

Quelques remarques sur les surfaces lagrangiennes de Givental

MICHÈLE AUDIN

Université Lous Pasteur
Institut de Recherche Mathématique Avancée
7, Rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg, Cedex

Résumé. *Nous donnons une nouvelle démonstration d'une formule énumérative de Givental sur les singularités de certaines surfaces lagrangiennes. La méthode est de comparer ces surfaces lagrangiennes singulières à des courbes complexes qui se désingularisent par éclatement. On obtient aussi une formule analogue modulo 4 pour des surfaces non-orientables et on montre comment obtenir tous les exemples de plongements lagrangiens de Givental par chirurgie lagrangienne.*

Abstract. *We give a new proof of an enumerative formula of Givental about the singularities of certain lagrangian surfaces. The method is to compare these lagrangian surfaces to complex curves which may be desingularised by blowing up. A modulo 4 formula for non-orientable surfaces is also obtained and it is shown how to construct all the Givental lagrangian embeddings by lagrangian surgery.*

L'essentiel de ces notes vise à reprendre, un peu différemment, les constructions de Givental dans le très joli article [4]. Il y montre des plongements lagrangiens (dans $\mathbb{R}^4$) de presque toutes les surfaces susceptibles d'en posséder, c'est à dire le tore et les surfaces non-orientables de caractéristique d'Euler divisible par 4 (le seul cas de la bouteille de Klein restant en suspens). De plus il considère des plongements lagrangiens... qui ne sont pas des immersions (mais sont des plongements topologiques), le modèle local en est une variante lagrangienne du parapluie de Whitney, qu'on a déployé pour le

Key-Words: *Plongement lagrangien, singularités, parapluie de Whitney.*
1980 MSC: *57R90, 53C15, 57R20, 58C27.*

débarasser de ses points doubles (autrement dit, on déploie des parapluies pour plonger des surfaces).

Dans le premier paragraphe, je vais décrire le parapluie déployé et donner une raison plutôt conceptuelle pour laquelle chacune de ces singularités doit apporter une contribution de -1 à l'auto-intersection de la surface: c'est qu'un éclatement est en cause. J'expliquerai aussi pourquoi il est normal qu'un point double joue plus ou moins le même rôle que deux parapluies. Ceci permet de montrer une formule énumérative pour les points doubles et les parapluies [4] d'une surface orientée, je montrerai aussi qu'on a une formule analogue modulo 4 pour les surfaces non-orientables.

Dans le deuxième paragraphe, je décrirai (d'une façon pas très originale) les surfaces de Givental et aussi des plongements lagrangiens de toutes les surfaces non-orientables dans des variétés symplectiques «aussi petites que possible».

Presque tout cet article se passe dans $T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ (avec en général $n = 2$). Les coordonnées usuelles dans la base $\mathbf{R}^n$ sont notées $(q_1, \dots, q_n)$, les coordonnées cotangentes ou imaginaires pures $(p_1, \dots, p_n)$:

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = (q_1 + ip_1, \dots, q_n + ip_n)$$

la 1-forme $\lambda = \sum p_i dq_i$ est dite *forme de Liouville*, $\omega = d\lambda = \sum dp_i \wedge dq_i$ est la forme symplectique. Si $n = 2$

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega &= 2 dq_1 \wedge dp_1 \wedge dq_2 \wedge dp_2 \\ &= -2 dq_1 \wedge dq_2 \wedge dp_1 \wedge dp_2\end{aligned}$$

détermine donc l'orientation de $\mathbf{R}^4$ avec laquelle nous travaillons, c'est aussi celle définie par la structure complexe de $\mathbb{C}^2$, l'orientation définie par i étant celle où (e_1, ie_1, e_2, ie_2) est une base directe.

Un morceau de variété ou une immersion $(q, p) : V^n \rightarrow T^*\mathbf{R}^{2n}$ est dit(e) lagrangien(ne) si ω s'y annule, c'est à dire si λ y définit une 1-forme fermée. Si $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ est le plus petit revêtement sur lequel λ admet une primitive z , l'application

$$\begin{aligned}\tilde{V} &\rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \\ x &\mapsto (q \circ \pi(x), z(x))\end{aligned}$$

définit le *front d'onde* de $\tilde{V}$. Le dessin de l'image d'un domaine fondamental sous l'opération du groupe de π sera dit *front d'onde* de V . Si $\tilde{V} = V$, c'est à dire si λ est exacte, on dit que l'immersion est *exacte*.

EXEMPLES. 1) La figure 1 représente deux immersions lagrangiennes du cercle dans $T^*\mathbf{R}$ et leurs fronts d'onde. Dans le premier cas, λ est exacte (aire entourée nulle) et dans le deuxième cas non.

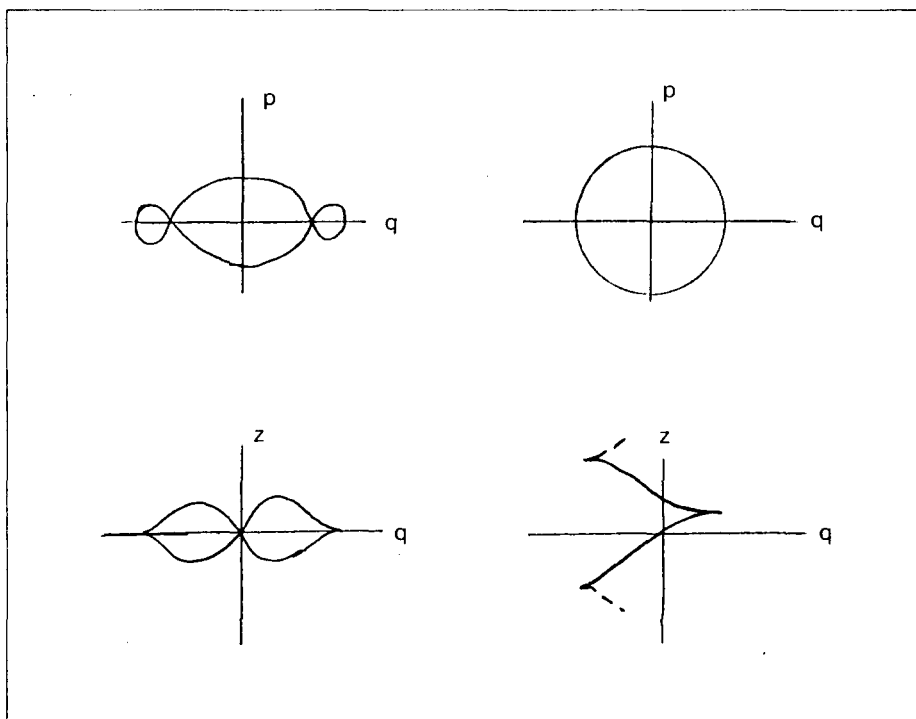


Figure 1.

2) De même la figure 2 représente le front d'un plongement lagrangien du tore, et la figure 3 le front d'une immersion lagrangienne (exacte !) de la sphère S^2 avec un seul point double (immersion de Whitney).

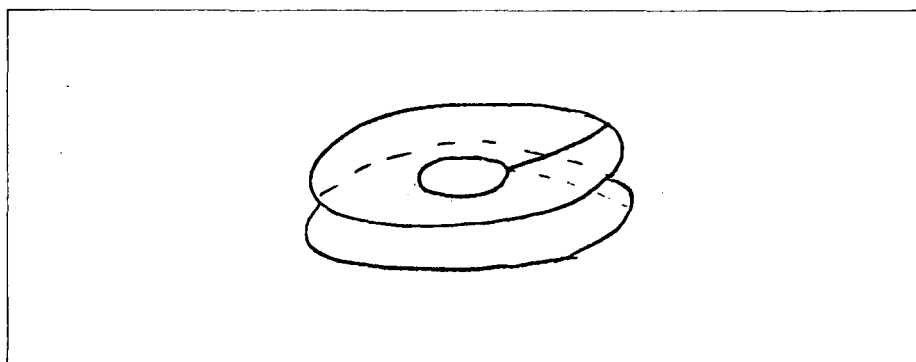


Figure 2.

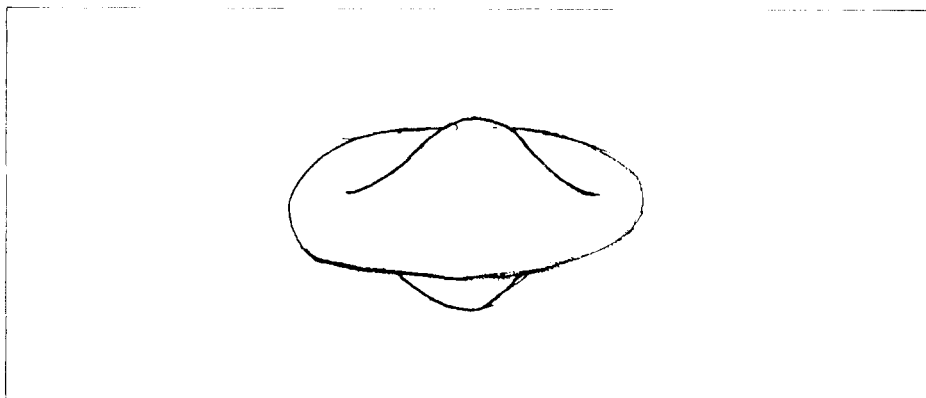


Figure 3.

On voit que l'équation $dz = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ permet de reconstituer la surface lagrangienne quand on connaît son front d'onde. De même, si les points doubles du front n'ont pas grande signification, ceux de la lagrangienne sont représentés par deux points du front qui ont même projection sur le plan des q et des plans tangents parallèles.

1. LE PARAPLUIE DÉPLOYÉ

1.1. Déploiement du parapluie

La façon la plus conceptuelle de décrire ce morceau de surface lagrangienne est sans doute la suivante: on considère le point de rebroussement ou parabole semi-cubique, ou cusp paramétré par $q_1 = t^2$, $q_2 = 2t^3/3$ dans le plan réel $\mathbb{R}^2$. Le parapluie déployé est son *fibré conormal* dans $T^*\mathbb{R}^2$, autrement dit c'est la surface qu'on obtient en résolvant $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 = 0$ et qu'on peut paramétrer par

$$(1) \quad (q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(t^2, \frac{2}{3}t^3, tu, -u \right).$$

Le fibré conormal de toute courbe lisse est par définition une surface lagrangienne de $T^*\mathbb{R}^2$. Ce que nous venons de faire semble donc être la méthode la plus simple pour construire une surface lagrangienne singulière.

Les formules (1) décrivent un plongement topologique de $\mathbb{R}^2$ dans $T^*\mathbb{R}^2$, qui est une immersion partout sauf en 0 où il est de rang 1.

La projection de cette surface sur le sous-espace des (q_1, p_1, p_2) est un parapluie de Whitney, ce qui justifie l'appellation de *parapluie (de Whitney) déployé* que lui a donnée Givental.

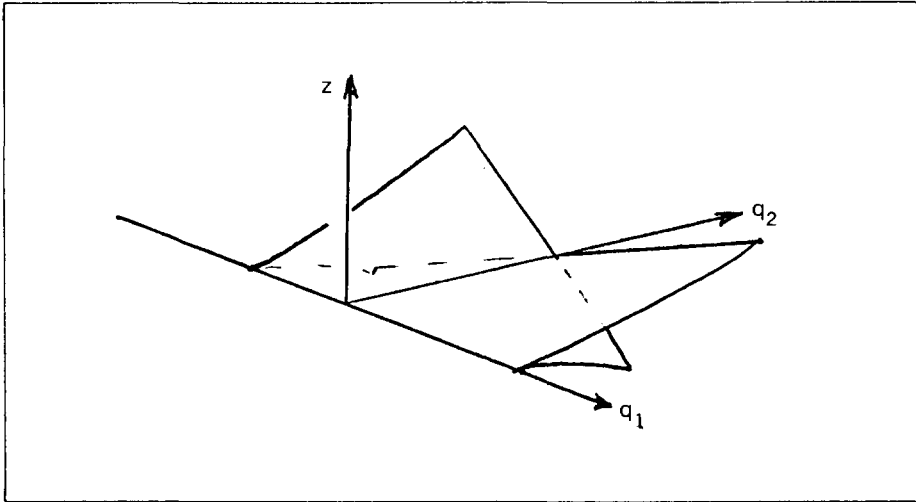


Figure 4. Le parapluie plié.

Par construction même, la projection sur le plan des (q_1, q_2) n'est pas générique, aussi on pourra trouver plus agréable d'utiliser la surface paramétrée par

$$(2) \quad (q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(t^2, u, tu, \frac{2}{3}t^3 \right)$$

qui lui correspond par le difféomorphisme symplectique $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (q_1, p_2, p_1, -q_1)$. Dans cette nouvelle écriture, en résolvant $dz = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ on obtient la fonction génératrice $z = 2t^3 u/3$, ce qui permet de considérer le front d'onde

$$(q_1, q_2, z) = \left(t^2, u, \frac{2}{3}t^3 u \right)$$

que Givental appelle *parapluie plié* et qu'on voit sur la figure 4: l'axe des q_1 est une arête de rebroussement et l'axe des q_2 une ligne de points doubles. On appellera surface lagrangienne plongée (resp. immergée) au sens de Givental une surface $f: V \rightarrow T^*\mathbb{R}^2$ isotrope ($f^*\omega = 0$) avec comme seules singularités des parapluies déployés (resp. et des points doubles ordinaires).

1.2. Eclatement

Identifions $T^*\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}^2$ comme on a dit et $\mathbb{C}^2$ à $\mathbb{H}$ par

$$\begin{aligned} (q_1 + ip_1, q_2 + ip_2) &\mapsto q_1 + ip_1 + (q_2 + ip_2)j \\ & (= q_1 + ip_1 + jq_2 + kp_2) . \end{aligned}$$

Notre surface (1) est alors paramétrée par

$$\begin{aligned} Q(t, u) &= t^2 + it u + j \frac{2}{3} t^3 - k u \\ &= t^2 - k u + t \left(\frac{2}{3} t^2 - k u \right) j . \end{aligned}$$

On est maintenant bien tenté de considérer la surface paramétrée par

$$Q_v(t, u) = t^2 - k u + t(v t^2 - k u)j .$$

C'est une surface totalement réelle de $(\mathbb{C}^2, i)$ qui a les mêmes propriétés que le parapluie déployé pour $v \neq 0$ sauf qu'elle n'est isotrope que pour $v = 2/3$.

Pour $v = 1$, elle est l'image de la surface de $(\mathbb{C}^2, k)$ définie par $\tilde{Q}_1(t, u) = (t^2 - k u, t)$ par l'éclatement (k -complexe)

$$\begin{aligned} \sigma : (\mathbb{C}^2, k) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, k) \\ (x, \beta) &\mapsto (x, x\beta) \end{aligned}$$

$\tilde{Q}_1$ est une surface lisse totalement réelle (pour k) dont le plan tangent rencontre l'exceptionnelle E ($x = 0$) de l'éclatement le long d'une droite (réelle).

1.3. Nombre d'intersection local et énumération des parapluies

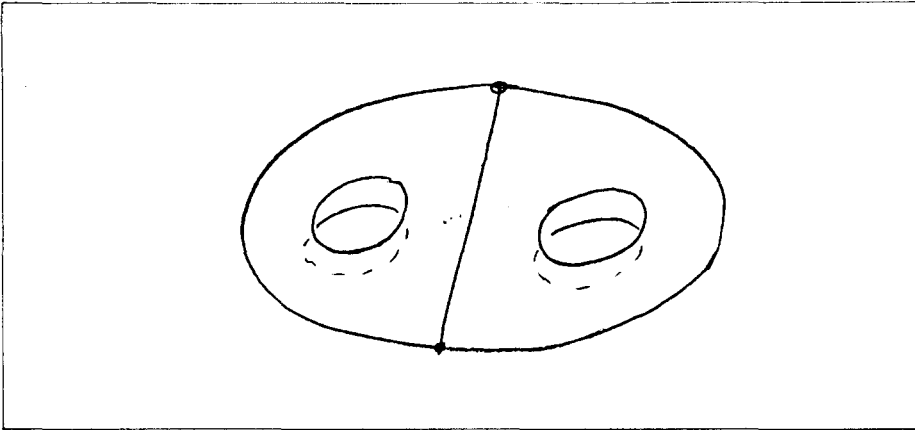
On en déduit facilement

PROPOSITION 1.3.1. ([4] au signe près) *Soit V une surface lagrangienne orientée immergée au sens de Givental. Alors*

$$V \cdot V = -\chi(V) + 2d - p$$

où d désigne le nombre algébrique de points doubles et p le nombre de parapluies déployés.

EXEMPLE. La figure 5 représente le front d'onde d'un plongement lagrangien dans $T^*\mathbb{R}^2$ d'une surface de genre 2 avec deux parapluies déployés.

Figure 5. $0 = -(-2) + 0 - 2$.

REMARQUE. La convention d'orientation utilisée par Givental est assez mauvaise (orientation opposée à celle donnée par la forme symplectique) pour qu'il trouve une formule avec des signes opposés à ceux qui apparaissent ci-dessus. En particulier, chaque parapluie lui apporte une contribution de $+1$. C'est en essayant de me convaincre qu'il était nécessaire de trouver -1 que j'ai remarqué l'éclatement dont il est question ici.

La démonstration de cette formule est facile et folklorique quand on a affaire à une vraie immersion (pour ce type de calculs, je me permets de renvoyer le lecteur à [3]). Pour obtenir le cas plus général considéré ici, il suffit de vérifier que chaque parapluie déployé apporte une contribution de -1 . Ce -1 n'est autre que l'auto-intersection de l'exceptionnelle de l'éclatement, plus précisément:

DÉMONSTRATION. Toutes les surfaces Q_v (pour $v \neq 0$) ont la même auto-intersection, on calcule donc celle de Q_1 . La surface $\tilde{Q}_1$ est sa transformée stricte et son intersection avec E est nulle : on déforme $(t^2 - ku, t)$ en $(t^2 + \varepsilon - ku, t)$ qui ne rencontre pas $E(x = 0)$ pour $\varepsilon > 0$. L'auto-intersection locale de Q_1 est égale à celle de $\sigma^{-1}Q_1 = \tilde{Q}_1 \cup E$ qui est donc $-1 = E \cdot E$.

Bien entendu, si V n'est pas orientable, la proposition 1.3.1 reste vraie modulo 2, mais ce n'est pas très intéressant. En réalité, on a comme dans le cas des vraies immersions une formule mod 4 ([5], voir aussi [3]). Appelons w_1 la première classe de Stiefel-Whitney de V , ainsi $\langle w_1^2, [V] \rangle \in \mathbb{Z}/2$. De même le nombre d des points doubles ne peut être défini que dans $\mathbb{Z}/2$. Désignons par $2 : \mathbb{Z}/2 \hookrightarrow \mathbb{Z}/4$ l'homomorphisme non-trivial, de sorte que $2d$, par exemple, représente un entier modulo 4. ■

PROPOSITION 1.3.2. *Soit V une surface lagrangienne immergée dans $T^*\mathbf{R}^2$ (au sens de Givental). Alors*

$$\begin{aligned} 0 &= -\chi(V) + 2\langle w_1^2, [V] \rangle + 2d - p \bmod 4 \\ &= \chi(V) + 2d - p \bmod 4. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On éclate (pour k) les points de $\mathbb{C}^2$ où V a des parapluies et on obtient une immersion $f' : V \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2$ (éclatée de $\mathbb{C}^2$ en ces points). On calcule

$$0 = f_*[V] \cdot f_*[V] = f'_*[V] \cdot f'_*[V] - p$$

comme on a vu plus haut (l'auto-intersection est bien définie dans $\mathbb{Z}$) et d'autre part

$$\begin{aligned} f'_*[V] \cdot f'_*[V] &= \langle e(N_{f'}), [V] \rangle + \\ &2\langle w_1(N_{f'})^2, [V] \rangle + 2d(f') \bmod 4 \end{aligned}$$

puisque f' est une immersion [5]. Il reste à identifier le fibré $N_{f'}$. Je dis que $\langle e(N_{f'}), [V] \rangle = -\chi(V)$, dont on déduit que $N_{f'} \cong -TV$ donc aussi que $w_1(N_{f'}) = w_1$. D'où la proposition, la deuxième égalité résultant simplement du fait que $\langle w_1^2, [V] \rangle \sim \chi(V) \bmod 2$. ■

DÉMONSTRATION DE L'ASSERTION. Il suffit de construire une section de $N_{f'}$ qui a les mêmes zéros qu'une section (transverse à la section nulle) de TV et de faire attention aux signes. On choisit près de chaque singularité de f un paramétrage tel que (2) et dans celui-ci, on définit un vecteur tangent à V par $X = \partial/\partial u$ (l'image par f est le vecteur non nul (i, t)). On prolonge ces données locales en un champ de vecteurs X à singularités isolées sur V et on définit un champ transverse Y en multipliant l'image de X par i . Près de chaque singularité, on a $Y = (-t, -i) = -t + ij = -t + k$. On relève Y en un champ $\tilde{Y}$ de sorte que $\tilde{Y} = (-t + k, 0)$ près des ex-parapluies. On en déduit aisément un champ normal à f' , qui a les mêmes zéros que X , et, modulo la facile vérification de signe, le résultat. ■

2. EXEMPLES DE SURFACES LAGRANGIENNES DANS $T^*\mathbf{R}^2$

2.1. Confluence de parapluies et points doubles

Si $W = T^*\mathbf{R}^2$ dans laquelle $V \cdot V = 0$ par force, $2d - p = \chi(V)$ ne dépend donc pas du choix de l'immersion. Ceci n'est pas très étonnant : il est possible dans certains cas d'éliminer ensemble deux parapluies et un point double (positif) ou de remplacer

deux parapluies par un point double (négatif). Les modèles suivants sont aux confluences de parapluies décrites dans [1] ce que les parapluies déployés sont aux parapluies.

Le morceau de surface est paramétré par

$$f_v^\alpha(t, u) = \left(t^2, u, tu^2 + \alpha t^3 - vt, \frac{4}{3}t^3u \right) \\ = (q_1, q_2, p_1, p_2)$$

où $v \in \mathbf{R}$ est le paramètre de la déformation et $\alpha = \pm 1$ va décrire les deux types de déformations (elliptique ou hyperbolique). Le plus simple est d'exhiber et de dessiner les fronts correspondants (figures 6 et 7).

$$g_v^\alpha(t, u) = \left(t^2, u, \frac{2}{3}t^3u^2 + \frac{2}{5}\alpha t^5 - \frac{2}{3}vt^3 \right) \\ = (q_1, q_2, z)$$

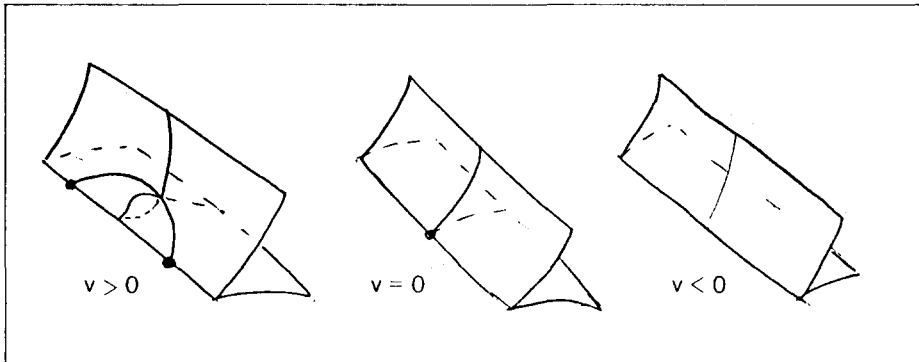


Figure 6. $\alpha = 1$ cas elliptique.

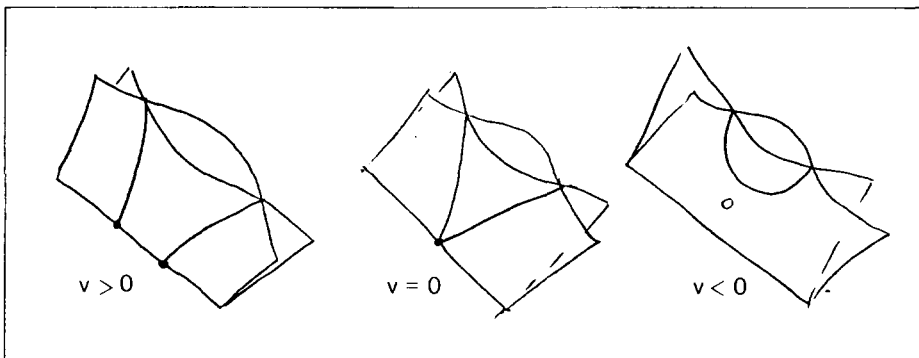


Figure 7. $\alpha = -1$ cas hyperbolique.

Un point double de la surface correspond à deux points du front qui ont même projection sur le plan des q et des plans tangents parallèles. Dans le cas elliptique ($\alpha = 1$) il y a un point double pour $v > 0$ obtenu pour $(t, u) = (\pm\sqrt{v}, 0)$; dans le cas hyperbolique ($\alpha = -1$), il y en a un pour $v < 0$, obtenu pour $(t, u) = (\pm\sqrt{-v}, 0)$. Un calcul direct montre que le premier est > 0 et le second < 0 .

2.2. Parapluies, points doubles et anses d'indice 1

La figure 8 représente une anse avec un point double (négatif) et une anse plongeante (avec deux parapluies). Les deux permettent de faire des sommes connexes de surfaces orientées ou non (encore une fois, un point double négatif «vaut» deux parapluies). Par exemple, la surface de genre 2 représentée sur la figure 5 est la somme connexe de deux tores standard (figure 2) réalisée grâce à l'anse à parapluies. La figure 9, quant à elle, représente la somme connexe de g tores, réalisée avec des anses immergées. Il s'agit d'une vraie immersion lagrangienne de la surface de genre g , avec $g - 1$ points doubles (négatifs).

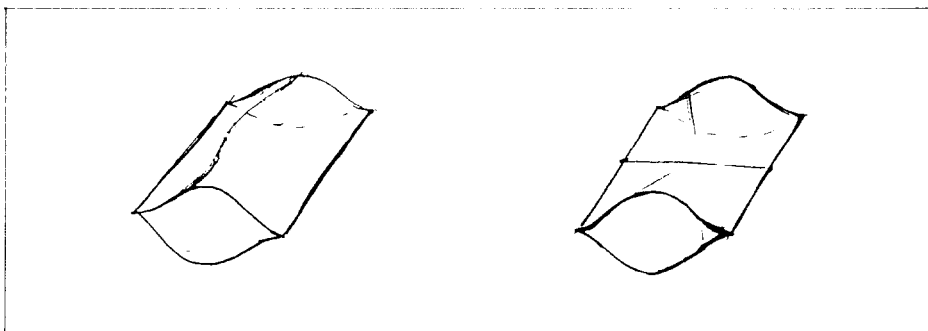


Figure 8.

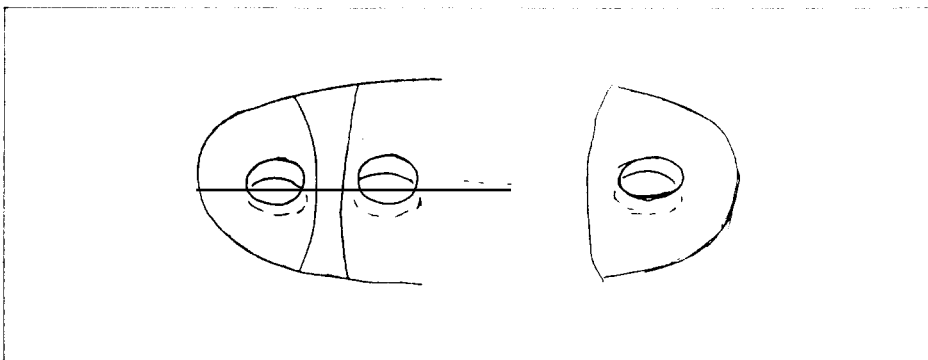


Figure 9.

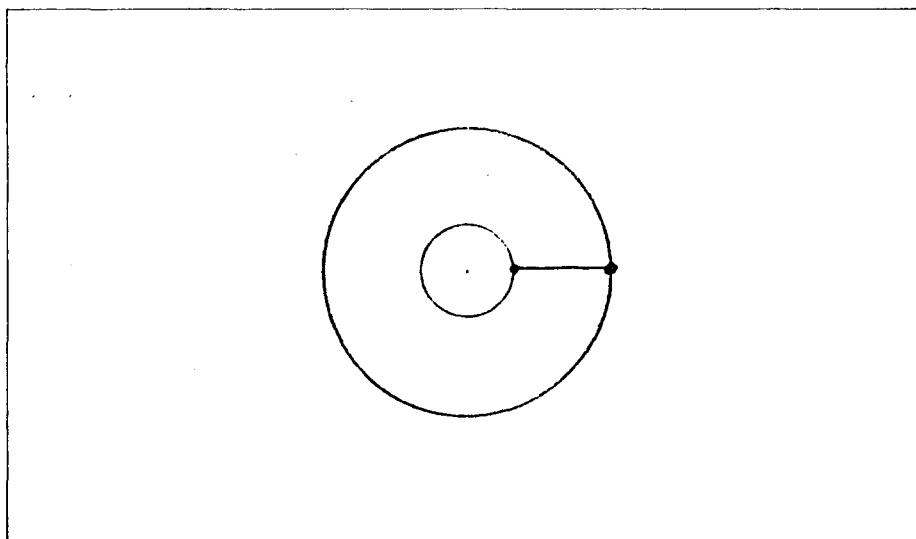


Figure 10.

Ces anses peuvent aussi être ajoutées à des surfaces connexes, celle à parapluies détruit alors l'orientabilité. Par exemple, si on ajoute l'anse à parapluies à l'immersion de Whitney (figure 3) on obtient une immersion de la bouteille de Klein avec un point double et deux parapluies (figure 10).

2.3. Les surfaces orientables

Tous les triplets d_+, d_-, p de nombres ≥ 0 qui vérifient

$$2g - 2 + 2d_+ - 2d_- - p = 0$$

c'est à dire la proposition 1.3.1 peuvent être réalisés comme nombres de points doubles positifs, négatifs, de parapluies pour une immersion lagrangienne d'une surface orientable de genre g . Grâce aux modèles de 2.1 et au fait qu'il est très facile de créer une paire de points doubles de signes opposés (hélas l'inverse est moins évident) il est clair qu'il suffit de montrer qu'on peut réaliser le nombre minimum de points doubles autorisé par la proposition, c'est à dire $d_+ = 1, d_- = 0$ pour la sphère, $d_+ = d_- = 0$ pour le tore, $d_+ = 0, d_- = g - 1$ pour une surface de genre $g \geq 2$. C'est ce que montre la figure 11.

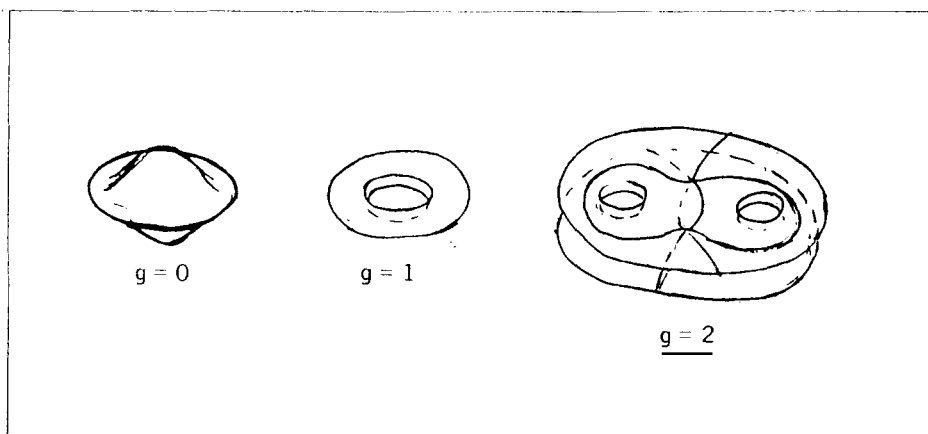


Figure 11.

2.4. Elimination de points doubles

Il est classique [2] et folklorique qu'on peut réaliser toutes les chirurgies (et tous les cobordismes élémentaires) dans le cadre des immersions lagrangiennes, grâce aux familles génératrices

$$S_y(a, q) = \frac{a^3}{3} - aQ(q) + ay$$

où $y \in [-1, 1]$ est un paramètre, $a \in \mathbb{R}$, Q est une forme quadratique non-dégénérée sur $\mathbb{R}^n$. On a

$$\frac{\partial}{\partial S_y} \partial a = a^2 - Q(q) + y$$

ce qui fait que la sous-variété de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ décrite par $\partial S_y / \partial a = 0$ est une quadrique (son type dépend de la signature de Q et du signe de y) et

$$(a, q) \mapsto \left(q, \frac{\partial S_y}{\partial q} \right)$$

en décrit une immersion lagrangienne dans $T^*\mathbb{R}^n$. Considérer y comme une variable supplémentaire revient à considérer le cobordisme élémentaire d'indice *ad hoc*, dans l'espace $T^*\mathbb{R}^{n+1}$.

Dans le cas qui nous intéresse, il convient de choisir Q définie positive et $n = 2$. On est alors en train d'ajouter une anse, tout en supprimant un point double (figure 12).

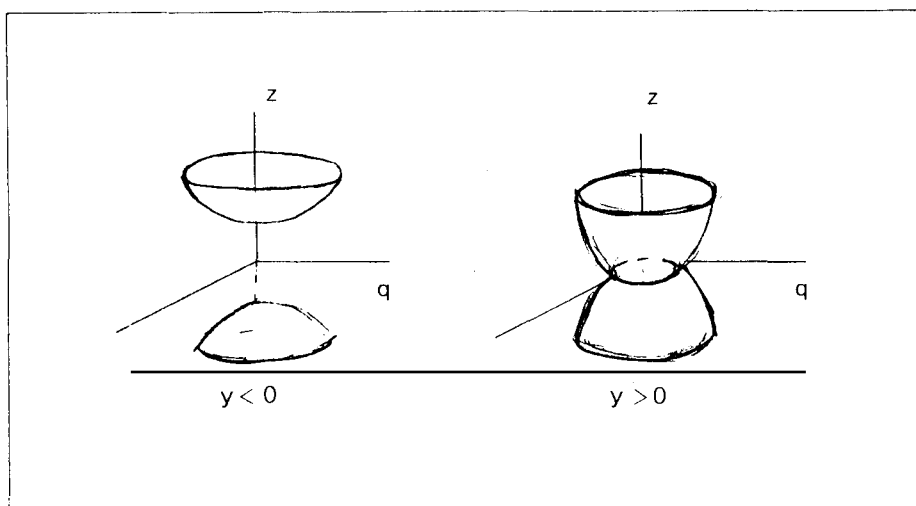


Figure 12.

On vérifie aisément, soit directement soit grâce à 1.3.1 que l'anse est orientable si et seulement si le point double était positif. A partir des exemples de la figure 11 on construit donc ainsi tous les exemples de plongements de surfaces non-orientables de [4]: on remplace chaque point double négatif par une anse non-orientable (ou plus exactement désorientante) comme sur la figure 13. La même chirurgie appliquée au point double positif de l'immersion de Whitney (dont le front est la soucoupe volante) fournit le plongement usuel du tore T^2 (figure 14).

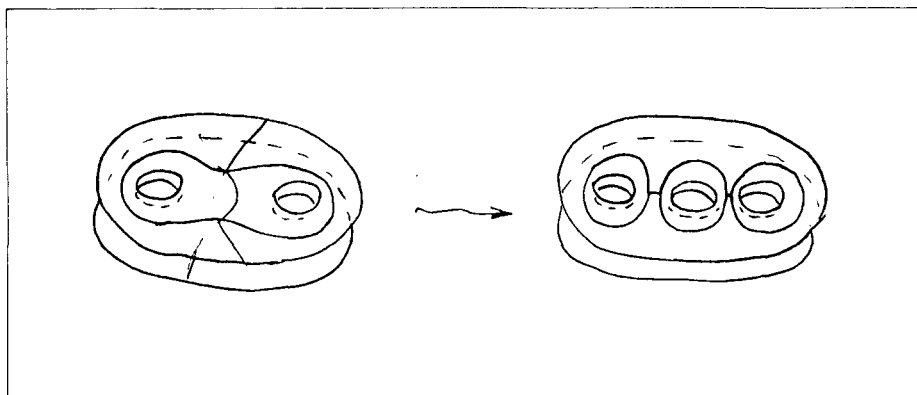


Figure 13.

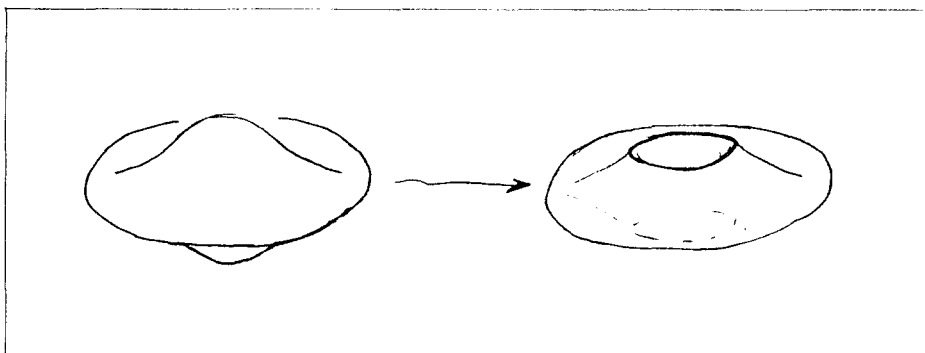


Figure 14.

2.5. Surfaces non-orientables dans $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$

Utilisons la structure symplectique standard sur $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ et montrons

PROPOSITION 2.5.1. *Pour qu'une surface non-orientable possède un plongement lagrangien dans $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, il faut et il suffit que sa caractéristique d'Euler soit 0 ou 1 modulo 4.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que toutes les surfaces qui ont un plongement lagrangien dans $\mathbf{R}^4$ en ont un dans n'importe quelle variété symplectique. Il suffit donc de se préoccuper de la bouteille de Klein et des surfaces de caractéristique d'Euler 1 modulo 4.

Plongeons d'abord la bouteille de Klein: on commence par deux exemplaires lagrangiens de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, par exemple $\{[a, b, c] \text{ mid } a, b, c \in \mathbf{R}\}$ et $\{[ia, ib, c] \text{ mid } a, b, c \in \mathbf{R}\}$ qui se coupent transversalement en $\{0, 0, 1\}$. On applique la chirurgie décrite ci-dessus, ce qui remplace le point d'intersection par une anse plongée et donne donc bien un plongement lagrangien de la bouteille de Klein.

On applique la même méthode pour plonger les autres surfaces en question: le cas de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ (c'est à dire le cas où $\chi = 1$) est clair (on vient de l'utiliser). Soient maintenant une surface V plongée avec caractéristique d'Euler $0 \bmod 4$ et un $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ lagrangien qui la rencontre transversalement en deux points. On applique la chirurgie en chacun de ces deux points, obtenant ainsi une nouvelle surface V' plongée, dont la caractéristique d'Euler est

$$\chi(V') = \chi(V) + \chi(\mathbf{P}^2(\mathbf{R})) - 4 = \chi(V) - 3$$

on a ainsi construit un exemple de plongement lagrangien pour chacune des surfaces en question.

Réciproquement, la méthode de [5] déjà utilisée ci-dessus permet de montrer

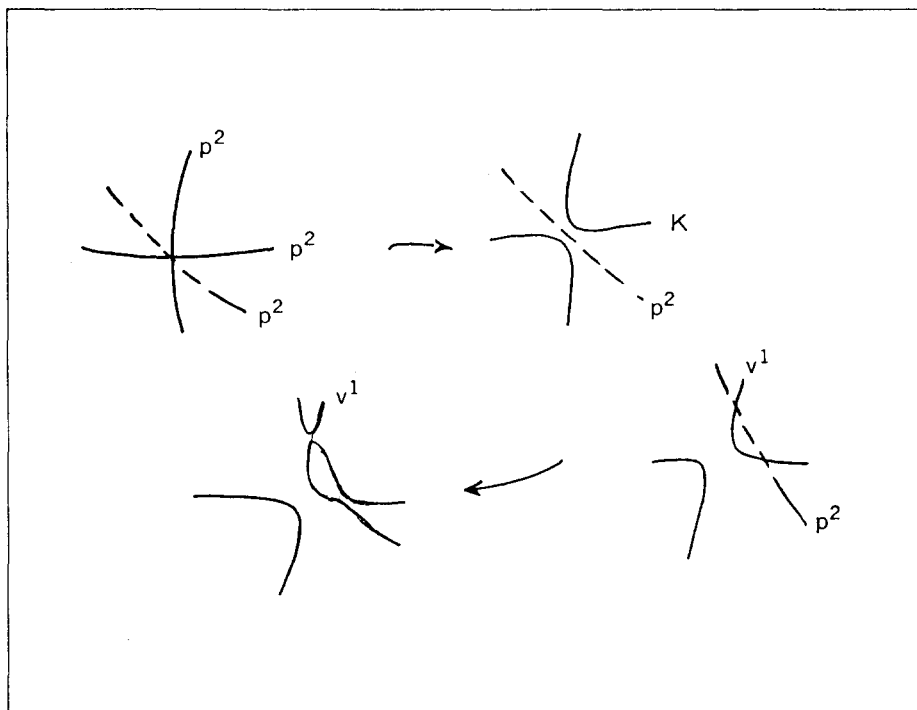


Figure 15.

LEMME 2.5.2. Soit $f : V \rightarrow W$ une immersion d'une variété V de dimension n paire dans une variété compacte orientée W de dimension $2n$. Soit $u \in H^n(W; \mathbb{Z}/2)$ la classe duale à l'image de $[V]$. Si

$$P : H^n(W; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{2n}(W; \mathbb{Z}/4)$$

désigne le carré de Pontrjagyn, alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}u, [W] \rangle + 2d(f) &\equiv \langle e(N_f), [V] \rangle \\ &+ 2 \langle w_1(N_f) w_{n-1}(N_f), [V] \rangle \pmod{4}. \end{aligned}$$

■

En fait, $w_1(N_f) = w_1(V)$ (puisque W est orientable). En plus dans le cas où $W = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, le carré de Pontrjagyn est très facile à calculer puisque la cohomologie est en fait entière: on a $\mathcal{P}u = \tilde{u} \cup \tilde{u} \pmod{4}$ pour n'importe quel $\tilde{u}$ relevant u dans $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$, en particulier $\langle \mathcal{P}u, [W] \rangle = 0$ ou 1 suivant que $u = 0$ ou $u \neq 0$. Dans le cas lagrangien, on a bien sûr $N_f \cong -TV$, pour une surface plongée

lagrangiennement dans $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ le lemme donne donc

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}u, [W] \rangle + 0 &\equiv -\chi(V) + \langle w_1^2, [V] \rangle \\ &\equiv \chi(V) \bmod 4 . \end{aligned}$$

LEMME 2.5.2. *Remarquons, comme conséquence immédiate, qu'en éclatant deux points, astucieusement choisis dans $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, on en déduit des plongements lagrangiens de toutes les surfaces non-orientables dans la variété obtenue par cet éclatement.*

RÉFÉRENCES

- [1] F. APÉRY, *Models of the real projective plane*, Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [2] V.I. ARNOLD, *Cobordismes lagrangiens et legendriens I et II*, Funkts. Anal. ego Prilozh. **14** (1980), fasc. 3, 1-130 et 4,8-17.
- [3] M. AUDIN, *Fibrés normaux d'immersions en dimension moitié, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*, Comment. Math. Helvetic **63** (1988), 593-623.
- [4] A.B. GIVENTAL, *Plongements lagrangiens de surfaces et parapluies de Whitney déployés*, Funkts. Anal. ego Prilozh. **20** (1986), fasc. 3, 35-41.
- [5] J. LANNES, *Sur les immersion de Boy*, Algebraic topology, Aarhus 1982, Madsen and Oliver, eds., Lecture Notes in Mathematics 1051, 1983.

Manuscript received: October 9, 1990

Revised version: February 5, 1991