

Courbes algébriques et systèmes intégrables: géodésiques des quadriques

Michèle Audin

Abstract. The differential system giving the geodesics of a triaxial ellipsoid was solved by Jacobi in 1838, in terms of theta functions associated with a genus 2 hyperelliptic curve. It was intensively studied and discussed by many mathematicians since that time, being one of the most famous examples of a finite dimensional completely integrable system. In this paper, we recall some of the algebraico-geometric aspects of the question, and discuss the relationships between the real geometry of the hyperelliptic curve (and of some abelian varieties associated with it) and the topology of the system. Surprisingly enough, we get new results on those topological aspects.

1. Introduction

Le problème de trouver les géodésiques de l'ellipsoïde "à trois axes" a été résolu par Jacobi en 1838. La solution en est très simple: il y a une intégrale première, une courbe de genre 2 et des intégrales abéliennes associées grâce auxquelles on peut déterminer les solutions (par quadratures, donc) [14]. A l'époque, on continuait à mesurer les géodésiques de la Terre... et le général russe Schubert évaluait les trois axes de l'ellipsoïde terrestre (voir le début de l'article de Weierstrass [21]).

Jacobi avait reconnu le système comme "intégrable", au sens de Liouville comme on dit maintenant [3]. La dynamique est très belle et simple: chaque géodésique définit un hyperboloïde homofocal à notre ellipsoïde, les deux surfaces se rencontrent le long de deux lignes de courbure et la géodésique oscille entre ces deux lignes en tournant toujours dans le même sens (voir la figure 1... et surtout les très belles illustrations de [13]). Une chose encore plus belle: les droites tangentes à l'ellipsoïde le long de la géodésique sont tangentes à l'hyperboloïde...



Figure 1

La question est reliée à celle des droites de l'intersection de deux quadriques de $\mathbf{P}^5$, un beau problème de géométrie algébrique classique. Bref, de la géométrie du XIX^e siècle... jusqu'à ce que les systèmes intégrables ressuscitent dans les années 70 (du XX^e siècle) avec les méthodes de déformations isospectrales, et plus spécialement pour ce qui concerne les géodésiques des quadriques en toutes dimensions, le bel article de Moser [18], où ce dernier étudiait toute une classe de systèmes intégrables liés à des déformations de rang 2 de matrices diagonales inversibles et expliquait pourquoi leur géométrie est gouvernée par une courbe hyperelliptique. Une belle construction [16] de Knörrer faisait le lien avec la géométrie algébrique et les généralisations du complexe quadratique.

Il est un peu étonnant qu'il reste des choses à dire sur ce sujet. C'est pourtant le cas: même pour les quadriques de l'espace usuel $\mathbf{R}^3$, il n'existe pas dans la littérature d'énoncé général décrivant la topologie (décompte des tores de Liouville), à part celui de [16] qui n'est pas correct.

De même la relation entre la lissité de la courbe algébrique et celle de ces tores de Liouville n'est jamais explicitée. Je n'ai pas réussi à trouver non plus la très simple figure expliquant les relations entre les intégrales premières d'Uhlenbeck (voir le § 2.3) et les réels paramétrant la famille de quadriques, ni celle décrivant l'image de ces intégrales (figures 2 et 4).

Au delà de l'intérêt direct de cette discussion pour la compréhension de la topologie dans ce problème précis, j'ai voulu, par ce travail, essayer de faire le point sur ce que les méthodes algébro-géométriques pouvaient apporter à l'étude de la topologie des systèmes intégrables en général.

La situation actuelle est en effet assez peu satisfaisante. Bien sûr, avec un peu, voire beaucoup, de dextérité dans les calculs algébriques, on peut toujours espérer déterminer la topologie de n'importe quel exemple de dimension finie (c'est déjà bien compliqué en dimension 4, voir le livre [10] pour un catalogue édifiant d'exemples). J'essaie de trouver une approche plus méthodique, au moins pour une grosse sous-classe de systèmes, ceux décrits par une équation de Lax. Cette approche fonctionne parfaitement dans l'exemple compliqué de Kowalevski [4]... mais beaucoup moins bien dans la plupart des cas plus simples, tels celui présenté ici.

On a une application naturelle de la topologie (tores de Liouville) vers la géométrie algébrique (jacobienne de la courbe). Cette application linéarise les flots: la structure affine *canonique* de la jacobienne est une réification de celle, peu explicite, des tores de Liouville. Presque toujours, cette application est un revêtement d'ordre une (trop grande) puissance de 2 de son image. Ce n'est pas trop surprenant: on ne s'attend pas à trouver une variété abélienne principalement polarisée... mais même une fois le bon quotient identifié, notre application n'est toujours pas un isomorphisme.

On peut se demander pourquoi ça marchait si bien dans le cas de Kowalevski. Cette méthode dépend tellement de la forme de la paire de Lax utilisée que la bonne question serait probablement plutôt: comment trouver une "bonne" forme¹ de Lax?

1.1. Énoncés sur les quadriques

Commençons par énoncer les résultats que nous expliquerons dans cet article en termes de la géométrie d'une famille de quadriques. Soit Q_z la quadrique affine réelle d'équation

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{\alpha_i - z} = 1$$

où, pour fixer les idées, $\alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1} \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$, $z \neq \alpha_i$.

1. Soit d une droite tangente à une des quadriques Q_z . Elle est alors tangente à n quadriques $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$ de la famille.
2. Pour $(z) = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n$, appelons $\mathcal{T}_{(z)}$ l'ensemble de toutes les droites affines orientées de $\mathbf{R}_{n+1}$, tangentes communes à $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$. Cet espace est non vide si et seulement si, en ordonnant $\{-\infty, z_1, \dots, z_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ en $b_0 < b_1 < \dots < b_{2n+1}$, alors $z_j = b_{2j-1}$ ou b_{2j} .
3. En particulier, il y a au plus deux quadriques d'un type réel donné parmi les Q_{z_i} .
4. $\mathcal{T}_{(z)}$ est lisse si et seulement si les z_j sont distincts et distincts des α_i .
5. C'est alors une réunion de 2^{k+1} tores de dimension n , où $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est le nombre de types de quadriques réelles représentées deux fois dans la liste $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$.

Le premier énoncé est bien classique; le deuxième est peut-être un peu moins connu, il figure en tous cas dans [16] (et le troisième en est une conséquence).

Je n'ai pas su trouver le quatrième dans la littérature. Il est par contre à peu près certain que le dernier est original: il corrige un énoncé erroné de [16].

1.2. Énoncés algébro-géométriques

La façon la plus élégante d'exprimer les deux premières assertions est d'introduire pour $(z) \in \mathbf{R}^n$ la courbe hyperelliptique $C_{(z)}$ de genre n , revêtement ramifié de $\mathbf{P}^1$ en $\{\infty, z_1, \dots, z_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$. L'énoncé 1 affirme alors que cette courbe réelle a le maximum de composantes possibles $C_0, \dots, C_n$ et l'énoncé 2 qu'on peut les indexer de façon que C_i se projette dans l'intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ (avec $\alpha_0 = -\infty$). Quant à l'énoncé 3, c'est une simple conséquence de cette propriété.

¹Une question préliminaire à laquelle je n'ai aucun élément de réponse est naturellement: comment trouver une paire de Lax?

L'énoncé 4, lui, fait plus que de se reformuler en

Théorème 1.2.1. – $\mathcal{T}_{(z)}$ est lisse si et seulement si $C_{(z)}$ est lisse.

puisqu'il est précisément cet énoncé-là que je démontrerai. Là, la géométrie de C commence à jouer un rôle un peu sérieux. Appelons $S_1, \dots, S_n$ ceux des points de Weierstrass de C qui sont situés au-dessus de $z_1, \dots, z_n$. La dernière assertion sera fondée sur le

Théorème 1.2.2. – L'espace $\mathcal{T}_{(z)}$ complexifié est isomorphe à un ouvert de la variété abélienne $A = \text{Jac}(C_{(z)})/H$ où H est le sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^{n-1}$ engendré par les translations $S_i - S_j$.

et sur l'étude de l'opération de H sur la partie réelle de $\text{Jac}(C)$.

1.3. Plan de l'article

Au § 2, j'expliquerai selon Moser [18] pourquoi on est en présence d'un système intégrable (au sens d'Arnold et Liouville) et comment la courbe C apparaît naturellement dans ce contexte: c'est la courbe spectrale associée à une équation de Lax. J'étudierai les premières propriétés réelles de cette courbe, d'où je déduirai les premiers énoncés ci-dessus.

Au § 3, toujours grâce à la forme de Lax, je montrerai l'équivalence des régularités de $\mathcal{T}$ et de C (le Théorème 1.2.1) et j'en déduirai le lieu critique et l'image de l'application moment.

Au § 4, en utilisant une très belle construction de géométrie algébrique classique due à Knörrer [16], je montrerai le Théorème 1.2.2 et j'en déduirai la dernière assertion ci-dessus.

Au § 5 je considérerai en détail le cas des quadriques de l'espace $\mathbb{R}^3$: dans ce cas la variété abélienne A est la variété de Prym du revêtement $D \rightarrow E$ d'une courbe de genre 1 par une courbe de genre 3, comme on s'y attend dans ces dimensions. Il est facile d'en déduire comme dans [4] les bifurcations des tores de Liouville.

La littérature consacrée au sujet est énorme. Aux noms célèbres que j'ai déjà cités, il faut encore ajouter celui d'Hadamard [11] pour les géodésiques de l'hyperboloïde à une nappe. Aux références de base comme [13] et [3], on peut adjoindre [15] qui traite de façon à la fois classique et lisible, riemannienne et symplectique, le cas de l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$. Tous les articles consacrés aux méthodes algébro-géométriques citent cet exemple et je ne peux prétendre à une quelconque exhaustivité des références, je n'essaie donc pas.

Les aspects les plus topologiques, ainsi que les relations avec d'autres systèmes à la Moser sont présentés dans [5]. J'ai bénéficié de beaucoup de discussions avec beaucoup de mathématiciens que je ne peux remercier tous. Il n'est toutefois pas possible de ne pas mentionner Horst Knörrer, Jean-Yves Mérindol et Robert Silhol, qui m'ont expliqué beaucoup, sinon tout, de la géométrie algébrique utilisée ici.

2. Le système intégrable et la paire de Lax

On considère, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \dots + \frac{x_{n+1}^2}{\alpha_{n+1}} = 1$$

où, pour fixer les idées, on a supposé $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1}$. Plus généralement, pour tout nombre réel $z \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$, on considère la quadrique Q_z d'équation

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1 - z} + \dots + \frac{x_{n+1}^2}{\alpha_{n+1} - z} = 1.$$

La famille des Q_z est dite famille de quadriques *homofocales*. Une famille de quadriques est homofocale si la famille duale, au sens de la dualité projective, est linéaire (cette propriété sera exploitée au § 4).

On désigne par f_z la forme quadratique $\sum x_i^2/(\alpha_i - z)$ et par φ_z sa forme polaire $\sum x_i y_i/(\alpha_i - z)$.

2.1. La variété symplectique

La variété symplectique sur laquelle va vivre le système considéré est la variété $\mathcal{D}_n$ des droites (affines, orientées) de $\mathbb{R}^{n+1}$. En définissant une telle droite par un vecteur unitaire p et la projection orthogonale u de l'origine, on voit que

$$\mathcal{D}_n = TS^n = \{(p, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 = 1, p \cdot u = 0\}$$

d'où une structure symplectique en identifiant tangent et cotangent par la métrique. Dans le contexte des flots géodésiques, il est plus élégant de comprendre cette structure de la façon suivante. On considère le flot géodésique de la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^{n+1}$ autrement dit on se place sur $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, surface de niveau du hamiltonien $H(p, q) = \frac{1}{2}\|p\|^2$. Le champ hamiltonien $X_H(p, q) = (0, p)$ a pour flot $\varphi_t(p, q) = (p, q + tp)$ – les géodésiques de $\mathbb{R}^{n+1}$ sont bien les droites $q + tp$. $\mathcal{D}_n$ est la variété symplectique réduite, ou l'espace des caractéristiques: c'est bien l'espace des droites (affines, orientées).

Remarque. – Les deux structures symplectiques évoquées ici coïncident au signe près. Avec en tête la première description, j'écrirai (p, u) pour le point générique de $\mathcal{D}_n$.

2.2. Les tangentes à la quadrique Q_z

La droite des $u + tp$ est tangente à la quadrique Q_z si et seulement si l'équation du second degré (en t) $f_z(u + tp) = 1$ a une racine double. En développant le discriminant, c'est dire que:

$$\Psi_z(p, u) = \varphi_z(p, u)^2 - f_z(p)[f_z(u) - 1] = 0.$$

On s'intéresse donc à un niveau (zéro) de la fonction $\Psi_z : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathbf{R}$. La fonction Ψ_z est en fait bien définie sur $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$. Une trajectoire du flot de ce hamiltonien dans $\mathcal{D}_n$ est la famille des droites tangentes à une géodésique de Q_z .

Remarque. – L'équation $\Psi_z(p, u) = 0$ contient en particulier le cas où $t = \infty$ est racine double, c'est à dire celui où $f_z(p) = 0$ et $\varphi_z(p, u) = 0$: la droite (p, u) est contenue dans le cône asymptote de la quadrique Q_z .

2.3. Des intégrales premières

Un calcul de résidu tout à fait direct donne

$$\Psi_z(p, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{F_i(p, u)}{\alpha_i - z}$$

avec

$$F_i(p, u) = p_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{(p_i u_j - p_j u_i)^2}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

Les F_i sont des intégrales premières, elles ont été construites par Uhlenbeck, elles commutent parce que, pour deux valeurs quelconques z_1 et z_2 , on a $\{\Psi_{z_1}, \Psi_{z_2}\} = 0$ – et ça, c'est de la géométrie classique (voir [18] par exemple).

Voilà donc la situation: on a une application moment

$$\mathcal{D}_n \xrightarrow{F=(F_1, \dots, F_{n+1})} \mathbf{R}^{n+1}$$

à valeurs dans l'hyperplan $\sum F_i = 1$ (puisque $\sum F_i = \sum p_i^2$). Pour tout $z \in \mathbf{R}$, on peut considérer l'hyperplan P_z d'équation $\sum F_i / (\alpha_i - z) = 0$. L'intersection de cet hyperplan avec l'image de F décrit les géodésiques (ou plutôt les droites tangentes aux géodésiques) de la quadrique Q_z .

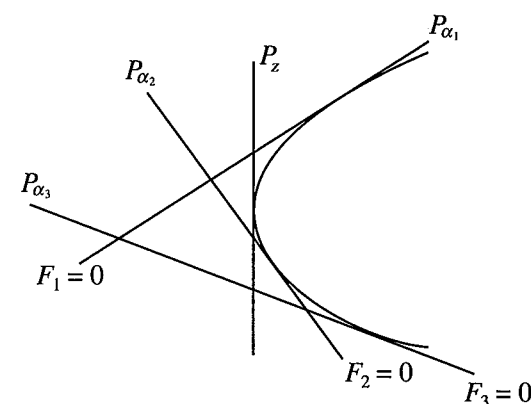


Figure 2: le cas $n = 2$

Je considérerai l'intersection de toute la situation avec l'hyperplan E d'équation $\sum F_i = 1$, en particulier, je noterai P_z l'intersection de E avec $\tilde{P}_z$, comme sur la figure 2.

Redéveloppons maintenant

$$\Psi_z(p, u) = \sum \frac{F_i}{\alpha_i - z} = \frac{\mathcal{P}(z)}{\prod (\alpha_i - z)}$$

de sorte que $\mathcal{P}$ est un polynôme de degré n . Tout point $(F_1, \dots, F_{n+1})$ de E détermine ainsi n valeurs de z (au moins sur $\mathbf{C}$), les n racines du polynôme $\mathcal{P}$ correspondant, et aussi les n hyperplans $P_{z_1}, \dots, P_{z_n}$ qui le contiennent, de même que les n quadriques $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$ auxquelles les droites donnant cette valeur de F sont tangentes.

Remarque. – Ainsi la donnée de $(z) = (z_1, \dots, z_n)$ est elle équivalente à celle de $F = (F_1, \dots, F_{n+1})$, c'est pourquoi les objets indexés par (z) dans le § 1.1 seront indexés par F dans le reste de ce texte.

2.4. Forme de Lax

Ecrivons maintenant le système hamiltonien associé à Ψ_z . Je vais faire comme si $z = 0$, je remplacerai à la fin $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ par $(\alpha_1 - z, \dots, \alpha_{n+1} - z)$.

Soient α la matrice diagonale des α_i , $\beta = \alpha^{-1}$ celle des $1/\alpha_i$ et Γ la matrice antisymétrique des

$$\Gamma_{i,j} = \frac{p_i u_j - p_j u_i}{\alpha_i \alpha_j}$$

On considère, en utilisant la métrique euclidienne, $x \otimes y$ comme un endomorphisme de $\mathbf{R}^{n+1}$. Alors, tous calculs faits, le système hamiltonien dans $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$ est

$$\begin{cases} \dot{p} = \Gamma p \\ \dot{u} = \Gamma u - \beta p \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \overbrace{p \otimes p} &= (\Gamma p) \otimes p + p \otimes (\Gamma p) \\ &= \Gamma(p \otimes p) + (p \otimes p)^t \Gamma \\ &= [\Gamma, p \otimes p] \end{aligned}$$

et, de même, que

$$\overbrace{p \otimes u - u \otimes p} = [\Gamma, p \otimes u - u \otimes p] + [\beta, p \otimes p]$$

d'où la forme de Lax

$$\overbrace{p \otimes p + h(p \otimes u - u \otimes p) - h^2 \alpha} = [\Gamma + h\beta, p \otimes p + h(p \otimes u - u \otimes p) - h^2 \alpha]$$

pour le hamiltonien Ψ_0 , et la même en remplaçant α par $\alpha - z$ pour Ψ_z .

Remarque. – Cette forme de Lax correspond à un hamiltonien de la forme $H = f(A_h h^{-k}) h^m$ étudiée par Adler et van Moerbeke [1], ici avec la fonction $f(x) = \log x$. On a bien

$$\begin{aligned} f'(A_h h^{-2}) h &= (-\alpha(1 - h^{-1}\beta(p \otimes u - u \otimes p) + o(h^{-1})))^{-1} h \\ &= -(1 - h^{-1}\beta(p \otimes u - u \otimes p) + o(h^{-1}))\beta h \\ &= -(\beta h + \beta(p \otimes u - u \otimes p)\beta) + o(1) \end{aligned}$$

et la partie polynôme en h de cette expression est – au signe près – $\Gamma + \beta h$.

2.5. La courbe spectrale

La courbe spectrale est donnée par le polynôme caractéristique de la matrice $A_h = p \otimes p + h(p \otimes u - u \otimes p) - h^2 \alpha$:

$$\det(A_h - \mu I) = \det(A_h + h^2 z I)$$

en posant $\mu = -h^2 z$. La matrice $A_h + h^2 z I$ est A_h où on a remplacé α par $\alpha - z$, notons la $A_{h,z}$.

L'application $p \otimes p$ est la projection orthogonale sur la droite engendrée par p , $p \otimes u - u \otimes p$ tue les vecteurs de l'orthogonal du sous-espace engendré par p et u et est une similitude dans ce sous-espace, en particulier, $p \otimes p + h(p \otimes u - u \otimes p)$ est de rang ≤ 2 . D'où les belles simplifications de calcul dues à Moser menant à:

$$\det A_h = h^{2n}(h^2 - \Psi_0(p, u)) \det \alpha$$

et donc

$$\det A_{h,z} = h^{2n}(h^2 - \Psi_z(p, u)) \prod_{i=1}^{n+1} (\alpha_i - z).$$

Il sera agréable de prendre pour courbe spectrale la courbe hyperelliptique $C = C_{(z)}$ ou C_F :

$$h^2 = \Psi_z(p, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{F_i(p, u)}{\alpha_i - z} = \frac{\mathcal{P}(z)}{\prod(\alpha_i - z)}.$$

C'est un revêtement double de $\mathbf{P}^1$ par z , ramifié au dessus des n racines de $\mathcal{P}$ et de $\infty, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, donc de genre n . Elle est lisse quand les racines de $\mathcal{P}$ sont distinctes et distinctes des α_i .

2.5.1. Remarque. – La courbe ne dépend que de A_h , pas du second membre de l'équation de Lax. Les considérations qui suivent s'appliquent à tout système intégrable de la forme $\dot{A}_h = [A_h, B_h]$ (avec la même matrice A_h et donc les mêmes intégrales premières): toutes les équations différentielles ont leurs solutions sur les mêmes tores de Liouville. C'est par exemple le cas du système de Neumann.

2.6. La courbe réelle

Au lieu de considérer $\Psi_z(p, u)$ sous la forme $\mathcal{P}(z)/\prod(\alpha_i - z)$, on peut se souvenir de la définition de Ψ_z : $\Psi_z(p, u) = \varphi_z(p, u)^2 - f_z(p)[f_z(u) - 1]$. On voit immédiatement que l'équation de C est satisfaite, par exemple pour $h = \pm \varphi_z(p, u)$ avec $f_z(p) = 0$ ou avec $f_z(u) = 1$. Si $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ sont les n solutions de $f_z(p) = 0$, appelons R_i le point de C de coordonnées $(h, z) = (\varphi_{\zeta_i}(p, u), \zeta_i)$. Ecrivons

$$\sum \frac{p_i^2}{\alpha_i - z} = \frac{\mathcal{R}(z)}{\prod(\alpha_i - z)}$$

et remarquons:

Lemme 2.6.1. – Les n racines $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ du polynôme $\mathcal{R}$ sont réelles. De plus on peut les indexer de façon que

$$\alpha_1 \leq \zeta_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq \zeta_n < \alpha_{n+1}.$$

En effet, $\mathcal{R}(z) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 \prod_{j \neq i} (\alpha_j - z)$ de sorte que $\mathcal{R}(\alpha_i) = p_i^2 \prod_{j \neq i} (\alpha_j - \alpha_i)$. Ainsi $\mathcal{R}(\alpha_1) > 0$, les signes des $\mathcal{R}(\alpha_i)$ alternent et $\mathcal{R}$ a une racine réelle dans chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ (on n'a $\zeta_i = \alpha_i$ que si $p_i = 0$). Comme son degré est n , c'est bien suffisant. $\square$

Remarque. – Les points $R_1, \dots, R_n$ sont donc réels.

Proposition 2.6.2. – Le polynôme $\mathcal{P}$ a une racine réelle dans chaque intervalle $]-\infty, \zeta_1]$, $[\zeta_1, \zeta_2]$, $\dots$, $[\zeta_{n-1}, \zeta_n]$. En particulier, toutes ses racines sont réelles.

Démonstration. – On étudie simplement le signe de $\Psi_z = \mathcal{P}(z) / \prod (\alpha_i - z)$:

1. $\Psi_{-\infty} > 0$, $\Psi_{+\infty} < 0$,
2. le signe change en les α_i et en les (éventuelles) racines réelles de $\mathcal{P}$ et c'est tout,
3. on sait que $R_i \in C(\mathbf{R})$ et, par définition, que $\Psi_{\zeta_i}(p, u) = \varphi_{\zeta_i}(p, u)^2 \geq 0$.

Grâce au Lemme 2.6.1, on constate donc que le signe de Ψ_z change au moins deux fois dans chaque intervalle $]-\infty, \zeta_1]$, $[\zeta_1, \zeta_2]$, $\dots$, $[\zeta_{n-1}, \zeta_n]$, donc que $\mathcal{P}$ a au moins une racine dans chacun de ces intervalles. Comme son degré est n , ça suffit. $\square$

Remarque. – Le fait que les z_j soient réelles est bien classique. Il y a une démonstration, implicite dans [16], basée sur la dualité projective, que m'a signalée H. Knörrer.

Corollaire 2.6.3. – La partie réelle $C(\mathbf{R})$ de la courbe C a $n+1$ composantes connexes. Pour tout i entre 0 et n , il y a exactement une composante, notée C_i , dont la projection sur l'axe des z est contenue dans $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ (en convenant que $\alpha_0 = -\infty$). $\square$

Remarque. – Une autre façon (équivalente!) de décrire la position des racines z_i de $\mathcal{P}$ par rapport aux α_j est celle de Knörrer [16]: il range

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, -\infty, z_1, \dots, z_n\} = \{b_0, \dots, b_{2n+1}\}$$

par ordre croissant $b_0 < \dots < b_{2n+1}$. Alors $z_i = b_{2i-1}$ ou b_{2i} . C'est la façon la plus rapide de voir qu'il y a 2^n configurations possibles. La composante C_i est aussi celle qui se projette sur $[b_{2i}, b_{2i+1}]$.

A titre d'exemple, la figure 3 montre les formes possibles de la partie réelle de C pour $n = 2$

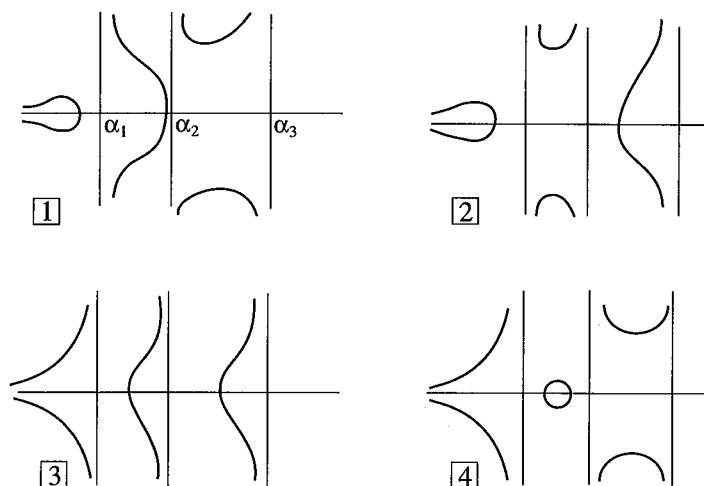


Figure 3: la partie réelle de C pour $n = 2$

Une autre application immédiate et un peu inattendue est:

Corollaire 2.6.4. – Quand p et u sont réels, le polynôme $\mathcal{P}$ n'a jamais de racine d'ordre ≥ 3 . Chacune de ses éventuelles racines doubles est une des racines de $\mathcal{R}$. $\square$

3. Application de vecteurs propres et image de l'application moment

La considération des vecteurs propres de A_h donne une application

$$\varphi_F : \mathcal{T}_F \longrightarrow \text{Pic}^{2n} C$$

qui part du niveau $\mathcal{T}_F$ de $F = (F_1, \dots, F_{n+1})$ considéré dans $\mathcal{D}_n$ et arrive dans la variété de Picard des fibrés sur la courbe C correspondant à cette valeur de F . Il est classique que cette application linéarise le flot – en fait les flots, grâce à la remarque 2.5.1. De sa détermination explicite, on essaie ici de déduire des informations sur la topologie du système.

Pour tout $(p, u) \in \mathcal{T}_F$, on considère les vecteurs propres de A_h pour la valeur propre $\mu = -h^2 z$, c'est à dire le noyau de $A_{h,z}$. Ceci définit un fibré en droites sur C (au moins quand celle-ci est lisse). C'est son dual L que φ_F associe à (p, u) . Il est très facile de calculer le degré: par $z : C \rightarrow \mathbf{P}^1$, $z_* L$ est la somme de tous les sous-espaces

propres de A_h , soit C^{n+1} , le fibré trivial, et la version relative (ou Grothendieck) de Riemann-Roch donne le résultat:

$$ch(z_*L)td(\mathbf{P}^1) = z_*(ch(L)td(C))$$

soit

$$(n+1)(1+t) = z_*((1+du)(1+(1-n)u))$$

où $t \in H^2(\mathbf{P}^1)$, $u \in H^2(C)$ sont les générateurs canoniques et d est le degré cherché. Bien sûr $z_*u = t$ et $z_*1 = 2$ puisque z est de degré 2. D'où $n+1 = d+1-n$ et $d = 2n$.

3.1. Application tangente à φ_F

Dans cette partie, je vais étudier l'application tangente à φ_F et montrer:

Proposition 3.1.1. – *Le niveau réel F est régulier si et seulement si la courbe C correspondante est lisse.*

Ce résultat est une reformulation du Théorème 1.2.1. La démonstration est fondée sur une méthode à la Reiman [19] qui donne

Lemme 3.1.2. – *Les images par l'application tangente à φ_F des champs hamiltoniens associés aux fonctions $F_1, \dots, F_n$ sont des vecteurs indépendants dans l'espace tangent $H^1(C; \mathcal{O}_C)$ à $\text{Pic}^{2n} C$.*

On en déduit l'une des implications de la Proposition 3.1.1. L'autre se vérifie par inspection directe du discriminant de C .

Démonstration. – Je vais plutôt montrer que les champs hamiltoniens des fonctions $\Psi_{z_1}, \dots, \Psi_{z_n}$ ont des images indépendantes. Chaque Ψ_{z_i} étant par définition une combinaison linéaire de $F_1, \dots, F_n$ (remplacer F_{n+1} par $1 - \sum F_i$), les images des champs hamiltoniens de $F_1, \dots, F_n$ engendreront aussi un sous-espace de dimension n . Je traite le cas de Ψ_0, Ψ_z s'en déduit en remplaçant partout α_i par $\alpha_i - z$. Le flot de Ψ_0 est décrit par la paire de Lax de 2.4:

$$\dot{A}_h = [A_h, B_h]$$

où $A_h = p \otimes p + h(p \otimes u - u \otimes p) - h^2 \alpha$ et où B_h est la partie polynôme en h dans $f'(A_h h^{-2})h$ pour $f'(x) = x^{-1}$ (voir la remarque dans 2.4).

On choisit un vecteur propre v de A_h pour la valeur propre $\mu = -h^2 z$ et on calcule

$$\begin{aligned} [f'(A_h h^{-2})h] \cdot v &= (A_h h^{-2})^{-1} h \cdot v \\ &= h^3 A_h^{-1} \cdot v \\ &= h^3 \mu^{-1} v \\ &= -h z^{-1} v. \end{aligned}$$

Et $-h z^{-1}$ représente un 1-cocycle du recouvrement de C par les deux ouverts $\mathcal{U}_+$ (où $h \neq \infty$) et $\mathcal{U}_-$ (où $h \neq 0$), et sa classe un élément de $H^1(C; \mathcal{O}_C)$ qui est l'image du champ hamiltonien de Ψ_0 par l'application tangente à φ_F .

En remplaçant partout α_i par $\alpha_i - z_j$, on trouve que les images des champs hamiltoniens associés à $\Psi_{z_1}, \dots, \Psi_{z_n}$ sont les classes des cocycles

$$-h(z - z_1)^{-1}, \dots, -h(z - z_n)^{-1}$$

dans $H^1(C; \mathcal{O}_C)$. La seule chose à faire pour montrer le Lemme 3.1.2 est de vérifier qu'ils sont indépendants. C'est un calcul de résidu: on choisit une base $\omega_1, \dots, \omega_n$ de $H^1(C; \Omega_C^1)$ et on vérifie que la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^{n+1} \text{Rés}_{S_k} \frac{h \omega_i}{z - z_j}$$

est inversible. En effet, l'appariement

$$\begin{array}{ccc} H^1(C; \mathcal{O}_C) & \otimes & H^0(C; \Omega_C^1) & \rightarrow & C \\ f & \otimes & \omega & \mapsto & \text{Rés}_{h=0}(f\omega) \end{array}$$

induit un isomorphisme $H^1(C; \mathcal{O}_C) \rightarrow H^0(C; \Omega_C^1)^*$.

En écrivant l'équation de C sous la forme

$$\left[h \prod (\alpha_s - z) \right]^2 = \mathcal{P}(z) \prod (\alpha_s - z)$$

on se convainc sans mal que

$$\omega_i = \frac{z^{i-1} dz}{h \prod_s (\alpha_s - z)} \quad 1 \leq i \leq n$$

est une base de $H^0(C; \Omega_C^1)$. On considère alors la forme méromorphe

$$\frac{h \omega_i}{z - z_j} = \frac{z^{i-1} dz}{(z - z_j) \prod_s (\alpha_s - z)}.$$

Elle n'a de pôle en S_k que si $j = k$ (en particulier, elle n'a pas de pôle en S_0). Près de S_j ($j \geq 1$), h peut servir de coordonnée locale, et $z = z_j + A_j h^2 + o(h^2)$ donne

$$\text{Rés}_{S_j} \frac{h\omega_i}{z - z_j} = \frac{2z_j^{i-1}}{\prod_{s=1}^{n+1} (\alpha_s - z_i)}$$

et

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^n \text{Rés}_{S_k} \frac{h\omega_i}{z - z_j} = \frac{2z_j^{i-1}}{\prod_{s=1}^{n+1} (\alpha_s - z_i)}$$

Le rang de cette matrice est celui de $(a'_{i,j})$ avec

$$a'_{ij} = (z_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$$

soit n puisque les z_j sont distincts. $\square$

Démontrons maintenant la Proposition 3.1.1. L'application $\varphi_F : \mathcal{T}_F \rightarrow \text{Pic}^{2n} C$ est bien définie dès que C est lisse. Si les n vecteurs ont des images indépendantes alors ils étaient indépendants et F est une valeur régulière.

On regarde maintenant chaque composante du discriminant, pour établir la réciproque

Proposition. 3.1.3. – *Le discriminant de C est formé*

- *du discriminant du polynôme $\mathcal{P}$, enveloppe des P_z*
- *des $n+1$ hyperplans $F_i = 0$ qui lui sont tangents.* $\square$

3.1.4. – Les hyperplans $z = \alpha_i$ ou $F_i = 0$ sont critiques puisqu'images des (p, u) avec $p_i = 0$ et $u_i = 0$ qui annulent dF_i .

3.1.5. – Considérons maintenant les points du discriminant de $\mathcal{P}$, c'est à dire les niveaux $F_1, \dots, F_n$ tels que $\mathcal{P}$ ait une racine double z . Ce niveau contient alors des tangentes communes à deux quadriques... confondues. Pour des raisons de degré, il s'agit de droites contenues dans Q_z . Une telle droite est bien sûr un point fixe du flot de Ψ_z et ainsi le niveau est critique. $\square$

3.1.6. – Restreignons-nous maintenant au cas réel. Soit F un point du discriminant de $\mathcal{P}$ qui est dans l'image de F , correspondant à une racine double z de $\mathcal{P}$. En utilisant le Corollaire 2.6.4, on voit que si $(p, u) \in \mathcal{T}_F$, alors $f_z(p) = 0$. On en déduit que $f_z(u+tp)$ ne dépend pas de t et que la droite des $u+tp$ est entièrement contenue dans Q_z : le

niveau critique réel ne contient que des droites de Q_z – et en particulier tous ses points sont critiques, alors que ce même niveau, complexifié, contient des points complexes réguliers.

3.2. Image de l'application moment

Le lieu critique de F est maintenant le discriminant de la famille des courbes C , décrit ci-dessus:

Proposition. 3.2.1. – *Un point $(F_1, \dots, F_{n+1})$ de E est dans l'image de F si et seulement si les n racines $(z_1, \dots, z_n)$ de*

$$\mathcal{P}(z) = \sum_{i=1}^{n+1} F_i \prod_{j \neq i} (\alpha_j - z)$$

sont réelles et telles que si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, -\infty, z_1, \dots, z_n\}$ est ordonné en $b_0 < \dots < b_{2n+1}$, alors $z_i = b_{2i-1}$, ou b_{2i} .

On a vu que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de vérifier que chacune des régions effectivement atteinte, ce qui n'est pas très difficile et que je laisse au lecteur. $\square$

En particulier, les composantes du complémentaire du discriminant de la famille des courbes C qui sont dans l'image sont au nombre de 2^n .

Géométriquement, la condition de réalité des n racines $(z_1, \dots, z_n)$ dit que si le point de l'espace vectoriel H de dimension n est dans l'image, il se trouve à l'intersection de n hyperplans $P_{z_1}, \dots, P_{z_n}$ (voir la figure 4 dans le cas $n = 2$).

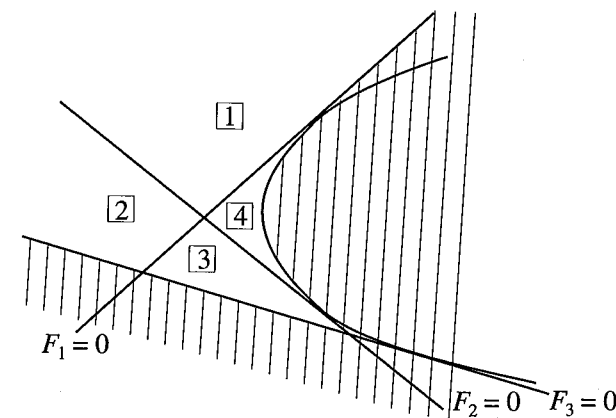


Figure 4

Remarquons qu'aucun point du discriminant de $\mathcal{P}$ n'est intérieur à l'image de F et que les singularités du lieu critique sont assez spéciales (voir 5.1.2).

3.3. Remarques sur l'application de vecteurs propres

Il est assez facile de déterminer un diviseur effectif de degré $2n$ dont la classe dans $\text{Pic}^{2n} C$ est bien $\varphi_F(p, u)$.

On fixe donc $(p, u) \in \mathcal{D}_n$. Tout vecteur de $\mathbf{R}^{n+1}$ se décompose uniquement sous la forme $\lambda p + \mu u + v$, où v est orthogonal au sous-espace $\langle p, u \rangle$ engendré par p et u . Les vecteurs propres devant être non nuls, on peut normaliser par $\lambda = 1$. On va donc chercher un vecteur

$$w = p + \mu(h, z)u + v(h, z) \in \text{Ker } A_{h,z}$$

où μ et v seront des fonctions méromorphes sur C . Plus précisément, on va chercher le diviseur des pôles d'une telle section de L .

Comme $\|p\| = 1$, $p + \mu u + v$ ne peut être infini que si $\mu u + v$ l'est. Cherchons donc, pour (p, u) donné, les valeurs de (h, z) telles que $\text{Ker } A_{h,z}$ contienne un vecteur orthogonal à p .

Rappelons que $A_{h,z} = p \otimes p + hM_{h,z}$ et que $p \otimes p$ annule les vecteurs orthogonaux à p . On cherche donc les (h, z) de C tels que

$$\text{Ker } hM_{h,z} \cap p^\perp \neq 0$$

avec $M_{h,z} = p \otimes u - u \otimes p - h(\alpha - z)$.

3.3.1. – Commençons par le cas où $h = 0$. Alors $z = \infty$ ou $\mathcal{P}(z) = 0$ et $A_{h,z} = p \otimes p$ a pour vecteurs propres

- p pour la valeur propre 1
- tous les vecteurs de $p^\perp$ pour la valeur propre 0

La valeur propre est

$$\mu = -h^2 z = -\frac{\mathcal{P}(z)}{\prod(\alpha_i - z)} = \begin{cases} 1 & \text{si } z = \infty \\ 0 & \text{si } \mathcal{P}(z) = 0 \end{cases}$$

mais dans le premier cas, le vecteur propre, avec notre normalisation est p et donc est borné. Au contraire pour notre $(h, z) = (0, z_i) = S_i$, où z_i désigne une racine de $\mathcal{P}$, notre vecteur propre tend bien vers l'infini, étant, comme il se doit, orthogonal à p et normalisé en $p + \mu u + v$ – les limites des directions propres sont les n normales des n

quadriques définies par $z_1, \dots, z_n$, ce qu'il est convenu d'appeler le repère de Chasles: un théorème de Chasles affirme que ces n normales sont orthogonales deux à deux.

3.3.2. – Supposons $h \neq 0$, nous cherchons donc le noyau de $M_{h,z} | p^\perp$. Explicitement,

$$M_{h,z}(\mu u + v) = \mu \|u\|^2 p - h(\alpha - z)(\mu u + v).$$

Si $\mu = 0$ ou $u = 0$, $M_{h,z}(v) = -h(\alpha - z)v$ ne s'annule que si $v = 0$. On peut donc supposer que $\mu = 1$ et $u \neq 0$. Notre équation est devenue

$$\|u\|^2 p - h(\alpha - z)(u + v) = 0$$

ou

$$v = \frac{\|u\|^2}{h}(\alpha - z)^{-1}p - u$$

avec $v \cdot p = 0$, soit $[(\alpha - z)^{-1}p] \cdot p = 0$, ou encore $f_z(p) = 0$, et avec $v \cdot u = 0$, soit $h = \varphi_z(p, u)$.

Proposition. 3.3.3. – L'image $\varphi_F(p, u)$ est la classe du diviseur

$$R_1 + \dots + R_n + S_1 + \dots + S_n$$

dans $\text{Pic}^{2n} C$. $\square$

Malheureusement, il est assez difficile, contrairement à ce qui se passe, par exemple dans le cas de Kowalevski [4], d'utiliser φ_F pour décrire la topologie des niveaux. En fait, la situation est aussi mauvaise que possible puisqu'on a

Proposition. 3.3.4. – Si F est une valeur régulière, φ_F est un revêtement d'ordre 2^{n+1} de son image. L'image de la partie réelle est une composante connexe de $\text{Pic}^{2n} C(\mathbf{R})$.

Pour démontrer cette proposition, je vais maintenant montrer que si F est une valeur régulière, le niveau réel $\mathcal{T}_F$ est compact, et aussi que tout point de l'image de φ_F est l'image d'exactement 2^{n+1} points de $\mathcal{T}_F$.

Commençons par la compacité. Le niveau $\mathcal{T}_F$ représente l'ensemble des tangentes communes aux quadriques $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$. Supposons le régulier. Alors, il ne contient aucune droite d'aucune quadrique Q_{z_i} (on a déjà remarqué qu'une telle droite serait un point fixe du flot de Ψ_{z_i} et que le niveau ne serait pas régulier).

Maintenant, l'équation $f_z(u + tp) = 1$ est du second degré en t , la droite $u + tp$ ne peut donc être tangente à Q_z qu'en un point, sinon elle serait contenue dans Q_z . A

toute droite $u + tp$ de $\mathcal{T}_F$, on peut associer son point de contact $\hat{u}$ (éventuellement obtenu par $t = \infty$) avec la quadrique Q_z . Ainsi, on peut considérer $\mathcal{T}_F$ comme une partie (fermée) du compact $\hat{Q}_z \times S^2 \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \times S^2$, où z est l'un des z_i et $\hat{Q}$ est la complétion naturelle de la quadrique Q .

Remarque. – Dans le cas classique où l'on force un des Q_z à être un ellipsoïde, il n'y a aucune précaution d'aucune sorte à prendre: il n'y a ni droite, ni même de point à l'infini et tous les niveaux sont évidemment compacts.

Pour déterminer l'ordre du revêtement et suivant les préceptes usuels de la méthode algèbro-géométrique (voir [19] par exemple), on cherche les matrices A'_h de la forme

$$p' \otimes p' + h(p' \otimes u' - u' \otimes p') - h^2 \alpha$$

qui sont conjuguées à $A_h : gA_h = A'_h g$. En considérant les termes en h^2 , il est clair que g doit être diagonale. Avec les autres termes on voit que

$$g = \lambda \operatorname{diag}(\eta_1, \dots, \eta_{n+1})$$

avec $\eta_i^2 = 1$ et donc que $p' = gp$ et $u' = gu$ où g est dans le groupe G engendré par les symétries autour des hyperplans de coordonnées.

Considérons l'opération de ce groupe G sur $\mathcal{T}_F$. Si F est une valeur régulière (il suffit en fait que tous les F_i soient non nuls) alors cette opération est libre:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 p_1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1} p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \eta_1 u_1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1} u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

impliquent

$$(\eta_i - 1)p_i = (\eta_i - 1)u_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Si $g \neq 1$, il y a un i pour lequel $\eta_i \neq 1$, mais alors, $p_i = u_i = 0$ et $F_i(p, u) = 0$ ce qui est absurde puisque F est une valeur régulière. Pour finir de montrer 3.3.4, il faut encore montrer qu'une seule des composantes de la partie réelle de $\operatorname{Pic}^{2n} C$ est atteinte. Je le ferai au § 4.4.

4. Intersection de deux quadriques et tores de Liouville

L'application de vecteurs propres φ_F , si elle linéarise le flot décrit par l'équation de Lax, est donc ici assez inutilisable pour la topologie. Ceci semble d'ailleurs être la règle. Une autre approche vers l'identification de $\mathcal{T}_F$ à une partie d'une variété abélienne pourrait être par l'analyse Painlevé, comme dans [2], mais ceci requiert

une grande agilité dans les calculs. Ici, il existe un assez beau subterfuge permettant d'éviter ça. La géométrie algébrique de style classique fournit, sans forme de Lax ni équation différentielle visible, une application de la jacobienne de C dans un quotient de $\mathcal{T}_F$. Cette construction est due à Knörrer, je vais piller son article pour en rappeler l'essentiel. En affinant un tout petit peu, j'en déduirai les résultats annoncés (le Théorème 1.2.2 et le décompte des tores de Liouville). Pour les détails de démonstration manquants, je renvoie à l'article de Knörrer [16].

4.1. Sous-espaces dans l'intersection de deux quadriques

A partir de maintenant, tout est projectif, ainsi

$$Q_z : \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{\alpha_i - z} = x_0^2$$

et complexe. On considère, dans $\mathbf{P}^{2n+1}$, les deux quadriques

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n z_i y_i^2 - x_0^2 = 0$$

$$q'(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$$

et leur intersection V . Les coefficients α_i sont ceux qui interviennent dans l'équation de Q_z , les y_i sont des variables auxiliaires et les z_i ont la même signification qu'avant. Il est temps de remarquer que la quadrique duale à Q_z dans $\mathbf{P}^{n+1}$ a pour équation

$$Q_z^* : \sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i - z) x_i^2 = x_0^2,$$

les Q_z formant ainsi un pinceau – on peut prendre cette propriété comme définition de “homofocal”.

On identifie $\mathbf{P}^{n+1}$, l'espace des x , au sous-espace H où $y = 0$ et $H^\perp$ à $x = 0$, de sorte qu'on a une projection (linéaire)

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{P}^{2n+1} - H^\perp &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

L'objet principal de cette étude est l'espace $F(V)$ des sous-espaces (linéaires) de dimension $n - 1$ (c'est le maximum) dans V .

Il est remarquable que $F(V)$ soit une variété abélienne et plus précisément soit isomorphe à la jacobienne d'une courbe hyperelliptique. Cette courbe apparaît (de beaucoup de façons) comme une partie de $F(V)$: on fixe un $\ell \in F(V)$ et on considère $F_\ell(V)$, l'adhérence de $\{\ell' \in F(V) \mid \dim(\ell \cap \ell') = n-2\}$ (en général, deux sous-espaces de dimension $n-1$ ne se rencontrent pas – penser aux droites d'un hyperboloïde). Si $\ell' \in F_\ell(V)$, alors ℓ et ℓ' engendrent un sous-espace de dimension n . Dans le pinceau $\mathcal{L}$ des quadriques de $\mathbf{P}^{2n+1}$ qui contiennent V , il y en a une et une seule qui contient ce sous-espace de dimension n . Cette construction permet effectivement de définir une application holomorphe $F_\ell(V) \rightarrow \mathcal{L}$ qui est un revêtement double (chacune des quadriques lisses contient deux tels sous-espaces – ℓ est fixé), ramifié en les $2n+2$ quadriques singulières de $\mathcal{L}$, ici q' , les $q - z_j q'$ et les $q - \alpha_i q'$, correspondant aux points $\infty, z_1, \dots, z_n, a_1, \dots, a_{n+1}$. Autrement dit, $F_\ell(V)$ est isomorphe à notre courbe C !

Ayant identifié C en termes de V , il nous reste à trouver $\mathcal{T}_F$ dans ce paysage. On considère

$$F'(V) = \{\ell \in F(V) \mid \ell \cap H^\perp = \emptyset\}$$

de sorte que la projection π définit une application de $F'(V)$ dans les sous-espaces de dimension $n-1$ dans $\mathbf{P}^{n+1}$. La remarque fondamentale est que

Proposition. 4.1.1. – $\ell \in F'(V) \Leftrightarrow \pi(\ell)$ est tangent à $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$. $\square$

Appelons T cet espace de tangentes communes. En gros, $F(V)$ est la jacobienne de C et on a une application de $F(V)$ vers l'ensemble T des tangentes communes à $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$.

4.2. Relation avec les niveaux $\mathcal{T}_F$

En plus, Knörrer a étudié les fibres de π et montré qu'elles ont 2^n éléments, plus précisément que le groupe engendré par les symétries autour des hyperplans $y_j = 0$ opère transitivement sur les fibres génériques, d'où un isomorphisme d'un ouvert de $F'(V)/G$ sur son image (voir les détails dans la démonstration ci-dessous). Cette situation semble assez idéale pour l'étude de la topologie des niveaux. Il y a quand même un petit problème: la question des géodésiques nous amène aux droites réelles orientées. C'est d'ailleurs ce problème-là que j'ai décrit comme un système intégrable à la Arnold-Liouville. Il est bien clair que les constructions de Knörrer fonctionnent aussi bien sur $\mathbf{R}$ que sur $\mathbf{C}$. Par contre, l'oubli d'orientation est une opération plus

violente: l'objet $\mathcal{T}_F$ qui nous intéresse est la variété algébrique réelle d'équations

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = 1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} p_i u_i = 0 \\ F_i(p, u) = F_i \quad 1 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

dont la complexifiée $\mathcal{T}_F^{\mathbf{C}}$ est décrite par les mêmes équations. Ce sont bien $\mathcal{T}_F$ et $\mathcal{T}_F^{\mathbf{C}}$ que nous avons précédemment comparées à la jacobienne de C .

Bien sûr, $\mathcal{T}_F^{\mathbf{C}}$ est un revêtement double d'un ouvert de $\mathcal{T}^{\mathbf{C}}$: parmi les droites projectives complexes, celles

- qui ne sont pas dans l'hyperplan à l'infini – droites affines
- dont la direction n'est pas isotrope: elles ont deux vecteurs directeurs tels que $\sum p_i^2 = 1$
- qui contiennent un point u avec $\sum p_i u_i = 0$

On est alors dans la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}_F^{\mathbf{C}} & & F'(V)_0 & \subset & F'(V) & \subset & F(V) \\ \downarrow 2 & & \downarrow G & & \downarrow & & \\ T_{00}^{\mathbf{C}} & \subset & T_0^{\mathbf{C}} & \subset & T^{\mathbf{C}} & & \end{array}$$

Soit H le sous-groupe d'indice 2 de G engendré par les produits de deux symétries par rapport aux hyperplans $y_j = 0$.

Proposition 4.2.1. – Il existe une application réelle $f : \mathcal{T}_F^{\mathbf{C}} \rightarrow F'(V)/H$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}_F^{\mathbf{C}} & \xrightarrow{f} & F'(V)_0/H & \subset & F'(V)/H \\ \downarrow & & \downarrow |G/H| & & \downarrow \\ T_{00}^{\mathbf{C}} & \subset & T_0^{\mathbf{C}} & \subset & T^{\mathbf{C}} \end{array}$$

Démonstration. – Je reprends avec un peu de soin la démonstration de Knörrer pour les fibres de π . Il faut d'abord que j'explique qui sont les ouverts considérés:

$$F'(V)_0 = \{\ell \in F'(V) \mid \ell \cap V \text{ est lisse}\}$$

c'est là que G opère librement, T_0 est le quotient.

Soit ℓ un $(n-1)$ -plan de $\mathbf{P}^{n+1}$, tangent à $Q_{z_1}^*, \dots, Q_{z_n}^*$, et soit L le n -plan vectoriel de $\mathbf{C}^{n+2}$ correspondant. Rappelons que $\mathbf{P}^{n+1}$ est considéré comme le sous-espace $y=0$ de $\mathbf{P}^{2n+1}$.

On a alors des coordonnées $v_1, \dots, v_n$ sur L telles que

$$\begin{cases} q|_L &= z_1 v_1^2 + \dots + z_n v_n^2 \\ q'_L &= v_1^2 + \dots + v_n^2 \end{cases}$$

(c'est la diagonalisation simultanée de $q|_L$ et q'_L , sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'hypothèse fait qu'elles sont non dégénérées et le fait que ℓ soit tangent aux Q_i^* dit exactement quelles sont les valeurs propres).

Maintenant on cherche les sous-espaces de $\mathbf{P}^{2n+1}$ qui sont dans $F(V)$ et qui se projettent sur ℓ , c'est à dire les sous-espaces linéaires de dimension $n-1$ dans $V \cap (\mathcal{H}^\perp, \ell)$. Cette intersection de quadriques est décrite par les équations

$$\begin{cases} z_1 v_1^2 + \dots + z_n v_n^2 - z_1 y_1^2 - \dots - z_n y_n^2 &= 0 \\ v_1^2 + \dots + v_n^2 - y_1^2 - \dots - y_n^2 &= 0 \end{cases}$$

de sorte que les 2^n sous-espaces $(v_i = \pm y_i)_{1 \leq i \leq n}$ conviennent. On vérifie par récurrence sur n qu'il n'y en a pas d'autre.

On a ainsi montré que $F'(V)_0 \rightarrow T_0^C$ n'est autre que le quotient par le groupe G . Regardons maintenant ce qui se passe si ℓ est dual à une droite d sur laquelle on a pu choisir un p et un u comme ci-dessus: le plan vectoriel D correspondant a une base orthonormée

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sum u_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \right)$$

(pour la forme $\mathbf{C}$ -bilinéaire complexifiée du produit scalaire). On peut considérer L comme l'orthogonal de D pour cette forme bilinéaire. A cause de l'hypothèse de non isotropie sur D , L et D sont supplémentaires. Le choix d'une classe de bases pour D fournit ainsi le choix d'une classe de bases sur L : ce sont les bases orthonormées $f_1, \dots, f_n$ telles que $\det(\mathcal{B}, f_1, \dots, f_n) = 1$ par rapport à la base canonique de $\mathbf{C}^{n+2}$. On peut maintenant imposer que la base $(f_1, \dots, f_n)$ qui fournit les coordonnées $v_1, \dots, v_n$ utilisées soit dans cette classe.

Les coordonnées $y_1, \dots, y_n$, elles, sont fixées – indépendamment de d ou ℓ , ce qui fait que je peux définir l'application f cherchée par:

$f(p, u)$ est la classe modulo H du sous-espace d'équations $(y_1 = v_1, \dots, y_n = v_n)$.
□

Remarquons quand même que les côtés les plus pénibles de cette discussion disparaissent dans le cas réel, puisqu'on a:

Proposition. 4.2.2. – *La partie réelle de $T \subset F(V)$ est contenue dans l'ouvert $F'(V)_{00} \subset F'(V)_0 \subset F'(V) \subset F(V)$.*

Démonstration. – Le cas $F'(V)_{00}$ sera automatique; pour les autres inclusions il faut vérifier que

- ℓ réel $\Rightarrow \ell \cap \mathcal{H}^\perp = \emptyset$
- ℓ réel $\Rightarrow \ell \cap V$ est lisse.

La première assertion est claire: $V \cap \mathcal{H}^\perp$ n'a aucun point réel et $\ell \subset V$. Pour la deuxième, on se rappelle que la droite duale à ℓ est tangente à $Q_{z_1}, \dots, Q_{z_n}$ et à aucune autre quadrique Q_z . Grâce au théorème de Chasles (voir 3.3.1), on sait que les hyperplans tangents aux Q_z ; en leurs points de contact avec la tangente commune sont tous différents. Duale, les quadriques $\ell \cap Q_{z_i}^*$ sont n quadriques distinctes dans ℓ et ce sont les seules quadriques singulières de ℓ qui contiennent $\ell \cap V$. On en déduit aisément que $\ell \cap V$ est lisse. □

4.3. La variété abélienne A

Considérons maintenant la jacobienne de C et son avatar $F(V)$. Le groupe H est un $(\mathbf{Z}/2)^{n-1}$. Son opération sur $F(V)$ vient d'être définie d'une façon géométrique simple. Pour décrire comment il opère sur $\text{Jac}(C)$, il faut que je dise un peu plus précisément comment on identifie $F(V)$ et la jacobienne de C . Pour ça, j'ai besoin de deux points o et $\hat{o}$ de $F(V)$ avec $\dim o \cap \hat{o} = n-2$. L'un sert à définir $C = F_{\hat{o}}(V)$, l'autre est alors un point de C que j'utilise pour envoyer C dans sa jacobienne. Un bon choix possible a l'air d'être celui où $\hat{o}$ est l'image de o par la symétrie par rapport à l'hyperplan $x_0 = 0$, c'est celui-là que je vais utiliser.

On a alors un isomorphisme Φ_o de variétés abéliennes faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & F(V) \\ & \nearrow & \downarrow \Phi_o \\ F_{\hat{o}}(V) = C & \xrightarrow{j_o} & \text{Pic}^0(C) \\ a & \longmapsto & a - o \end{array}$$

et Knörrer montre en plus que la loi de groupe sur $F(V)$ est telle que la symétrie par rapport à l'hyperplan $(y_j = 0)$ opère par

$$\ell \mapsto \hat{o} + B(z_j) - \ell$$

où $B(z_j)$ est le point de Weierstrass de $F_{\hat{o}}(V)$ au-dessus de la quadrique $q - z_j q'$ de $\mathcal{L}$ (voir le § 4.1). Bien sûr, $\Phi_o(B(z_j)) = S_j - o$ de sorte que sur $\text{Pic}^0(C)$, l'opération est par

$$x \mapsto a_0 + S_j - x$$

avec $a_0 = \Phi_o(\hat{o})$. La composition de deux de ces symétries est la translation par un $S_i - S_j$.

Le groupe H est donc ici le sous-groupe de $\text{Pic}^0(C)$ engendré par les $S_i - S_j$ ($1 \leq i < j \leq n$).

Remarquons en particulier que ces opérations, bien définies sur la jacobienne, sont en fait définies sur $F(V)$ tout entier. Le gros groupe G a certes des points fixes, mais l'opération de H est libre. Le quotient $\text{Pic}^0(C)/H$ est une variété abélienne A , et nous avons démontré le Théorème 1.2.2, avec une petite précision réelle: le plongement de $\mathcal{T}_{(z)}^C$ comme un ouvert de A induit un difféomorphisme de $\mathcal{T}_{(z)}^{\mathbf{R}}$ sur la partie réelle de A .

Remarque. – La composition de l'application de vecteurs propres avec le quotient par H est un revêtement d'ordre $2^{n+1} \times 2^{n-1} = 2^{2n}$. On peut vérifier, en utilisant les isomorphismes entre $F(V)$ et la jacobienne de C comme dans [9] ou [17] que cette composition n'est autre... que la multiplication par 2 dans A , au sens où le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A \\ & & & & \downarrow \times 2 \\ \mathcal{T}_F & \xrightarrow{\varphi_F} & \text{Pic}^{2n}(C) \cong \text{Pic}^0(C) & \xrightarrow{/H} & \text{Pic}^0(C)/H = A \\ \text{commute.} & & & & \end{array}$$

4.4. La partie réelle de A et les tores de Liouville

Comme la partie réelle de C a $n+1$ composantes connexes, on sait d'après Comessatti (voir [8]) que la partie réelle de la jacobienne en a 2^n . Voici une façon de les indexer par les éléments de $(\mathbf{Z}/2)^n$. Appelons $e_1, \dots, e_n$ la base canonique.

Soit $\varphi : \text{Pic}^0 C(\mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{Z}/2)^n$ l'homomorphisme de groupes engendré par

$$Q - S_0 \mapsto e_i \quad \text{si } Q \in C_i$$

où S_0 est un point fixé dans C_0 (le meilleur choix possible est sans doute $(0, \infty)$, d'où la notation). Alors φ est surjective et sépare les composantes connexes de $\text{Pic}^0 C(\mathbf{R})$.

Remarque. – La "même" application détermine évidemment aussi les composantes de $\text{Pic}^k(C)(\mathbf{R})$ pour tout k . On en déduit aisément que l'application de vecteurs propres φ_F prend ses valeurs dans une seule des composantes de la partie réelle de la jacobienne (c'est à dire la fin de la démonstration de 3.3.4):

$$\varphi_F(p, u) = (S_1 + \dots + S_n) + (R_1 + \dots + R_n),$$

le point R_i est toujours sur la composante C_i et la composante sur laquelle se trouve chacun des S_j ne dépend que de la composante des valeurs régulières où se trouve notre F . $\square$

Pour déterminer le nombre de tores de Liouville, c'est à dire le nombre de composantes de la partie réelle de A , il suffit maintenant de déterminer comment H opère sur l'ensemble des composantes connexes de $\text{Jac}(C)(\mathbf{R})$. Grâce à ce qui précède, c'est très simple: il opère sur la jacobienne par les translations réelles $S_i - S_j$. Soit $\varphi(H)$ le sous-groupe de $(\mathbf{Z}/2)^n$ (ensemble des composantes) image de H . Les composantes de $A(\mathbf{R})$ sont en bijection avec $(\mathbf{Z}/2)^n / \varphi(H)$. Si le noyau de $\varphi|_H$ est d'ordre 2^k , il y en aura 2^{k+1} . Le noyau de $\varphi|_H$ est engendré par les $S_j - S_{j+1}$ tels que S_j et S_{j+1} soient sur la même composante de $C(\mathbf{R})$, c'est à dire que Q_{z_j} et $Q_{z_{j+1}}$ soient deux quadriques du même type réel.

Remarque. – Quand F varie, k peut prendre toutes les valeurs de 1 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Je ferai une description géométrique – ou géodésique – de ces tores de Liouville pour $n = 2$ au § 5.2.

5. Les quadriques de $\mathbf{R}^3$ et les surfaces abéliennes à polarisation (1, 2)

Dans le cas où $n = 2$, on est en présence d'un système complètement intégrable sur une variété symplectique de dimension 4, comme pour le flot géodésique de $\mathfrak{so}(4)$ et les différents cas intégrables de solides mobiles autour d'un point fixe, pour ne citer que les exemples les plus étudiés. Dans tous ces cas, et quelle que soit la manière de mener l'analyse algèbro-géométrique du problème, on arrive à identifier les niveaux complexes (resp. réels) à des ouverts (resp. aux parties réelles) de surfaces abéliennes qui ne sont pas des jacobienes de courbes de genre 2, n'étant pas principalement polarisées, mais des variétés de Prym de revêtements doubles $D \rightarrow E$ où D et E sont des courbes de genre 3 et 1 respectivement.

Pour $\mathfrak{so}(4)$, c'est expliqué par Haine [12] puis Barth dont l'article [6] est en même temps une bonne introduction à ces surfaces abéliennes. Pour Kowalevski, il y a différentes

approches, soit analyse Painlevé [2] soit vecteurs propres (ou “BA-fonctions”) [7] et [4]. Le cas des géodésiques des quadriques de $\mathbf{R}^3$ n’échappe pas à cette règle. Il a ceci de commun avec le cas de Kowalevski qu’il lui est classiquement associé une courbe de genre 2 (ici, notre C) sur la jacobienne de laquelle le flot se linéarise. Toutefois, ce n’est pas cette jacobienne qui gouverne la géométrie: ici le modèle algébro-géométrique des tores de Liouville est le quotient A de cette jacobienne par un $\mathbf{Z}/2$ (1.2.2): juste ce qu’il faut pour obtenir le bon type de polarisation.

5.1. Le revêtement $D \rightarrow E$ et sa variété de Prym

La surface abélienne A est le quotient de la jacobienne de C par le sous-groupe engendré par $S_1 - S_2$. Tous les $S_i - S_j$ ($0 \leq i \leq j \leq 2$) sont d’ordre 2 dans $\text{Pic}^0(C)$, et

$$S_1 - S_2 \sim S_1 + S_2 - 2S_0 \sim P_1 + P_2 + P_3 - 3S_0$$

où les P_i sont les autres points de Weierstrass de C , au-dessus des α_i .

Le sous-groupe des éléments d’ordre 2 de $\text{Pic}^0(C)$ s’identifie naturellement à $H^1(C; \mathbf{Z}/2)$ et décrit donc les revêtements doubles (étales) de C . Soit D celui correspondant à la classe de $S_1 + S_2 - 2S_0$. Comme

$$(\mathcal{P}(z)) = 2(S_1 + S_2 - 2S_0)$$

on peut décrire D comme la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{\mathcal{P}(z)}$ ou de $\sqrt{\prod(\alpha_i - z)}$ sur C , c’est à dire comme la normalisée de

$$D_0 = \left\{ (y, h, z) \in \mathbf{C} \times C \mid y^2 = \prod(\alpha_i - z) \right\}.$$

Le revêtement $\pi : D \rightarrow C$ induit un morphisme des groupes de Picard, avec, par construction même, une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \xrightarrow{j} \text{Pic}^0(C) \xrightarrow{\pi^*} \text{Pic}^0(D)$$

où j est l’inclusion du sous-groupe engendré par $S_1 - S_2$. L’image de π^* est isomorphe à la variété abélienne A .

En termes internes à D , A est donc la composante neutre du groupe des invariants par l’involution du revêtement $\sigma : (y, h, z) \mapsto (-y, h, z)$.

Mais D est munie d’une autre involution, $\tilde{\tau} : (y, h, z) \mapsto (y, -h, z)$, qui relève l’involution hyperelliptique τ de C . Le quotient $D/\tilde{\tau}$ au est la courbe elliptique E d’équation $y^2 = \prod(\alpha_i - z)$. Le revêtement double $D \rightarrow E$ est ramifié en les quatre points de E au-dessus de $z_1, z_2 \in \mathbf{P}^1$. En fait, on a un produit fibré au-dessus de $\mathbf{P}^1$

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi} & C \\ p \downarrow & & \downarrow z \\ E & \xrightarrow{z} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

et l’image de $p^* : \text{Pic}^0(E) \rightarrow \text{Pic}^0(D)$ est la composante neutre des points fixes de $\tilde{\tau}^*$. En plus, elle est supplémentaire à A . En effet, comme l’involution hyperelliptique opère sur $\text{Pic}^0(C)$ par $\tau^*x = -x$, on a pour tout $x \in \text{Pic}^0(C)$:

$$\tilde{\tau}^*\pi^*x = \pi^*\tau^*x = -\pi^*x$$

ce qui fait que A est contenue dans les points “antifixes” de $\tilde{\tau}^*$. Résumons toutes ces considérations:

Proposition. 5.1.1. – Soient $\mathcal{P}_1 = \{\infty, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{z_1, z_2\}$ deux ensembles disjoints de points distincts de $\mathbf{P}^1$. Soient E et C les revêtements doubles ramifiés en les points de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ respectivement. Soit enfin D la courbe de genre 3 produit fibré de E et G au-dessus de $\mathbf{P}^1$. Alors

- le revêtement étale $D \rightarrow C$ induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \xrightarrow{j} \text{Pic}^0(C) \xrightarrow{\pi^*} \text{Pic}^0(D)$$

où j est l’inclusion du sous-groupe engendré par $S_1 - S_2$ où S_1 et S_2 sont les points de Weierstrass de C au-dessus des points de $\mathcal{P}_2$,

- la variété abélienne $A = \text{Pic}^0(C)/\langle S_1 - S_2 \rangle = \text{Im}\pi^*$ est la variété de Prym du revêtement $D \rightarrow E$.

Remarque. – Knörrer montre dans [16] que la surface $T^{\mathbf{C}}$ de toutes les droites projectives complexes tangentes à Q_{z_1} et Q_{z_2} est une surface de Kummer: en fait $F(V)/G \cong A/\pm 1$ en est une et, dans cette dimension, l’isomorphisme $F'(V)_0/G \rightarrow T_0^{\mathbf{C}}$ se prolonge. En particulier, $T^{\mathbf{C}}$ a 16 points singuliers, correspondant aux points fixes de l’opération de G . Il est clair qu’aucun point provenant de $\mathcal{T}_F^{\mathbf{C}}$ ne peut être singulier: cet espace est un niveau régulier de F et l’involution $(p, u) \mapsto (-p, u)$ n’y a aucun point fixe puisque $\sum p_i^2 = 1$ donc $p \neq 0$. Les points singuliers de la surface de Kummer s’interprètent comme les tangentes à l’une des quadriques qui sont contenues dans l’autre. Ce problème n’a jamais de solution réelle, en fait même pas de solution complexe dans $F'(V)_0$.

5.1.2. Remarque sur les singularités de F . – Ce que pourrait être un système intégrable générique (au sens qu’a ce terme en théorie des singularités d’applications différentiables) n’est pas absolument clair. Il est clair, par contre, que celui des géodésiques des quadriques ne l’est pas: il y a trop de tangences dans le discriminant!

On doit² pouvoir déformer le système de façon à obtenir le discriminant représenté sur la figure 5.

²Il est facile de construire des déformations semi-globales supprimant chacun des points de tangence.

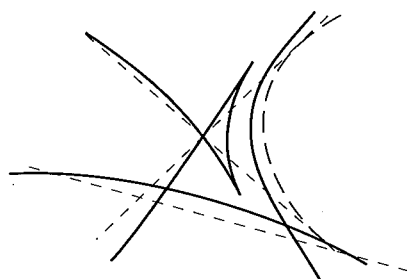


Figure 5

C'est ce qui se passe dans le cas du solide libre de dimension 4, dit de $\mathfrak{so}(4)$, où la variété symplectique est une orbite adjointe dans $\mathfrak{so}(4)$, c'est à dire un $S^2 \times S^2$. L'un des invariants orbitaux est le pfaffien et les orbites à pfaffien nul donnent un discriminant très semblable à celui que nous avons ici (à la compacité de l'image près, obtenue en rajoutant une tangente à la parabole supplémentaire au discriminant (voir [5])). Les orbites proches, à petit pfaffien, elles, donnent des discriminants "avec queue d'aronde" semblables à celui de la figure 5 (voir l'article d'Oshemkov dans [10]). Du point de vue algébrique, dans un monde régi par les Prym($D | E$), notre système se singularise par la présence de la courbe de genre 2, C , quotient de D . Concrètement, dans l'espace des revêtements $D \rightarrow E$, on a un sous-espace de codimension 1 formé de ceux dont les quatre points de ramification sont deux couples de points de E , stables par l'involution elliptique – c'est la situation décrite par 5.1.1.

La parabole, dans notre discriminant, correspond au cas où ces quatre points coïncident. Les droites, elles, correspondent au cas plus générique où deux de ces points coïncident ($z_i = \alpha_j$). D'où les tangences.

5.2. Les tores de Liouville et les géodésiques

Ainsi les niveaux réguliers sont les parties réelles des variétés de Prym. Ca ne nous apprend bien sûr rien de plus que les énoncés de 1.1 sur leur nombre de composantes connexes, mais ça peut aider à comprendre les bifurcations. Commençons par des commentaires géodésiques.

Considérons, sur la figure 4, l'image de l'application moment. Les parties hachurées ne sont pas atteintes: à l'intérieur de la parabole $\mathcal{P}$ n'a pas ses racines réelles, les autres zones hachurées correspondent à des racines réelles qui ne vérifient pas les inégalités imposées par 3.2.1. Les droites P_z sont les tangentes à la parabole. Les numéros [1], [2], [3], [4] des quatre zones atteintes correspondent aux positions des z_i définies par les mêmes chiffres sur la figure 3. Ainsi ces zones vont correspondre à des tangentes communes

- à un ellipsoïde et à un hyperboloïde à une nappe pour la zone [1],
- à un ellipsoïde et à un hyperboloïde à deux nappes pour la zone [2],

- à un hyperboloïde à une nappe et à un hyperboloïde à deux nappes pour la zone [3],
- à deux hyperboloïdes à une nappe pour la zone [4].

Remarques. – Le lecteur sera sans doute satisfait de constater que l'intersection d'une droite P_z avec l'image de l'application moment est un segment (compact) si et seulement si cette intersection décrit bien les géodésiques d'un authentique ellipsoïde. Il remarquera aussi que, pour des raisons de convexité évidentes, il n'y a aucune tangente commune à deux ellipsoïdes ou à deux hyperboloïdes à deux nappes de la famille. Autrement dit deux droites P_z pour deux valeurs distinctes de z soit toutes deux $< \alpha_1$, soit toutes deux dans $]\alpha_2, \alpha_3[$ doivent se couper *en dehors* de l'image de F : c'est encore une façon de trouver cette image dans le cas $n = 2$.

Grâce aux énoncés du § 1.1, nous savons qu'il y a deux tores de Liouville dans les zones [1], [2], [3] et quatre dans la zone [4]. Le cas de l'ellipsoïde (zones [1] et [2]) est bien décrit – en termes tant riemanniens que symplectiques – dans le livre [15] de Klingenberg. Le cas de la zone [3] n'est pas différent. Chaque géodésique tourne autour d'un des axes de coordonnées (dépendant de la zone choisie) et *toujours dans le même sens*. D'où les deux tores de Liouville, échangés par le changement d'orientation sur la géodésique (cette dernière assertion est évidente dans les constructions du § 4).

Le cas de la zone [4] est plus amusant. Du point de vue riemannien, comme du point de vue topologique, il y a, a priori, de grandes différences entre ce cas et les trois autres. Nous considérons maintenant un seul type de quadriques réelles, pour lequel nous sommes en courbure *négative*, et nos quadriques se complètent à l'infini en des tores et non plus des sphères. Si on lit attentivement Hadamard [11], on s'aperçoit qu'il y a trois types de géodésiques sur un hyperboloïde à une nappe: celles qui ont une tangente commune avec une géodésique d'un hyperboloïde à deux nappes ou d'un ellipsoïde (correspondant à nos zones [1] et [3]) d'une part. Elles sont confinées dans une bande de l'hyperboloïde et se comportent comme leur associée sur l'autre quadrique. Mais il y a, d'autre part, des géodésiques qui vont "d'un bout à l'autre" tout en "faisant le tour", l'exemple le plus simple étant celui des droites de la surface.

Ces géodésiques du troisième type ont une tangente commune avec des géodésiques d'un autre hyperboloïde à une nappe, confondu avec le premier dans le cas critique des droites (voir la Remarque 3.1.6). Pour comprendre comment distinguer les quatre tores de Liouville dans ce cas, le plus simple est de considérer justement les droites: il y a deux familles de droites, et on considère chaque géodésique avec son orientation. Le niveau critique d'un point de la parabole frontière de la zone [4] est formé de quatre cercles, limites de quatre tores de Liouville s'amincissant avant de disparaître.

Remarque. – Considérons la projection de $\mathcal{T}_F$ sur l'une des quadriques: à chaque droite tangente à Q_{z_1} et Q_{z_2} , on associe le point de tangence (éventuellement à l'infini) à Q_{z_1} . Au-dessus de chaque point générique de l'image, il y a quatre points de $\mathcal{T}_F$.

Dans les zones [1] à [3], l'image est une bande (topologiquement un cylindre). On est dans la situation où chaque tore de Liouville s'aplatit en un anneau dans la projection. D'où les deux tores de Liouville. Dans la zone [4], l'image est l'hyperboloïde tout entier, soit un tore. Les quatre points au-dessus de chaque point décrivent les quatre tores.

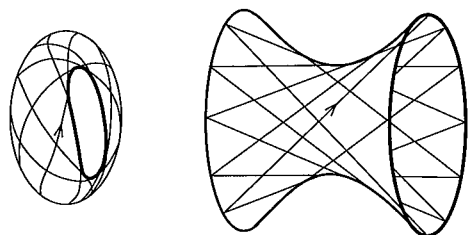


Figure 6

5.3. Les bifurcations des tores de Liouville

L'identification à des objet, algèbro-géométriques rend l'étude des bifurcations très facile.

5.3.1. Via les Prym. – Si on traverse le discriminant le long d'un petit arc transverse, on a, pour la situation algébrique, un modèle minimal stable pour la dégénérescence des variétés de Prym. Le long du même petit arc, la fibration par les tores de Liouville aussi est *minimale*: il reste un champ de vecteurs non nul le long des fibres singulières, celles-ci ne peuvent être obtenues par éclatement. On peut alors procéder comme dans [4], c'est à dire regarder attentivement comment les matrices de périodes pour les jacobiniennes de D et E se comportent en traversant telle ou telle composante du discriminant.

La courbe elliptique E a deux composantes réelles, pour $z \leq \alpha_1$ et $\alpha_2 \leq z \leq \alpha_3$. Les points de ramification de $D \rightarrow E$ sont les deux paires de points au-dessus de z_1 et z_2 . Donc $D \rightarrow E$ a 4 points de ramification réels dans la zone [2], 2 dans les zones [1] et [3], et 0 dans la zone [4]. Ainsi $D(\mathbb{R})$ a deux composantes dans la zone [2], trois dans les zones [1] et [3] et quatre dans la zone [4].

On peut utiliser ces remarques pour évaluer le nombre de tores de Liouville, et aussi pour traiter les bifurcations. Il est bien plus simple, et surtout bien plus général (la méthode marchant en toutes dimensions) d'utiliser la description de A comme quotient de la jacobienne de C .

5.3.2. Les bifurcations de la partie réelle de la jacobienne. – Les bifurcations de sortie de l'image se font par amincissement des tores en cercles puis disparition (on peut le voir par la méthode générale, mais c'est à peu près évident). Pour comprendre les bifurca-

tions à l'intérieur de l'image, il suffit de savoir traverser une composante du discriminant qui est une droite, autrement dit faire passer un z_j d'un côté à l'autre d'un α_i .

Il existe une base de l'homologie de C et une base de $H^0(C, \Omega^1)$ telles que

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad \int_{b_k} \omega_j = iy_{kl}$$

la matrice de périodes est

$$\Omega = \begin{pmatrix} iy_{11} & iy_{12} \\ iy_{12} & iy_{22} \end{pmatrix}$$

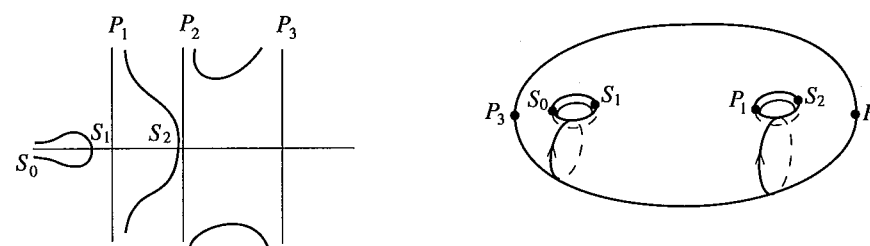


Figure 7

La figure 7 représente la courbe C , sa partie réelle et une telle base, dans le cas où $z_1 \leq \alpha_1 < z_2 < \alpha_2$ (zone [1]) pour fixer les idées.

Dans le passage à la zone [2] (par exemple), S_2 et P_2 s'échangent (figure 8).

Ce qui se passe ne concerne en rien b_1 , on a fait un demi-twist le long de b_2 . On peut déformer la fibration en changeant la matrice de périodes en

$$\Omega_t = \begin{pmatrix} iy_{11} & ity_{12} \\ ity_{12} & iy_{22} \end{pmatrix}$$

et faire tendre t vers 0. La déformation préserve les structures réelles et la matrice Ω_0 correspond à une variété abélienne qui est le produit de deux courbes elliptiques. La fibration est donc homéomorphe à celle obtenue en considérant le produit d'une courbe elliptique à deux composantes réelles ($C/(1, iy_{11})$) par une courbe elliptique qui dégénère en une conique et une droite se coupant en deux points.

Cette méthode s'applique à toutes les bifurcations à l'intérieur de l'image de l'application moment et y donne le même résultat.

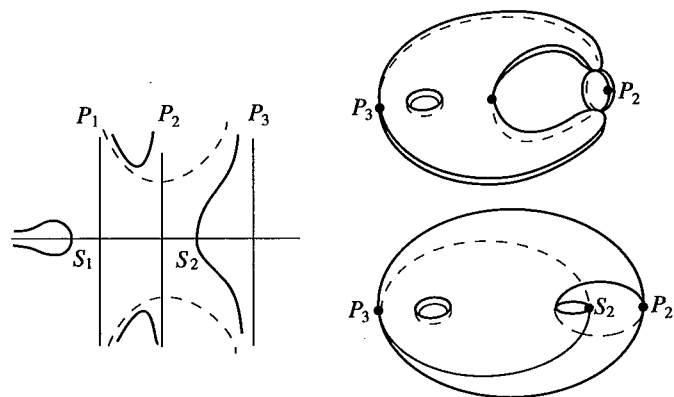
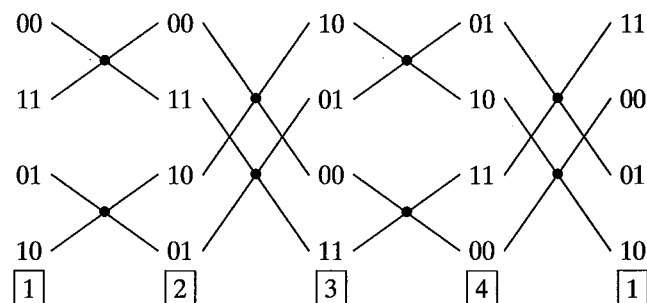


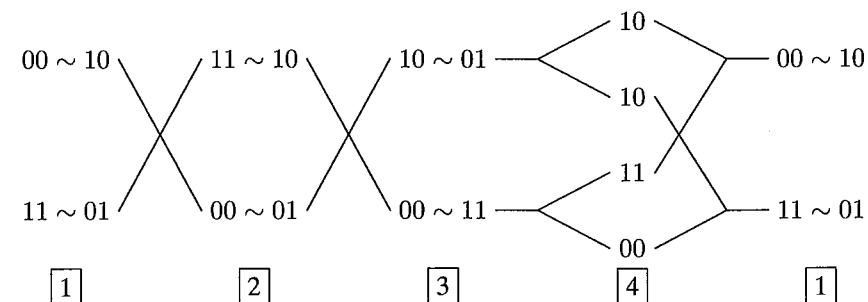
Figure 8

5.3.3. *Les bifurcations de $A(\mathbf{R})$ et des tores de Liouville.* – La remarque suivante est que la façon d'indexer les composantes de $\text{Pic}^0(C_F)(\mathbf{R})$ par les éléments de $(\mathbf{Z}/2)^2$ (voir le § 4.4) ne dépend pas du choix de F à cause de la façon canonique d'indexer les composantes de $C_F(\mathbf{R})$, où C_i est celle des composantes qui se projette dans $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ (voir 2.6.3).

On en déduit aisément quels couples de composantes sont associés traversée du discriminant, ce dui est résumé dans le schéma suivant



On maîtrise aussi bien l'opération du groupe H comme expliqué au § 4.4. Il opère par translation par $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 0)$ respectivement, d'où



Tant qu'on ne traverse pas une frontière de la zone [4], la translation $S_1 - S_2$ fait intervenir un point qui n'est aucune des deux composantes concernées par la bifurcation. En termes de la décomposition en produit de deux courbes elliptiques, c'est dire qu'elle échange les deux composantes de celle des courbes qui reste lisse. Le modèle est donc celui du produit de deux cercles se coupant en deux points par un cercle.

La bifurcation pour sortir de ou entrer dans la zone [4] se fait, elle, par produit de deux huit par un cercle (on n'a pas le choix).

References

- [1] Adler, M., vanMoerbeke, P., *Completely integrable systems, euclidean Lie algebras and curves, et linearization of hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory.* Advances in Math. **38** (1980), 267–316 et 318–379.
- [2] Adler, M., vanMoerbeke, P., *The Kowalevski and Hénon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$ – a two-dimensional family of Lax pairs.* Comm. Math. Phys. **113** (1988), 659–700.
- [3] Arnold, V.I., *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Mir, Moscou, 1974.
- [4] Audin, M., Silhol, R., *Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski.* Compositio Math. **87** (1993) 153–229.
- [5] Audin, M., *Topologie de système de Moser en dimension 4.* In Floer memorial volume, Progress in Math., Birkhäuser (à paraître).
- [6] Barth, W., *Abelian surfaces with (1,2)-polarization.* Advanced Studies in Pure Math. **10** (1987), 41–84.
- [7] Bobenko, A.I., Reiman, A.G., Semenov-Tian-Shansky, M.A., *The Kowalevski top 99 years later.* Comm. Math. Phys. **122** (1989), 321–354.
- [8] Comessatti, A.I., *Sulle varietà abeliane reale I et II.* Ann. Mat. Pura Appl. **4** (1926), 27–71.
- [9] Donagi, R., *Group law on the intersection of two quadrics.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **7** (1980), 217–239.

- [10] Fomenko, A.T. (ed.), *Topological Classification of Integrable Systems*, Advances in Soviet Math., vol 10, Amer. Math. Soc., 1991.
- [11] Hadamard, J., *Sur la forme des lignes géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre*. Bull. Soc. Math. France **26** (1898), 195–216.
- [12] Haine, L., *Geodesic flow on $SO(4)$ and abelian surfaces*. Math. Ann. **263** (1983), 435–472.
- [13] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., *Anschauliche Geometrie*. Springer Verlag, 1932.
- [14] Jacobi, C., *Vorlesungen über Dynamik*. Gesammelte Werke, Supplementband, Berlin.
- [15] Klingenberg, W., *Riemannian Geometry*. de Gruyter, 1982.
- [16] Knörrer, H., *Geodesics on the ellipsoid*. Invent. Math. **39** (1980), 119–143.
- [17] Mérindol, J.-Y., *Théorème de Torelli affine pour les intersections de deux quadriques*. Invent. Math. **80** (1985), 375–416.
- [18] Moser, J., *Geometry of quadrics and spectral theory*. In *The Chern Symposium*, Springer (1980), 147–188.
- [19] Reiman, A.G., *Integrable hamiltonian systems connected with graded Lie algebras*. J. Soviet Math. **19** (1982), 1507–1545.
- [20] Silhol, R., *Compactifications of moduli spaces in real algebraic geometry*. Invent. Math. **107** (1992), 151–202.
- [21] Weierstrass, K., *Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid*. Math. Werke I, 257–266.

Received: 15.02.93

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex