

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHÈLE AUDIN

Vecteurs propres de matrices de Jacobi

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 5 (1994), p. 1505-1517.

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_5_1505_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_5_1505_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VECTEURS PROPRES DE MATRICES DE JACOBI

par
Michèle AUDIN

1. Introduction.

Dans cette note, je voudrais faire une remarque que j'ai trouvée un peu étonnante à propos du système de Toda.

Le problème. — La terminologie «système intégrable» est parfois un peu ambiguë : il est question d'un système hamiltonien qui se trouve posséder beaucoup d'intégrales premières, mais bien souvent — même si les auteurs ne le signalent pas toujours — dès qu'on a identifié les intégrales premières pour le système de départ, on ne s'intéresse plus tant à ce système qu'à un niveau commun de ces intégrales, voire à *tous* les systèmes intégrables qu'elles définissent.

Chacun sait qu'on peut écrire le système différentiel dit «système de Toda périodique» comme une équation différentielle dans un certain espace de *matrices de Jacobi*. Le fait est que ce système est intégrable et que les niveaux communs des intégrales premières sont tout simplement des ensembles de matrices ayant même spectre : ils ont donc une définition purement algébrique (d'algèbre linéaire, même).

Les auteurs de [1] ont mis en évidence une très belle géométrie dans la façon dont ces ensembles isospectraux peuvent se compactifier pour devenir des variétés abéliennes.

La philosophie. — Il m'a semblé que, bien sûr, on pouvait étudier cette situation en regardant comment les solutions du système de Toda devenaient infinies, mais après tout pourquoi *ce* système ? et même pourquoi utiliser

Mots-clés : Systèmes complètement intégrables – Réseaux de Toda – Matrices de Jacobi – Équations de Lax – Variétés abéliennes réelles.

Classification A.M.S. : 58F07 – 14P25 – 58F05 – 58F14.

les solutions d'un système? et pourquoi ne pas considérer les niveaux en eux-mêmes et les étudier directement?

Si les matrices qu'ils contiennent ont toutes les mêmes valeurs propres, considérons leurs vecteurs propres — c'est d'autant plus tentant qu'ils sont bien compris (voir [3]) et qu'on sait *a priori* qu'ils peuvent donner des renseignements sur les niveaux (voir par exemple [4] et même, dans ce cas précis, le § 4.1 de [1]).

La surprise. — Ce qui est plus étonnant, c'est que cette géométrie à l'infini va mettre en évidence une direction privilégiée : on compactifie le niveau en lui ajoutant une famille (ordonnée) d'hypersurfaces. Deux consécutives sont tangentes entre elles et la famille des hyperplans tangents le long de l'intersection est le pinceau des hyperplans contenant une droite bien précise⁽¹⁾... et cette direction est celle du flot de Toda : on peut certes comprendre toute la géométrie sans système hamiltonien, mais en retour, la géométrie nous donne *un* système hamiltonien meilleur que tous ceux que nous aurions pu considérer.

1. Matrices de Jacobi.

Les matrices de Jacobi considérées ici sont les matrices infinies tridiagonales symétriques périodiques :

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & b_{n+1} & a_{n+1} & 0 & \\ 0 & a_{n+1} & b_1 & a_1 & 0 \\ \ddots & 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \ddots \\ & & 0 & a_2 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & a_n \\ & & & & & a_n & b_{n+1} & a_{n+1} \\ & & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾ Toute cette géométrie est dans une variété abélienne, donc tous les espaces tangents sont identifiés.

de sorte que la matrice finie

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & & a_{n+1}\lambda \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & a_n \\ a_{n+1}\lambda^{-1} & & & & a_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

contient toute l'information : si

$$M \begin{pmatrix} \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{n+1}x_0 + b_1x_1 + a_1x_2 \\ \vdots \\ a_nx_n + b_{n+1}x_{n+1} + a_{n+1}x_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

alors

$$M_\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1x_1 + a_1x_2 + a_{n+1}\lambda x_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+1}\lambda^{-1}x_1 + a_nx_n + b_{n+1}x_{n+1} \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la même chose si on convient de poser $\lambda \cdot x_i = x_{i-(n+1)}$.

La donnée de la matrice M , comme celle de la matrice M_λ est équivalente à celle du couple de vecteurs

$$(a, b) = (a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1}).$$

Je supposerai de plus que $\sum b_i = 0$ de sorte que $M_\lambda \in \mathfrak{sl}_{n+1}$.

2. Leurs valeurs propres.

Le polynôme caractéristique $\det(M_\lambda - \mu \text{Id})$ est de la forme

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i \right) (\lambda + \lambda^{-1}) + P(\mu)$$

où

$$P(\mu) = (-1)^{n+1} \mu^{n+1} + H_1(a, b) \mu^{n-1} + \dots + H_{n-1}(a, b) \mu + H_n(a, b).$$

Fixons $c \in \mathbb{C} - \{0\}$. Pour chaque vecteur $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$, considérons l'ensemble $\mathcal{T}_h$ de tous les couples (a, b) tels que la matrice M_λ associée ait

$$c(\lambda + \lambda^{-1}) + (-1)^{n+1} \mu^{n+1} + h_1 \mu^{n-1} + \dots + h_n$$

comme polynôme caractéristique. En d'autres termes, on a ainsi fixé un niveau commun des fonctions $H_1, \dots, H_n$ et en même temps une courbe algébrique

$$C_h = C : c(\lambda + \lambda^{-1}) + P(\mu) = 0$$

dite *courbe spectrale* puisqu'elle décrit le spectre des matrices $M_\lambda \in \mathcal{T}_h$.

Remarque. — On aurait pu couper la matrice infinie M à un autre endroit, sans changer le polynôme caractéristique de la matrice M_λ obtenue. Restant en dimension finie, pour

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & & & \lambda \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$QM_\lambda Q^{-1}$ est la matrice σM_λ déduite de M_λ par la permutation circulaire

$$\sigma : (a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1}) \mapsto (a_{n+1}, a_1, \dots, a_n, b_{n+1}, b_1, \dots, b_n).$$

En particulier, M_λ et σM_λ ont même polynôme caractéristique et les fonctions $H_1, \dots, H_n$ sont invariantes par cette transformation. L'ensemble $\mathcal{T}_h$ est ainsi muni d'une opération du groupe $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.

Étude de la courbe C . — On appellera encore C la courbe complétée et normalisée au-dessus de $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. C'est très simple ici : il suffit de regarder l'équation de la partie affine de C pour s'apercevoir qu'elle n'a qu'une branche (en 0 comme en ∞), il suffit donc de rajouter deux points : $A = (0, \infty)$ et $B = (\infty, \infty)$ (coordonnées $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). Ainsi par exemple les diviseurs des fonctions λ et μ sont-ils :

$$\begin{cases} (\lambda) = (n+1)A - (n+1)B, \\ (\mu) = (\mu)_0 - A - B, \end{cases}$$

$(\mu)_0$ désignant le diviseur des zéros de μ . En particulier, $(A - B)$ représente un élément d'ordre $n+1$ dans $\text{Pic}^0(C)$. L'application $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ est de degré 2, c'est le revêtement double qui correspond à l'involution $\tau : (\lambda, \mu) \mapsto (\lambda^{-1}, \mu)$.

Pour résumer :

PROPOSITION 1. — *La courbe C est hyperelliptique de genre n , revêtement double (par μ) de $\mathbb{P}^1$ ramifié en les $2n+2$ racines de $P(\mu)^2 - 4c^2$. Elle possède un diviseur de degré 0, de la forme $A - \tau(A)$, dont la classe est un élément d'ordre $n+1$ de $\text{Pic}^0(C)$.*

3. Leurs vecteurs propres.

Quand la courbe C est lisse, à tout élément (a, b) de $\mathcal{T}_h$, on peut associer un fibré en droites complexes sur C , sous-fibré de $C \times \mathbb{C}^{n+1}$, dont la fibre en un point (λ, μ) est — au moins si le point est assez général — la droite propre de M_λ pour la valeur propre μ : comme la courbe est lisse, il n'y a pas de difficulté à prolonger une application

$$(C - \text{un nombre fini de points}) \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

à C tout entière. On peut ainsi définir une application $\mathcal{T}_h \rightarrow \text{Pic}(C)$. Pour avoir des degrés positifs, on considèrera plutôt le fibré dual ; on aura ainsi une application

$$\varphi : \mathcal{T}_h \longrightarrow \text{Pic}^{2n}(C).$$

Le calcul du degré est facile à partir de Riemann-Roch, mais sera aussi une conséquence de la détermination explicite d'un diviseur représentant $\varphi(M_\lambda)$, voir la proposition 4.

PROPOSITION 2. — *L'application φ entrelace les deux opérations de $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$:*

$$\varphi \sigma(a, b) = \varphi(a, b) + B - A.$$

Démonstration. — C'est plus ou moins évident si l'on pense à la matrice infinie M : il est alors clair que

$$M_\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \iff \sigma M_\lambda \begin{pmatrix} \lambda x_{n+1} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \lambda x_{n+1} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si $\varphi(M_\lambda)$ est le diviseur « pôles — zéros » de la section v du fibré des vecteurs propres, alors $\varphi(\sigma(M_\lambda))$ est le diviseur des « pôles — zéros » du

vecteur

$$\begin{pmatrix} \lambda x_{n+1} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit facilement la proposition. $\square$

Remarque. — Multiplier les $n + 1$ coordonnées de v par λ ajouterait au diviseur « pôles – zéros » le diviseur de λ^{-1} , soit $(n + 1)(B - A)$. Ici, une seule coordonnée est multipliée par λ , c'est pourquoi on n'ajoute que $(B - A)$.

4. Image de l'application de vecteurs propres.

Appelons $\mathcal{C}_k$ l'image de $C^{(n-1)}$ dans $C^{(2n)}$ par

$$\sum Q_j \mapsto \sum Q_j + (n - k + 1)B + kA.$$

L'image de $\mathcal{C}_k$ dans $\text{Pic}^{2n}(C)$ est un translaté $\mathcal{D}_k$ du diviseur Θ .

PROPOSITION 3. — *L'image de φ dans $\text{Pic}^{2n}(C)$ est le complémentaire de la réunion des $\mathcal{D}_k$ ($1 \leq k \leq n + 1$).*

Remarque. — Il est habituel dans ce genre de situation (application de vecteurs propres) d'obtenir le complémentaire d'un avatar du diviseur Θ (voir [4] par exemple). Ici l'équivariance (proposition 2) impose un complémentaire invariant par la translation par $(B - A)$.

La proposition 3 est inspirée du résultat de [1] mentionné dans l'introduction. Elle est conséquence de la détermination explicite d'un diviseur représentant $\varphi(M_\lambda)$ et donc, essentiellement de [3] :

PROPOSITION 4. — *Soit $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j}$ fois le mineur obtenu en retirant à la matrice $M_\lambda - \mu \text{Id}$ sa i -ème ligne et sa j -ème colonne. Les fonctions méromorphes $\Delta_{n+1,k}$ et $\Delta_{n+1,n+1}$ ont n zéros communs $Q_1, \dots, Q_n$ (ne dépendant pas de $k \in \{1, \dots, n\}$) sur C et le diviseur des vecteurs propres est équivalent à*

$$P_1 + \dots + P_n + nB$$

(où $P_i = \tau Q_i$) dans $\text{Pic}^{2n}(C)$. De plus, le diviseur effectif $D = P_1 + \dots + P_n$

est général et vérifie, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$h^0(D + (n - k + 1)B - (n - k + 1)A) = 1.$$

Un vecteur propre de M_λ est exhibé dans [3], c'est

$$v = \begin{pmatrix} \Delta_{n+1,1} \\ \vdots \\ \Delta_{n+1,n} \\ \Delta_{n+1,n+1} \end{pmatrix}, \quad \text{ou encore} \quad w = \begin{pmatrix} \Delta_{n+1,1}/\Delta_{n+1,n+1} \\ \vdots \\ \Delta_{n+1,n}/\Delta_{n+1,n+1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui, lui, ne s'annule pas. Remarquons encore que $\Delta_{n+1,n+1}$ est un polynôme en μ de degré n (et ne fait pas intervenir λ) et que $\Delta_{n+1,k}$ est un polynôme de degré $(n - 1)$ en μ où λ apparaît comme facteur de μ^{n-k} .

On vérifie alors aisément que le diviseur des pôles de w est exactement celui donné dans l'énoncé.

Les autres assertions sont fondées sur le fait que, pour tout k , la fonction $f_k = \Delta_{n+1,k}/\Delta_{n+1,n+1}$ (k -ème coordonnée de w) est dans $\mathcal{L}(D + (n - k + 1)B - (n - k + 1)A)$ (voir [3] pour les détails). $\square$

Remarque. — L'application φ est un revêtement de groupe $(\mathbb{Z}/2)^n$ de son image : $\varphi^{-1}(\varphi(M_\lambda))$ est l'intersection de la classe de conjugaison de M_λ sous $\text{GL}(n + 1; \mathbb{C})$ avec $\mathcal{T}_h$ (voir [4]), c'est-à-dire ici les matrices correspondant aux

$$(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_{n+1} a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad \prod_i \varepsilon_i = 1.$$

On aurait d'ailleurs pu remarquer *a priori* que les H_i ne dépendaient que des carrés des a_i : en effet, la matrice M_λ est conjuguée à

$$N_\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & & & a_{n+1}^2 \lambda c^{-1} \\ a_1^2 & b_2 & 1 & & & \\ 0 & a_2^2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ c\lambda^{-1} & & & & a_n^2 & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

par la matrice diagonale des $(1, a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 \cdots a_n)$.

Modulo le « changement de variables » $x_i = a_i^2$, l'application φ devient un isomorphisme sur son image (c'est parfois le système ainsi transformé qui est étudié, notamment dans [1]).

5. Géométrie dans la jacobienne.

PROPOSITION 5. — *Les diviseurs $\mathcal{D}_k$ et $\mathcal{D}_{k+1}$ se rencontrent le long d'un translaté de l'image de $C^{(n-2)}$ et y sont tangentes. Les hyperplans tangents le long de l'intersection sont tous les hyperplans de $H^1(\mathcal{O}_C)$ qui contiennent la droite engendrée par la classe du cocycle μ .*

Dans cet énoncé, il faut bien sûr lire $\mathcal{D}_{n+2} = \mathcal{D}_1$. La première assertion est un des exemples de [1]; la seconde est une remarque de mon cru. Elle montre que, dans la jacobienne de C , il y a une direction privilégiée. Expliquons d'abord comment μ peut être un vecteur tangent à la jacobienne de C . L'espace tangent (en n'importe quel point) à $\text{Pic}^{2n}(C)$ est $H^1(\mathcal{O}_C)$. La courbe C se recouvre par les ouverts $\mathcal{U}_+$ et $\mathcal{U}_-$, où $\lambda \neq \infty$ et $\lambda \neq 0$ respectivement. Étant non complètes, donc affines, les courbes $\mathcal{U}_\pm$ sont acycliques pour $\mathcal{O}_C$: c'est pourquoi on peut considérer $H^1(\mathcal{O}_C)$ comme les classes de 1-cocycles de ce recouvrement.

Démonstration. — A cause de l'invariance de la situation par la translation $(B - A)$, il suffit de considérer $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$; de plus, on peut tout traduire pour se placer dans $\text{Pic}^{n-1}(C)$ où $\mathcal{D}_0$ va s'appeler W_{n-1} (le «diviseur Θ canonique», image de $C^{(n-1)}$ dans $\text{Pic}^{n-1}(C)$) et où, naturellement, $\mathcal{D}_1$ sera $W_{n-1} + B - A$.

On vérifie alors l'égalité (ensembliste) :

$$W_{n-1} \cap (W_{n-1} + B - A) = \{L \in \text{Pic}^{n-1}(C) \mid h^0(L - A) \geq 1\}$$

et le membre de droite n'est autre que l'image W_{n-2} de $C^{(n-2)}$ dans Pic^{n-1} par l'application

$$R_1 + \cdots + R_{n-2} \longmapsto [R_1 + \cdots + R_{n-2} + A].$$

D'autre part, on connaît l'intersection homologique, qui doit être $2[W_{n-2}]$ (c'est la formule de Poincaré); on a donc la tangence des deux diviseurs (voir par exemple [2] pour ces résultats classiques sur les jacobienes).

Pour montrer la deuxième assertion, on considère l'application d'Abel-Jacobi u basée en un point R_0 :

$$\begin{aligned} C^{(d)} &\longrightarrow H^0(\Omega_C^1)^*/\Lambda \\ \sum_i R_i &\longmapsto \left(\omega \mapsto \sum_i \int_{R_0}^{R_i} \omega \right) \end{aligned}$$

(d est un entier quelconque, concrètement ici $d = n - 1$ ou $n - 2$ et Λ désigne le réseau des périodes). L'hyperplan qui nous intéresse est l'image de l'application tangente en $D = \sum R_i + A$:

$$\begin{array}{ccc} T_D C^{(n-1)} & \xrightarrow{T_D u} & H^0(\Omega_C^1)^* \\ \parallel & & \\ T_{R_1} C \times \cdots \times T_{R_{n-2}} C \times T_A C & & \\ (\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \eta) & \longmapsto & \left(\omega \mapsto \sum \omega_{R_i}(\xi_i) + \omega_A(\eta) \right) \end{array}$$

hyperplan de $H^0(\Omega_C^1)^*$ (qu'il faudra encore identifier à $H^1(\mathcal{O}_C)$), ou droite de $H^0(\Omega_C^1)$, celle d'équations $\omega_{R_1} = \cdots = \omega_{R_{n-2}} = \omega_A = 0$. Bien sûr, toutes ces droites (quand $\sum R_i$ varie dans $C^{(n-2)}$) sont toutes les droites de l'hyperplan d'équation $\omega_A = 0$ dans $H^0(\Omega_C^1)$. Autrement dit, les hyperplans tangents le long de l'intersection de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont tous les hyperplans de $H^0(\Omega_C^1)^*$ qui contiennent la droite engendrée par la forme linéaire $\omega \mapsto \omega_A$. Il ne reste plus qu'à identifier cette droite via l'isomorphisme de $H^0(\Omega_C^1)^*$. Ici, on peut raconter la dualité de Serre comme l'isomorphisme déduit de la forme bilinéaire non dégénérée :

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Omega_C^1) \times H^1(\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\omega, f) & \longmapsto & \text{Rés}_A(f\omega) \end{array}$$

(f est toujours un 1-cocycle du recouvrement $\mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-$). Il ne reste donc qu'à vérifier que

$$\omega_A = 0 \iff \text{Rés}_A(\mu\omega) = 0$$

ce qui est clair puisque $u = 1/\mu$ est une uniformisante au voisinage de A , où $\mu\omega$ s'écrit $\alpha(u) du/u$ avec α holomorphe et $\alpha(0) = 0$. $\square$

6. Un système intégrable.

On munit $\mathfrak{sl}_{n+1}$ de sa forme de Killing pour l'identifier à son dual, de sorte qu'elle devient une variété de Poisson. L'espace E_c des matrices $M_\lambda = (a, b)$ avec $\prod a_i = c$ est une orbite, donc symplectique.

Appelons g_i le terme constant dans le polynôme (en λ, λ^{-1}) $\text{tr } M_\lambda^{i+1}$. C'est une fonction définie sur E_c ; soit X_i le champ hamiltonien associé.

Les fonctions $g_1, \dots, g_n$ commutent grâce au théorème dit « Adler-Kostant-Symes » (voir en particulier [4] dans ce cas). De plus, grâce aux formules de Newton (reliant sommes de puissances et fonctions symétriques élémentaires), $\langle H_1, \dots, H_k \rangle = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ pour tout k de sorte que $\mathcal{T}_h$ est un niveau commun des g_i .

C'est un résultat classique des méthodes algèbro-géométriques exposées dans [4] que :

PROPOSITION 6. — Si C est lisse, l'image de X_i par l'application tangente à φ est un vecteur (constant) de la droite engendrée par μ^i dans $H^1(\mathcal{O}_C)$.

Mais les n vecteurs $\mu, \dots, \mu^n$ sont indépendants : écrivons l'équation de C sous la forme $y^2 = P(\mu)^2 - 4c^2$. On a alors précisément :

LEMME 7. — La base de $H^1(\mathcal{O}_C)$ duale de la base $\left(\frac{d\mu}{y}, \dots, \frac{\mu^{n-1}d\mu}{y}\right)$ de $H^0(\Omega_C^1)$ est celle des classes $(\mu^n, \dots, \mu)$.

On en déduit immédiatement que, pourvu que C soit lisse, le niveau $\mathcal{T}_h$ est régulier (et aussi que les flots des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_n$ sont linéarisés sur la jacobienne de C).

Le système de Toda. — Du point de vue géométrique, on n'a considéré ici qu'un niveau commun de n fonctions qui commutent sur E_c . Aucune des fonctions de l'algèbre qu'elles engendrent n'est *a priori* meilleure que les autres. Pourtant, cette seule géométrie nous a permis de distinguer, dans la jacobienne de C , une direction privilégiée (proposition 5) : celle définie par μ . Il y a donc aussi une direction tangente à $\mathcal{T}_h$ qui est privilégiée et la proposition 6 nous apprend laquelle : c'est celle du champ de vecteurs X_1 . Le système hamiltonien associé à X_1 , comme celui associé à n'importe lequel des X_i , est complètement intégrable... mais celui-là est particulièrement célèbre, puisqu'il s'agit du *système de Toda périodique* (ici pour $n + 1$ particules).

7. Une remarque sur la topologie.

Plaçons-nous dans le cas où $n = 2$ et faisons le « changement de variables » évoqué dans la remarque finale du paragraphe 4 : on considère

l'ensemble $\mathcal{T}'_h$ des matrices

$$N_\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & & & x_{n+1}\lambda c^{-1} \\ x_1 & b_2 & 1 & & & \\ 0 & x_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ c\lambda^{-1} & & & & x_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} x_1 \cdots x_{n+1} = c^2, \\ \sum b_i = 0, \quad \frac{1}{2} \sum b_i^2 + \sum x_i = h_1, \\ \prod b_i - x_1 b_3 - x_2 b_1 - x_3 b_2 = h_2. \end{cases}$$

La variété algébrique réelle $\mathcal{T}'_h$ est donc difféomorphe à la partie réelle du complémentaire des trois exemplaires de la courbe dans sa jacobienne. Remarquons que les intégrales premières ne sont plus propres de sorte que leur niveau commun $\mathcal{T}'_h$ peut ne plus être compact.

La courbe hyperelliptique

$$C : c(\lambda + \lambda^{-1}) - \mu^3 + h_1\mu + h_2$$

est lisse exactement quand

$$\delta(\mu) = (-\mu^3 + h_1\mu + h_2 - 2c)(-\mu^3 + h_1\mu + h_2 + 2c)$$

n'a pas de racine multiple, c'est-à-dire à l'extérieur de la réunion des deux courbes à cusps translatées du discriminant des polynômes de degré 3 représentés sur la figure 1.

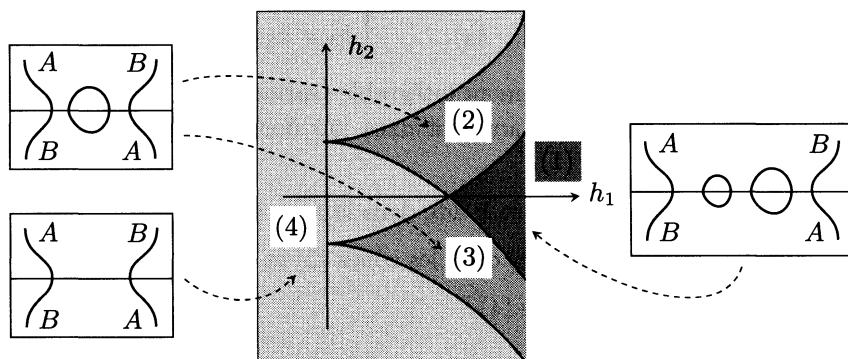


Figure 1

Celle-ci représente aussi la forme de la partie réelle de la courbe (en coordonnées (y, μ) où $y^2 = \delta(\mu)$, les points A et B sont les deux points au-dessus de $\mu = \infty$).

La partie réelle de la jacobienne a quatre composantes dans la zone (1), deux dans les zones (2) et (3) et une dans la zone (4). La figure 2 représente la partie réelle de la jacobienne avec les trois exemplaires de la courbe donnés par la proposition 3.

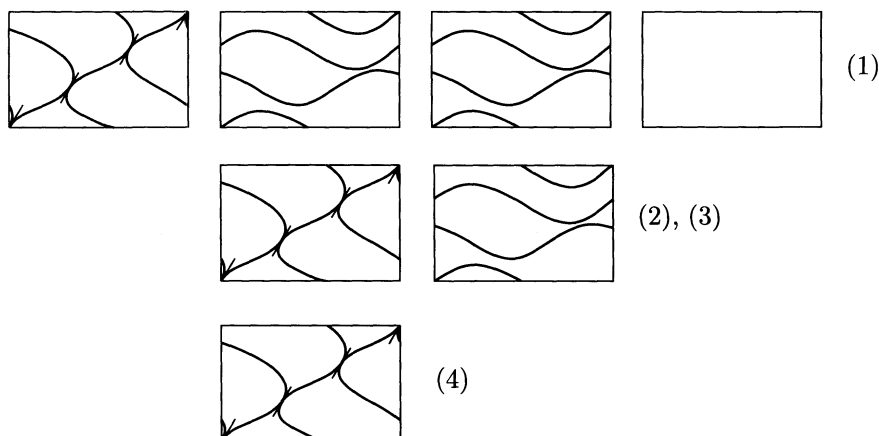


Figure 2

Le système hamiltonien associé à h_1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(b_2 - b_1), \\ \dot{x}_2 = x_2(b_3 - b_2), \\ \dot{x}_3 = x_3(b_1 - b_3), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{b}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{b}_2 = x_2 - x_3, \\ \dot{b}_3 = x_3 - x_1, \end{cases}$$

est donc un système complètement intégrable (variante de Toda périodique à trois particules étudiée notamment dans [5]) dont les niveaux réguliers sont composés de :

- 3 disques, 6 cylindres et 1 tore dans la zone (1) ;
- 3 disques et 3 cylindres dans les zones (2) et (3) ;
- 3 disques dans la zone (4).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ADLER, P. VANMOERBEKE, The Toda lattice, Dynkin diagrams, singularities and Abelian varieties, *Invent. Math.*, 103 (1991), 223–278.
- [2] H. LANGE, Ch. BIRKENHAKKE, Complex Abelian varieties, *Grundlehren der math. Wissenschaften*, Springer, 1992.
- [3] P. VANMOERBEKE, D. MUMFORD, The spectrum of difference operators and algebraic curves, *Acta Math.*, 143 (1979), 93–154.
- [4] A.G. REYMAN, M.A. SEMENOV–TIAN–SHANSKY, Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations II, *Invent. Math.*, 63 (1981), 423–432.
- [5] P. VANHAECKE, Linearising two-dimensional integrable systems and the construction of action–angle variables, *Math. Z.*, 211 (1992), 265–313.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1994.

MICHÈLE AUDIN,
Institut de Recherche de Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France)
maudin@math.u-strasbg.fr.