
SYSTÈMES HAMILTONIENS INTÉGRABLES

par

Michèle Audin

Table des matières

Introduction : l'exemple de la toupie.....	1
Rotation, précession, nutation.....	2
Les équations d'Euler-Poisson.....	4
Une courbe elliptique.....	6
Systèmes hamiltoniens, intégrabilité.....	7
Définition d'un système hamiltonien.....	7
Définition d'un système hamiltonien intégrable.....	10
Exemples.....	11
Le théorème de Liouville.....	12
Énoncé géométrique.....	12
Version algébrique du théorème de Liouville.....	14
Comment montrer qu'un système hamiltonien est ou n'est pas intégrable?.....	17
Motivation : Euler, Lagrange, Kowalevski, le solide et l'attitude d'un satellite.....	17
La théorie de Galois et le théorème de Morales-Ramis.....	19
Application : non-intégrabilité de l'attitude d'un satellite.....	22
Questions.....	26
Références.....	26

Introduction : l'exemple de la toupie

La théorie des systèmes hamiltoniens intégrables est une théorie très vaste dont on pourrait parler pendant des heures. Elle s'intéresse à certains systèmes différentiels issus de la mécanique classique. Les méthodes d'étude du comportement des solutions

se situent à la croisée de chemins variés : géométrie algébrique, représentation des algèbres de Lie, systèmes dynamiques. Cette théorie présente donc beaucoup de multiples facettes. Je vais naturellement me limiter ici à quelques-uns de ces aspects : je vais expliquer ce qu'est un système intégrable, puis montrer sur des exemples comment on peut utiliser la géométrie algébrique réelle pour étudier de tels systèmes. Je m'intéresserai enfin à la question : comment démontrer qu'un système est, ou n'est pas, intégrable ?

Rotation, précession, nutation. — Peut-être y a-t-il parmi vous des gens qui croient n'avoir jamais vu un système intégrable ? Ils ont tort, tout le monde en a vu ! J'en ai apporté un, c'est l'exemple que je connais le mieux et c'est celui dont je vais parler aujourd'hui : il s'agit tout simplement d'une toupie. Je vous propose donc ici une expérience mathématique. [Michèle Audin met la toupie en mouvement sur le bureau.]

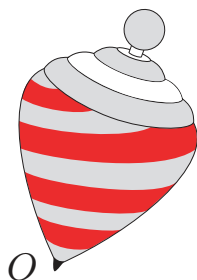


FIGURE 1. Toupie en mouvement

C'est un exemple de ce que l'on appelle un solide avec un point fixe dans un champ de gravitation constant. Le champ de gravitation constant est, tout simplement, la pesanteur. Le point fixe est, moins simplement, le point de contact de la toupie avec la table, que l'on considère donc ici comme fixe (c'est le point O sur la figure). La toupie étant solide, elle ne se déforme pas, l'autre extrémité de son axe se promène sur une sphère de centre O .

Le mouvement de la toupie est assez compliqué : il se décompose en trois mouvements distincts,

- la *rotation* propre, rotation de la toupie autour de son axe,
- la *précession*,
- la *nutation*.

Pour expliquer ce que sont ces trois types de mouvements, je vais d'abord considérer un autre exemple de toupie : la Terre.

On sait qu'elle est animée elle aussi de ces trois mouvements :

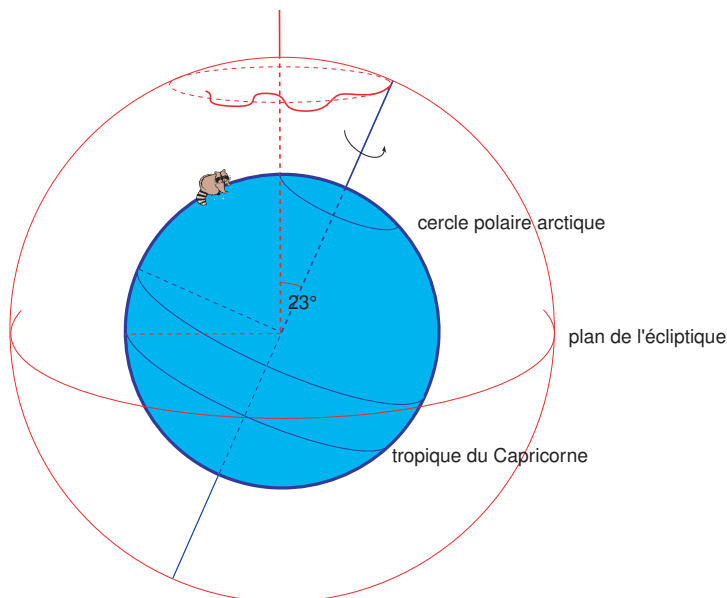


FIGURE 2. La Terre en mouvement

- La *rotation* du globe autour de l'axe reliant les pôles (c'est la définition des pôles).
- L'axe lui-même tourne d'environ 50 secondes d'arc par an, en décrivant un cône ; il fait donc un tour complet du cône en un peu moins de 26 000 ans. Ce phénomène est connu sous le nom de *précession des équinoxes*. Les équinoxes sont moments de l'année où la durée du jour est égale à celle de la nuit, de nos jours les 21 mars et 21 septembre. Le mouvement de précession fait que les dates des équinoxes évoluent au cours du temps. Ils seront inversés après une période de 13 000 années lorsque l'extrémité de l'axe de la Terre aura parcouru un demi-cercle : dans 13 000 ans, ce qui est le printemps aujourd'hui dans l'hémisphère nord sera l'automne (et vice versa).
- La *nutation*. S'il n'y avait que la précession, chaque pôle de la Terre décrirait un cercle. En réalité, il décrit une courbe sinueuse, en oscillant autour de ce cercle : ce sont ces oscillations qu'on appelle la nutation. C'est un phénomène compliqué, superposition de plusieurs mouvements de nutation avec des périodes différentes ; l'effet dominant a une période d'environ 19 ans et une amplitude inférieure à 20 secondes d'arc. La nutation induit une oscillation des cercles polaires et des tropiques du Cancer et du Capricorne autour de leurs latitudes moyennes.

Le mouvement de l'axe est représenté de façon très exagérée sur la figure 2. On y voit bien l'effet combiné de la précession et de la nutation : l'extrémité de l'axe ne décrit pas un cercle mais oscille entre deux cercles parallèles.

On peut observer des mouvements de ces trois types quand on regarde tourner une toupie. Un peu de géométrie algébrique réelle va nous permettre de les expliquer, du moins dans le cas très simplifié d'une toupie (symétrique) soumise à la pesanteur (le champ constant mentionné ci-dessus). En astronomie, le problème est un peu différent (la Terre n'est pas posée sur une table) et, pour dire la vérité, il est beaucoup plus compliqué : la précession et la nutation de l'axe sont dues aux forces de marées du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial de la Terre ; de plus, la Terre n'est pas vraiment un solide, sa croûte se déforme, les océans bougent, il y a du frottement partout, etc. Ce que je vais vous raconter ici n'est donc pas une théorie de la précession et de la nutation de la Terre ⁽¹⁾, mais beaucoup plus simplement d'une toupie posée sur sa pointe.

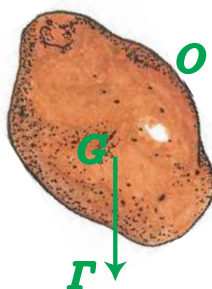


FIGURE 3. Solide avec un point fixe dans un champ constant

Les équations d'Euler-Poisson. — On considère un solide, dont on appelle G le centre de gravité. Il est fixé par un point O . Un champ constant agit sur ce solide : ici, ce sera la pesanteur, représentée par le vecteur Γ . Attention, Γ est constant, vu de l'extérieur, quand je l'écris dans un repère fixe. Cependant, je vais écrire les équations du mouvement dans un repère mobile d'origine O lié au solide, dans lequel, bien sûr, Γ varie. Les variables dynamiques sont les coordonnées du vecteur $\mathbf{M}$, moment angulaire (ou moment cinétique) par rapport à O . On écrit donc les équations dans un repère lié au solide. Elles décrivent la variation des vecteurs $\mathbf{M}$ et Γ en fonction

1. Pour la théorie de la précession et de la nutation terrestres, voir par exemple le traité classique de Tisserand [26].

du temps. Le fait que le champ $\mathbf{\Gamma}$ soit constant dans le repère fixe se traduit, dans le repère mobile, par l'équation :

$$(1) \quad \dot{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{\Omega}$$

où $\mathbf{\Omega}$ est le vecteur de rotation instantanée et où $\dot{\mathbf{\Gamma}} = d\mathbf{\Gamma}/dt$ (je note la dérivation par rapport au temps par un point). Ce système est appelé « les » (il y en a trois) équations d'Euler.

De la même manière, $\mathbf{M}$ satisfait à l'équation

$$(2) \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{L}$$

où ($\dot{\mathbf{M}} = d\mathbf{M}/dt$ et) $\mathbf{L} = \overrightarrow{GO}$. Notons que $\mathbf{L}$ est constant (dans le repère mobile). Le terme supplémentaire $\mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{L}$ est le moment de la force extérieure (ici, la pesanteur). Les équations (1) et (2) sont parfois appelées les *équations d'Euler-Poisson*. Les vecteurs $\mathbf{M}$ et $\mathbf{\Omega}$ sont liés par la relation :

$$\mathbf{M} = \mathcal{J}\mathbf{\Omega}$$

où $\mathcal{J}$ est une matrice symétrique définie positive (la *matrice d'inertie*), qui décrit la répartition des masses dans le solide. Soit dit en passant, c'est à propos de cette matrice parce qu'il étudiait le mouvement d'une toupie que Lagrange a démontré, probablement pour la première fois, que toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée : comme quoi la mécanique mène à tout...

On remarque immédiatement une propriété intéressante du système différentiel (1)-(2) : certaines quantités sont conservées au cours du temps.

D'abord, l'énergie totale (nous faisons de la mécanique conservative) :

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{L}.$$

On aura reconnu dans le premier terme l'énergie cinétique, dans le deuxième l'énergie potentielle.

Les équations d'Euler (1) sont la traduction infinitésimale du fait que $\mathbf{\Gamma}(t)$ est l'image de $\mathbf{\Gamma}(0)$ par une rotation, la norme de $\mathbf{\Gamma}$ est donc constante. Ce n'est pas parce que le repère varie que l'intensité de la pesanteur change ! De même, les équations (1)-(2) impliquent que $\dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}} = 0$, de sorte que $\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Gamma}$ reste constante, autrement dit, la projection du moment cinétique sur la direction de $\mathbf{\Gamma}$, c'est-à-dire, si l'on veut, sa composante « verticale », est constante, je choisis les unités de façon que cette constante soit égale à 1. De ce fait, les équations du mouvement, que nous avons écrites dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$, sont en fait un système différentiel sur une sous-variété de dimension 4 (celle définie par les deux équations $\|\mathbf{\Gamma}\| = 1$ et $\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Gamma} = c$, ses deux équations faisant baisser la dimension de 2).

Tout ce que je viens d'expliquer est valable pour n'importe quel solide avec un point fixe. Restreignons maintenant la discussion au cas de la toupie. Ma toupie a une *symétrie de révolution* autour de l'axe $\overrightarrow{GO}$, ce qui se traduit par le fait que la matrice

d'inertie a deux valeurs propres identiques (positives) et je choisirai les unités de sorte qu'elles soient égales à 1. Cette matrice s'écrit donc dans ce cas :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

où le troisième vecteur propre est $\mathbf{L} = \overrightarrow{GO}$, qui dirige l'axe de symétrie de la toupie. La symétrie de la toupie implique également la conservation du moment par rapport à l'axe, que je noterai K .

En résumé : j'ai considéré un système mécanique, j'ai écrit les équations qui régissent son mouvement et j'ai constaté qu'il y avait beaucoup de quantités conservées. Ce sont ces quantités que l'on appelle des *intégrales premières*. On verra tout à l'heure qu'un système est dit intégrable s'il possède « suffisamment » d'intégrales premières. Mais avant de vous donner la définition précise, je voudrais vous montrer comment (et pourquoi) intervient la géométrie algébrique (très élémentaire) dans l'étude de la toupie.

Une courbe elliptique. — Je vais décrire ici le mouvement de nutation de la toupie. Je m'intéresse donc à la variable dynamique qui est l'altitude de l'extrémité de l'axe dans le repère fixe, qui était aussi la troisième composante de $\mathbf{\Gamma}$ (composante sur $\mathbf{L}$) et que je renomme x . C'est aussi le cosinus de l'angle que fait l'axe de la toupie avec la verticale (voir la partie gauche de la figure 4).

La conservation de H (l'énergie), de $\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Gamma}$ (la composante verticale du moment cinétique) et de K (le moment par rapport à l'axe) permettent d'éliminer entre les équations du système différentiel (voir par exemple [2, § 30]) et d'obtenir une équation différentielle satisfaite par x , à savoir, pour $H = h$, $K = k$ et $\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Gamma} = c$:

$$(3) \quad \dot{x}^2 = (1 - x^2) \left(2h - \frac{1}{\mu} k^2 - 2x \right) - (c - kx)^2.$$

Cette équation est de la forme :

$$\dot{x}^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré 3. Ses solutions $(x, \dot{x})$ varient donc sur la courbe d'équation $y^2 = P(x)$, une courbe elliptique représentée sur la partie droite de la figure 4.

Notre polynôme P a trois racines réelles. Les trois points d'intersection de la courbe avec l'axe horizontal $y = 0$ sont ces trois racines. La courbe réelle a deux composantes connexes (elle n'en aurait qu'une si P n'avait qu'une racine réelle). Les deux racines a et b jouent un rôle important : comme x est contraint à rester sur le petit ovale, l'extrémité de l'axe de la toupie est contraint à osciller entre les deux cercles parallèles d'altitudes a et b , comme on le voit sur la figure 4. Notons que la branche infinie de la

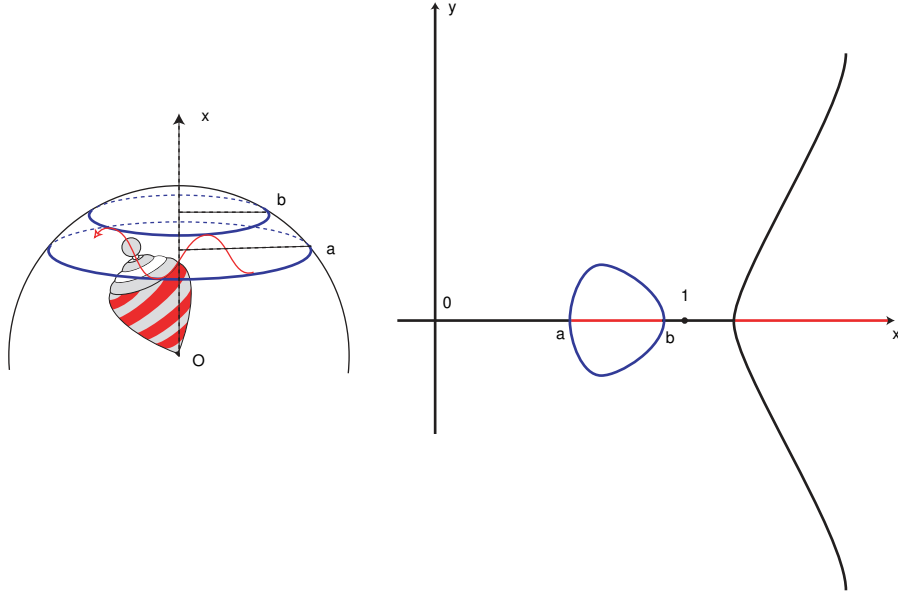


FIGURE 4. Courbe elliptique réelle

courbe elliptique n'a pas de signification en termes des mouvements réels de la toupie, puisqu'elle correspond à des valeurs de x supérieures à 1.

C'est un premier exemple (très élémentaire) de discussion d'un problème de mécanique classique au moyen d'un objet de la géométrie algébrique (une courbe elliptique). J'espère que cet exemple vous a suffisamment motivés pour justifier les quelques définitions un peu plus formelles qui vont suivre.

Systèmes hamiltoniens, intégrabilité

Définition d'un système hamiltonien. — Nous avons tous rencontré, par exemple dans les cours de physique, les « équations de Hamilton », des systèmes différentiels de la forme :

$$(4) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

où les $2n$ inconnues $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ sont des fonctions du temps. La fonction $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée le *hamiltonien*. Les équations (4) expriment le fait que les trajectoires $(q(t), p(t))$ du système mécanique étudié sont, à chaque instant, tangentes au champ de vecteurs $(\partial H / \partial p, -\partial H / \partial q)$ (un champ de vecteurs défini par H).

Courbes elliptiques.

Une courbe elliptique complexe $\mathcal{C}$ peut être décrite par une équation du type

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P(x)\}$$

où P est un polynôme (à coefficients complexes) de degré 3. On la rend compacte en lui ajoutant un point (que l'on appelle point à l'infini de la courbe, mais que l'on considère aussi appartenir à toutes les droites parallèles à l'axe des y : ainsi toutes les droites du plan rencontrent bien la courbe en trois points). En utilisant un peu d'analyse complexe (la fonction $\wp$ de Weierstrass), on peut montrer qu'une courbe elliptique complexe est isomorphe à un tore complexe de dimension 1, quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau Λ (voir les figures 5 et 7).

Si le polynôme P est à coefficients réels, la courbe complexe est invariante par la conjugaison complexe. On peut imaginer que la conjugaison complexe est, sur le tore dessiné ici, la symétrie par rapport au plan horizontal, et que les points réels de la courbe (qui sont les points invariants par conjugaison complexe) sont les points du tore situés dans le plan horizontal. Cette partie réelle a alors deux composantes connexes : cette image est adéquate quand le polynôme réel P a trois racines réelles, ce qui fait que la courbe réelle a bien deux composantes connexes.

L'isomorphisme entre la courbe elliptique et le tore permet de transporter sur la courbe la structure de groupe du tore. La loi de groupe obtenue sur la courbe elliptique peut aussi être définie directement, de manière géométrique : trois points A , B et C vérifient $A + B + C = 0$ si et seulement si ils sont alignés. Avec cette définition (équivalente), l'associativité est difficile à démontrer, tandis que l'isomorphisme précédent l'implique naturellement... dès que l'on a démontré que c'est un isomorphisme (un théorème d'Abel).

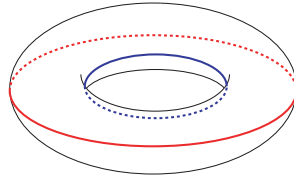


FIGURE 5. Un tore complexe ; les deux cercles, intersections du tore avec le plan horizontal sont les deux composantes d'une courbe elliptique réelle comme celle représentée sur la figure 4.

Plus généralement, on peut remplacer $\mathbb{R}^{2n}$ par une variété W de dimension $2n$ et considérer une fonction H définie sur W . Je vous demande maintenant : comment construire un champ de vecteurs sur W à partir de la fonction H ? On prend le gradient ? Mais attention, pour définir le gradient, on considère la différentielle de la fonction, qui définit une forme linéaire sur chaque espace tangent ; cette forme linéaire est le produit scalaire par un certain vecteur, et c'est ce vecteur qu'on appelle le gradient. Or, sur la variété W , je n'ai pas dit que j'avais un produit scalaire. Alors, que faire ? Il est certain que nous avons besoin d'un peu plus de structure.

Plutôt que d'utiliser un produit scalaire, on emploie une 2-forme différentielle non dégénérée ω sur W , c'est-à-dire, pour chaque x , une forme bilinéaire alternée non dégénérée ω_x sur $T_x W$ (l'espace tangent à W en x). Étant non dégénérée, ω nous

donne, en chaque point x de W , un isomorphisme entre l'espace tangent $T_x W$ et l'espace cotangent $T_x^* W$ (elle joue le rôle qu'aurait joué un produit scalaire). Regardons maintenant la différentielle de H en x . Toujours grâce à la non-dégénérescence de ω , on peut l'écrire :

$$(dH)_x = \omega_x(\cdot, X_H(x))$$

pour un certain vecteur $X_H(x)$. On a ainsi associé à la fonction H un champ de vecteurs X_H , et on a obtenu l'analogie des équations de Hamilton (4) :

$$(5) \quad \dot{x} = X_H(x).$$

L'équation différentielle (5) est ce qu'on appelle *un système hamiltonien* sur W . Ses solutions sont des courbes paramétrées par le temps, $t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_{2n}(t))$, qui sont tangentes à $X_H(x)$ en chaque point x .

Puisque ω_x est une forme bilinéaire alternée, on a :

$$\forall x \in W, \quad (dH)_x(X_H(x)) = \omega_x(X_H(x), X_H(x)) = 0,$$

ce qui signifie que la fonction H est constante sur toute trajectoire solution de l'équation différentielle (5) : c'est une intégrale première.

Deux remarques.

- Je ne le repréciserai pas à chaque occasion, mais les fonctions considérées sont supposées suffisamment différentiables, disons $\mathcal{C}^\infty$.
- On dit qu'une variété W munie d'une telle forme différentielle ω est *symplectique* si, en plus, la forme ω est fermée ($d\omega = 0$). Je n'explique pas ici les raisons de cette hypothèse supplémentaire. Voir, par exemple [9, Chapitre II].

Pour donner un premier exemple, reprenons le système décrivant le mouvement du solide (1)-(2) :

$$\dot{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{L}$$

sur la sous-variété W de $\mathbb{R}^6$ définie par les deux équations

$$\|\mathbf{\Gamma}\| = 1, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Gamma} = c.$$

Géométriquement, la première équation signifie que $\mathbf{\Gamma}$ varie sur la sphère unité ; la deuxième équation signifie, quand $c = 0$, que $\mathbf{M}$ vit sur l'espace tangent à cette sphère, de sorte que W s'identifie au fibré tangent à la sphère S^2 . Quand c n'est pas nul, il suffit de remplacer $\mathbf{M}$ par $\mathbf{M} - c\mathbf{\Gamma}$ pour voir que la structure de W est la même.

La fonction H est ici l'énergie totale :

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{L}.$$

Il existe sur W (c'est un exercice facile) une 2-forme différentielle non dégénérée telle que le système hamiltonien correspondant coïncide avec le système du solide.

J'insiste à nouveau sur le fait que dans cet exemple, pour la toupie symétrique, H n'était pas la seule quantité conservée : il y avait aussi K , le moment par rapport à l'axe de la toupie (et aussi $\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Gamma}$, la composante verticale du moment par rapport

à O et $\|\Gamma\|$, mais on les a déjà prises en compte en fixant l'une égale à c et l'autre à 1 quand on a restreint l'espace de $\mathbb{R}^6$ à W). J'en arrive donc à la définition d'un système hamiltonien intégrable.

Définition d'un système hamiltonien intégrable. — Il y a plusieurs notions d'intégrabilité et définitions sur le marché (voir par exemple [27]), je choisis ici la notion d'intégrabilité « au sens de Liouville ». Voici, d'abord en termes vagues, quelle en est l'idée :

« **Définition** ». *Un système hamiltonien est dit intégrable s'il possède « beaucoup » d'intégrales premières.*

Puisque je fais un exposé de mathématique, je dois être plus précise. Je dois aussi être prudente : si H est une intégrale première, vous comprenez bien que $2H$ et, par exemple, $\exp(H)$ le sont aussi. Je m'intéresse donc aux intégrales premières fonctionnellement indépendantes, c'est-à-dire telles qu'en presque tout point de W leurs différentielles soient linéairement indépendantes. L'intégrabilité au sens de Liouville impose une condition supplémentaire sur ces intégrales premières, que je formule maintenant. Je vous rappelle qu'une intégrale première du système hamiltonien $\dot{x} = X_H(x)$, c'est une fonction f sur W qui est constante sur toutes les trajectoires définies par les solutions $x = x(t)$ de ce système, ce qui se traduit par l'égalité :

$$(6) \quad df_x(X_H(x)) = \omega_x(df_x, X_H(x)) = 0.$$

À une intégrale première f , je peux associer le champ de vecteurs X_f défini comme étant l'unique solution de

$$df_x = \omega_x(\cdot, X_f(x)).$$

La condition que Liouville impose aux intégrales premières indépendantes est que chacune d'elles soit constante sur les trajectoires de chacune des autres : c'est ce qu'on appelle l'*hypothèse d'involution* :

$$(7) \quad df_i(X_{f_j}) = 0 \quad \text{pour tous } i, j.$$

C'est une condition symétrique en i et j puisque $df_i(X_{f_j}) = \omega(X_{f_j}, X_{f_i})$, de plus elle est automatiquement vérifiée quand $i = j$.

En résumé, on a donc la définition mathématique suivante :

Définition 0.1. — Soit W une variété symplectique de dimension $2n$ et soit $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Le système hamiltonien associé à H est intégrable s'il possède n intégrales premières $f_1, \dots, f_n$ fonctionnellement indépendantes et en involution.

Pourquoi n intégrales premières et pas plus ? Eh bien, ce nombre n , qui est la moitié de la dimension, et qu'on appelle le *nombre de degrés de liberté* du système, est le nombre maximum possible d'intégrales premières indépendantes en involution :

on ne peut pas espérer en avoir plus, parce que l'hypothèse d'involution implique que les vecteurs $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$ engendrent, en chaque point x , un sous-espace totalement isotrope (on dit aussi lagrangien) de $T_x W$ et la dimension maximale d'un tel sous-espace est n .

Remarque. On peut toujours supposer que $f_1 = H$: c'est ce qu'on fait couramment. La condition (7) pour $j = 1$ est donc automatiquement vérifiée, du fait que les f_i sont constantes sur les trajectoires de X_H . En particulier, si $n = 2$, l'existence d'une deuxième intégrale première (indépendante de H) suffit pour que le système soit intégrable.

Exemples. — Avant d'étudier ce qu'apporte cette notion d'intégrabilité, voyons quelques exemples (ne serait-ce que pour nous assurer que nous ne parlons pas de l'ensemble vide).

Dans le cas de la toupie, nous avons obtenu un système hamiltonien sur une variété W de dimension 4, donc le nombre de degrés de liberté est 2. Pour que le système soit intégrable il suffit qu'il possède une intégrale première indépendante de H (l'hypothèse d'involution étant alors automatiquement satisfaite puisque $n = 2$). Or, on en a effectivement trouvé une : c'est le moment K par rapport à l'axe. La toupie est donc bien un exemple de système hamiltonien intégrable.

Voici d'autres exemples. D'abord, le pendule sphérique, que vous connaissez tous :

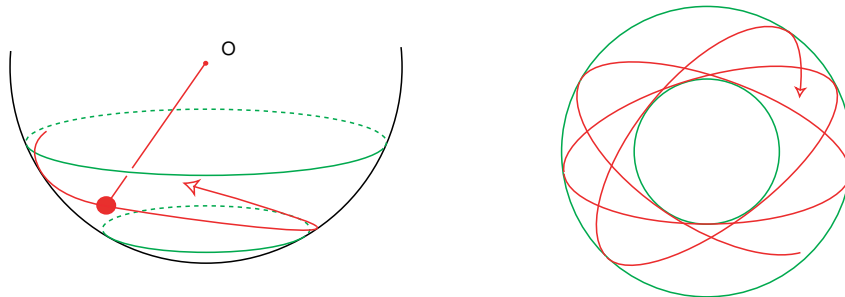


FIGURE 6. Pendule sphérique, vu de côté et du dessus

On attache une barre à un point fixe O et on l'abandonne à l'action de la pesanteur. Comme la barre est rigide, son extrémité se meut sur une sphère. L'état du système à chaque instant est caractérisé par la position et la vitesse de l'extrémité de la barre. Nous sommes encore ici sur une variété de dimension 4 (qui est d'ailleurs elle aussi le fibré tangent à la sphère), et donc il y a deux degrés de liberté. En plus de l'énergie totale, nous disposons d'une deuxième intégrale première, qui est le moment par rapport à la verticale (direction de la pesanteur). Là encore, l'hypothèse d'involution est automatiquement satisfaite puisque $n = 2$, et donc le système est intégrable. On

voit (sur la figure 6) que les trajectoires oscillent entre deux cercles parallèles, ce qui n'est pas sans rappeler le cas de la toupie. On verra que ce n'est pas un hasard.

Il y a d'autres exemples très jolis, ce sont les géodésiques sur des surfaces :

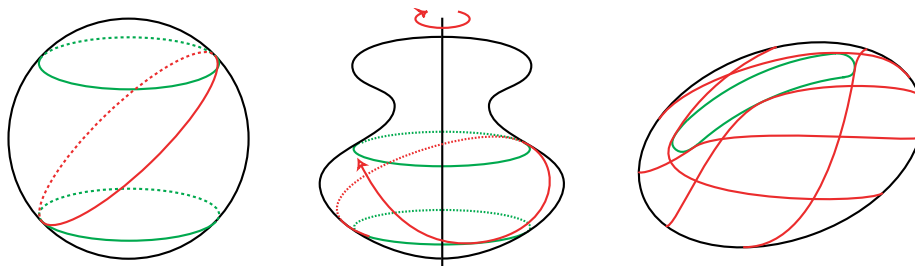


FIGURE 7. Géodésiques d'une sphère, d'une surface de révolution, d'un ellipsoïde

Une particule se ballade librement sur une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, la liberté signifiant ici qu'aucune force ne s'applique à elle, qu'elle n'obéit à aucune autre contrainte que celle de rester sur cette surface. Elle suit alors une *géodésique*. Par exemple, sur une sphère, les géodésiques sont les grands cercles. En général, pour n'importe quelle surface de révolution, on a un comportement assez analogue et il n'est pas très difficile de démontrer ce que l'on savait déjà depuis longtemps (du temps de Clairaut, au XVIII^e siècle) : une géodésique d'une surface de révolution restera toujours coincée entre deux cercles parallèles. Ce comportement rappelle à nouveau celui que nous avons observé dans les exemples de la toupie et du pendule sphérique.

Dans le cas d'un ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on s'aperçoit, là encore, que la géodésique oscille entre deux courbes (les lignes de courbure de l'ellipsoïde), sans jamais entrer dans la « zone interdite ». Ces résultats sont très classiques et ces trois exemples de mouvements géodésiques (figure 7) sont des systèmes hamiltoniens intégrables (ce n'est pas complètement évident dans le cas de l'ellipsoïde, mais c'est vrai, et connu au moins depuis Jacobi [15]). Dans tous les cas, on voit que les géodésiques restent coincées dans un domaine délimité par deux courbes (topologiquement un anneau). Ces remarques nous amènent au premier théorème de cette théorie.

Le théorème de Liouville

Énoncé géométrique. — Il s'agit d'un théorème dont une version a été découverte par Liouville [17] en 1853. On l'énonce aujourd'hui sous la forme, plus géométrique,

que lui ont donnée Mineur [20] en 1936, puis Arnold [2]. La présentation moderne que je trouve la plus élégante et la plus utile est celle de Duistermaat [14].

Théorème 0.1. — Soit W une variété symplectique de dimension $2n$ et soit $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que le système hamiltonien associé à H est intégrable avec n intégrales premières $f_1, \dots, f_n$ (indépendantes et en involution). Si $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ est une valeur régulière de $f = (f_1, \dots, f_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ et si $f^{-1}(c)$ est compacte, alors les composantes connexes de cette sous-variété de dimension n de W sont des tores. La trajectoire d'un point de cette sous-variété de niveau est contenue dans la sous-variété et elle y est linéaire.

Que signifie ce théorème ? La figure 8 devrait vous rappeler ce qu'est un tore (nous en avons déjà rencontré un) et elle indique ce qu'est un mouvement linéaire sur ce tore.

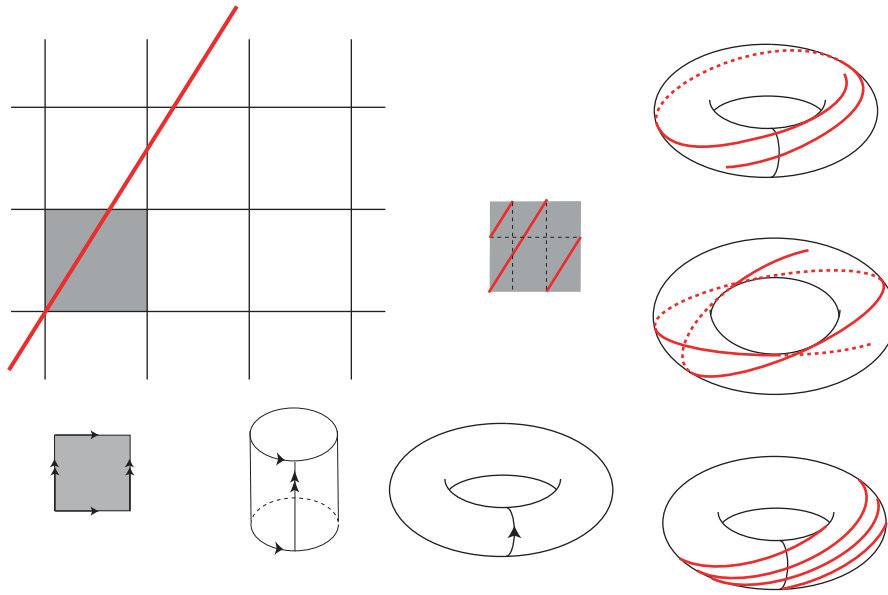


FIGURE 8. Tore et mouvement linéaire

Le tore T^2 est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par le groupe $\mathbb{Z}^2$ des translations entières : $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. La figure 8 montre un domaine fondamental (le carré grisé). Pour obtenir le quotient, il suffit d'identifier les points du bord comme indiqué sur la figure. L'image d'une droite de $\mathbb{R}^2$ dans le tore est une courbe dessinée sur le tore, que l'on qualifie de linéaire. On peut remplacer 2 par n dans ce qui précède pour obtenir la définition d'une trajectoire « linéaire » sur un tore de dimension n .

Le théorème de Liouville affirme que les sous-variétés de niveau d'un système intégrable sont des tores, la variété W est une sorte de « pâte feuilletée » remplie de tores de dimension n (qui sont les feuilles) et que les solutions du système hamiltonien sont linéaires sur ces tores.

Ces trajectoires « linéaires » ont des comportements variés, comme l'évoque la partie droite de la figure 8. Selon que la pente de la droite est ou n'est pas rationnelle, elles sont fermées ou au contraire denses dans le tore. On qualifie ces mouvements de quasi-périodiques.

Sur la figure représentant le pendule sphérique (figure 6), on voit que les trajectoires restent dans un anneau : mais il ne faut pas oublier ici que la sphère est plongée dans un espace W de dimension 4 (qui est l'espace dans lequel on travaille réellement), dans lequel la vitesse du mobile est prise en compte. C'est la différence entre ce que les physiciens appellent *l'espace des phases* (de dimension $2n$), notre variété symplectique, et *l'espace de configuration* (de dimension n). Les tores de Liouville vivent dans l'espace des phases. L'anneau que je viens d'évoquer (celui de la figure 6) est une projection d'un tore de Liouville sur l'espace de configuration, comme le sont les tores que j'ai représentés à droite de la figure 8... si l'on veut bien se souvenir que la feuille de papier sur laquelle ils sont dessinés est plane.

Il existe relativement peu de systèmes hamiltoniens intégrables, mais le théorème de Liouville est quand même important, notamment pour la raison suivante. Quand on perturbe un petit peu un système intégrable, on obtient en général un système qui n'est plus intégrable, *mais il va quand même rester des tores* invariants comme ci-dessus dans ce système perturbé : c'est ce que l'on appelle le théorème KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) ; mais je n'en dirai pas plus ici.

Version algébrique du théorème de Liouville. — J'ai dit que je parlais de géométrie *algébrique* : c'est ce que je fais dans maintenant. Je m'intéresse à une équation qui a l'air bien différente des systèmes hamiltoniens mais qui, on va le voir, ne l'est pas tellement. L'équation en question a la forme suivante (*équation de Lax*) :

$$(8) \quad \dot{A}_\lambda = [A_\lambda, B_\lambda]$$

où A_λ et B_λ sont des matrices dépendant du temps et polynomiales en λ et où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet des matrices $[X, Y] = XY - YX$. Attention, contrairement à ce que l'on pourrait croire, cette équation n'est pas nécessairement linéaire, car B_λ n'est pas en général indépendante de A_λ .

Par exemple, le système des équations du solide (1)-(2) peut se réécrire sous la forme (8) avec

$$(9) \quad A_\lambda = \Gamma + M\lambda + L\lambda^2, \quad B_\lambda = \Omega + L\lambda$$

où Γ , M , L et Ω sont les matrices antisymétriques, images des vecteurs $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{\Omega}$ par l'isomorphisme (d'algèbres de Lie)

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^3, \wedge) &\longrightarrow (\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot]) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ici $\mathfrak{so}(3)$ désigne l'espace des matrices antisymétriques, c'est-à-dire l'algèbre de Lie du groupe des rotations $SO(3)$.

Vérifions que l'équation de Lax est équivalente aux équations du solide :

- les termes « constants » donnent $\dot{\Gamma} = [\Gamma, \Omega]$, c'est-à-dire $\dot{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{\Omega}$,
- les termes en λ donnent $\dot{M} = [M, \Omega] + [\Gamma, L]$, c'est-à-dire $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{L}$,
- les termes en λ^2 donnent $\dot{L} = [L, \Omega] + [M, L]$, c'est-à-dire $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \wedge \mathbf{\Omega} + \mathbf{M} \wedge \mathbf{L}$,
mais ici les deux membres sont nuls, car $\mathbf{L} = \overrightarrow{GO}$ est constant (dans le repère lié au solide) et $\mathbf{M} \wedge \mathbf{L} = (\mathcal{J}\mathbf{\Omega}) \wedge \mathbf{L} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{L}$ puisque les valeurs propres de $\mathcal{J}$ dans les deux premières directions propres sont égales à 1,
- enfin les termes en λ^3 donnent $0 = [L, L]$, ce qui est vrai.

Quelle est l'utilité de cette approche ? L'équation de Lax (8) exprime le fait que la matrice A_λ reste conjuguée à elle-même au cours du temps. Autrement dit, ses solutions sont de la forme

$$A_\lambda(t) = U_\lambda(t) A_\lambda(0) U_\lambda^{-1}(t)$$

pour une certaine matrice inversible U_λ . Il semble que nous n'ayons rien gagné : il reste à déterminer U_λ , ce qui est équivalent à résoudre l'équation différentielle. Cependant, on voit ainsi que toutes les fonctions de A_λ invariantes par similitude (valeurs propres, polynôme minimal, polynôme caractéristique...) restent constantes au cours du temps. Par exemple, les coefficients du polynôme caractéristique sont constants et sont donc des intégrales premières : les équations de Lax ont donc, automatiquement, beaucoup d'intégrales premières.

Considérons le polynôme en les deux variables λ et ν :

$$P(\lambda, \nu) = \det(A_\lambda - \nu \text{Id}),$$

et la courbe algébrique à laquelle il donne naissance

$$C = \{P(\lambda, \nu) = 0\}.$$

Dans le cas de la toupie symétrique, cette courbe a pour équation

$$\nu(\nu^2 + \lambda^4 + 2k\lambda^3 + h'\lambda^2 + 2c\lambda + 1) = 0,$$

au facteur ν près, c'est une courbe elliptique isomorphe à celle dont j'ai parlé tout au début de cette Leçon, à propos de la nutation.

Dans le cas général comme dans cet exemple, cette courbe algébrique donne beaucoup d'informations sur le système. Certains d'entre vous savent bien qu'à une courbe algébrique sont associés des tores complexes, notamment la « jacobienne » de la courbe. Pour un système intégrable écrit sous la forme de Lax, il s'avère que les tores de Liouville s'identifient à des variétés abéliennes (comme par exemple la jacobienne). Par exemple, le tore isomorphe à la courbe elliptique (encadré 1) peut être considéré comme une jacobienne et a un rapport direct avec ce que je raconte ici. Ces considérations sont la source d'une intense activité de recherche (déjà un peu ancienne) dans la théorie des systèmes intégrables. Je renvoie par exemple à l'article [25] et au livre [1].

Dans les cas de la toupie symétrique et du pendule sphérique, on obtient une courbe elliptique (courbe de genre 1) ; par contre, dans le cas des géodésiques sur l'ellipsoïde c'est une courbe de genre 2, et plus généralement pour un ellipsoïde de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ une courbe de genre n . La géométrie algébrique sert ici à linéariser les solutions sur les tores (sur une courbe abélienne, il y a une structure affine canonique et ce n'est pas rien de dire qu'on obtient des courbes linéaires sur ces objets) ; elle permet de décrire la topologie des systèmes intégrables, par exemple les tores de Liouville (nombre de tores dans chaque niveau, etc.) pour la toupie de Kowalevski (voir [3]) ou pour les géodésiques des quadriques (voir [4]).

Les équations de Lax et la géométrie algébrique réelle permettent aussi de décrire une apparition spécifiquement hamiltonienne de la monodromie en géométrie réelle étudiée notamment par Cushman (voir [14, 13]). Je l'illustre ici par la figure 9, qui représente l'image de l'espace de phases W du pendule sphérique dans $\mathbb{R}^2$ via

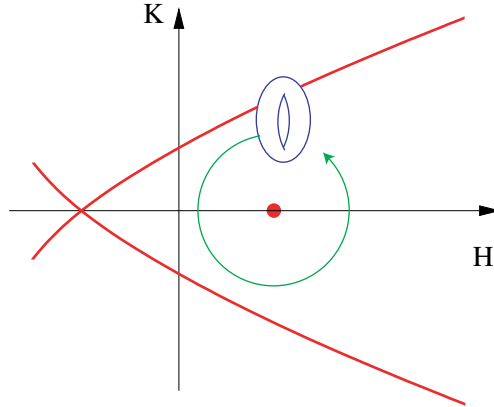


FIGURE 9.

l'application

$$(H, K) : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

où H et K sont les deux intégrales premières que nous avons décrites ci-dessus sur la variété W (qui, rappelons-le, est le fibré tangent à la sphère). L'ensemble des valeurs critiques de cette application est constitué d'une courbe et, bizarrement, d'un point, ce qui peut paraître troublant tant aux habitués de l'analyse complexe qu'à ceux des singularités réelles. Le théorème de Liouville affirme que l'image réciproque d'une valeur non critique est une réunion de tores de dimension 2 dans W . Je ne sais pas si c'est votre cas, mais moi, quand je vois une singularité, je ne peux pas m'empêcher de tourner autour. Et c'est tellement rare d'avoir une singularité isolée dans $\mathbb{R}^2$ que j'en profite. Comment ce tore varie-t-il quand je fais mon petit tour ? Il apparaît de la monodromie (je reparlerai de monodromie plus tard) qui peut être décrite elle aussi par la géométrie de la courbe algébrique réelle précédente (voir [7]).

Dans la suite de l'exposé, la question principale à laquelle je vais essayer de répondre, et que vous avez dû vous poser pendant que je parlais, est la suivante : comment montrer qu'un système hamiltonien est ou n'est pas intégrable ?

Comment montrer qu'un système hamiltonien est ou n'est pas intégrable ?

Pour montrer qu'un système est intégrable, on voit bien qu'il suffit d'exhiber des intégrales premières. La situation est donc la suivante :

- Vous trouvez beaucoup d'intégrales premières : vous êtes content-e, vous donnez votre nom au nouveau système intégrable.
- Vous n'en trouvez pas, ou pas assez :
 - c'est que vous n'êtes pas assez malin-e, ou
 - c'est parce qu'il n'y en a réellement pas beaucoup. Mais comment en être sûr-e ?

Je vais essayer d'expliquer maintenant une méthode qui permet de montrer que tel ou tel système hamiltonien n'est pas intégrable.

Motivation : Euler, Lagrange, Kowalevski, le solide et l'attitude d'un satellite. — Je reprends l'exemple du solide avec un point fixe. Selon la forme du solide (que nous lisons sur sa matrice d'inertie) et la position du point fixe, il y a plusieurs cas dont on sait qu'ils sont intégrables.

- D'abord le cas d'un solide sans symétrie particulière, mais dont le point fixe coïncide avec le centre de gravité : dans ce cas, il y a deux intégrales premières indépendantes, disons l'énergie et le moment cinétique total. Ce cas a été étudié par Euler au XVIII^e siècle.
- Puis il y a le cas de la toupie symétrique reposant sur sa pointe (ou plus généralement avec un point fixe sur l'axe de symétrie) : c'est le cas dont j'ai parlé tout à l'heure, et qui a été étudié par Lagrange à la fin du XVIII^e siècle. Il possède deux intégrales premières : l'énergie et le moment par rapport à l'axe.

- Il a fallu attendre 1888 pour qu'un nouveau cas soit découvert, par Sophie Kowalevski [16]. Cette découverte, très remarquable, lui valut notamment un prix de l'Académie des sciences. La façon dont elle a abordé le problème est assez étonnante⁽²⁾ : elle s'est aperçue que si on considère le temps non plus comme une variable réelle mais comme une variable complexe, alors, dans les deux cas déjà résolus (ceux d'Euler et de Lagrange), les solutions du système différentiel sont des fonctions méromorphes. Il faut comprendre que ce fait est surprenant, puisqu'un système différentiel non linéaire peut donner naissance à des solutions épouvantablement compliquées (en général il y a de la ramification, avec des branchements infinis...). Il faut aussi comprendre qu'une fonction méromorphe, c'est une fonction qui a des pôles. Or, nous avons bien vu dans le cas de la toupie qu'aucune variable dynamique ne partait à l'infini : les pôles des solutions ne sont pas réels. Il était donc essentiel de considérer le temps comme complexe. Kowalevski s'est donc demandé s'il y avait d'autres cas dont les solutions étaient méromorphes. Et, après des calculs longs et difficiles, elle a trouvé un nouveau cas, que l'on appelle aujourd'hui la toupie de Kowalevski. C'est le cas où la matrice d'inertie a la forme

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et où le point fixe est dans le plan passant par le centre de gravité et contenant les deux premiers axes d'inertie : dans ce cas, Kowalevski a aussi montré qu'il existe une intégrale première (en plus de l'énergie), donc c'est un cas intégrable.

Les toupies d'Euler, de Lagrange et de Kowalevski sont les seuls cas de mouvements d'un solide autour d'un point fixe qui soient intégrables. Comment peut-on démontrer une chose pareille ?

Voici un autre exemple de système dont on va démontrer (à grands traits) qu'il n'est pas intégrable :

Il s'agit d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre, en application des lois de Kepler (figure 10). On s'intéresse à son mouvement propre autour de son centre de gravité. C'est ce que l'on appelle *l'attitude* du satellite. L'étude de ce mouvement peut être importante : vous n'avez pas lancé ce satellite pour qu'il aille se promener dans l'espace — il a des antennes, des caméras, et il a son travail à faire ! S'il se met à entrer en transes ou à regarder du mauvais côté, il ne servira à rien ! Nous l'avons dit, un système intégrable a un mouvement très régulier (les trajectoires s'enroulent sur des tores, le mouvement est quasi-périodique), alors qu'un système non intégrable peut

2. Ajouté en janvier 2007. Pour une histoire de ce problème, voir le livre à paraître [10].

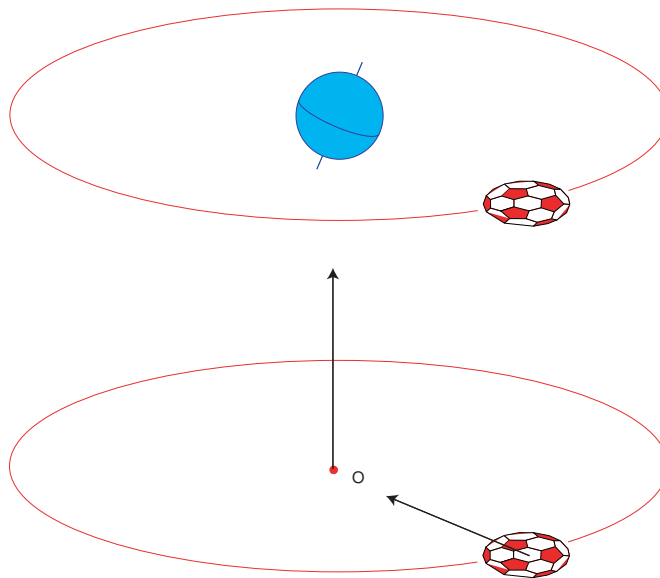


FIGURE 10.

avoir un comportement complètement chaotique. Il est donc naturel de se demander si ce système est intégrable. Comment le savoir ?

La théorie de Galois et le théorème de Morales-Ramis. — J'en arrive ainsi à une méthode inventée vers 1995 par Morales et Ramis [23, 24].

On considère un système hamiltonien ; on suppose qu'il est défini sur une variété analytique et que toutes les fonctions qui interviennent sont analytiques. Ainsi, on peut tout complexifier : on suppose donc que toutes les données sont analytiques complexes. On suppose que l'on n'arrive pas à démontrer que le système est intégrable et on va donc essayer de montrer qu'il ne l'est pas.

Méthode de Morales-Ramis. Voici un résumé de la méthode. Supposons pour simplifier que le système soit défini sur une sous-variété de $\mathbb{C}^n$.

- D'abord, on trouve une solution particulière, qui est donc une courbe complexe. Vu comme un objet réel, c'est une surface (une surface de Riemann).
- Ensuite, on linéarise le système le long de la solution. Plus explicitement, cela signifie qu'à la solution $x(t)$ de $\dot{x} = X_H(x)$ on associe le système différentiel *linéaire* $\dot{Y} = (dX_H(x))(Y)$ (c'est ce que l'on appelle, au moins depuis Poincaré, « l'équation aux variations »).
- Ce système différentiel linéaire possède un groupe de Galois différentiel (voir l'encadré 2), qui est un groupe de Lie, que l'on essaie de déterminer.

- Si ce groupe n'est pas virtuellement abélien (voir la définition dans l'encadré 2), le système n'était pas intégrable.

La théorie de Galois

La théorie de Galois algébrique. L'objet de la théorie de Galois algébrique est la structure de l'ensemble des racines de polynômes à coefficients dans un corps, disons le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Je considérerais les deux exemples d'équations suivants :

$$X^2 - 2 = 0 \text{ et } X^5 + 6X + 1 = 0.$$

Ces équations n'ont pas de solutions rationnelles. Leurs racines vivent dans une extension de $\mathbb{Q}$ que l'on appelle *corps de décomposition* du polynôme : cette extension est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant les racines du polynôme en question. C'est le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ pour la première équation, et disons K pour la deuxième).

Dans cette situation, on peut définir le groupe de Galois G de l'équation (ou de l'extension) : c'est le groupe des automorphismes de ce corps qui préservent les éléments du corps de départ ($\mathbb{Q}$ dans nos exemples). Dans le premier cas, le groupe de Galois est simplement le groupe à deux éléments $G = \{\text{Id}, \tau\}$, où τ échange les racines $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$; dans le deuxième cas, on peut démontrer que c'est $G = S_5$, le groupe symétrique qui permute les 5 racines.

Dans tous les cas, le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symétrique S_n (où n est le degré du polynôme) puisqu'il permute les racines entre elles.

La théorie de Galois différentielle. La théorie de Galois différentielle est calquée sur la théorie algébrique. Le corps de base $\mathbb{K}$ est maintenant muni d'une dérivation, c'est-à-dire d'une application qui préserve l'addition $D(f + g) = D(f) + D(g)$ et se comporte pour la multiplication comme on s'y attend : $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. L'exemple le plus simple est le corps $\mathbb{C}(t)$ des fractions rationnelles d'une variable complexe, muni de la dérivation par rapport à t .

Au lieu de considérer, comme dans le cas algébrique, des équations algébriques, on considère des équations différentielles linéaires à coefficients dans le corps en question (ici $\mathbb{C}(t)$). Considérons ici les deux équations

$$Y' = Y \text{ et } Y'' - tY = 0 \text{ (équation d'Airy).}$$

Comme dans le cas algébrique, il n'y a pas nécessairement dans le corps de base : on le voit bien dans le premier exemple, puisque l'exponentielle n'est pas une fraction rationnelle. On peut construire une extension différentielle $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, qui est la plus petite extension différentielle de $\mathbb{K}$ contenant toutes les solutions de l'équation différentielle considérée. Ce corps s'appelle l'extension de Picard-Vessiot de l'équation.

Le groupe Gal des automorphismes de $\mathbb{L}$ compatibles avec la dérivation et qui laissent invariants les éléments du corps de base est appelé groupe de Galois différentiel de l'équation. Ce groupe agit sur l'espace vectoriel des solutions (qui est maintenant un espace vectoriel de dimension m , où m est l'ordre de l'équation différentielle).

De même que le groupe de Galois classique est un sous-groupe du groupe symétrique, le groupe de Galois différentiel est un sous-groupe d'un groupe linéaire, $\text{GL}(m, \mathbb{C})$ dans le cas d'une équation d'ordre m sur $\mathbb{C}(t)$. C'est même un sous-groupe algébrique, c'est-à-dire défini par des équations polynomiales ; en particulier, et c'est ce qui nous intéresse, Gal est un groupe de Lie.

On dit qu'un groupe de Lie est *virtuellement abélien* si la composante connexe de son élément neutre est abélienne.

L'espace des solutions de notre premier exemple est l'ensemble des fonctions g s'écrivant $g(t) = ae^t$, $a \in \mathbb{C}$ et le groupe Gal est donc le groupe $\mathbb{C}^*$: remarquons qu'il est connexe et abélien.

Dans le deuxième exemple, on peut démontrer (ce n'est pas très facile) que le groupe de Galois est $\text{Gal} = \text{SL}(2; \mathbb{C})$, un groupe connexe non abélien (en particulier pas virtuellement abélien).

Le théorème de Morales-Ramis affirme en effet :

Théorème (Morales-Ramis).

Si le système hamiltonien est intégrable au sens de Liouville, avec des intégrales premières méromorphes, le groupe de Galois différentiel de l'équation linéarisée le long de toute solution est virtuellement abélien.

Remarques

- C'est un théorème puissant, mais dont la démonstration est relativement simple (voir [21, 23, 24, 6, 5]). Le point crucial est que le groupe de Galois est un sous-groupe algébrique de $GL(m, \mathbb{C})$, donc un groupe de Lie ; or, un groupe de Lie possède une algèbre de Lie, dans laquelle on peut faire du calcul infinitésimal. C'est ce qui rend ce théorème assez facile à démontrer, alors que les analogues antérieurs utilisaient des groupes discrets et étaient plus difficiles à démontrer.
- Le théorème de Morales-Ramis affirme que, si le groupe de Galois du système linéarisé n'est pas virtuellement abélien, il n'existe pas assez d'intégrales premières méromorphes, mais il n'exclut pas l'existence d'intégrales premières de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- La propriété d'avoir un groupe de Galois pas trop compliqué, pour un système différentiel linéaire, est une version « à l'ordre 1 » de l'idée de Kowalevski, qui était que les solutions du système de départ (non linéarisé) ne soient pas trop compliquées (en l'occurrence, qu'elles n'aient pas de ramification). On s'approche donc, avec ce théorème, d'une meilleure compréhension des travaux antérieurs. Voir l'article [22] de Morales.

Maintenant que nous disposons de ce théorème, utilisons-le. Ce n'est pas évident, car il faut trouver une solution particulière qui soit, en même temps assez simple pour qu'on puisse calculer le groupe de Galois de l'équation linéarisée, et en même temps assez compliquée pour que ce groupe soit lui-même compliqué (pas virtuellement abélien). D'ailleurs, soit dit en passant, ma première contribution à ce sujet, alors que je ne comprenais pas encore grand-chose à ce théorème, a été, modestement, de trouver un tel exemple de solution particulière pour un certain système différentiel, ce qui m'a permis de démontrer qu'il n'était pas intégrable (voir [5, 6]).

Monodromie.

Pour pouvoir appliquer le théorème de Morales-Ramis, il faut d'abord revenir sur la notion de monodromie. Le groupe de monodromie est un sous-groupe du groupe du groupe de Galois différentiel que l'on peut décrire géométriquement, ce qui la rend accessible (il n'est pas très facile de décrire tout ce que contient le groupe de Galois). Voici de quoi il s'agit. On part d'un système différentiel dans $\mathbb{C}^m$, on en fixe une solution γ : c'est une courbe complexe, donc une surface de Riemann, en général non compacte. On regarde maintenant l'équation différentielle linéarisée le long de cette solution : soit $(Y_1(t), \dots, Y_m(t))$ une base de solutions. Faisons maintenant ce dont je vous ai déjà dit que je n'étais pas capable de m'en empêcher : promenons-nous sur la

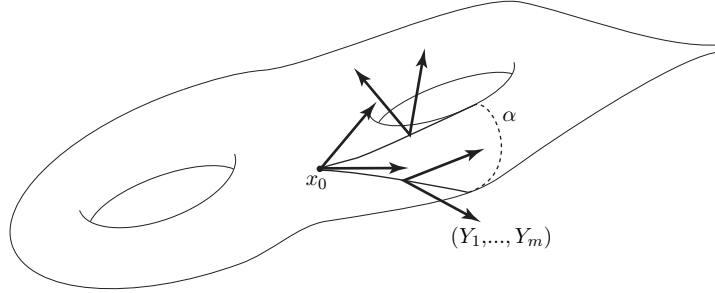


FIGURE 11. La monodromie le long d'un lacet

surface. Partons d'un point x_0 , disons à l'instant t_0 , faisons un petit tour le long d'un chemin α , et revenons à notre point de départ à l'instant t_1 . Si nous sommes partis assez loin, il est bien possible que les vecteurs $(Y_1(t_1), \dots, Y_m(t_1))$ soient différents des vecteurs $(Y_1(t_0), \dots, Y_m(t_0))$. Ils forment une nouvelle base de $\mathbb{C}^m$. Nous pouvons définir un morphisme ρ de groupes du groupe fondamental de γ dans le groupe linéaire

$$\begin{aligned} \pi_1(\gamma, x_0) &\longrightarrow GL(m, \mathbb{C}) \\ \alpha &\longmapsto \rho(\alpha) \end{aligned}$$

où $\rho(\alpha)$ est la matrice de passage de la base de départ $(Y_1(t_0), \dots, Y_m(t_0))$ à la base d'arrivée $(Y_1(t_1), \dots, Y_m(t_1))$ obtenue après avoir parcouru le chemin α . Si le lacet α est homotope au lacet constant (la promenade consistant à rester sur place en x_0) la base ne change pas et l'image de α est l'identité. On appelle cette application la *représentation de monodromie* du groupe fondamental de γ . Bien sûr, l'image du groupe fondamental par ρ est un sous-groupe du groupe de Galois différentiel du système, celui que l'on appelle le *groupe de monodromie*. C'est un sous-groupe discret du groupe algébrique Gal. On considère souvent plutôt le plus petit sous-groupe algébrique de Gal qui contient ce groupe discret, qui a l'avantage d'être, comme le groupe de Galois, un groupe de Lie. D'ailleurs, si le système n'a que des singularités « régulières » (je ne vais pas définir cette notion ici), ce sous-groupe est le groupe de Galois tout entier.

Application : non-intégrabilité de l'attitude d'un satellite. — Parmi les nombreuses applications du théorème de Morales-Ramis, je mentionnerai seulement celles-ci :

- Le cas du solide avec un point fixe n'est pas intégrable sauf dans les cas particuliers cités tout à l'heure (Euler, Lagrange, Kowalevski) : Ziglin [28] en avait donné une démonstration en 1983, et récemment Maciejewski et Przybylska [19] (2005) l'ont redémontré plus simplement en appliquant le théorème de Morales-Ramis. C'est joli, mais je ne vais pas le faire ici car ça reste malgré tout assez compliqué, et vous devez maintenant être fatigués.

- Le cas du problème dit « à n corps », certains exemples de systèmes dits « de Hénon-Heiles ». Voir les travaux cités et les références qu'ils contiennent.
- Le cas du satellite sur une orbite circulaire, que je vais essayer d'expliquer maintenant.

Considérons la normale $\mathbf{N}$ au plan de l'orbite (ce n'est *pas* la verticale, comme me l'ont fait remarquer des astronomes : la verticale est dirigée vers la Terre!), puis le vecteur radial, vertical, cette fois (voir la figure 10). Dans un repère lié au satellite, les équations régissant le mouvement de notre satellite sont

$$(10) \quad \dot{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \wedge \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{\Gamma} \wedge (\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{N}), \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\Omega} + 3\boldsymbol{\Gamma} \wedge \mathcal{J}\boldsymbol{\Gamma}$$

($\mathbf{M}$ est le moment cinétique, comme dans le cas du solide). C'est un système hamiltonien de hamiltonien l'énergie totale

$$H(\mathbf{N}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{M}) = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathcal{J}^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} + \frac{3}{2} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathcal{J}\boldsymbol{\Gamma}.$$

On a aussi les relations suivantes (comme toujours, nous choisissons convenablement les unités),

$$\|\mathbf{N}\|^2 = 1, \quad \|\boldsymbol{\Gamma}\|^2 = 1, \quad \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Nous sommes donc sur la variété (symplectique) de dimension 6

$$W = \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3.$$

C'est donc un problème à trois degrés de liberté. Comme toujours, l'énergie totale H est une intégrale première, et on se demande cette fois s'il y en a deux autres.

Appliquons la méthode de Morales-Ramis. Il nous faut d'abord une solution particulière du système différentiel (10). Dans une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ convenable (ce que l'on appelle les axes principaux d'inertie), la matrice d'inertie s'écrit

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Pour trouver une solution particulière, tous les coups sont permis : je vais imposer la condition $\mathbf{e}_3 = \mathbf{N} = (0, 0, 1)$ (c'est-à-dire qu'un des axes principaux d'inertie reste fixe, normal au plan de l'orbite), et aussi que $\mathbf{M} = \lambda \mathbf{e}_3$. Je peux poser $\boldsymbol{\Gamma} = (x, y, 0)$. Et je suis contente d'obtenir le fait que les variables dynamiques qui me restent, c'est-à-dire, x , y et λ , sont liées par

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{c} - \lambda + \frac{3}{2} (ax^2 + by^2) = h$$

où h est l'énergie totale du système. Je n'ai pas écrit comment les fonctions x et y varient en fonction du temps, mais je sais que ma solution particulière doit vérifier ces deux équations : elle est donc contenue dans l'intersection de deux surfaces dans un espace de dimension 3 qui sont, comme vous l'avez tous remarqué, deux quadriques ; or, comme vous le savez peut-être, l'intersection de deux quadriques d'un espace de

dimension 3 est (encore !) une courbe elliptique. La première équation donne naissance à un cylindre, qu'on peut déplier comme sur la figure suivante

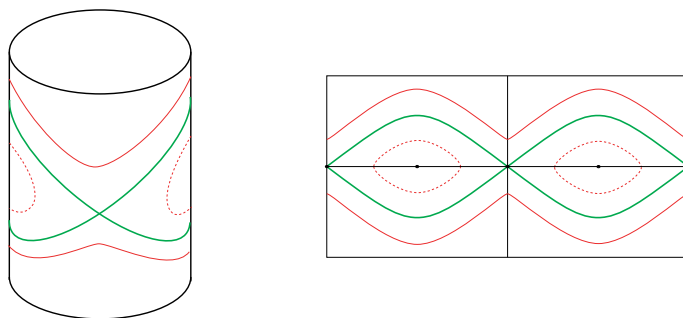


FIGURE 12. Les niveaux des intégrales premières vues sur le cylindre déplié

La plupart des courbes représentées sur cette figure sont des courbes elliptiques qui ont, comme toutes les courbes elliptiques réelles, soit une, soit deux composantes connexes. Les courbes singulières sont rationnelles, ce sont des ellipses au sens le plus classique du terme (intersection d'un cylindre et d'un plan) qui se coupent en deux points comme on le voit sur la figure 12, ou se réduisent à des points singuliers. Par exemple, les deux points singuliers que l'on voit sur la figure décrivent l'attitude d'un satellite qui tourne autour de la Terre en lui présentant toujours la même face, comme le fait la Lune.

Pour faire les calculs sur l'équation linéarisée et le groupe de Galois, j'ai dû faire une hypothèse de symétrie : j'ai supposé que $b = c > a$ (je vais en reparler). Cette hypothèse permet de rétrécir le groupe de Galois et donc de le rendre plus accessible.

Nous sommes toujours en train de choisir une solution particulière. Comme je suis paresseuse, je propose de choisir une des deux solutions rationnelles (une ellipse). Je réécris les équations précédentes en les linéarisant le long de cette solution. Je regarde ma solution comme une courbe complexe : mon ellipse complexe, vue comme une surface réelle, est, comme toutes les coniques complexes, une sphère, à laquelle manquent deux points à l'infini. Il y a également deux points singuliers sur cette courbe complexe, qui se présente donc comme sur la figure 13, où la courbe équatoriale est l'ellipse réelle.

Les points singuliers sont réels (ce sont les points où notre ellipse coupait l'« autre », comme nous l'avons vu sur la figure 12). Les points à l'infini sont imaginaires (nous ne les avons pas vus sur la conique réelle... puisque celle-ci était une ellipse !). Le groupe fondamental du complémentaire de ces quatre points dans la sphère est un groupe libre à trois générateurs : il n'est pas du tout abélien, et c'est ce qu'il nous faut !

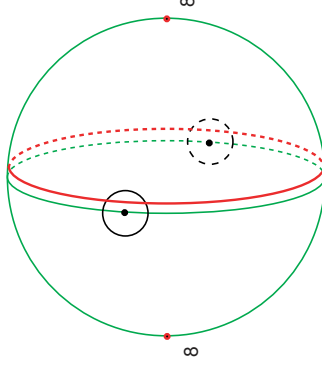


FIGURE 13. La conique complexe

En explicitant le système linéarisé le long de cette courbe complexe, on peut démontrer (voir [8]) que les lacets qui tournent autour des points singuliers finis (sur la figure 13) engendrent un groupe de monodromie infini formé de matrices diagonalisables de $SL(2, \mathbb{C})$, donc équivalentes à des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}^*$$

tandis que les lacets qui tournent autour des points à l'infini engendrent un groupe de monodromie contenant des matrices de $SL(2, \mathbb{C})$ non diagonalisables, c'est-à-dire équivalentes à des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \in \mathbb{C}.$$

On connaît explicitement tous les sous-groupes algébriques de $SL(2, \mathbb{C})$ (voir par exemple [21, p. 9-10]). Il n'y en a que deux (à conjugaison près) qui contiennent à la fois un sous-groupe diagonalisable infini et des matrices non diagonalisables, comme ci-dessus, ce sont

- le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ lui-même,
- le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ et } \beta \in \mathbb{C}.$$

Ces deux groupes sont connexes et aucun d'eux n'est abélien, ce qui achève de montrer que l'attitude d'un satellite symétrique ($b = c$) est un système hamiltonien non intégrable !

Que l'on se rassure, le mouvement des vrais satellites est contrôlé...

Un dernier mot à propos de ce problème. C'est un problème plus difficile que d'autres que nous avons mentionnés parce qu'il a trois degrés de liberté. C'est pour

n'avoir à considérer que des groupes de matrices 2×2 que j'ai fait l'hypothèse que le satellite est symétrique ($b = c$). Le même résultat, avec la même hypothèse de symétrie, a été obtenue à peu près simultanément par Andrzej Maciejewski et (indépendamment) par Delphine Boucher. Voir aussi [18]. Depuis, Delphine Boucher [12] a démontré la non-intégrabilité pour un satellite quelconque, sans hypothèse de symétrie. Comme dans sa démonstration pour le cas symétrique, elle utilise le calcul formel, ce qui lui permet de faire des calculs que je ne suis pas capable de faire !

Questions

Christophe Bavard. — Est-ce qu'on a des exemples de systèmes hamiltoniens analytiques avec des intégrales premières $\mathcal{C}^\infty$ mais non analytiques ?

M.A. — Oui. Il y a un très joli exemple de Bolsinov et Taimanov ⁽³⁾ avec des exponentielles.

Christophe Bavard. — Est-ce qu'il existe des systèmes différentiels qui donnent naissance à des extensions non triviales avec des groupes de Galois triviaux ?

M.A. — Non, je ne pense pas... (temps de réflexion)... Je ne sais pas pourquoi, mais j'ai le pressentiment que non... C'est grave de pas pas savoir ⁽⁴⁾ répondre aux questions ? Vous les écrivez dans le rapport ?

Éric Charpentier. — Je ne sais pas encore, c'est négociable...

M.A. — Décidément, les gens ne posent jamais de questions auxquelles on sait répondre. Personne n'aurait une question à laquelle je sais répondre ?

Références

- [1] M. Adler, P. van Moerbeke et P. Vanhaecke, *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **47**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [2] V.I. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir (Moscou), 1974.
- [3] M. Audin et R. Silhol, *Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski*, Compositio Math. **87** (1993), p. 153-229.
- [4] M. Audin, *Courbes algébriques et systèmes intégrables : géodésiques des quadriques*, Expositiones Math. **12** (1994), p. 193-226.
- [5] M. Audin, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés n°8, Société Mathématique de France (Paris) ; EDP Sciences (Les Ulis), 2001.

3. Voir [11].

4. Janvier 2007 : je ne sais jamais répondre aux questions quand elles sont posées... Bien sûr, si le groupe de Galois est trivial, l'extension est triviale.

- [6] M. Audin, *Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, d'après S. Ziglin, J. Morales, J.-P. Ramis,...*, Sémin. Bourbaki, exposé n°884 (mars 2001), Astérisque **282** (2002), p. 113-135.
- [7] M. Audin, *Hamiltonian monodromy via Picard-Lefschetz theory*, Commun. Math. Phys., **229**, 2002, p. 459-489.
- [8] M. Audin, *La réduction symplectique appliquée à la non-intégrabilité du problème du satellite*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **12** (2003), p. 25-46.
- [9] M. Audin, *Torus actions on symplectic manifolds*, Revised and enlarged edition, Progress in Math., Birkhäuser, 2004.
- [10] M. Audin, *Souvenirs sur Sophie Kowalevski*, 2006, à paraître.
- [11] A.V. Bolsinov et I.A. Taïmanov, *Integrable geodesic flows on suspensions of automorphisms of tori*, Tr. Mat. Inst. Steklova **231** (2000), p. 46-63.
- [12] D. Boucher, *Non complete integrability of a satellite in circular orbit*, Portug. Math. **63** (2006), p. 69-89.
- [13] R. Cushman et L. Bates, *Global aspects of classical integrable systems*, Birkhäuser, 1997.
- [14] J. J. Duistermaat, *On global action-angle coordinates*, Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), p. 687-706.
- [15] C. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, Gesammelte Werke, Supplementband, Berlin, 1884.
- [16] S. Kowalevski, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math. **12** (1889), p. 177-232.
- [17] J. Liouville, *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853*, J. Math. Pures et Appl. **20** (1855), p. 137-138.
- [18] A. Maciejewski et M. Przybylska, *Non-integrability of the problem of a rigid satellite in gravitational and magnetic fields*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. **87** (2003), p. 317-351.
- [19] A. Maciejewski et M. Przybylska, *Differential Galois approach to the non-integrability of the heavy top problem*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **14** (2005), p. 123-160.
- [20] H. Mineur, *Réduction des systèmes mécaniques à n degrés de liberté admettant n intégrales premières uniformes en involution aux systèmes à variables séparées*, J. Math. Pures Appl. (série 9) **15** (1936), p. 385-389.
- [21] J.J. Morales Ruiz, *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Mathematics, 179, Birkhäuser (Bâle), 1999.
- [22] J.J. Morales Ruiz, *Kovalevskaya, Liapounov, Painlevé, Ziglin and the differential Galois theory*, Regul. Chaotic Dyn. **5** (2000), p. 251-272.
- [23] J.J. Morales Ruiz et J.-P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems : statements and examples*, p. 509-513 de : *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom* (S'Agaró, 1995), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **533**, Kluwer Acad. Publ. (Dordrecht), 1999.
- [24] J.J. Morales Ruiz et J.-P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems I, II*, Methods Appl. Anal. **8** (2001), p. 33-95, p. 97-111.
- [25] A.G. Reyman et M.A. Semenov-Tian-Shanski, *Group theoretical methods in the theory of finite dimensional Integrable systems*, Dynamical systems VII, Encyclopaedia of Math. Sci., Springer, 1994.

- [26] F. Tisserand, *Traité de mécanique céleste, tome 2 : théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*, Gauthier-Villars (Paris), 1891.
- [27] V.E. Zakharov (ed.), *What is integrability?* Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer (Berlin), 1991.
- [28] S.L. Ziglin, *Bifurcation of solutions and the nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics I, II*, Functional Anal. Appl. **16** (1982), p. 181-189 ; **17** (1983), p. 6-17.