

Topologie des systèmes de Moser en dimension quatre

M. Audin

Abstract. Dans cet article, je vais étudier les tores de Liouville et leurs bifurcations pour deux groupes de systèmes intégrables discutés par Moser dans [14]: le flot géodésique sur certaines orbites coadjointes de $\mathfrak{so}(4)$ d'une part (cas (a)) et les géodésiques des quadriques ou le problème de Neumann dans $\mathbf{R}^3$ (cas (b)).

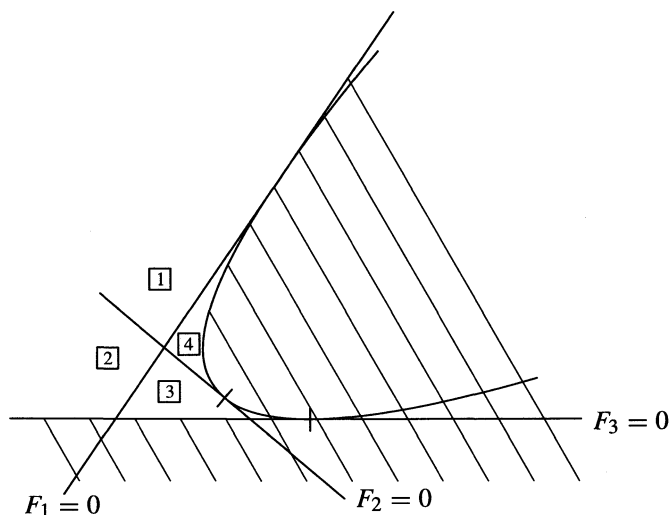


Fig. 1 application moment pour les quadriques de $\mathbf{R}^3$

Il est assez remarquable que, malgré la célébrité du problème des géodésiques des quadriques (un des plus vieux systèmes intégrables du monde) et l'abondance de la littérature qui lui a été consacrée depuis Jacobi, les aspects topologiques en aient été assez négligés: je n'ai trouvé d'énoncé pour les tores de Liouville couvrant *tous* les cas de quadriques que dans le très beau papier de Knörrer [13], et, malheureusement, ledit énoncé est erroné... même dans le cas des quadriques de $\mathbf{R}^3$!

De même, je n'ai pas été capable de trouver dans un travail antérieur un dessin du lieu critique et de l'image de l'application moment qu'on peut voir sur la figure 1, ni a fortiori une analyse des singularités de ce lieu critique, qui sont pourtant assez spéciales.

On sait que ces systèmes sont liés à des courbes hyperelliptiques. Je vais étudier ici assez naïvement la structure *réelle* de ces courbes pour en déduire des informations topologiques. Ces questions sont traitées avec des méthodes plus fines dans [3].

J'ai déjà signalé que la littérature consacrée à ce problème est énorme. Je choisis ici assez arbitrairement ce qui pourrait servir d'introduction. Tout d'abord, on peut contempler les beaux dessins et commentaires de Hilbert et Cohn-Vossen [9] et d'Arnold [2]. Klingenberg [12] traite en détail et de façon à la fois classique et lisible le cas de l'ellipsoïde (mais naturellement on peut consulter directement Jacobi [10] et Weierstrass [17]). Pour l'hyperboloïde à une nappe je n'ai trouvé qu'Hadamard [7]. Comme j'ai déjà dit, le point de vue le plus moderne est dans l'article [14] de Moser et il y a aussi celui de Knörrer [13]. Presque tous les articles consacrés à la méthode algébro-géométrique notamment [1] citent ces exemples — avec des commentaires plus ou moins heureux sur les bifurcations et/ou le cas réel.

Ce travail a été terminé pendant un séjour à l'Université du Québec à Montréal en 1992. Je remercie S. Boyer, F. Lalonde et M. Troyanov pour leur accueil.

Diverses personnes ont dû écouter ou lire diverses versions de ce travail. Que toutes soient remerciées, et plus particulièrement Horst Knörrer et Jean-Yves Mérindol pour leurs commentaires.

1 Description des systèmes et des courbes associées

1.1 Des variétés symplectiques

Fixons un entier n et deux vecteurs x et y unitaires orthogonaux de l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+2}$. Alors $x \wedge y \in \Lambda^2 \mathbf{R}^{n+2} \cong \mathfrak{so}(n+2)$ est une matrice antisymétrique qui ne dépend que du plan orienté dont (x, y) est une base orthonormée directe. On a ainsi un plongement de la grassmannienne $\tilde{G}_2(\mathbf{R}^{n+2})$ dans $\mathfrak{so}(n+2)$ dont l'image est l'ensemble des matrices antisymétriques de norme 1 et de rang 2. C'est aussi une orbite (co-)adjointe de $SO(n+2)$, en particulier une variété symplectique (de dimension $2n$).

On va aussi considérer l'espace $\mathcal{D}_n$ des droites affines orientées de $\mathbf{R}^{n+1}$. Une telle droite est bien définie par la donnée d'un vecteur unitaire p et de la projection orthogonale u de l'origine:

$$\mathcal{D}_n \cong \{(p, u) \mid \|p\| = 1 \text{ et } p \cdot u = 0\}$$

ce qui l'identifie à TS^n , une première façon de le décrire comme variété symplectique. Plus canoniquement, c'est aussi l'espace des caractéristiques¹⁾ du flot géodésique de la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

1.1.1. Remarque On peut facilement plonger $\mathcal{D}_n$ dans $\tilde{G}_2(\mathbf{R}^{n+1})$ simplement en plongeant $\mathbf{R}^{n+1}$ comme l'hyperplan affine $x_0 = 1$ dans $\mathbf{R}^{n+2}$: à (p, u) on associe le plan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{1 + \|u\|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix},$$

1) En fait les deux structures symplectiques ainsi définies ne coïncident qu'au signe près.

l'unique plan vectoriel contenant la droite des $u + tp$. Naturellement ce plongement n'est pas symplectique: le volume de $\mathcal{D}_n$ est infini.

1.2 Les systèmes intégrables

Appelons n la dimension de l'espace euclidien considéré: $m = n + 2$ ou $n + 1$. Les coordonnées sont nommées $(x_0, \dots, x_{n+1})$ dans le premier cas et $(x_1, \dots, x_{n+1})$ dans l'autre. Fixons une matrice diagonale inversible α dans $\text{End} \mathbf{R}^m$ et considérons les matrices

$$A_h = h\alpha + a \wedge b + h^{-1}B_{a,b}$$

où h est un paramètre formel destiné à vivre dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, $(a, b) = (x, y)$ ou (p, u) selon le cas et $B_{a,b}$ est une matrice symétrique de rang ≤ 2 . Concrètement, on va s'intéresser aux systèmes décrits dans l'article de Moser:

(a) Les équations d'Euler-Arnold pour le flot géodésique sur les orbites de matrices de rang 2 dans $\mathfrak{so}(n+2)$, cas où $m = n + 2$, $(a, b) = (x, y)$, $B_{a,b} = 0$.

(b) Le flot géodésique sur une quadrique de $\mathbf{R}^{n+1}$ ou le problème de Neumann, cas où $m = n + 1$, $(a, b) = (p, u)$ et $B_{a,b} = -p \otimes p$.

Il n'y a pas de difficulté à traiter de la même façon les autres exemples de l'article de Moser, en particulier le cas d'une force centrale appliquée à un point massique sur un ellipsoïde.

Les systèmes hamiltoniens du cas (a) et des deux cas de (b) peuvent se mettre sous forme de Lax en

$$\dot{A}_h = [A_h, \Gamma + \beta h]$$

où Γ est une matrice antisymétrique fonction de (a, b) (ce ne sont pas des systèmes linéaires!) et β une matrice diagonale fonction seulement de α . Les valeurs précises de ces deux matrices dépendent de celui des trois systèmes que l'on considère, voir [1] par exemple.

1.1.2. Remarque Ici je ne m'intéresse pas réellement au système, c'est à dire à l'équation différentielle ou au hamiltonien, mais en fait seulement à une application moment dont ce hamiltonien est une projection linéaire. Ceci explique pourquoi du point de vue topologique (sinon dynamique) les géodésiques de l'ellipsoïde et le problème de Neumann sont traités de façon identique! Du point de vue de l'équation de Lax, ceci explique pourquoi je ne m'intéresse ici qu'à A_h et pas à $\Gamma + \beta h$.

En calculant le polynôme caractéristique de A_h , on en déduit des intégrales premières, dont on montre qu'elles commutent (ces exemples sont justiciables du théorème d'Adler-Kostant-Symes), et qui sont en nombre suffisant (n indépendantes) pour que ces systèmes soient intégrables au sens d'Arnold-Liouville.

En effet, puisque A_h est une perturbation de rang 2 d'une matrice diagonale inversible, il est facile d'évaluer son polynôme caractéristique [14]:

$$\det(A_h - \mu I) = h^p [h^2 - \Psi_z(a, b)]$$

pour un entier p convenable, et pour $\mu = -hz$, et où $\Psi_z(a, b)$ est une fraction rationnelle de z dont les coefficients sont nos intégrales premières et dont les pôles sont les coefficients de la matrice α .

Une conséquence de la forme particulière des matrices A_h est donc de donner des courbes spectrales hyperelliptiques, les courbes C d'équation $h^2 = \Psi_z(a, b)$. Supposons les coefficients α_i de α distincts et, pour fixer les idées

$$0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n+1}, \text{ et } \alpha_0 < \alpha_1 \text{ si } m = n + 2.$$

Considérons encore la forme bilinéaire symétrique

$$\varphi_z(a, b) = \sum_i \frac{a_i b_i}{\alpha_i - z}$$

sur $\mathbf{R}^m$, ainsi que la forme quadratique f_z associée. La fraction rationnelle $\Psi_z(a, b)$ est

- $\varphi_z(x, y)^2 - f_z(x)f_z(y)$ dans le cas (a)
- $\varphi_z(p, u)^2 - f_z(p)[f_z(u) - 1]$ dans le cas (b).

Par exemple, dans le cas (b), $\Psi_z(p, u) = 0$ exprime le fait que la droite des $u + tp$ est tangente à la quadrique Q_z d'équation $f_z = 1$. Quand z est fixé, le flot du champ hamiltonien de Ψ_z (au niveau $\Psi_z = 0$) décrit les tangentes le long des géodésiques de Q_z . De même dans le cas (a), $\Psi_z(x, y) = 0$ exprime le fait que le plan défini par (x, y) est isotrope pour la forme quadratique f_z .

Un calcul direct de résidu permet d'exprimer

$$\Psi_z(a, b) = \sum_i \frac{F_i(a, b)}{\alpha_i - z}$$

avec, dans le cas (a):

$$F_i(x, y) = \sum_{j \neq i} \frac{(x_i y_j - x_j y_i)^2}{\alpha_i - \alpha_j}$$

et dans le cas (b):

$$F_i(p, u) = p_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{(p_i u_j - p_j u_i)^2}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

Ces intégrales premières sont dues à Uhlenbeck. Elles vérifient des relations plus ou moins évidentes:

- dans le cas (a), $\sum F_i = 0$ et $\sum \alpha_i F_i = 1$, qui dit que $\|x \wedge y\|^2 = 1$,
- dans le cas (b), $\sum F_i = 1$, qui dit que $\|p\|^2 = 1$.

Compte tenu de ces relations, on a le bon nombre (n) d'intégrales premières. Appelons E le sous-espace de dimension n de $\mathbf{R}^m$ décrit par ces relations, et $F = (F_i)_i$, considérée comme à valeurs dans E : «application moment».

On peut aussi écrire

$$\Psi_z(a, b) = \frac{\mathcal{P}_{a,b}(z)}{\prod(\alpha_i - z)}$$

où $\mathcal{P}_{a,b}$ est un polynôme de degré n dans tous les cas (à cause des relations entre les F_i). Ainsi la courbe C d'équation $h^2 = \Psi_z$ est revêtement ramifié de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ en les m valeurs des α_i , les n racines de $\mathcal{P}$ et le point à l'infini si $m = n + 1$, soit $2n + 2$ points, son genre est donc n .

2 Géométrie réelle de C et image de l'application moment

2.1 La courbe C

Il y a un certain nombre de points à coordonnées réelles évidents sur la courbe C . Par exemple, on remarque que l'équation (en z) $f_z(a) = 0$ s'écrit aussi, en réduisant au même dénominateur, $\mathcal{R}_a(z) = 0$, où $\mathcal{R}_a$ est un polynôme de degré $m - 1$ dont toutes les racines sont réelles puisque les signes des $\mathcal{R}_a(\alpha_i)$ alternent². Appelons les ζ_j en les numérotant de façon que

$$\alpha_0 < \zeta_0 < \alpha_1 < \zeta_1 < \dots < \zeta_n < \alpha_{n+1}.$$

Posons $\eta_j = \varphi_{\zeta_j}(a, b)$ de sorte que le point R_j de coordonnées (η_j, ζ_j) est un point réel de la courbe C .

2.1.1. Proposition *La partie réelle de la courbe hyperelliptique C de genre n possède $n + 1$ composantes connexes. Une et une seule de ces composantes, notée C_i , se projette à l'intérieur de l'intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.*

La démonstration est directe et consiste à étudier le signe de Ψ_z pour $z \in \mathbf{R}$: on sait que Ψ_z ne peut changer de signe qu'en les α_i et en les racines de son numérateur $\mathcal{P}_{a,b}$. En plus, on sait qu'il est positif en chacun des points ζ_j . A cause de la position des ζ_j par rapport aux α_i , on voit que $\mathcal{P}_{a,b}$ doit avoir une racine réelle dans chaque intervalle $[\zeta_j, \zeta_{j+1}]$. Comme son degré est justement n , toutes ses racines sont réelles.

On en déduit l'assertion sur les composantes de la partie réelle de la courbe C . La composante C_i est celle qui contient le point R_i . $\square$

Appelons $z_1 < \dots < z_n$ les racines de $\mathcal{P}_{a,b}$, et $S_1, \dots, S_n$ les points de C correspondants. Une façon équivalente mais utile de caractériser les positions des points S_j sur les composantes de C ou des z_j par rapport aux α_j est la suivante (due à Knörrer [13] au moins dans le cas (b)). Je montrerai plus bas que c'est elle qui donne l'image de l'application moment:

2) Faisons la convention que $\alpha_0 = -\infty$ (et de même ζ_0) si $m = n + 1$.

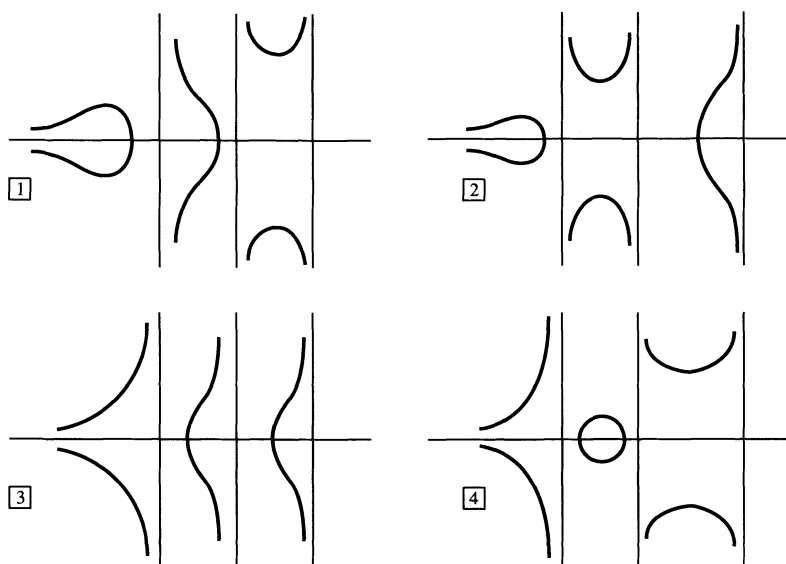


Fig. 2 la partie réelle de C pour $n = 2$

2.1.2. Corollaire *Ecrivons l'ensemble $\{\alpha_0, \dots, a_{n+1}, z_1, \dots, z_n\}$ sous la forme $\{b_0, \dots, b_{2n+1}\}$ avec $b_0 < b_1 < \dots < b_{2n+1}$. Alors $z_j = b_{2j-1}$ ou b_{2j} .* $\square$

Supposons par exemple que $n = 2$ et, pour fixer les idées, que nous soyons dans le cas (b). Il y a $2^n = 4$ configurations possibles pour les positions des S_j et pour la forme de $C(\mathbf{R})$. Elles sont schématisées sur la figure 2.

Une autre application immédiate est:

2.1.3. Corollaire *Quand a et b sont réels, le polynôme $\mathcal{P}_{a,b}$ n'a jamais de racine d'ordre ≥ 3 . Chacune de ses éventuelles racines doubles est une racine de $f_z(a)$.* $\square$

2.1.4. Remarque Le fait que les z_j soient réels est bien classique et fait partie du folklore du problème dans le cas des quadriques (cas (b)): il exprime que les tangentes à une quadrique sont en fait tangentes à n des quadriques de la famille des quadriques homofocales Q_z . H. Knörrer m'en signale une autre démonstration, implicite dans [13] et basée sur la dualité projective (la famille des quadriques homofocales est duale à une famille *linéaire* de quadriques, d'où, d'ailleurs, une bonne partie de la géométrie algébrique classique liée au problème des géodésiques sur les quadriques).

2.1.5. Remarque Les points R_j (plus ou moins) ont été utilisés par Moser [14] dans son étude de la relation entre la jacobienne de C et la «variété isospectrale»

(un quotient d'un niveau de F). Dans le contexte présent, où C est une courbe spectrale, on peut montrer que $R_1 + \dots + R_n + S_1 + \dots + S_n$ (+ un autre point si $m = n + 2$) est un diviseur qui représente le fibré des vecteurs propres de A_h dans $\text{Pic } C$ (voir [3]).

2.2 Lieu critique de l'application moment

Je laisse la démonstration de la

2.2.1. Proposition *La courbe C est lisse si et seulement si elle correspond à une valeur régulière de l'application moment.*

pour la fin de ce paragraphe. On en déduit que le lieu critique de l'application moment F est le discriminant de la famille des courbes C (les valeurs de F sont les paramètres qui figurent dans l'équation de C) que j'appellerai, en abusant des notations, discriminant de C . Celui-ci est très facile à comprendre: comme l'équation de C est

$$h^2 = \sum \frac{F_i}{\alpha_i - z} = \frac{\mathcal{P}_{a,b}(z)}{\prod(\alpha_i - z)}$$

il est bien clair que son discriminant est formé

- du discriminant du polynôme $\mathcal{P}_{a,b}$, enveloppe de la famille d'hyperplans $P_z : \sum F_i/(\alpha_i - z) = 0$ dans l'espace E (points où $\mathcal{P}_{a,b}$ a une racine multiple).
- des hyperplans $P_{\alpha_i} : F_i = 0$ (c'est P_z quand $z \rightarrow \alpha_i$) qui lui sont tangents.

Par exemple, pour $n = 2$ (cas où la variété symplectique est de dimension 4), dans le plan E , on a une famille de droites enveloppant une parabole. Le discriminant est formé de 4 ou 3 de ces droites et de la parabole. Voir les figures 3 et 1 pour les cas (a) et (b) respectivement.

Démonstration. La proposition 2.2.1. est vraie sur $\mathbf{R}$ comme sur $\mathbf{C}$. Montrons la sur $\mathbf{R}$. Fixons une valeur F telle que C soit lisse. Appelons $\mathcal{T}_F$ le niveau correspondant. Comme C est lisse, on a une application

$$\mathcal{T}_F \xrightarrow{\Phi_F} \text{Pic}^d C$$

qui associe à un point (a, b) de $\mathcal{T}_F$ le fibré sur C dont la fibre en (h, z) est la droite propre de A_h pour la valeur propre $\mu = -hz$ correspondant (pour avoir un degré d positif, ici égal à $2n + 1$ ou $2n$, on prend en fait le dual de ce fibré).

Je vais montrer que les images par l'application tangente $T\Phi_F$ des champs hamiltoniens des fonctions F_i engendrent tout l'espace tangent à $\text{Pic}^d C$: ainsi ces champs eux-mêmes engendreront un espace de dimension $\geq n$ et F sera bien une valeur régulière.

Calculons donc l'application tangente $T\Phi_F$. Ce calcul fait partie du folklore de la méthode algébro-géométrique (voir [16] par exemple): si X_H est le gradient symplectique d'un hamiltonien du type

$$H(a, b) = f(A_h) = \text{Rés} \left(g(A_h) h^{-k-1} dh \right)$$

où g est une fonction invariante sur l'algèbre de Lie des matrices, alors $df(A_h)$ commute avec A_h , ainsi elle a les mêmes vecteurs propres, pour une certaine valeur propre $\psi(h, \mu)$. Cette fonction ψ définit un 1-cocycle du recouvrement de C par les ouverts $\mathcal{U}_+$ où $h \neq \infty$ et $\mathcal{U}_-$ où $h \neq 0$ et en fin de compte un élément de $H^1(C; \mathbb{C})$, l'espace tangent à $\text{Pic}^d C$, qui est l'image du vecteur X_H par l'application tangente à Φ_F .

Comme $\Psi_z = F_i/(\alpha_i - z)$, les fonctions $\Psi_{z_1}, \dots, \Psi_{z_n}$ sont des combinaisons linéaires des F_i . Il suffit naturellement de montrer que les images de leurs gradients symplectiques engendrent l'espace vectoriel $H^1(C; \mathbb{C})$ de dimension n . Le calcul est simplifié: il suffit de calculer l'image du gradient symplectique de Ψ_0 et de remplacer ensuite α par $\alpha - z_j$ ($1 \leq j \leq n$). On considère donc Ψ_0 comme un hamiltonien sur la variété symplectique $W^{2n} = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ ou $\mathcal{D}_n$ et on commence par l'exprimer à l'aide d'une fonction invariante de A_h .

Par définition, Ψ_0 est le coefficient de h^p dans $\det A_h$, de sorte que la fonction invariante est $g = \det, g'(A_h)$ s'identifie à $\det(A_h)A_h^{-1}$ et que $\psi(h, z) = -hz^{-1}$.

On veut donc montrer maintenant que les classes représentées par les n cocycles $h(z - z_j)^{-1}$ pour $1 \leq j \leq n$ dans $H^1(C; \mathbb{C})$ sont indépendantes. C'est un calcul de résidu: l'appariement $f \otimes \omega \mapsto \text{Rés}_{h=0}(f\omega)$ induit un isomorphisme $H^1(C; \mathbb{C}) \rightarrow H^0(C; \Omega_C^1)^*$.

Soit donc

$$\omega_i = \frac{z^{i-1} dz}{h \prod_s (\alpha_s - z)} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Ces formes constituent une base de $H^0(C; \Omega_C^1)$ et on calcule aisément:

$$a_{i,j} = \text{Rés}_{h=0} h(z - z_j)^{-1} \omega_i = \text{Rés}_{S_j} \frac{h \omega_i}{z - z_j} = \frac{2z_j^{i-1}}{\prod_s (\alpha_s - z_j)}$$

et la matrice des $a_{i,j}$ est de rang n dès que les z_j sont distincts, ce qui est le cas puisque C est lisse.

Nous avons donc montré que, si C est lisse, F est non critique. Inversement, supposons C singulière. Alors la valeur de F considérée est sur le discriminant.

Si elle est sur un des hyperplans $F_i = 0$, en supposant qu'elle soit effectivement dans l'image, elle est l'image d'un point (a, b) avec $a_i = b_i = 0$ et ce point est critique (par une vérification directe).

Si elle est sur le discriminant de la famille des polynômes $\mathcal{P}$, alors le polynôme a une racine multiple ζ . Comme on l'a déjà remarqué dans 2.1.3., on a $\zeta = z_i = \zeta_{i+1} = z_{i+1}$ et la racine ζ est aussi une racine de $f_z(a) = 0$. A cause de la forme de Ψ_z , on a aussi $\varphi_\zeta(a, b) = 0$. Alors $f_\zeta(b + ta)$ est constant égal à $f_\zeta(b)$. On sait donc

- dans le cas (a) que le plan (x, y) est dans le cône isotrope de f_ζ et donc la constante est nulle: $f_\zeta(y) = 0$,

- dans le cas (b) que la droite $u + tp$ est tangente à la quadrique Q_ζ et donc la constante vaut 1: $f_\zeta(u) = 1$.

C'est exactement ce qu'il faut pour conclure que (a, b) est un point critique de Ψ_ζ . Il ne reste alors plus assez de Ψ_{z_j} indépendants: (a, b) est bien un point critique de F . $\square$

2.2.2. Remarque Dans le cas (b), les valeurs de F situées sur le discriminant du polynôme $\mathcal{P}$ donnent des niveaux $\mathcal{T}_F$ qui sont constitués des droites de la quadrique correspondant à la racine multiple. Bien entendu, ce sont des points singuliers pour le flot géodésique. Le niveau complexifié, quant à lui, contient plus (il contient des points réguliers): l'interprétation de la racine multiple comme une racine de $f_z(a)$ est basée sur la réalité de a .

2.3 Image de l'application moment

Le corollaire 2.1.2. décrit en fait l'image de l'application moment:

2.3.1. Proposition *Un point de E est dans l'image de F si et seulement si les n racines de*

$$\mathcal{P}_{a,b}(z) = \sum_i F_i \prod_{j \neq i} (\alpha_j - z)$$

sont réelles et telles que si l'ensemble des α_i et des z_j est ordonné en

$$b_0 < b_1 < \dots < b_{2n+1}$$

alors $z_j = b_{2j-1}$ ou b_{2j} .

On a vu que la condition était nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer qu'au moins un point de chaque zone est atteint, ou encore que chacune des configurations possibles de la partie réelle de C est effectivement réalisée pour des vecteurs (a, b) réels. C'est une vérification simple que je laisse au lecteur.

2.3.2. Remarque L'ensemble des valeurs régulières de F a 2^n composantes connexes.

Les figures 1 et 3 représentent les images des applications moments pour $n = 2$ et dans les cas (b) et (a) respectivement.

Remarquons que la partie utile (atteinte) du discriminant (de la famille des courbes C ou de F) est assez peu singulière: ses singularités sont des points multiples (intersections des hyperplans $F_i = 0$, auto-intersections du discriminant de $\mathcal{P}$) et des points où deux composantes (un des hyperplans et le discriminant de $\mathcal{P}$) sont tangentes entre elles. Par exemple, pour $n = 2$ (voir la figure 1), il n'y a dans le lieu critique ni point de rebroussement, comme on en trouve notamment dans le cas de Kowalevski, ni de point isolé comme par exemple dans le cas de la toupie symétrique (voir [5] ou [4] par exemple). En effet, un corollaire immédiat de 2.1.3. est

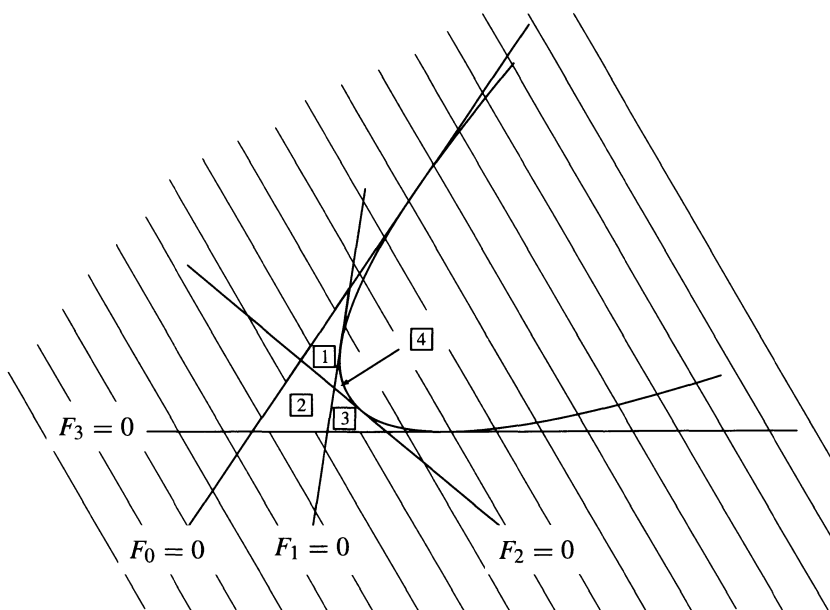


Fig. 3 application moment pour le flot géodésique de $\mathfrak{so}(4)$

2.3.3. Corollaire *L'image de l'application moment F ne peut contenir aucun point singulier du discriminant du polynôme $\mathcal{P}$ (mais peut contenir des points multiples de ce discriminant dès que $n \geq 4$).* $\square$

2.3.4. Remarque L'annonce [15] contient trois schémas représentant les valeurs atteintes par le moment pour le flot géodésique sur $\mathfrak{so}(4)$. La figure 3 n'y figure pas, mais le troisième des schémas correspond à des orbites coadjointes de $SO(4)$ à petit pfaffien et est assez proche de celui obtenu ici où l'on a considéré une orbite à pfaffien nul (matrices de rang 2). Les bifurcations que nous trouverons sont identiques à celles annoncées dans ce schéma. (Voir aussi [4] pour le flot géodésique sur $SO(4)$.)

3 Les tores de Liouville et leurs bifurcations en dimension 4

Dans tout ce §, je suppose que $n = 2$.

3.1 Les tores de Liouville

Considérons à nouveau, sur les figures 3 et 1, l'image de l'application moment. Les parties hachurées ne sont pas atteintes: à l'intérieur de la parabole, $\mathcal{P}$ n'a pas ses racines réelles, les autres zones hachurées correspondent à des racines réelles qui ne vérifient pas les inégalités imposées par 2.3.1. Les droites P_z sont les tangentes

à la parabole. Les numéros $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ des quatre zones atteintes correspondent aux positions des z_i définies par les mêmes chiffres sur la figure 2. Par exemple dans le cas (b), ces zones vont correspondre à des tangentes communes

- à un ellipsoïde et à un hyperboloïde à une nappe pour la zone $\boxed{1}$,
- à un ellipsoïde et à un hyperboloïde à deux nappes pour la zone $\boxed{2}$,
- à un hyperboloïde à une nappe et à un hyperboloïde à deux nappes pour la zone $\boxed{3}$,
- à deux hyperboloïdes à une nappe pour la zone $\boxed{4}$.

3.1.1. Remarque Le lecteur sera sans doute satisfait de constater que l'intersection d'une droite P_z avec l'image de l'application moment est un segment (compact) si et seulement si cette intersection décrit bien les géodésiques d'un authentique ellipsoïde. il remarquera aussi que, pour des raisons de convexité évidentes, il n'y a aucune tangente commune à deux ellipsoïdes ou à deux hyperboloïdes à deux nappes de la famille. Autrement dit deux droites P_z pour deux valeurs distinctes de z soit toutes deux $< \alpha_1$, soit toutes deux dans $]\alpha_2, \alpha_3[$ doivent se couper *en dehors* de l'image de F : c'est encore une façon de trouver cette image dans le cas $n = 2$.

3.1.2. Proposition *Le niveau $\mathcal{T}_F$ a 2 composantes connexes quand F est dans une des zones $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, et 4 quand F est dans la zone $\boxed{4}$.*

Pour démontrer la proposition 3.1.2., on utilise d'abord un argument permettant de ne traiter qu'un seul des deux cas (a) et (b), par exemple en montrant que (b) s'obtient à partir de (a) en faisant tendre convenablement α_0 vers $-\infty$. Il suffit alors³⁾ de traiter le cas (b) que l'on peut reformuler en:

3.1.3. Proposition *$\mathcal{T}_F$ a 2 composantes si au plus une des deux quadriques qu'il définit est un hyperboloïde à une nappe (zones $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$) et 4 si toutes les deux sont des hyperboloïdes à une nappe.* □

Cette différence s'explique par la différence entre l'hyperboloïde à une nappe et les deux autres types de quadriques de la famille:

- soit — directement — pour la métrique: après tout, on s'intéresse aux géodésiques, et il n'est pas indifférent d'être en courbure négative!
- soit — de façon équivalente — pour la topologie: une fois complété, l'hyperboloïde à une nappe est un tore, alors que les autres sont des sphères.

On peut alors se reposer sur les résultats classiques sur les géodésiques des quadriques: le cas où l'une des quadriques est un ellipsoïde est exprimé en termes

3) Le lecteur peu convaincu par cet argument trouvera une démonstration directe pour le cas (a) dans 3.1.6..

de tores de Liouville par exemple dans le livre de Klingenberg [12]. Le cas où l'une des deux est un hyperboloïde à deux nappes n'est pas vraiment différent. Les géodésiques de l'hyperboloïde à une nappe ont été étudiées par Hadamard [7]. La projection du niveau $\mathcal{T}_F$ sur l'une des quadriques (complétée à l'infini) qu'il définit est un anneau si F est dans l'une des zones numérotées de 1 à 3 (voir les beaux et classiques dessins de [9]), et l'hyperboloïde tout entier (tore) dans la zone [4]. Les points génériques de ces images sont images de 4 points du niveau. On peut alors conclure. $\square$

3.1.4. Remarque Le point méritant réellement une démonstration, puisque dans le cas considéré, c'est celui qui est faux dans [13], est celui de [4]. Voilà une autre démonstration: les points de la frontière (parabole), on l'a vu, correspondent aux droites de l'hyperboloïde à une nappe. Comme on considère ici des droites orientées, les deux familles de droites donnent lieu à un niveau (singulier) formé de 4 cercles. Un niveau régulier proche est donc formé de 4 tores!

3.1.5. Remarque Il est assez facile de corriger l'erreur dans [13] et d'en déduire, ici, que le quotient de $\mathcal{T}_F$ par le groupe $\mathbf{Z}/2$ qui change l'orientation de la géodésique a 1 ou 2 composantes selon les cas. Il faut ensuite faire encore un petit effort pour en déduire 3.1.3.

3.1.6. Remarque On peut aussi traiter directement le cas (a) en appliquant les résultats de Haine [8] dans ce cas particulier: le niveau $\mathcal{T}_F$ s'identifie à la surface abélienne $\text{Prym}(Y|E)$ où E est la courbe elliptique $y^2 = \prod(\alpha_i - z)$ et Y la courbe de genre 3, normalisée de $h^2 = \mathcal{P}_{a,b}/y^2$, qui est à la fois un revêtement double ramifié en 4 points de E et un revêtement double non ramifié de C . Presque par définition, $\text{Prym}(Y|E)$ est le quotient de la jacobienne de C par le sous-groupe engendré par l'élément d'ordre 2 représenté par le diviseur $S_1 + S_2 - 2P_0$. Connaissant les positions de S_1 et S_2 sur les C_i , on en déduit facilement comment ce sous-groupe opère sur $\pi_0(\text{Jac } C(\mathbf{R}))$ et donc les nombres de composantes de $\text{Prym}(Y|E)(\mathbf{R})$ suivant les valeurs de F .

3.1.7. Remarque Une autre option serait d'utiliser l'application de vecteurs propres que j'ai déjà mentionnée. Ici utilisée brutalement, elle donne assez peu de renseignements: très précisément, l'application $\Phi_F : \mathcal{T}_F \rightarrow \text{Pic } C$ induit un difféomorphisme de $\mathcal{T}_F/G$ sur une des composantes de la partie réelle de la jacobienne, où G est le groupe $(\mathbf{Z}/2)^{n+1}$ engendré par les symétries autour des axes de coordonnées dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Même quand $n = 2$, ce résultat est bien loin de donner 3.1.3. La méthode est affinée dans [3].

3.1.8. Remarque Le fait que Moser montre que $\mathcal{T}_F/G$ est la jacobienne de C n'est pas plus utile... et surtout n'est en rien contradictoire avec 3.1.7: son résultat est précisément que $(\mathcal{T}_F(\mathbf{C})/G)$ est isomorphe à la jacobienne de C . Même si cet isomorphisme préserve les structures réelles, ce qui est le cas, il permet tout au plus

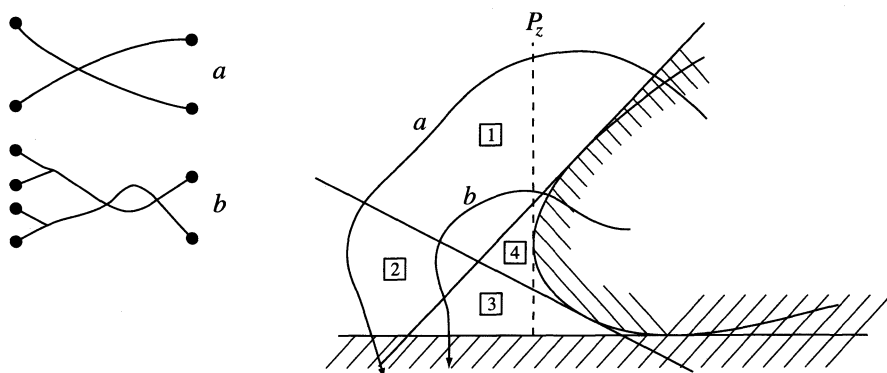


Fig. 4 bifurcations des tores de Liouville

d'identifier la partie réelle de $(\mathcal{T}_F(\mathbf{C}))/G$ à la partie réelle de la jacobienne. Le quotient par G crée des composantes connexes et cette variété est assez différente de $\mathcal{T}_F(\mathbf{R})/G$.

3.2 Les bifurcations

Toutes les méthodes proposées ci-dessus permettent aussi de démontrer

3.2.1. Proposition *Les bifurcations des tores de Liouville sont celles indiquées sur la figure 4.* $\square$

Les bifurcations sont indiquées ici par des diagrammes à la Kharlamov, ou à la Fomenko (voir [11] et [6] par exemple). Il faut remarquer que le problème strict des géodésiques des quadriques, c'est à dire le hamiltonien Ψ_z sur $\mathcal{D}_2$ est précisément un exemple qui ne vérifie pas les conditions de Fomenko dès que $z \in]\alpha_1, \alpha_2[$ (cas des géodésiques d'un hyperboloïde à une nappe): le niveau $\Psi_z = 0$ n'est pas régulier. On a vu en effet que les droites de la quadrique en sont des points critiques, ce qui se traduit graphiquement par le fait que la droite P_z qui décrit ce niveau est tangente au discriminant. Les chemins le long desquels j'ai représenté les bifurcations sont, comme il se doit, transverses au discriminant.

Références

- [1] M. Adler, P. vanMoerbeke, *Completely integrable systems, euclidean Lie algebras and curves*, et *Linearization of hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory*, *Advances in Math.* **38** (1980), 267–317 et 318–379.
- [2] V.I. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.

- [3] M. Audin, *Courbes algébriques et systèmes intégrables: géodésiques des quadriques*, Expo. Math. **12** (1994), 193–226.
- [4] M. Audin, *Toupiés, un cours sur les systèmes intégrables*, prépublication IRMA, Strasbourg (1994).
- [5] M. Audin, R. Silhol, *Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski*, Compositio Math. **87** (1993), 153–229.
- [6] A.T. Fomenko, *Integrability and nonintegrability in geometry and mechanics*, Math. and its Applications, Kluwer, 1988.
- [7] J. Hadamard, *Sur la forme des lignes géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre*, Bull. Soc. Math. France **26** (1898), 195–216.
- [8] L. Haine, *Geodesic flow on $SO(4)$ and abelian surfaces*, Math. Ann. **263** (1983), 435–472.
- [9] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer Verlag, 1932.
- [10] C. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, Gesammelte Werke, Supplementband, Berlin, 1884.
- [11] M.P. Kharlamov, *Bifurcation of common levels of first integrals of the Kowalevskaya problem*, PMN U.S.S.R. **47** (1983), 737–743.
- [12] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, de Gruyter, 1982.
- [13] H. Knörrer, *Geodesics on the ellipsoid*, Invent. Math. **39** (1980), 119–143.
- [14] J. Moser, *Geometry of quadrics and spectral theory*, in *The Chern Symposium*, Springer (1980), 147–188.
- [15] A.A. Oshemkov, *The topology of surfaces of constant energy and bifurcation diagrams for integrable cases of the dynamics of a rigid body on $so(4)$* , Russian Math. Surveys **42** (1987), 241–243.
- [16] A. Reiman, *Integrable hamiltonian systems connected with graded Lie algebras*, J. Soviet Math. **19** (1982), 1507–1545.
- [17] K. Weierstrass, *Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid*, in *Math. Werke*, I (1861), 257–266.

Michèle Audin,
 Institut de Recherche Mathématique Avancée
 Université Louis Pasteur,
 7, rue René Descartes,
 F-67084 Strasbourg Cedex, France