet de construire

beaucoup de plongements lagrangiens *différents* (non régulièrement homotopes parmi les immersions lagrangiennes) de la même variété, par exemple, pour $n \geq 2$, il y a une infinité de classes d'homotopie régulière d'immersions lagrangiennes de T^n dans $\mathbb{C}^n$ qui contiennent des plongements lagrangiens.

6.3. Des fibrés en tores

Une généralisation immédiate de 6.2.5 (avec $m = 1$) est la suivante:

6.3.1. REMARQUE. Soit $\xi \rightarrow V$ un fibré en droites complexes tel que $TV \otimes \mathbb{C} \oplus \xi$ soit trivialisable. Alors il existe un plongement lagrangien du fibré en sphères $S(\xi)$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Démonstration. La condition " $TV \otimes \mathbb{C} \oplus \xi$ trivialisable" impose à ξ d'être le fibré $\det V \otimes \mathbb{C}$ (en particulier 6.3.1 n'a d'intérêt par rapport à 6.2.5 que si V n'est pas orientable). Considérons maintenant la variété fibrée en cercles sur V :

$$W = S(\det V \oplus \varepsilon^1) \xrightarrow{p} V.$$

Son fibré tangent est stablement $p^*(TV \oplus \det V)$, dont le complexifié est trivialisé; donc W possède une immersion lagrangienne dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Comme le fibré p a évidemment une section, V est une sous-variété de W , et son fibré normal dans W est $\det V$. En particulier, V possède une immersion isotrope dans $\mathbb{C}^{n+1}$, avec un voisinage tubulaire de la forme $T^*V \oplus (\det V \otimes \mathbb{C}) = T^*V \oplus \xi$. On peut approcher cette immersion par un plongement isotrope. Un fibré en cercles assez petits $S(\xi)$ de ξ est alors une sous-variété du bord de ce voisinage tubulaire. Elle est lagrangienne dans $\mathbb{C}^{n+1}$ parce que les fibres de $S(\xi)$ sont lagrangiennes dans ξ . $\square$

On peut bien sûr donner un énoncé analogue en remplaçant ξ par une somme de fibrés en droites complexes et $S(\xi)$ par le fibré en tores associé.

Un cas particulier de 6.3.1 est traité dans [Kawashima-1981]; c'est celui où est donnée une immersion $f: V^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, le fibré ξ étant alors le complexifié du fibré normal de f (l'immersion isotrope $V^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ construite plus haut n'est dans ce case que la composition $V^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$).

Remarquons encore que, contrairement à ce qu'affirment [Stout-Zame-1985], Kawashima n'a pas démontré que $S^1 \times P^{2n}$ a un plongement lagrangien, heureusement: ceci impliquerait que P^{2n} a une immersion lagrangienne (voir par exemple 6.2.5), or sa caractéristique d'Euler est impaire! J'ai expliqué au début de 4.1 comment montrer plus généralement que seuls P^1 , P^3 et P^7 ont des

immersions lagrangiennes, on a vu qu'ils ont tous des plongements totalement réels d'après 4.3.2 et 0.5a), de plus le cas de P^3 est un des exemples explicites donnés dans [Forstnerič–1986a].

Il y a bien un fibré en cercles sur P^n qui a des plongements lagrangiens, mais il n'est trivial que si $n = 1$. Il va servir d'illustration pour les exemples qui suivent, aussi le voici (voir [Weinstein–1977]). Il s'agit tout simplement de l'application $S^1 \times S^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}(z, x) \mapsto zx$ (où S^n est considérée dans $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$), après passage au quotient par l'involution $(z, x) \mapsto (-z, -x)$. Une façon plus compliquée de le décrire tient dans le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} E^{n+1} & \xrightarrow{j'} & S^{2n+1} \subset_i \mathbb{C}^{n+1} \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ P^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{j} & P^n(\mathbb{C}) \end{array}$$

où π est la fibration de Hopf, E^{n+1} l'espace total du fibré induit sur $P^n(\mathbb{R})$ – c'est-à-dire au choix, le quotient de $S^1 \times S^n$ considéré, ou le fibré en cercles de $\gamma \otimes \mathbb{C}$ où $\gamma \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ est le fibré en droites canonique.

La forme de Kähler σ sur $P^n(\mathbb{C})$ est obtenue par réduction de ω , c'est-à-dire que $i^*\omega = \pi^*\sigma$. De toute évidence, j est un plongement lagrangien et on a donc: $(i \circ j')^*\omega = j'^*\pi^*\sigma = \pi'^*j^*\sigma = 0$. Donc le plongement $i \circ j'$ est lagrangien.

Je vais maintenant expliquer une généralisation de cette construction, due à T. Delzant (elle est liée à la classification des opérations hamiltoniennes de T^n sur les variétés symplectiques de dimension $2n$ de [Delzant–1986] même si elle n'y figure pas explicitement). L'idée est de construire un diagramme analogue au précédent

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} E^{n+k} & \xrightarrow{j'} & F^{2n+k} \subset_i \mathbb{C}^{n+k} \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ X_{\mathbb{R}}^n & \xrightarrow{j} & X_{\mathbb{C}}^n \end{array}$$

où $X_{\mathbb{R}}^n$ est une variété algébrique réelle et $X_{\mathbb{C}}^n$ sa complexifiée, F^{2n-k} est une sous-variété coisotrope, π sa réduction symplectique est un T^k -fibré, et π' le T^k -fibré induit. Le plongement $i \circ j'$ sera lagrangien comme plus haut. La seule chose à faire est de construire F et π :

$X_{\mathbb{R}}$ et $X_{\mathbb{C}}$ sont les variétés toriques (réelle et complexe) associées à un éventail Σ de $\mathbb{Q}^n$ muni du réseau $\mathbb{Z}^n$ des entiers (voir [Danilov–1978] pour les variétés toriques). On suppose Σ tel que $X_{\mathbb{R}}$ et $X_{\mathbb{C}}$ soient projectives, lisses et complètes.

On appelle $n+k$ le nombre de cônes du 1-squelette de Σ , ce qui définit l'entier k apparaissant dans (2), $k \geq 1$ (et s'il vaut 1, on est dans le cas (1)). Soient $(v_1, \dots, v_{n+k})$ des vecteurs entiers qui engendrent le 1-squelette et tous les cônes de Σ (sur $\mathbb{Z}$), et soit $\tilde{\pi}: \mathbb{Q}^{n+k} \rightarrow \mathbb{Q}^n$ la projection qui envoie les vecteurs $(e_1, \dots, e_{n+k})$ de la base canonique sur $(v_1, \dots, v_{n+k})$. On définit un éventail $\tilde{\Sigma}$ de $\mathbb{Q}^{n+k}$ par:

les cônes de $\tilde{\Sigma}$ sont les cônes $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ tels que
 $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ soit un cône de Σ (*)

(on replie l'éventail Σ).

Ainsi $\tilde{\Sigma}$ est un éventail du premier "quadrant" et la variété torique complexe qu'il définit est un ouvert $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}^{n+k}$ (complémentaire d'une famille finie de sous-espaces vectoriels). $\mathcal{F}$ est, bien sûr, muni d'une opération du gros tore $(\mathbb{C}^*)^{n+k}$, et du sous-tore $T_{\mathbb{C}}^k$ associé au noyau de $\tilde{\pi}$; les hypothèses sont telles que celui-ci opère librement sur $\mathcal{F}$, le quotient étant précisément $X_{\mathbb{C}}$. Il n'y a plus qu'à choisir pour F l'espace total du sous T^k -fibré associé.

L'exemple le plus simple ($k=1$) est celui du diagramme (1). Le cas où $k=n=2$ fournit des plongements du tore T^4 et de fibrés en tores T^2 sur la bouteille de Klein qu'on aurait pu obtenir par 6.3.1, mais aussi des choses plus compliquées.

6.4. Remarques supplémentaires, avec des questions

Comme je l'ai déjà mentionné, il y a des plongements lagrangiens de toutes les surfaces non-orientables dont la caractéristique d'Euler est divisible par 4, sauf peut-être de la bouteille de Klein ([Givental–1986]). A part eux, et ceux qu'ils engendrent grâce à 6.2.2, je ne connais pas d'autre exemple de variété qui possède des plongements lagrangiens et dont la caractéristique d'Euler ne soit pas nulle. En fait, tous les exemples que j'ai donnés dans ce paragraphe ont la propriété d'être fibrés sur le cercle S^1 , même si certains d'entre eux apparaissent plutôt comme des S^1 -fibrés.

En plus des questions évidentes que posent les restrictions de l'énoncé 0.5 pour les plongements totalement réels, il y a donc une question générale pour les plongements lagrangiens: Quelles variétés compactes ont des plongements lagrangiens?

Par exemple, grâce à 6.2.2 et aux exemples de Givental, on peut trouver des plongements lagrangiens de variétés de dimension 4 avec caractéristique d'Euler $8k$ ($k \geq -1$), alors que 0.4 n'impose que χ divisible par 4.

D'autre part, tous les exemples de plongements que j'ai donnés, comme ceux de Givental, ont une classe de Maslov non nulle; grâce à [Gromov–1985] (voir aussi [Sikorav–1986]), on sait que $H^1(V; \mathbb{R})$ doit être non nul, et donc contient

assez de place pour que la question suivante puisse avoir une réponse négative: Existe-t-il un plongement lagrangien dans $\mathbb{C}^n$ avec classe de Maslov nulle?

Le lecteur aura sans doute noté que les remarques précédentes fournissent beaucoup d'exemples de plongements lagrangiens du tore T^n . Or ceux-ci ont tous la "même" classe de Maslov au sens suivant: il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $H^1(T^n; \mathbb{Z})$ dans laquelle la classe de Maslov s'écrit $2e_1$. Est-ce vrai pour tous les plongements lagrangiens de T^n ?

RÉFÉRENCES

- [ADAMS-1960] J. F. ADAMS, *On the non existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. 72 (1960) 20-104.
- [AHERN-RUDIN-1985] P. AHERN et W. RUDIN, *A totally embedding of S^3 into $\mathbb{C}^3$* , Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985) 460.
- [ATIYAH-DUPONT-1972] M. F. ATIYAH et J. L. DUPONT, *Vector fields with finite singularities*, Acta Math. 128 (1972) 1-40.
- [AUDIN-1986a] M. AUDIN, *Cobordismes d'immersions lagrangiennes et legendriennes*. Thèse d'Etat. Orsay (1986)., Travaux en Cours, Hermann, Paris (1987).
- [AUDIN-1986b] M. AUDIN, *Obstructions topologiques à l'existence de plongements lagrangiens*, C. R. Acad. Sc. Paris (octobre 1986).
- [BOREL-1954] A. BOREL, *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts*, Amer. J. of Math. 76 (1954) 273-242.
- [BREDON-KOSINSKI-1966] G. E. BREDON et A. KOSINSKI, *Vector fields on π -manifolds*, Ann. of Math. 64 (1966) 85-90.
- [BROWN-1973] E. H. BROWN JR., *A remark concerning immersions of S^n into $\mathbb{R}^{2n}$* , Quart. J. Math. Oxford 24 (1973) 559-560.
- [COHEN-1985] R. L. COHEN, *The immersion conjecture for differentiable manifolds*, Ann. of Math. 122 (1985) 237-328.
- [DANILOV-1978] V. I. DANILOV, *La géométrie des variétés toriques*, Uspekhi Mat. Nauk 33 (1978).
- [DELZANT-1986] T. DELZANT, thèse, Université de Paris VI, 1986, et Images convexes de l'application moment, à paraître au Bull. Soc. Math. France.
- [FORSTNERIČ-1986a] F. FORSTNERIČ, *Some totally real embeddings of 3-manifolds*, Manuscripta Math. 55 (1986) 1-7.
- [FORSTNERIČ-1986b] F. FORSTNERIČ, *On totally real embeddings into $\mathbb{C}^n$* , Expo. Math. 4 (1986) 221-225.
- [GIVENTAL-1986] A. B. GIVENTAL, *Plongements lagrangiens de surfaces et parapluies ouverts de Whitney*, Funk. Anal. evo Priloj. 20 n° 3 (1986) 35-41.
- [GROMOV-1970] M. GROMOV, *A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities*, Actes Congrès Intern. Math. Nice (1970) tome 2, 221-225.
- [GROMOV-1973] M. GROMOV, *Intégration convexe de relations différentielles I*, Izvestia Akad. Nauk SSSR (1973).
- [GROMOV-1985] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985) 307-347.
- [GROMOV-1986] M. GROMOV, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik, Springer (1986).
- [HIRSCH-1959] M. HIRSCH, *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959) 242-276.
- [JAMES-THOMAS-1965] I. JAMES et E. THOMAS, *An approach to the enumeration problem for non-stable vector bundles*, J. Math. Mech. 14 (1965) 485-506.

- [KAWASHIMA-1981] T. KAWASHIMA, *Some remarks on Lagrangian imbeddings*, J. Math. Soc. Japan 33 (1981) 281-294.
- [KERVAIRE-1965] M. KERVAIRE, *Courbure intégrale généralisée et homotopie*, Math. Analen 131 (1956) 219-252.
- [KERVAIRE-1957] M. KERVAIRE, *Relative characteristic classes*, Amer. J. of Math. 79 (1957) 517-558.
- [KOSCHORKE-SANDERSON-1977] U. KOSCHORKE et B. SANDERSON, *Geometric interpretation of the generalized Hopf invariant*, Math. Scand. 41 (1977) 199-217.
- [LANNES-1982] J. LANNES, *Sur les immersions de Boy*, Algebraic Topology, Aarhus 1982, edited by Madsen and Oliver, Lecture notes in Mathematics 1051, Springer.
- [LEES-1976] J. A. LEES, *On the classification of Lagrange immersions*, Duke Math. J. 43 (1976) 217-224.
- [LUSZTIG-MILNOR-PETERSON-1969] *Semi characteristics and cobordism*, Topology 8 (1969) 357-359.
- [MASSEY-1969a] W. S. MASSEY, *Pontrjagyn squares in the Thom space of a bundle*, Pacific J. of Math. 31 (1969) 133-142.
- [MASSEY-1968b] W. S. MASSEY, *Proof of a conjecture of Whitney*, Pacific J. of Math. 31 (1969) 143-156.
- [MILGRAM-1974] J. MILGRAM, *Unstable homotopy from the stable point of view*, Lecture Notes in Math. 368, Springer 1974.
- [RUDIN-1981] W. RUDIN, *Totally real Klein bottles in $\mathbb{C}^2$* , Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981) 653-654.
- [SIKORAV-1986] J.-C. SIKORAV, *Non-existence de sous-variétés lagrangiennes exactes dans $\mathbb{C}^n$* (d'après Gromov), à paraître dans les actes des Journées S. M. F. de Lyon (1986).
- [SMALE-1959] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces*, Ann. of Math. 69 (1959) 327-344.
- [STONG-1968] R. STONG, *Notes on cobordism theory*, Math. Notes, Princeton University Press 1968.
- [STOUT-ZAME-1985] E. L. STOUT et W. R. ZAME, *Totally real imbeddings and the universal covering spaces of domains of holomorphy*, Manuscripta Math. 50 (1985) 29-48.
- [THOM-1954] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. 28 (1954) 17-86.
- [VOGEL-1974] P. VOGEL, *Cobordismes d'immersions*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 7 (1974) 317-358.
- [WEINSTEIN-1977] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*, Amer. Math. Soc. Regional Conf. Series 29 (1977).
- [WHITNEY-1944] H. WHITNEY, *The self intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space*, Ann. of Math. 45 (1944) 220-246.
- [ZARATI-1978] S. ZARATI, *Défaut de stabilité d'opérations cohomologiques*, Publ. Math. Orsay, 1978.

Université Louis Pasteur
 Département de Mathématiques
 7, rue René-Descartes
 F-67084 Strasbourg-Cedex

Reçu le 24 novembre 1986