

Hamiltoniens périodiques sur les variétés symplectiques compactes de dimension 4

Michèle Audin*

Dans cet article, je vais donner une classification à difféomorphisme équivariant près des S^1 -variétés compactes de dimension 4 qui possèdent une forme symplectique invariante pour laquelle l'opération est hamiltonienne.

Plus que dans un cas particulier d'opération de S^1 en dimension 4 (*voir* [8]), nous sommes ici, par les méthodes, dans un cadre de classification d'opération hamiltonienne de groupe. Une différence importante par rapport à des situations étudiées précédemment ($SO(3)$ ou $SU(2)$ en dimension 4 dans [11], le tore T^n en dimension double dans [6]) est qu'on n'est plus ici dans un cas de "complète intégrabilité" ($\dim G + \operatorname{rg} G = \dim W$), ce qui rend la situation moins rigide. Du point de vue de la méthode, on dispose par contre ici d'une fonction H (le hamiltonien) qui décrit assez complètement l'opération, et qui permet d'utiliser des techniques éprouvées (théorie de Morse, variétés de Seifert, plombages).

Un des ingrédients de base, issu de la théorie de Morse, est un lemme de Dusa McDuff [14], ici le lemme 1.4.1 : tous les quotients des niveaux réguliers du hamiltonien sont des exemplaires de la même surface topologique B . Connaissant B , il est clair qu'on connaît déjà beaucoup de la variété W . En étudiant alors la structure de fibré de Seifert sur B des niveaux réguliers du hamiltonien, et sa modification à la traversée des niveaux critiques, on montre notamment :

Théorème W *s'obtient par une suite finie d'éclatements de points fixes à partir d'un modèle simple.*

Ce modèle est en général un fibré en espaces projectifs $P^1(\mathbb{C})$ sur B , avec quelques autres possibilités quand B elle-même est une sphère (*voir* 4.1 pour les détails)¹.

On remarquera que toutes les variétés obtenues possèdent une structure de surface projective complexe, et même, que ce sont exactement celles trouvées par Orlik et Wagreich [17] dans leur classification des surfaces projectives munies d'opérations de $\mathbb{C}^*$.

Chemin faisant, la méthode montre que toutes les variétés de Seifert orientées à base orientée peuvent être obtenues comme niveaux réguliers d'un hamiltonien périodique sur une variété symplectique compacte (2.2.4) et permet de dire quelles opérations de S^1 sont des restrictions à un sous-tore d'opérations hamiltoniennes d'un tore T^2 (3.5.1).

*exposé fait à la Grande Motte le 24 mai 1988.

¹Un résultat analogue a été annoncé depuis dans [19], semble-t-il obtenu par des méthodes différentes, mais je n'en ai toujours pas vu de démonstration (juillet 1989).

Je remercie Michel Coornaert pour ses précieux conseils bibliographiques, Thomas Delzant pour de fréquentes discussions, Dusa McDuff pour sa correspondance encourageante et le Séminaire Sud-Rhodanien, en les personnes de Claude Albert et Pierre Molino, pour son hospitalité et son intérêt.

Dans toute la suite, *opération* signifiera *opération effective*.

1 Exemples et constructions fondamentales

Commençons par deux exemples très simples d'opérations hamiltoniennes de S^1 , à partir desquels seront construits presque tous les autres :

1.1 L'espace projectif complexe $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est muni de la forme de Kähler usuelle et de l'opération de S^1 :

$$t \cdot [x, y, z] = [tx, y, z]$$

Le hamiltonien associé² est :

$$H([x, y, z]) = \frac{|x|^2}{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$$

Il n'a que deux valeurs critiques :

- $a = 0$, minimum, réalisé par le $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ d'équation $x = 0$,
- $a = 1$, maximum, réalisé par le point $[1, 0, 0]$.

Tous les niveaux de H dans $]0, 1[$ sont réguliers, et sont des sphères S^3 fibrées (par Hopf) sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

1.2 Considérons maintenant une surface (orientée) B munie d'une forme-volume η , et d'un fibré en droites complexes $L \rightarrow B$. Appelons W l'espace total du fibré en $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$:

$$\pi : W = \mathbf{P}(L \oplus \mathbf{1}) \rightarrow B$$

Faisons opérer S^1 sur W par :

$$t \cdot (b, [v, z]) = (b, [v, tz])$$

où $b \in B$, $v \in L_b$, $z \in \mathbf{C}$ et le crochet désigne, comme plus haut, les coordonnées homogènes. Les sous-variétés fixes pour ces opérations sont les deux sections $\sigma_i : B \hookrightarrow \mathbf{P}(L \oplus \mathbf{1})$

$$\sigma_1(b) = (b, [v, 0])$$

$$\sigma_2(b) = (b, [0, 1])$$

²Cet exemple fixe les conventions utilisées ici, qui peuvent différer par un facteur $\pm 1/2$, voire $\pm 1/2\pi$ d'un auteur à l'autre.

Munissons L d'une métrique hermitienne et C de sa métrique usuelle. Soit λ l'unique nombre réel tel que $c_1(L) = \lambda[\eta] \in H^2(B; \mathbb{Z})$, et soit α une 1-forme S^1 -invariante sur l'espace total de L telle que sa restriction au fibré en cercles unité de L soit une forme de connexion à courbure la 2-forme $-\lambda\eta$. Appelons encore β la forme de Liouville de C ($\beta = pdq$), et considérons la 2-forme : $\pi^*\eta + d\alpha + d\beta$ sur l'espace total de $L \oplus 1$. Il est clair que c'est une forme symplectique sur le fibré en disques de rayon a de $L \oplus 1$ tant que $(1 - a\lambda) > 0$. Si a vérifie cette propriété, la réduction symplectique du fibré en sphères de rayon a de $L \oplus 1$ fournit une forme symplectique ω_a sur $P(L \oplus 1)$ pour laquelle $a|z|^2$ est un hamiltonien de l'opération de S^1 .

1.3 Notations

Soit (W, ω) une variété symplectique compacte et connexe, et $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien périodique associé à une opération de S^1 préservant ω .

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $W_a = H^{-1}(]-\infty, a])$ et $V_a = H^{-1}(a)$. On peut supposer que le minimum de H est 0.

On choisit une fois pour toutes une structure presque complexe $\mathcal{J}$ adaptée à la forme symplectique, la métrique utilisée est celle pour laquelle le gradient de H est $\mathcal{J}\xi$, où ξ est le champ fondamental de l'opération.

Grâce à Frankel [9] et Atiyah [1] on sait que H a exactement un minimum et un maximum local, et que ses autres points critiques sont non-dégénérés et d'indice 2. Ainsi toutes les nappes de gradient de H sont des sphères S^2 (presque complexes et donc) symplectiques, feuilletées par les orbites de ξ .

1.4 Un lemme de D. McDuff et une application

Etant donnée une valeur régulière a de H , on sait que le niveau V_a est un fibré de Seifert sur une surface B_a , munie d'une forme symplectique (réduite) η_a . Bien sûr, quand on traverse une valeur critique de H , la topologie de V_a change (on lui ajoute une cellule d'indice 2). Il est remarquable que, sous nos hypothèses de dimension, la topologie de B_a , elle, ne change pas. Le lemme de Dusa McDuff est même plus précis : soit $P = H^{-1}([a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon])$, où a_0 est une valeur critique correspondant à un ou plusieurs points critiques non-dégénérés d'indice 2 de H , et ε est assez petit pour que a_0 soit la seule valeur critique dans l'intervalle considéré.

Lemme 1.4.1 *Avec les notations ci-dessus, si $\dim P = 4$, alors les surfaces $B_a = V_a/S^1$, pour $a \neq a_0$, sont toutes difféomorphes à une surface B . De plus les projections $H^{-1}(a) \rightarrow B$ s'assemblent en une application différentiable $\pi : P \rightarrow B$.*

Pour obtenir l'application π , D. McDuff suit tout simplement le gradient de H . Bien sûr, ça ne définit pas bien une application de P dans $V_{a_0+\varepsilon}$ puisque les points des nappes descendantes des points critiques au niveau a_0 n'ont pas d'image, mais, grâce à l'hypothèse de dimension, ça définit bien une application de P dans la surface réduite du niveau $a_0 + \varepsilon$. Rien n'empêche alors de continuer, jusqu'au maximum de H si celui-ci est réalisé par une surface, qui sera elle-aussi un exemplaire de B , ou jusqu'un peu avant sinon. Rien n'empêche non plus de commencer au minimum de H ou presque.

La proposition suivante est une conséquence simple du lemme 1.4.1 et de ces remarques.

Proposition 1.4.2 *Soit W une variété symplectique compacte de dimension 4 munie d'un hamiltonien périodique H n'ayant que deux valeurs critiques.*

1. *Soit H a un point critique isolé, alors l'autre valeur critique est atteinte le long d'une sphère S^2 et W est $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.*
2. *Soit H n'a aucun point critique isolé, alors son maximum et son minimum sont atteints le long de deux exemplaires de la même surface B , et W est $\mathbf{P}(L \oplus 1)$ où L est le fibré normal de la surface réalisant le minimum de H dans W .*

Autrement dit, les exemples ci-dessus décrivent tous les cas d'opérations avec deux valeurs critiques.

Démonstration. Le premier cas est un cas particulier d'un résultat de Delzant [6]. C'est ici extrêmement simple : le bord d'un voisinage équivariant du point considéré est une sphère S^3 . L'autre valeur critique ne peut être atteinte en un point critique isolé puisque la sphère S^4 ne possède aucune structure symplectique, elle est donc atteinte le long d'une surface B dont S^3 est le bord d'un voisinage tubulaire, donc B est une sphère S^2 et on conclut facilement. Le deuxième cas n'est pas plus difficile : on sait que tous les niveaux réguliers ont la même surface réduite, bien sûr c'est celle qui réalise les *extrema* de H . Grâce à Frankel, on sait linéariser l'opération et la forme symplectique au voisinage de ces deux surfaces fixes, et on conclut tout aussi facilement. $\square$

1.5 Dans tous les exemples que nous avons considérés, l'opération est évidemment semi-libre. Il y a bien sûr des exemples aussi naturels et aussi simples où ce n'est pas le cas. Par exemple, la célèbre fonction de Morse "parfaite" sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$:

$$H([x, y, z]) = \frac{m|x|^2 + n|y|^2}{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$$

est le hamiltonien de l'opération de S^1 :

$$t \cdot [x, y, z] = [t^m x, t^n y, z]$$

qui est effective si m et n sont premiers entre eux, mais n'est pas semi-libre. Elle a trois points fixes, isolés. C'est d'ailleurs une conséquence simple d'un autre lemme de D. McDuff [14] (voir 1.7.1) que :

Proposition 1.5.1 *Une opération hamiltonienne semi-libre de S^1 sur une variété symplectique compacte de dimension 4, a au moins quatre points fixes.*

Dans le cas où la base B dans 1.2 est une sphère S^2 , il y a d'autres opérations intéressantes de S^1 : on considèrera aussi la "surface de Hirzebruch"

$$W = P(\mathcal{O}(k) \oplus 1) = \{[a, b][x, y, z] \in P^1(\mathbb{C}) \times P^2(\mathbb{C}) \mid a^k y = b^k x\}$$

avec la forme de Kähler induite et l'opération

$$t \cdot ([a, b][x, y, z]) = ([t^m a, b][t^m x, y, t^n z])$$

(le cas où $m = 0, n = 1$ est un cas particulier de 1.2).

1.6 Eclatement d'un point fixe

Voici maintenant un modèle permettant de rajouter des points critiques. On considère l'opération du cercle près d'un point fixe, comme linéarisée par Frankel, soit

$$t \cdot (x, y) = (t^p x, t^{-q} y)$$

pour certains entiers relatifs premiers entre eux p, q à préciser. On éclate le point fixe $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, et on obtient la variété

$$\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{([a, b], x, y) \in P^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 \mid ay = bx\}$$

Il est clair que l'opération de S^1 se prolonge à $\tilde{\mathbb{C}}^2$ en

$$t \cdot ([a, b], x, y) = ([t^p a, t^{-q} b], t^p x, t^{-q} y).$$

Il est clair aussi qu'il existe des formes symplectiques invariantes sur $\tilde{\mathbb{C}}^2$ (voir plus généralement [13] par exemple, pour les formes symplectiques sur les variétés éclatées).

Remarques :

- En dehors du diviseur exceptionnel ($x = y = 0$), il ne se passe rien de neuf.
- Dans le cas où le point fixe éclaté faisait partie d'une surface critique, on peut supposer que $p = 1$ et $q = 0$ (pour que l'opération hamiltonienne soit effective), la transformée stricte de la surface de points fixes est une surface de points fixes. On a de plus rajouté le point fixe $([1, 0], 0, 0)$, isolé d'indice 2.
- Si $p > 0$ et $q > 0$, le point fixe éclaté est un point critique isolé d'indice 2 de H , que nous appellerons *point critique* ou *point fixe de type (p, q)* . L'éclatement le remplace par deux points fixes : $([0, 1], 0, 0)$ de type $(p + q, q)$ et $([1, 0], 0, 0)$ de type $(p, p + q)$ reliés par une nappe de gradient (l'exceptionnel).
- Si p et q sont de signe contraire, alors le point fixe éclaté était un *extremum* (isolé) du hamiltonien. Quitte à changer les signes, on peut écrire l'opération :

$$t \cdot (x, y) = (t^m x, t^n y)$$

où m et n sont > 0 et premiers entre eux (le point fixe est un minimum). L'opération sur $\tilde{\mathbb{C}}^2$ est :

$$t \cdot ([a, b], x, y) = ([t^m a, t^n b], t^m x, t^n y).$$

- Quand $m = n = 1$, l'exceptionnel est entièrement constitué de points fixes ; on a remplacé un point fixe isolé par un $\mathbf{P}^1$ de points fixes.
- Sinon, on peut supposer que $m > n > 0$. Alors le point $([0, 1], 0, 0)$ est un minimum au voisinage duquel l'opération hamiltonienne s'écrit $(t^{m-n}u, t^n y)$, et le point $([1, 0], 0, 0)$ un point critique isolé d'indice 2 et de type $(n, m - n)$.

1.7 Passage d'un point critique isolé d'indice 2

Soit a_i une valeur critique de H , correspondant à des points critiques isolés d'indice 2. Près d'un tel point critique, l'opération de S^1 peut s'écrire, dans des coordonnées locales complexes *ad hoc* :

$$t \cdot (x, y) = (t^p, t^{-q}y)$$

où p et q sont des entiers > 0 et premiers entre eux (pour que l'opération soit effective).

Grâce à un petit changement de coordonnées, le niveau $a_i - \varepsilon$ s'écrit :

$$V_{a_i - \varepsilon} = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| = 1\} (= D_x^2 \times S_y^1).$$

Il s'agit d'un voisinage d'une fibre "exceptionnelle" dans la variété de Seifert $V_{a_i - \varepsilon}$; la fibre exceptionnelle elle-même est $x = 0$ avec stabilisateur $\mathbf{Z}/q$ (bien entendu, elle n'a rien d'exceptionnel si $q = 1$, ce qui n'est absolument pas exclu).

Le niveau $a_i + \varepsilon$, quant à lui, est de même :

$$V_{a_i + \varepsilon} = \{(x, y) \mid |x| = 1, |y| \leq 1\} (= S_x^1 \times D_y^2)$$

avec fibre exceptionnelle à stabilisateur $\mathbf{Z}/p$.

Calculons les invariants de Seifert de ces orbites. Soient u et v les plus petits entiers > 0 donnés par Bezout :

$$(1) \quad qu - pv = 1$$

Alors les invariants de l'orbite exceptionnelle considérée au niveau $a_i - \varepsilon$ sont (q, v) et ceux de l'orbite au niveau $a_i + \varepsilon$ sont (p, u) .

Remarque. J'ai utilisé ici, pour les invariants de Seifert, les conventions d'orientation qu'on trouve dans [3], mais pas les conventions usuelles de normalisation, pour pouvoir éventuellement traiter certaines fibres principales comme des fibres exceptionnelles. Par exemple, $\alpha_i \geq 1$ est l'ordre du stabilisateur de l'orbite, α_i et β_i sont premiers entre eux, et :

$$(g \mid b, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

(notations de [16], au changement d'orientation près),

$$(g, (1, -b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

et

$$(g, (1, -b - (m_1 + \dots + m_r)), (\alpha_1, \beta_1 + m_1 \alpha_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r + m_r \alpha_r))$$

représentent la même variété de Seifert.

On en déduit d'ailleurs immédiatement une démonstration d'un autre des lemmes de [14] :

Lemme 1.7.1 *La classe d'Euler (au sens des fibrés de Seifert) d'un niveau régulier de H diminue de $1/pq$ au passage d'un point singulier de type (p, q) .*

Démonstration. La classe d'Euler d'un fibré de Seifert de type $(g, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ est, par définition, le nombre rationnel $e = -\sum \beta_i/\alpha_i$. Ainsi, si au niveau $a_i - \varepsilon$, on avait $e_- = a - \frac{v}{q}$, au niveau $a_i + \varepsilon$ on aura $e_+ = a - \frac{u}{p}$, et :

$$e_+ - e_- = \frac{v}{q} - \frac{u}{p} = -\frac{1}{pq}.$$

□

Démonstration de 1.5.1. On a vu dans 1.4.2 qu'il ne pouvait y avoir seulement deux points fixes, supposons donc qu'il n'y en ait que trois. Ce sont nécessairement un minimum de H , un maximum et un point critique d'indice 2. Comme l'opération est semi-libre, sur un niveau régulier proche du minimum, c'est l'opération principale sur S^3 et $e = 1$; le point critique d'indice 2 est de type $(1, 1)$ et après l'avoir passé on a $e = 0$ grâce à 1.7.1, ce qui ne peut être la classe d'Euler d'une opération principale de S^1 sur S^3 . □

Notons :

$$[b_1, \dots, b_n] = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_n}}}$$

où $b_1, \dots, b_n$ sont des entiers quelconques, et tels que :

$$[b_1, \dots, b_i] = \frac{N_i}{D_i}$$

ait un sens pour tout i (par exemple, il ne peut y avoir deux "1" consécutifs).

Supposons que $[b_1, \dots, b_n]$ soit un développement en fraction continue de q/v . Alors on sait que :

$$(2) \quad N_{n-1}v - qD_{n-1} = 1$$

en ajoutant (1) et (2), on obtient :

$$v(p + N_{n-1}) = q(u + D_{n-1})$$

Comme v et q sont premiers entre eux grâce à (1), il y a un entier b_{n+1} qui vérifie :

$$(3) \quad b_{n+1} = \frac{p + N_{n-1}}{q} = \frac{u + D_{n-1}}{v}$$

et on a :

$$\frac{p}{u} = [b_1, \dots, b_n, b_{n+1}].$$

2 Type de difféomorphisme équivariant de W . Première partie : plombages

Dans cette première partie, on va considérer le cas où les *extrema* de H sont tous les deux réalisés le long de surfaces. Naturellement il s'agira de deux exemplaires de la même surface orientée B .

Pour toute cette partie, nous ferons donc l'hypothèse :

(H) *L'opération de S^1 a deux surfaces de points fixes*

qui est automatiquement réalisée, par exemple, quand le genre g d'une surface réduite d'un quelconque des niveaux réguliers de H est positif.

On va décrire W par plombage sur un graphe en étoile (voir [16] par exemple).

2.1 Le graphe de plombage

On associe à chaque niveau régulier a de H un graphe en étoile (figure 1) représentant la variété W_a et son bord V_a :

- le "centre" de l'étoile représente la surface B (minimum de H) et son fibré normal L dans W , et est donc pondéré par le genre g de B et l'opposé b de la classe d'Euler de L ,
- à chaque nappe de gradient montante est associé un sommet, muni d'un entier représentant l'opposé de l'auto-intersection de la sphère S^2 qu'est cette nappe de gradient,
- à chaque point critique isolé d'indice 2 est associée une arête, joignant les deux sommets correspondant aux nappes de gradient aboutissant à ce point critique.

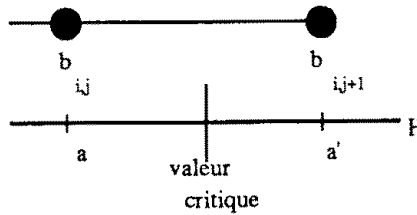


Figure 1

Le graphe est ainsi effectivement une "étoile" duale du graphe des nappes de gradient de H jusqu'au niveau a . On le notera :

$$\Gamma = (g \mid b, (b_{i,1}, \dots, b_{i,s_i})(1 \leq i \leq r))$$

Exemple. Ainsi $(g \mid b)$ représente un fibré en disques du fibré L de classe d'Euler $-b$ sur la surface B de genre g .

Chaque branche de l'étoile représente une fibre exceptionnelle du niveau V_a ; rajouter un sommet à une branche revient à traverser un point critique isolé d'indice 2. On passe du type (p, q) du point critique au poids du sommet représentant la nappe montante qui en est issue grâce au jeu de la fraction continue expliqué en 1.7.

Lemme 2.1.1 *Les branches de l'étoile sont pondérées positivement.*

Démonstration. Elle se fait par récurrence, en utilisant la construction des b_i en 1.7. L'équation (3) s'applique pour $n = 0$ avec $q = 1$, $v = 1$, $u = p - 1$ et $\frac{N_0}{D_0} = 0$, et donne $b_1 = p$, qui est positif par définition, ce qui initialise la récurrence, que (3) permet d'achever. $\square$

Les graphes de plombage considérés seront donc toujours implicitement supposés positifs (c'est dire que $b_{i,j} > 0$, on ne peut rien imposer à b).

Appelons M la valeur maximale prise par H sur W et choisissons un ε assez petit pour que H n'ait aucune valeur critique entre $M - \varepsilon$ et M . Ainsi le niveau $V_{M-\varepsilon}$ est un fibré principal sur B . Les invariants de Seifert de $V_{M-\varepsilon}$ sont de la forme $(1, \beta)$, c'est dire que les fractions continues associées aux branches de l'étoile construite ont pour valeurs des inverses d'entiers.

Définition 2.1.2 *Un graphe de plombage équivariant est dit achevable si pour chaque branche de l'étoile, on a :*

$$[b_{i,1}, \dots, b_{i,s_i}] (= \frac{\alpha_i}{\beta_i}) = \frac{1}{\beta_i}$$

Il est clair qu'un graphe de plombage achevable permet de construire une S^1 -variété de dimension 4 fermée :

Proposition 2.1.3 *Soit $\Gamma = (g \mid b, (b_{i,1}, \dots, b_{i,s_i}) (1 \leq i \leq r))$ un graphe de plombage achevable avec*

$$[b_{i,1}, \dots, b_{i,s_i}] = \frac{1}{\beta_i}$$

et soit D le fibré en droites complexes de classe d'Euler $b - \sum \beta_i$ sur la surface de genre g . Alors il existe un difféomorphisme équivariant renversant l'orientation qui permet de recoller la variété à bord obtenue par plombage le long de Γ et le fibré en cercles de D en une variété fermée de dimension 4 (munie d'une opération de S^1). $\square$

Il est classique que le type de difféomorphisme C^* -équivariant de la variété à bord donnée par le graphe de plombage est bien défini. Comme on recolle un fibré vectoriel complexe par une application équivariante, celui de la variété "achevée" l'est aussi. Celle-ci sera notée $W(\Gamma)$.

Les explications et calculs précédents se résument en :

Proposition 2.1.4 *Si Γ est le graphe de plombage défini par les points critiques de H sur W , alors W est difféomorphe au sens équivariant et comme variété presque complexe à $W(\Gamma)$. $\square$*

Remarques.

- Les conventions d'orientation sont telles que, dans W , la classe d'Euler du fibré normal de B_{min} (auto-intersection de B_{min}) est $-b$, la classe d'Euler, en tant que fibré de Seifert, de son fibré en cercles est b et la classe d'Euler du fibré normal de B_{max} est $b - \sum \beta_i$.
- Il existe des plombages qu'on peut fermer et qui ne sont pas définis par des graphes "achevables" au sens de 2.1.2. C'est le cas quand le bord du plombage est une sphère S^3 : il faut pour cela que $g = 0$ et qu'au plus deux branches de l'étoile persistent à fournir des fibres vraiment exceptionnelles jusqu'au bout. On peut alors fermer en recollant une boule B^4 dans laquelle le point 0 est un point fixe isolé (voir l'étude du paragraphe 3).

Exemples.

- Le graphe $\Gamma = (g \mid b)$ est achevable, et $W(\Gamma) = \mathbf{P}(L \oplus 1)$. Si $g = 0$ et $b = -1$, on pouvait aussi "achever" la variété en $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.
- Le graphe $(0 \mid 0, k)$ n'est pas considéré ici comme achevable, bien que le plombage se ferme facilement par l'ajout d'une boule B^4 . On obtient ainsi la surface de Hirzebruch $\mathbf{P}(\mathcal{O}(k) \oplus 1) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (l'opération de S^1 est celle de 1.5 avec $m = 1$ et $n = 0$).

2.2 Plombages et éclatements

On a vu (1.6) qu'éclater un point fixe de type (p, q) le remplace par deux points fixes, de types $(p + q, q)$ et $(p, p + q)$ reliés par une nappe de gradient.

L'effet sur la fraction continue est décrit par la figure 2 et la formule :

$$(4) \quad [\dots, b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots] = [\dots, b_n, b_{n+1} + 1, 1, b_{n+2} + 1, \dots]$$

ou si l'on préfère

$$(5) \quad b - \frac{1}{a - \frac{1}{x}} = b + 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1 - \frac{1}{x}}}$$

qu'on applique avec $b = b_{n+1}$, $a = b_{n+2}$, et $x = [b_{n+3}, \dots]$ dans une des branches de l'étoile, ou alors avec $a = b_1$, $x = [b_2, \dots]$ au centre de l'étoile. Dans le deuxième cas, $a - \frac{1}{x} = \frac{\alpha}{\beta}$, où (α, β) sont les invariants de Seifert de l'orbite considérée, et l'équation (5) s'écrit :

$$b - \frac{\beta}{\alpha} = b + 1 - \frac{\beta + \alpha}{\alpha}$$

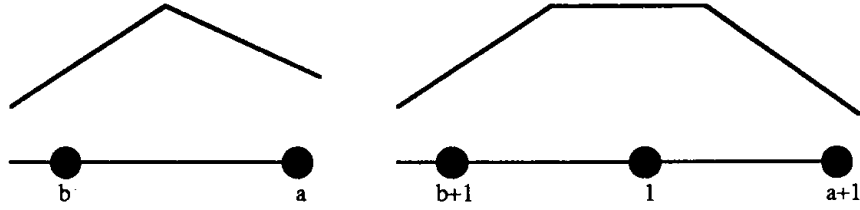


Figure 2

et décrit la situation au niveau des classes d'Euler.

Théorème 2.2.1 *Soit W une variété symplectique compacte de dimension 4 munie d'une opération hamiltonienne dont les deux extrema sont réalisés par des surfaces. Il existe une suite finie*

$$W = W^n \xrightarrow{\pi_n} \dots \xrightarrow{\pi_1} W^0$$

où chaque W^i est une variété symplectique compacte de dimension 4 munie d'une opération hamiltonienne de S^1 , avec hamiltonien H_i , π_i est l'éclatement d'un nombre fini de points de W^i et H_0 n'a que deux valeurs critiques.

Ainsi W est obtenue par une suite d'éclatements à partir d'une des variétés de la proposition 1.4.2.

Démonstration. L'argument remonte à von Randow [18], et est extrêmement simple. Grâce au lemme 2.1.1, on sait que les poids des branches sont tous strictement positifs. Dans chaque branche de l'étoile associée à W , on contracte les branches pondérées par des "1" : pour $a, b \geq 1$, on remplace $(a+1, 1, b+1)$ par (a, b) et $(b+1, 1)$ par b . Comme on l'a déjà remarqué, on ne peut jamais avoir deux "1" à la suite ; ainsi on peut, en une suite finie de telles contractions, supposer qu'il n'y a plus un seul "1" dans aucune branche. Chacune est donc maintenant pondérée par des entiers ≥ 2 ... ou a disparu. Pour finir, remarquons que si $b_1, \dots, b_n \geq 2$, alors $[b_1, \dots, b_n] > 1$... en particulier n'est jamais un inverse d'entier. Donc les branches de l'étoile ont disparu, il ne reste que $\Gamma = (g | b)$, soit une des variétés de 1.4.2. $\square$

Cette démonstration est un algorithme décrivant les éclatements. Celui-ci est encore plus limpide dans le cas particulier où l'opération est semi-libre (c'est le cas où aucun niveau régulier de H ne contient de fibre exceptionnelle).

Proposition 2.2.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.2.1, et si l'opération hamiltonienne est semi-libre, alors chaque π_i est l'éclatement d'un certain nombre de points de la surface $B_{\min}^i$ réalisant le minimum de H_i .*

Démonstration. Considérons le graphe de plombage définissant W , il est pondéré par $(g \mid b, (b_{1,1}, \dots, b_{1,s_1}), \dots, (b_{r,1}, \dots, b_{i,s_r}))$. Dire que l'opération hamiltonienne est semi-libre, c'est dire que tous les points critiques isolés d'indice 2 sont de type $(1, 1)$.

On voit facilement que l'unique solution du problème :

$$b_1, \dots, b_j \in \mathbb{Z} \text{ tels que } \forall j \in [1, s] [b_1, \dots, b_j] = \frac{1}{\beta_j}$$

est

$$(b_1, \dots, b_s) = (1, 2, \dots, 2)$$

avec $\beta_j = j$, c'est à dire :

$$[1, \overbrace{2, \dots, 2}^{j-1}] = \frac{1}{j}.$$

Ainsi chaque branche de l'étoile est pondérée par un 1 suivi d'un certain nombre de 2, ce qu'on contracte facilement.

Pour préciser, choisissons ici pour W^0 un des exemples donnés par la proposition 1.4.2, c'est à dire : $W^0 = \mathbf{P}(L \oplus 1)$ puisqu'on a précisé que le maximum est réalisé par une surface B_{max} . Le fibré L est alors le dual du fibré normal de B_{max} dans W .

Pour construire W^1 , on éclate r points de la surface B_{min}^0 dans W^0 . Dans la surface B_{min}^1 , transformée stricte de B_{min}^0 , il y a ainsi r points marqués. On éclate encore certains d'entre eux (tous ceux qui correspondent à des branches de l'étoile de longueur ≥ 2) pour obtenir W^2 . On continue jusqu'à avoir épuisé toutes les branches : le n de l'énoncé est le plus grand des s_i . $\square$

Le théorème 2.2.1 a aussi une conséquence fort importante pour nous :

Corollaire 2.2.3 *Toutes les S^1 -variétés fermées construites par plombage sur des graphes achevables possèdent des formes symplectiques invariantes.*

En effet, elles sont obtenues par éclatements de points fixes à partir de variétés symplectiques. $\square$

En particulier, 2.2.1 est bien un théorème de classification. Une autre jolie conséquence en est :

Corollaire 2.2.4 *Toute variété de Seifert orientée à base orientée est un niveau régulier d'un hamiltonien périodique sur une variété symplectique compacte de dimension 4.*

Démonstration. En effet, toutes ces variétés se décrivent comme des bords de plombages sur des graphes en étoile : on développe les invariants de Seifert en fractions continues. Il suffit donc de vérifier que tous ces graphes peuvent se prolonger de façon à obtenir des graphes achevables. Comme c'est une propriété de chacune des branches,

il suffit de vérifier que, pour toute suite d'entiers $b_1, \dots, b_n$, on peut trouver une suite $b_{n+1}, \dots, b_{n+m}$ telle que $[b_1, \dots, b_{n+m}]$ soit un inverse d'entier. On écrit

$$[b_1, \dots, b_j] = \frac{N_j}{D_j},$$

on choisit $a \geq 1$ quelconque et on pose

$$\begin{cases} u &= aN_{n-1} - D_{n-1} \\ v &= aN_n - D_n \end{cases}$$

On a ainsi $uN_n - vN_{n-1} = 1$ et $uD_n - vD_{n-1} = a \geq 1$; et

$$\frac{\frac{u}{v}N_n - N_{n-1}}{\frac{u}{v}D_n - D_{n-1}} = \frac{1}{a}$$

est un inverse d'entier (arbitraire). Il suffit alors de prendre pour $(b_{n+1}, \dots, b_{n+m})$ un développement en fraction continue de u/v . $\square$

2.3 L'exemple des surfaces toriques

Il s'agit d'une famille d'exemples que nous allons traiter partiellement dans cette partie, et qui seront surtout extrêmement utiles dans la suivante, pour comprendre le cas où tous les points fixes sont isolés.

Sur les variétés toriques, nous renverrons le lecteur à [5] et à [4], sur leurs rapports avec les opérations hamiltoniennes à [2,12,6].

Supposons que S^1 opère sur W comme un sous-groupe du tore T^2 (comme toujours, l'opération hamiltonienne de T^2 sera supposée effective). Dans ce cas la surface réduite des niveaux réguliers de H est une sphère S^2 . De plus, des résultats classiques de [1] et [10], il suit que H a au plus deux valeurs critiques à chaque niveau critique.

Proposition 2.3.1 *Soit*

$$\Gamma = (g \mid b, (b_{1,1}, \dots, b_{1,s_1}), \dots, (b_{r,1}, \dots, b_{1,s_r}))$$

un graphe de plombage achevable. Pour que la variété symplectique compacte $W(\Gamma)$ possède une opération hamiltonienne du tore T^2 prolongeant celle de S^1 , il faut et il suffit que $g = 0$ et $r \leq 2$.

Remarque. On a donc mis en évidence dans les paragraphes précédents, beaucoup d'exemples d'opérations hamiltoniennes de S^1 qui ne se prolongent pas en opérations hamiltoniennes de T^2 .

Comme niveaux réguliers d'un hamiltonien dans cette situation, on trouve donc les variétés de Seifert orientées à base S^2 avec au plus deux orbites exceptionnelles. Il est classique (voir [16]) que ce sont exactement les espaces lenticulaires.

Corollaire 2.3.2 *Pour qu'une variété de dimension 3 soit un niveau régulier d'un hamiltonien périodique induit par une opération hamiltonienne de T^2 sur une variété symplectique compacte de dimension 4, il faut et il suffit qu'elle soit un espace lenticulaire.*

Démonstration de la proposition 2.3.1. Montrons que la condition est suffisante. Si le nombre r de branches de Γ est 0, W est de la forme $\mathbf{P}(L \oplus 1) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et l'opération hamiltonienne se prolonge aisément. Sinon, on a vu que W est obtenue par une suite finie d'éclatements à partir de cet exemple (2.2.1). Comme l'étoile n'a pas plus de deux branches, on a commencé par éclater (au plus) deux points de $B_{\min}$... mais celle-ci est un $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ avec opération standard : il y a bien deux points fixes (pour T^2) qu'on peut éclater de façon à ce que l'opération se prolonge. On peut ainsi continuer. $\square$

Le graphe Γ , comme on le voit sur la figure 3, ressemble au graphe associé à l'éventail d'une surface torique (voir [4] par exemple).

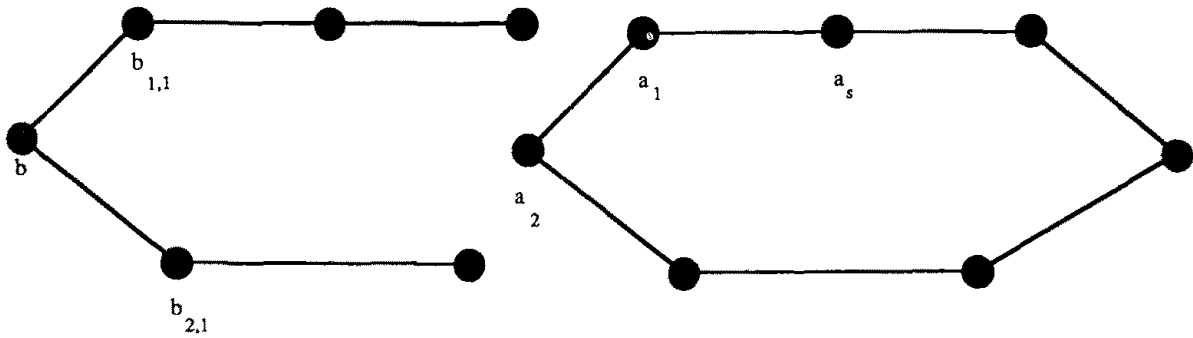


Figure 3

La ressemblance n'est pas fortuite : le plombage et l'éventail définissent la même construction de variété. Notre graphe est achevable, c'est dire qu'on peut le fermer en lui rajoutant un sommet. La variété achevée est la surface torique dont l'éventail est décrit par le graphe circulaire. Remarquons que l'opération de S^1 détermine toute l'action de T^2 (voir aussi 3.5.1).

3 Type de difféomorphisme équivariant de W . Deuxième partie : éventails

Dans cette partie, on traite le cas où l'un au moins des *extrema* de H est un point fixe isolé, on supposera toujours que c'est le cas pour le minimum. Il est clair qu'alors la surface B est une sphère. Au voisinage du minimum, l'opération est linéarisée en :

$$(6) \quad t \cdot (x, y) = (t^m x, t^n y)$$

où m et n sont positifs et premiers entre eux. Un niveau régulier proche est donc une sphère S^3 avec (éventuellement) deux fibres exceptionnelles, à stabilisateurs $\mathbf{Z}/m$ et $\mathbf{Z}/n$.

3.1 Nappes montantes issues du minimum

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de :

Proposition 3.1.1 *Si un des extrema de H est réalisé par un point fixe isolé, alors il existe une suite finie d'éclatements*

$$W = W^n \xrightarrow{\pi_1} \dots \xrightarrow{\pi_1} W^0$$

où W^0 est telle qu'aucun niveau de H^0 ne rencontre plus de deux nappes de gradient.

Si tous les points critiques de H sont isolés, alors W elle-même a cette propriété (sans éclatement).

Ce qui permettra de se limiter dans la suite au cas où il n'y a que deux nappes de gradient joignant le minimum à un autre point critique. Voici le lemme de base :

Lemme 3.1.2 *Si dans (6), m et n sont différents de 1, alors il n'y a que deux nappes de gradient joignant le minimum à un autre point critique.*

Démonstration. Au voisinage d'un point critique atteint par une telle nappe, l'opération est linéarisée en $(t^p u, t^{-q} v)$ où $q > 0$ et la nappe montante est l'axe des v . C'est une sphère $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ au début de laquelle l'opération est donc linéarisée en $t \cdot w = t^q w$. Son espace tangent est donc un des vecteurs propres en 0. Supposons m et n distincts. Les nappes montantes issues du minimum sont nécessairement tangentes aux axes de coordonnées de l'écriture (6). Chacune coupe une petite sphère centrée en 0 en une orbite de l'opération de S^1 . Il est classique qu'il n'y a pas d'opération de S^1 sur S^3 avec plus de deux orbites exceptionnelles (voir [16]). Donc si m et n sont différents de 1, il n'y a que deux nappes de gradient (une pour chaque axe de coordonnées). $\square$

Grâce aux mêmes résultats, on sait en plus que si $m > n = 1$, il y a exactement une nappe de gradient tangente à l'axe des x (et peut-être beaucoup tangentes à l'axe des y).

Supposons qu'il y ait plus de deux nappes de gradient issues du minimum. Alors, soit $m = n = 1$, soit $m > 1$ et $n = 1$, auquel cas il y a une nappe montante tangente à l'axe des x et au moins deux tangentes à l'axe des y . Montrons que ce deuxième cas se ramène au premier :

Après un éclatement, l'opération près du nouveau minimum s'écrit (voir 1.6)

$$t \cdot (u, y) = (t^{m-1} u, ty)$$

donc m a décrû, mais le nombre et la disposition des nappes issues du minimum n'ont pas changé.

Après $m - 1$ tels éclatements, on donc ramené à la situation d'une variété W' avec un hamiltonien H' , dont le minimum est réalisé en un point isolé près duquel l'opération est semi-libre (soit au cas où $m = n = 1$) et duquel sont issues $r \geq 3$ nappes de gradient.

On éclate encore une fois ce minimum pour obtenir une sphère d'auto-intersection -1 . Supposons que le maximum de H soit isolé ; situation qui n'a pas changé après tous les éclatements du minimum. A ce maximum arrivent r nappes de gradient. Nécessairement l'opération de S^1 est alors linéarisée en $(\bar{t}^{m'} u, \bar{t} v)$. Une petite sphère

S^3 , bord d'un voisinage de ce maximum, est aussi le bord du plombage défini par le graphe

$$\Gamma = (0 \mid 1, (b_{i,1}, \dots, b_{i,s_i}) \mid 1 \leq i \leq r)$$

avec

$$[b_{i,1}, \dots, b_{i,s_i}] = \frac{1}{\beta_i}$$

sauf pour

$$[b_{r,1}, \dots, b_{r,s_r}] = \frac{m'}{\beta}$$

où $0 < \beta < m'$.

Ainsi la classe d'Euler est $1 - \frac{\beta}{m'} - \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i$ d'une part, et $-\frac{1}{m'}$ de l'autre. Ceci impose

$$\sum_{i=1}^{r-1} \beta_i = 1 - \frac{\beta - 1}{m'} \leq 1$$

ce qui est impossible puisque $r \geq 3$.

Cet argument prouve la deuxième assertion de la proposition, d'une part et d'autre part que, dans le cas où il y a trois nappes de gradient issues du minimum, alors le maximum est réalisé le long d'une sphère.

Fin de la démonstration de la proposition : S'il y a trois nappes issues du minimum, le complémentaire du minimum est donc obtenu par plombage le long d'un graphe Γ . Comme dans la démonstration de 2.2.1, on peut contracter les branches de l'étoile correspondant aux nappes de gradient arrivant sur l'axe des y . $\square$

Je ferai donc dans le reste de cette partie l'hypothèse

(H') *Le minimum de H est réalisé par un point fixe isolé
d'où sont issues exactement deux nappes de gradient*

3.2 Etude des orbites critiques près du minimum

Si l'opération est donnée par (6), les orbites (éventuellement) exceptionnelles sont

$$\begin{array}{ll} S_x^1 \times 0 & \text{avec stabilisateur } \mathbf{Z}/m \\ 0 \times S_y^1 & \text{avec stabilisateur } \mathbf{Z}/n \end{array}$$

Un "petit" changement de variables identifie un voisinage de $S_x^1 \times 0$ à $S_x^1 \times D_y^2$, de sorte que

$$S^3 = S_x^1 \times D_y^2 \bigcup_{\partial} D_x^2 \times S_y^1,$$

l'orientation étant donnée par l'orientation complexe sur D_x^2 et D_y^2 et par l'orientation "bord" sur S_x^1 et S_y^1 .

Ainsi, si u et v sont les plus petits entiers positifs tels que

$$(7) \quad mv - nu = 1,$$

les invariants de Seifert des orbites sont (m, u) et $(n, n - v)$.

Suivons maintenant une nappe montante, celle correspondant à m par exemple, et supposons qu'elle arrive à un point critique d'indice 2 où l'opération s'écrit

$$t \cdot (x, y) = (t^p x, t^{-m} y).$$

Les invariants de l'orbite exceptionnelle avant la chirurgie sont (m, u) . L'équation (1) s'écrit :

$$(8) \quad mU - pu = 1.$$

En soustrayant (7) on obtient $m(U - v) - u(p - n) = 0$, soit :

$$(9) \quad b_1 = \frac{p - n}{m} = \frac{U - v}{u}$$

(en particulier $p = mb_1 + n$). Il va sans dire qu'on n'espère plus obtenir des $b_i > 0$ dans ce cas (voir 3.4 par exemple).

3.3 Construction d'un éventail

On a ainsi deux séries de nombres $(b_1, \dots, b_r)$ et $(c_1, \dots, c_s)$ associées aux deux familles de nappes montantes issues du minimum de H . Elles définissent une sorte d'"étoile à deux branches sans centre" sur laquelle on peut faire le même type de constructions que plus haut.

On va montrer ici qu'en réalité, l'opération de S^1 se prolonge (de façon unique) en une opération de T^2 et que W était en fait une surface torique complexe.

Choisissons une base (e_1, e_2) de $\mathbf{Z}^2$, et posons :

$$\begin{array}{llll} v_0 & = & e_2 & w_0 & = & e_1 \\ v_1 & = & e_1 & w_1 & = & e_2 \\ v_2 & = & -v_0 + b_1 v_1 & \text{d'une part, et} & w_2 & = & -w_0 + c_1 w_1 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ v_{r+1} & = & -v_{r-1} + b_r v_r & & w_{s+1} & = & -w_{s-1} + c_s w_s \end{array}$$

de l'autre.

Lemme 3.3.1 *Le déterminant $\det(w_{s+1}, v_{r+1})$ vaut 1.*

Démonstration. Commençons par écrire les deux vecteurs dans la base canonique :

$$\begin{aligned} (w_s, w_{s+1}) &= (w_{s-1}, w_s) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c_s \end{pmatrix} \\ &= (w_0, w_1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c_s \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c_s \end{pmatrix} \\ &= (w_0, w_1) \begin{pmatrix} -D_{s-1} & -D_s \\ N_{s-1} & N_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $[c_1, \dots, c_s] = \frac{N_s}{D_s}$, et donc : $w_{s+1} = -D_s e_1 + N_s e_2$. De même $v_{r+1} = -D'_r v_0 + N'_r v_1 = N'_r e_1 - D'_r e_2$ où $[b_1, \dots, b_r] = \frac{N'_r}{D'_r}$.

Calculons maintenant ces réduites. On a vu (9) qu'après le premier point critique d'indice 2, les invariants de Seifert de l'orbite exceptionnelle sont $(mb_1 + n, ub_1 + v)$. Ensuite, la relation (3) s'applique avec $N_0 = m$, $D_0 = u$ puis par récurrence pour donner finalement :

$$(10) \quad (m', u') = (mN'_r + nD'_r, uN'_r + vD'_r)$$

où (m', u') sont les invariants de Seifert de l'orbite sur cette nappe montante près du maximum : l'opération y est $(t^{-m'}x, t^{-n'}y)$ avec³ $m'v' - n'u' = -1$. On en déduit :

$$\begin{cases} N'_r &= m'v &- nu' \\ D'_r &= -m'u &+ mu' \end{cases}$$

De même, si l'on suit la nappe contenant les orbites exceptionnelles $(n, n - v)$, on va obtenir :

$$\begin{cases} N_s &= n'(m - u) &- m(n' - v') &= mv' &- n'u \\ D_s &= -n'(n - v) &+ n(n' - v') &= -nv' &+ n'v \end{cases}$$

ce qui permet de finir :

$$\det(w_{s+1}, v_{r+1}) = D_s D'_r - N_s N'_r = -(m'v' - n'u')(mv - nu) = 1.$$

□

Ainsi, dans la suite $(w_1, \dots, w_{s+1}, v_{r+1}, \dots, v_1)$, le déterminant de deux vecteurs consécutifs (y compris (v_1, w_1)) vaut 1. On a même mieux :

Proposition 3.3.2 $(w_1, \dots, w_{s+1}, v_{r+1}, \dots, v_1)$ est le squelette de dimension 1 de l'éventail définissant une surface torique complète et lisse.

Démonstration. La seule chose qui reste à vérifier est qu'on n'a pas fait plusieurs fois le tour de l'origine. Considérons la variété W et éclatons le minimum et le maximum suffisamment de fois pour que dans la variété $\widetilde{W}$ obtenue, les *extrema* soient réalisés le long de sphères. Nous savons grâce à 2.3 que $\widetilde{W}$ est une surface torique. Il est clair qu'un éventail définissant $\widetilde{W}$ est de la forme :

$$(w_1, \dots, w_{s+1}, u_1, \dots, u_i, v_{r+1}, \dots, v_1, u_{i+1}, \dots, u_{i+j}).$$

Si celui-ci est un éventail, le nôtre *a fortiori*. □

3.4 La combinatoire des nappes de gradient (avec les ordres des stabilisateurs des orbites exceptionnelles) dans le cas des exemples de 1.5 est donnée par la figure 4 dans les cas $n > m$ (à gauche, pour le projectif) et $n > mk$ (à droite, pour la surface de Hirzebruch). Les calculs précédents donnent $b_1 = -1$ dans le premier exemple, et l'éventail est défini par le 1-squelette $(e_1, e_2, -e_1 - e_2)$, où l'on reconnaît (heureusement) $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, et $b_1 = -k, c_1 = 0$ dans le deuxième où l'éventail $(e_1, e_2, -e_1 - ke_2, -e_2)$ est bien celui qu'on s'attend à trouver.

³le cas où le maximum n'est pas isolé n'est pas exclu : on peut avoir $\{m', n'\} = \{1, 0\}$.

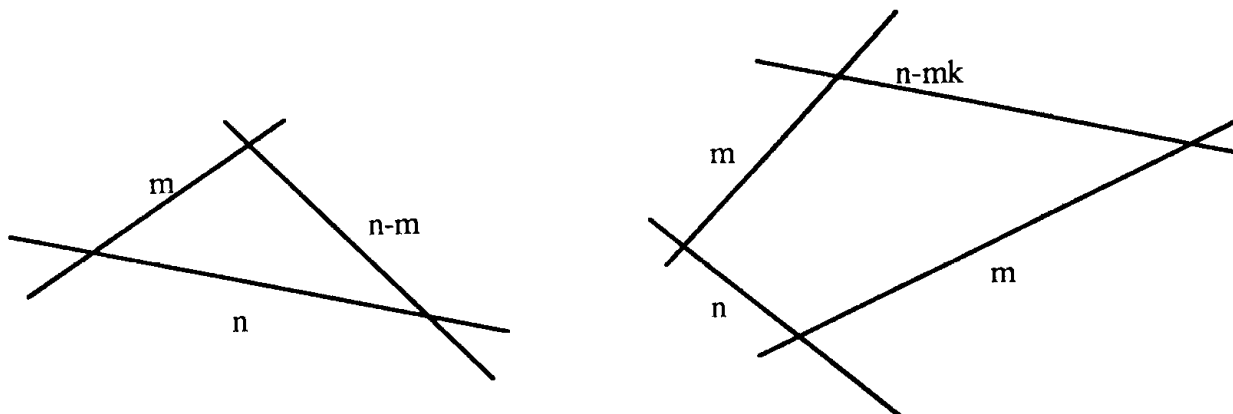


Figure 4

3.5 Opérations de T^2

Un corollaire à première vue un peu étonnant des résultats précédents est une version renforcée de 2.3.1.

Théorème 3.5.1 *Soit W une variété symplectique compacte de dimension 4 munie d'un hamiltonien périodique H . Pour que H soit une projection du moment d'une opération hamiltonienne du tore T^2 , il faut et il suffit que*

1. *une des surfaces réduites d'un niveau régulier de H soit une sphère S^2*
2. *aucun niveau de H ne rencontre plus de deux nappes de gradient.*

De plus, quand ces deux conditions sont réalisées, l'opération de T^2 est bien déterminée par H .

En effet, on a pu reconstruire tout l'éventail (décrivant l'opération hamiltonienne de T^2) rien qu'avec les entiers b_i, c_j qui sont les auto-intersections des nappes de gradient de H et donc bien déterminées par H . $\square$

C'est le cas en particulier quand tous les points fixes sont isolés, comme on l'a vu plus haut :

Corollaire 3.5.2 *Soit W une variété symplectique compacte de dimension 4 munie d'une opération hamiltonienne de S^1 dont tous les points fixes sont isolés. Alors W est une surface torique, et l'opération hamiltonienne de S^1 est induite par une opération de T^2 . $\square$*

En fait, ce résultat n'est pas si étonnant qu'il n'y paraît. On a déjà remarqué plus haut qu'un éventail en dimension 2 n'est qu'une sorte de diagramme de plombage ; or l'éventail décrit une variété munie d'une opération de $(C^*)^2$, alors que les plombages décrivent des variétés munies d'opérations de C^* . La raison est bien sûr que les âmes des bandes utilisées pour plomber sont des S^2 et peuvent donc être munies d'une opération

complémentaire de S^1 , avec pour deux points fixes les deux points de la bande utilisés pour les recollements définissant le plombage.

Si l'opération de S^1 détermine l'éventail, en retour celui-ci détermine la variété, mais pas celui des cercles S^1 qui nous intéresse, il faut rajouter une donnée, par exemple les deux entiers m, n de (6).

Il n'y a rien d'étonnant non plus à ce qu'on retrouve ici la classification des T^2 -opérations hamiltoniennes effectives sur les variétés de dimension 4 (cas particulier de [6]) puisque ce résultat de T. Delzant a été une des sources d'inspiration du présent article.

Il est classique (voir [15] par exemple) que les surfaces toriques sont obtenues par éclatements successifs à partir du projectif ou d'une surface de Hirzebruch. On en tire ici :

Proposition 3.5.3 *Soit W une variété symplectique compacte de dimension 4 munie d'une opération hamiltonienne de S^1 dont tous les points fixes sont isolés. Alors W est obtenue par une suite d'éclatements à partir de $\mathbf{P}(\mathcal{O}(k) \oplus 1)$ ou $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ muni de l'opération hamiltonienne induite par une inclusion de S^1 dans le gros tore réel (autrement dit, à partir de l'un des exemples de 1.5). $\square$*

4 Conclusion

4.1 Voici d'abord un résumé des résultats des paragraphes précédents :

1. Si les *extrema* sont réalisés par des surfaces

- de façon équivalente, il y a deux surfaces de points fixes,
- c'est automatique si l'une quelconque des surfaces réduites des niveaux réguliers a un genre $g \geq 1$ (1.4.1),
- toutes les réduites des niveaux réguliers, la surface réalisant le minimum et celle réalisant le maximum sont des exemplaires de la même surface B ,
 - (a) W se décrit par plombage achevé le long d'un graphe en étoile (2.1.4) achevable,
 - (b) elle s'obtient aussi par une suite d'éclatements à partir d'un $\mathbf{P}(L \oplus 1)$ (2.2.1),
 - Si en plus l'opération est semi-libre, on peut n'éclater que des points d'une des surfaces extremales (2.2.2),
 - (c) si $g = 0$ et si aucun niveau ne rencontre plus de deux nappes montantes, on peut aussi décrire W comme une surface torique complexe (2.3).

2. Si un seul des deux *extrema* est un point fixe isolé

- de façon équivalente, il y a une unique surface de points fixes,

- l'autre *extremum* est réalisé le long d'une sphère, et toutes les surfaces réduites des niveaux réguliers sont des sphères (1.4.1),
 - (a) si un niveau de H rencontre trois (ou plus) nappes de gradient, W est obtenue par une suite d'éclatements à partir d'une surface torique (3.1.1),
 - (b) sinon, W elle-même est une surface torique (3.5.1).

3. Si les deux *extrema* sont des points isolés,

- le genre des surfaces réduites est nul (1.4.1),
- aucun niveau de H ne rencontre plus de deux nappes de gradient (3.1),
- W est une surface torique (3.5.1).

Et dans tous les cas, W est obtenue par une suite d'éclatements à partir d'une opération de S^1 sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ou sur un $\mathbf{P}(L \oplus 1)$ (3.5.3).

Cette liste est à comprendre comme liste de toutes les classes de variétés symplectiques compactes de dimension 4 à *difféomorphisme équivariant préservant une structure presque complexe adaptée* près. Pour conclure, faisons quelques remarques sur la forme symplectique.

4.2 Une jolie application du lemme 1.7.1

On sait que toutes les réductions symplectiques des niveaux réguliers v_a s'identifient à une même surface B , avec forme symplectique η_a . On considère le graphe de la fonction "volume" :

$$\mathcal{V}(a) = \int_B \eta_a$$

D'après un célèbre théorème de Duistermaat et Heckman [7], $\mathcal{V}$ définit une fonction continue et affine par morceaux de $H(W)$ dans $\mathbf{R}$. Plus précisément, elle est affine sur chaque intervalle ne contenant pas de valeur critique de H , de pente la classe d'Euler commune des " S^1 -fibrés" $V_a \rightarrow B$. Grâce au lemme 1.7.1, on sait aussi comment la pente varie au passage d'une valeur critique, en particulier elle est strictement décroissante, et la fonction $\mathcal{V}$ est concave ; il est probablement plus judicieux, dans le contexte des opérations hamiltoniennes, de dire exactement le "contraire", c'est-à-dire :

Remarque. La fonction $\mathcal{V}$ est une fonction strictement positive, la partie de $\mathbf{R}^2$ située sous son graphe est un polygone convexe. Par exemple c'est un triangle ou un trapèze quand H n'a que deux valeurs critiques (*voir* le paragraphe 1).

En particulier, si l'opération de S^1 considérée s'étend en une opération du tore T^2 , ce polygone se construit facilement à l'aide de l'image du moment de l'opération de T^2 . Soit $J : W \rightarrow (\mathfrak{t}^2)^*$ le moment d'une opération hamiltonienne de T^2 sur une variété symplectique compacte W de dimension 4 ; soit $p : (\mathfrak{t}^2)^* \rightarrow \mathfrak{t}^*$ la projection sur l'algèbre de Lie duale d'un cercle $S^1 \hookrightarrow T^2$, $H = p \circ J$ le hamiltonien associé, et $\mathcal{V}$ sa fonction

volume. Le graphe de $\mathcal{V}$ s'obtient en "aplatissant" le polygone image de J sur la droite t^* comme sur la figure 5.

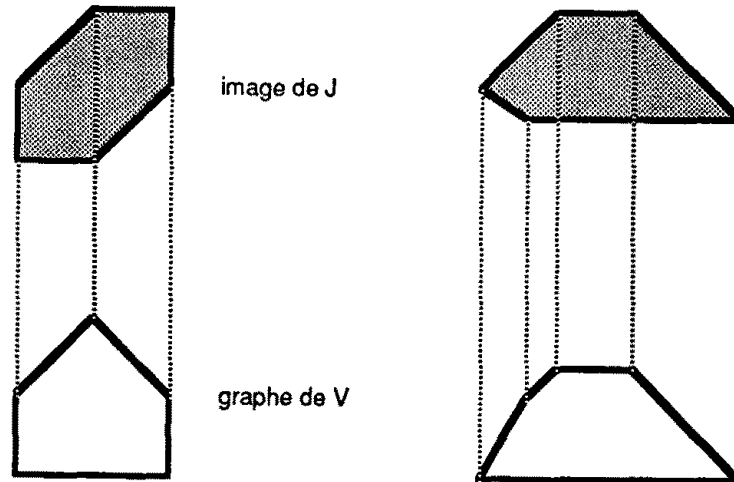


Figure 5

4.3 Volumes des nappes de gradient

La superposition du polygone "graphe de la fonction volume" et de l'arbre dual au graphe de plombage va permettre de décrire complètement la classe de cohomologie de la forme symplectique (figure 6).

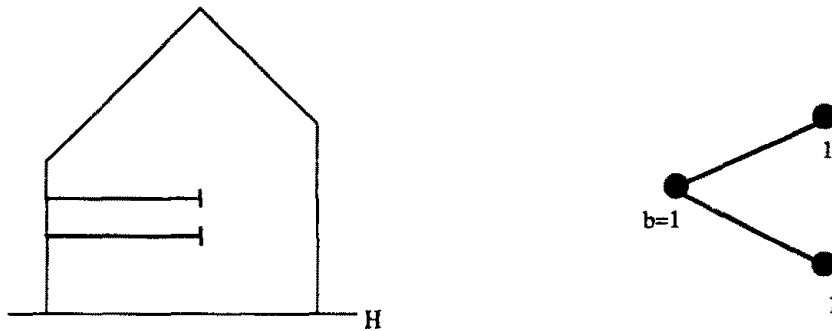


Figure 6

Le théorème de Duistermaat et Heckman permet aussi de calculer les volumes des nappes de gradient de H . Celles-ci sont orientées de façon que pour une sphère S^2 , nappe *montante* allant du niveau critique a_i au niveau critique a_j ,

$$\int_{S^2} \omega = a_j - a_i.$$

Ces volumes sont des invariants de la classe de cohomologie de la forme symplectique. Inversement :

Proposition 4.3.1 *La classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(W; \mathbf{R})$ est déterminée par les volumes des nappes montantes de gradient et (éventuellement) le volume de la surface $B_{\min}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que les classes fondamentales de $B_{\min}$ et celles des nappes montantes engendrent $H_2(W; \mathbf{R})$ ce qu'on voit facilement par Mayer-Vietoris. $\square$

Remarque. Si le maximum de H est aussi réalisé par une surface $B_{\max}$ (un exemplaire de B), et si le fibré normal de $B_{\max}$ dans W n'est pas trivial (cas où $b - \sum \beta_i \neq 0$), on peut remplacer le volume de la dernière nappe montante par celui de $B_{\max}$: on le démontre par Mayer-Vietoris, et on le voit très bien sur le diagramme de la figure 7.

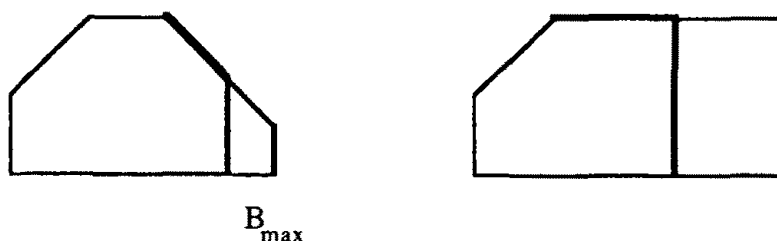


Figure 7

A droite le fibré normal de $B_{\max}$ est trivial, le volume de $B_{\max}$ est fixé par les données précédentes quelque soit le volume de la dernière nappe montante, qui peut être arbitraire. A gauche au contraire l'un des deux volumes détermine l'autre.

Grâce à la description de ces variétés par éclatements, il semble assez facile de vérifier que les conditions nécessaires "évidentes" imposées aux réels positifs que sont les volumes de ces surfaces par la positivité de la fonction $\mathcal{V}$ suffisent pour qu'ils déterminent une classe de cohomologie qui contienne une forme symplectique invariante. Le diagramme classifierait alors les variétés symplectiques compactes de dimension 4 comme plus haut avec en plus la classe de cohomologie de la forme (voir une étude complète de cette question pour le cas torique dans [6]).

Références

- [1] M. Atiyah, *Convexity and commuting hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **23** (1982), 1–15.

- [2] M. Atiyah, *Angular momentum, convex polyhedra and algebraic geometry*, Proceedings Edinburgh Math. Soc. **26** (1983), 121–138.
- [3] F. Bonahon, L. Siebenmann, *The classification of Seifert fibred 3-orbifolds*, Low dimensional topology, R. Fenn, London Math. Soc. Lecture Notes Series, Cambridge University Press, (1985), 19–83.
- [4] J.L. Brylinski, *Éventails et variétés toriques*, Séminaire sur les singularités des surfaces, Springer Lect. Notes in Math. **777** (1980), 248–288.
- [5] V. I. Danilov, *La géométrie des variétés toriques*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), 85–134.
- [6] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France (à paraître).
- [7] J. J. Duistermaat, G. J. Heckman, *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, Invent. Math. **69** (1982), 259–269.
- [8] R. Fintushel, *Classification of circle actions on 4-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **242** (1978), 377–390.
- [9] T. Frankel, *Fixed points on Kähler manifolds*, Ann. of Math. **70** (1959), 1–8.
- [10] V. Guillemin, S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping, I et II*, Invent. Math. **67** (1982), 491–513. **77** (1984), 533–546.
- [11] P. Iglesias, *Classification des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4*, Centre de physique théorique, Marseille, 1984.
- [12] J. Jurkiewicz, *Torus embeddings, polyhedra, k^* -actions and homology*, Dissertationes Mathematicae **236** (1985).
- [13] D. McDuff, *Examples of simply-connected symplectic non-kählerian manifolds*, J. Differential Geometry **20** (1984), 267–277.
- [14] D. McDuff, *The moment map for circle actions on symplectic manifolds*, preprint, 1988.
- [15] T. Oda, *Convex Bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik, Springer, 1988.
- [16] P. Orlik, *Seifert manifolds*, Lecture Notes in Mathematics 291, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [17] P. Orlik, P. Wagreich, *Algebraic surfaces with k^* -action*, Acta Math. **138** (1977), 43–81.
- [18] R. von Randow, *Zur Topologie von dreidimensionalen Baummanigfaltigkeiten*, Bonner Math. Schriften **14** (1962).

- [19] K. Ahara, A. Hattori, *A classification of 4 dimensional symplectic S^1 manifolds admitting moment map*, 1988.

Mathématiques
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg cedex

A.M.S. Subject Classification (1988) : 57R13, 53C57, 14L32.

Mots-clefs : Application moment, Opérations hamiltoniennes, Plombages, Variétés toriques.