

**INTÉGRABILITÉ ET NON-INTÉGRABILITÉ
DE SYSTÈMES HAMILTONIENS**
[d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...]

par Michèle AUDIN

Les systèmes hamiltoniens sont les équations différentielles qui décrivent le mouvement des systèmes mécaniques dont l'énergie est conservée : ce sont les équations de Hamilton

$$(1) \quad \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}.$$

Un système hamiltonien est dit « intégrable » s'il a beaucoup de quantités conservées, d'intégrales premières ; c'est le cas par exemple des toupies, des particules libres sur une surface de révolution ou sur une quadrique. Les systèmes intégrables ont des propriétés très spécifiques : le mouvement a lieu sur des sous-variétés invariantes, souvent des tores, les équations sont intégrables par quadratures (c'est le théorème d'Arnold-Liouville [1]).

Il y a aussi beaucoup de systèmes hamiltoniens qui ne sont pas intégrables : le problème de la Lune (problème de trois corps en interaction gravitationnelle), par exemple. Il y a des systèmes hamiltoniens dont on soupçonne qu'ils ne sont pas intégrables, parce qu'on n'a pas été capable de trouver assez d'intégrales premières, et surtout parce que des expériences ou simulations numériques montrent un comportement chaotique incompatible avec le théorème d'Arnold-Liouville.

Comment démontrer qu'ils ne sont pas intégrables ? C'est la question à laquelle est consacré cet exposé.

Les résultats présentés ici reposent sur une approche due à Poincaré [29] : on linéarise le système le long d'une solution particulière. Si les données sont analytiques, on peut complexifier l'espace de phases et le système, obtenant (donc) un système différentiel linéaire le long d'une surface de Riemann. Dans une première étude [37, 38], Ziglin a donné, au début des années 80, un critère de non-intégrabilité basé sur la non-commutation de certains éléments du groupe de monodromie de cette équation. Plus récemment, Morales et Ramis ont considéré le groupe de Galois différentiel de celle-ci et montré que, si le système est intégrable, l'algèbre de Lie de ce groupe est abélienne [26, 24]. Leur démonstration repose sur un lemme de géométrie symplectique, qui s'applique au groupe de Galois parce que celui-ci est un groupe de Lie⁽¹⁾. Comme le groupe de Galois différentiel contient

⁽¹⁾C'est même un groupe algébrique, comme l'affirme un théorème de Kolchin [16] ; voir, dans ce séminaire, [7].

le groupe de monodromie⁽²⁾, le théorème de Morales et Ramis permet de retrouver les applications du théorème de Ziglin, mais il va au-delà, puisqu'il s'applique dans des cas où la monodromie est triviale.

Ces résultats ont d'assez nombreuses applications. Pour ne pas allonger démesurément ce texte, j'ai choisi de ne présenter qu'une famille d'exemples. On en trouvera de nombreux autres dans les articles originaux de Ziglin, Morales & Ramis, *etc.* (voir les références au § 3.3)⁽³⁾.

Jean-Pierre Ramis a répondu avec beaucoup de gentillesse à toutes mes questions en accompagnant ses réponses de commentaires toujours éclairants. Claude Sabbah m'a suggéré d'innombrables améliorations. Pierre Baumann et Claudine Mitschi ont lu et critiqué une version préliminaire de ce texte. Que tous soient remerciés.

1. PRÉLIMINAIRES EN GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

1.1. Systèmes hamiltoniens

Les coordonnées⁽⁴⁾ $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ de l'espace de phases $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ qui interviennent dans les équations (1) de Hamilton se globalisent : l'espace de phase sera une variété W munie d'une forme symplectique⁽⁵⁾ ω . À toute fonction $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ est associé un champ de vecteurs X_H , son *champ hamiltonien*, par la règle

$$(2) \quad (dH)_x(Y) = \omega_x(Y, X_H(x)) \quad \forall x \in W, \quad \forall Y \in T_x W.$$

Le *système hamiltonien* associé à H est simplement le système différentiel défini par X_H , c'est-à-dire

$$(3) \quad \dot{x}(t) = X_H(x(t)).$$

Le système (1) n'est autre que le système (3) quand $W = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, cas où

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Les mouvements des systèmes mécaniques dont l'énergie est conservée — par exemple tous les flots géodésiques — sont susceptibles d'une telle description. Je donne ici les

⁽²⁾Toujours dans ce séminaire, voir l'exposé [5] où des résultats plus récents de méthodes de calculs de groupes de Galois sont présentés.

⁽³⁾Il existe d'autres approches à la non-intégrabilité, notamment dynamiques (voir [18, 19]) ou paramétriques (voir [14] et la remarque 2.4) mais je ne les aborderai pas ici.

⁽⁴⁾On peut remplacer $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$ dans cette partie. Il faudra le faire pour les applications (voir les §§ 3.1 et 3.4).

⁽⁵⁾c'est-à-dire d'une 2-forme fermée non dégénérée

familles d'exemples que j'utiliserai pour les applications, on en trouvera de nombreux autres dans [28, 3].

EXEMPLE (Système de Hénon-Heiles — à suivre). — C'est le système sur la variété symplectique $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ défini par le hamiltonien⁽⁶⁾

$$(4) \quad H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(Aq_1^2 + Bq_2^2) - q_1^2 q_2 - \frac{\lambda}{3} q_2^3$$

où A , B et λ sont des paramètres à préciser (on considérera particulièrement le cas où $A = B \neq 0$ et celui où $B = 0$).

Le système différentiel (1) est

$$(5) \quad \dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_1 = -Aq_1 + 2q_1 q_2, \quad \dot{p}_2 = -Bq_2 + q_1^2 + \lambda q_2^2.$$

EXEMPLE (Le solide pesant — à suivre). — On considère un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant. Dans un repère lié au solide, l'énergie totale s'écrit :

$$H(\gamma, M) = \frac{1}{2} M \cdot \Omega - \gamma \cdot L$$

où γ désigne la pesanteur, M est le moment angulaire, lié à la rotation instantanée Ω par la relation $M = \mathcal{J}(\Omega)$ pour un endomorphisme symétrique $\mathcal{J}$, l'inertie et enfin L désigne le vecteur $\overrightarrow{OG}$ liant le point fixe O au centre de gravité G . Le système différentiel est, lui,

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{\gamma} = \gamma \wedge \Omega \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + \gamma \wedge L. \end{cases}$$

On considère comme espace de phases la variété (difféomorphe au fibré tangent de la sphère S^2) :

$$W_a = \{(\gamma, M) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|\gamma\|^2 = 1 \text{ et } \gamma \cdot M = a\},$$

qui peut être munie d'une structure symplectique⁽⁷⁾ telle que le système (6) soit le système hamiltonien associé à H .

1.2. Systèmes intégrables

La règle (2) a pour première vertu d'obliger H à être constante sur les solutions du système hamiltonien :

$$X_H \cdot H = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0,$$

comme on l'a déjà dit, l'énergie est conservée. Toute fonction f satisfaisant à la propriété $X_H \cdot f = 0$ est une *intégrale première*. On dit que le système hamiltonien associé à la fonction H sur la variété W de dimension $2n$ est *intégrable* s'il possède n intégrales premières fonctionnellement indépendantes en involution.

⁽⁶⁾Ce hamiltonien sert notamment à modéliser le mouvement d'une étoile dans une galaxie cylindrique.

⁽⁷⁾Voir, dans ce séminaire, [32].

Rappelons que deux fonctions f et g sont dites « en involution » quand leur *crochet de Poisson* $\{f, g\} = X_g \cdot f$ est nul, c'est-à-dire quand chacune est constante sur les solutions du système hamiltonien associé à l'autre. Comme $\{f, g\} = X_g \cdot f = \omega(X_g, X_f)$, le sous-espace de l'espace tangent $T_x W$ engendré par les champs hamiltoniens en x de fonctions en involution est isotrope et donc de dimension au plus égale à n . L'hypothèse d'indépendance fonctionnelle dit que, pour x dans un ouvert dense de W , ces vecteurs sont indépendants. L'espace qu'ils engendrent est donc de dimension maximale n et on a « autant d'intégrales premières en involution que possible ».

La physique peut fournir des intégrales premières, comme le moment par rapport à un axe de révolution (toupie, pendule sphérique, particule libre sur une surface de révolution,...)

EXEMPLE (Le solide pesant — suite). — Si le point fixe du solide est son centre de gravité (cas d'Euler-Poinsot), le moment $K = \|M\|^2$ est une intégrale première. Si $\overrightarrow{OG}$ est un axe de révolution (cas de Lagrange, dit « toupie »), le moment $K = M \cdot L$ par rapport à cet axe est une intégrale première.

Il y a parfois aussi des intégrales premières « évidentes ».

EXEMPLE (Hénon-Heiles — suite). — Quand $A = B$ et $\lambda = 1$, le hamiltonien (4) s'écrit

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + Ax_1^2 - \frac{4}{3}x_1^3 + Ax_2^2 + \frac{4}{3}x_2^3$$

(où $x_1 + x_2 = q_1$, $x_1 - x_2 = q_2$ et les y_i sont les moments correspondants) de sorte que la fonction

$$K = \frac{1}{2}y_1^2 + Ax_1^2 - \frac{4}{3}x_1^3$$

est une intégrale première.

Plus mystérieusement, la fonction K définie sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, dans [10] et par

$$K = q_1^4 + 4q_1^2 q_2^2 + 4p_1(p_1 q_2 - p_2 q_1) - 4Aq_1^2 q_2 + (4A - B)(p_1^2 + Aq_1^2)$$

est une intégrale première pour le hamiltonien (4) de Hénon-Heiles quand $\lambda = 6$.

Dans ces deux familles d'exemples, la variété symplectique étant de dimension 4, l'existence d'une « deuxième » (c'est-à-dire autre que l'énergie) intégrale première suffit pour que le système soit intégrable.

Les champs hamiltoniens des intégrales commutent et définissent donc une action (locale) de $\mathbf{R}^n$ sur l'ouvert où les intégrales premières sont indépendantes. Si les champs sont complets, on voit que cet ouvert est feuilleté par des espaces homogènes de $\mathbf{R}^n$, souvent des tores, sur lesquels le mouvement a lieu. On peut montrer que le système hamiltonien se linéarise sur ces tores, c'est le théorème d'Arnold-Liouville, qui montre un comportement très régulier (« non chaotique ») des solutions.

1.3. Un lemme de géométrie symplectique

Le lemme suivant est le cœur de la démonstration du théorème de Morales & Ramis.

LEMME 1.1 ([26]). — Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ et soient $F_1, \dots, F_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de E , fonctionnellement indépendantes et en involution. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sp}(E)$ qui préserve les F_i . Alors $\mathfrak{g}$ est abélienne.

Démonstration. — Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(E)$ s'identifie à celle des formes quadratiques sur E (avec le crochet de Poisson). Un élément Z de $\mathfrak{sp}(E)$ peut être considéré comme un endomorphisme de E ou comme un champ de vecteurs linéaire sur E . Dire que Z préserve la forme symplectique ($\mathcal{L}_Z \omega = di_Z \omega = 0$), c'est dire que Z est un champ hamiltonien, ici celui d'une forme quadratique g sur E .

Dire que Z préserve les F_i , c'est dire que $Z \cdot F_i = 0$, c'est-à-dire que la forme quadratique g commute avec les F_i puisque $Z \cdot F_i = \{F_i, g\}$, donc qu'elle est constante sur les composantes connexes des niveaux communs des F_i .

Si x est un point de l'ouvert U de E sur lequel les F_i sont indépendantes, on a

$$Z(x) \in \bigcap_{i=1}^n \ker(dF_i)_x = \bigcap_{i=1}^n X_i(x)^\circ = \langle X_1(x), \dots, X_n(x) \rangle^\circ = \langle X_1(x), \dots, X_n(x) \rangle$$

(en appelant X_i le champ hamiltonien X_{F_i} et en notant $^\circ$ l'orthogonalité pour ω). Ainsi Z s'écrit $Z = \sum \lambda_j X_j$ pour certaines fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ localement constantes sur les niveaux communs des F_i .

Si Z et Z' sont deux éléments de $\mathfrak{g}$, écrits

$$Z = \sum \lambda_j X_j, \quad Z' = \sum \lambda'_j X_j,$$

on a, toujours pour x dans U ,

$$[Z, Z'](x) = \left[X_g, \sum \lambda'_j X_j \right] (x) = \sum (X_g(x) \cdot \lambda'_j(x)) X_j(x) + \sum \lambda'_j(x) [Z, X_j](x).$$

Le champ $[Z, X_j]$ est le champ hamiltonien de $\{g, F_j\}$, il est donc nul. On a de plus, $X_g(x) \cdot \lambda'_j = 0$ puisque λ'_j est constante sur le niveau de x , auquel X_g est tangent. On en déduit que le crochet $[Z, Z']$ est nul sur U , donc aussi sur E . Le crochet des endomorphismes Z et Z' est donc nul lui aussi. $\square$

2. PRÉLIMINAIRES EN THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce paragraphe on considère le cas général du système différentiel associé à un champ de vecteurs X sur une variété W . On suppose ici que tout est analytique complexe. La dimension de W est m .

2.1. Équation aux variations

Pour tout point x_0 de W , il existe un ouvert U de $\mathbf{C}$ et un voisinage V de x_0 tels que le flot de X soit défini sur $U \times V$:

$$\begin{aligned} U \times V &\longrightarrow W \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x). \end{aligned}$$

On munit (provisoirement) W de la topologie dont une base est formée des ensembles $\{\varphi_t(x)\}_{t \in U}$ et on définit la trajectoire Γ passant par x_0 comme la composante connexe de x_0 pour cette topologie. Si X ne s'annule pas en x_0 , la courbe Γ est une surface de Riemann et le temps t est une coordonnée locale au voisinage de chacun de ses points. L'injection naturelle i de Γ dans W (munie de sa topologie naturelle) est une immersion injective.

Selon une tradition remontant à Poincaré [29], on considère l'équation aux variations, décrivant les solutions « infinitésimalement proches » d'une solution donnée. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des solutions proches, écrivons $y(t) = x(t) + Y(t)$ dans une carte. On a alors, à l'ordre 1,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = X(y(t)) - X(x(t)) = (dX)_{x(t)}(Y(t)).$$

Cette équation différentielle *linéaire* en Y est l'équation aux variations, que je vais décrire maintenant de façon plus intrinsèque. Le vecteur $Y(t)$ est un champ de vecteurs tangents à W le long de Γ , c'est-à-dire une section du fibré vectoriel $i^*TW \rightarrow \Gamma$.

La dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$ définit un opérateur D sur les sections locales de i^*TW : on définit DY en prolongeant Y en $\tilde{Y}$ sur un voisinage de Γ , calculant $\mathcal{L}_X \tilde{Y}$ ($= [X, \tilde{Y}]$) et restreignant ce champ de vecteurs à Γ . Le résultat ne dépend pas du choix de $\tilde{Y}$. L'opérateur D ainsi défini satisfait, pour toute fonction f sur Γ , à la relation

$$D(fY) = \dot{f}Y + fDY.$$

REMARQUE 2.1. — En d'autres termes, $\nabla = D \otimes dt$ est une connexion sur le fibré i^*TW .

On appelle *équation aux variations* l'équation linéaire

$$DY = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla Y = 0.$$

On aura remarqué que X lui-même en est une solution. Écrivons cette équation en coordonnées. Si $(e_1(t), \dots, e_m(t))$ est une base de sections locales du fibré $i^*TW \rightarrow \Gamma$, une section Y de i^*TW s'écrit $Y(t) = \sum y_i(t)e_i(t)$ et

$$DY = \sum_{i=1}^m (\dot{y}_i e_i + y_i D e_i) = \sum_{i=1}^m \left(\dot{y}_i + \sum_{k=1}^m a_{k,i} y_k \right) e_i,$$

ce qui donne, en appelant y le vecteur colonne des y_i et $A(t)$ la matrice des $A(t)_{i,j} = a_{j,i}(t)$:

$$\dot{y} + A(t)y = 0.$$

Dans le cas où W est un ouvert de $\mathbf{C}^m$ et où on utilise la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ de $\mathbf{C}^m$ restreinte à la trajectoire, on a

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] = -\frac{\partial X}{\partial x_i} \text{ de sorte que } A(t) = -(dX)_{x(t)}.$$

L'équation aux variations est la *linéarisée* $\dot{y} = (dX)_{x(t)}y$ de l'équation différentielle originale. On retrouve l'équation aux variations « à la Poincaré » évoquée ci-dessus.

L'exemple le plus classique est celui de l'équation des champs de Jacobi le long d'une géodésique d'une variété riemannienne, équation aux variations pour le flot géodésique.

EXEMPLE (Hénon-Heiles — suite). — Considérons à nouveau l'exemple du système de Hénon-Heiles. Les solutions contenues dans le plan $q_1 = p_1 = 0$ ont pour supports les courbes Γ_h d'équations

$$p_2^2 = \frac{2\lambda}{3}q_2^3 - Bq_2^2 + 2h.$$

Si $\lambda \neq 0$, la courbe Γ_h est le complémentaire d'un point dans une courbe elliptique lisse pour $h \neq 0$ (et $|h|$ assez petit). Un paramétrage d'une solution par le temps t est donné par la fonction $\wp$ associée à la courbe elliptique correspondante équivalente

$$(7) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad \text{avec } g_2 = \frac{B^2}{12} \text{ et } g_3 = \frac{B^3}{216} - \frac{h\lambda^2}{18}$$

par

$$(8) \quad q_2(t) = \frac{1}{2\lambda} (12\wp(t) + B), \quad p_2(t) = \frac{6}{\lambda}\wp'(t).$$

Si $B = 0$ et $\lambda \neq 0$, on utilisera aussi les courbes rationnelles (cubiques cuspidales)

$$(9) \quad p_2^2 = \frac{2\lambda}{3}q_2^3$$

correspondant à $h = 0$ et paramétrées par

$$q_2 = \frac{6}{\lambda t^2}, \quad p_2 = -\frac{12}{\lambda t^3}.$$

Si $B = 0$ et $\lambda = 0$, on utilisera tout simplement les droites paramétrées par

$$(10) \quad q_2(t) = at - b, \quad p_2(t) = a \text{ avec } a^2 = 2h.$$

L'équation aux variations le long d'une de ces solutions est le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 &= P_1 \\ \dot{Q}_2 &= P_2 \\ \dot{P}_1 &= -AQ_1 + 2q_2(t)Q_1 \\ \dot{P}_2 &= -BQ_2 + 2\lambda q_2(t)Q_2 \end{cases}$$

obtenu en linéarisant le système hamiltonien (5).

2.2. Formes initiales et intégrales premières

On considère maintenant une fonction holomorphe f sur W . Appelons $f_x^\circ(Y)$ le terme homogène de plus bas degré dans la série de Taylor de f au point x , calculé sur le vecteur Y . Rappelons que si les $k - 1$ premières dérivées de f en x sont nulles, la k -ième $(d^k f)_x$ est bien définie et est un polynôme homogène de degré k sur $T_x W$.

Supposons que la fonction f soit une intégrale première holomorphe du champ X . On vérifie sans mal qu'alors la valuation de f en x est constante sur la trajectoire Γ de x . On définit donc bien une fonction

$$f^\circ : i^*TW \longrightarrow \mathbf{C}$$

en posant, pour $x \in \Gamma$ et $Y \in T_x W$,

$$f^\circ(Y) = \frac{1}{k!} (d^k f)_x(Y) \text{ pour } k = v_x(f).$$

Cette fonction est appelée *forme initiale* de f . Si la fonction f est seulement *méromorphe*, on l'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes et on définit sa forme initiale comme quotient des formes initiales, c'est une fraction rationnelle en Y à coefficients méromorphes en x .

LEMME 2.2 ([29, 37]). — Si f est une intégrale première du champ X , alors f° est une intégrale première de l'équation aux variations.

Démonstration. — Utilisons au voisinage de $x \in \Gamma$ des coordonnées (t, y) sur W dans lesquelles $X = \partial/\partial t$ et Γ est l'axe des t . La fonction holomorphe f est alors une fonction de y seul et f° est son terme homogène de plus bas degré. L'équation aux variations a pour solutions les vecteurs Y constants, sur lesquels f° est constante. Le cas où f est méromorphe est laissé en exercice. $\square$

Rien ne garantit que les formes initiales de k fonctions indépendantes soient encore indépendantes, mais dans l'algèbre que ces fonctions engendrent, il y a effectivement k fonctions dont les formes initiales en x sont indépendantes. C'est ce qu'affirme le théorème suivant, pour une démonstration duquel je renvoie à [37, 4, 3] :

THÉORÈME 2.3 (Lemme de Ziglin [37]). — Soient $f_1, \dots, f_k$ des (germes de) fonctions méromorphes fonctionnellement indépendantes sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^m$. Alors il existe des polynômes $P_1, \dots, P_k$, où $P_i \in \mathbf{C}[z_1, \dots, z_i]$, tels que les formes initiales à l'origine des k fonctions $g_i = P_i(f_1, \dots, f_i)$ soient des fractions rationnelles algébriquement indépendantes dans $\mathbf{C}(x_1, \dots, x_m)$. $\square$

REMARQUE 2.4. — En adaptant la démonstration de ce lemme, E. Juliard Tosel a pu démontrer un très original théorème « paramétrique » de non-intégrabilité méromorphe [14].

2.3. Groupe de Galois, groupe de monodromie

Dans une trivialisat on m eromorphe du fibré $i^*TW \rightarrow \Gamma$, l'équation aux variations est un système différentiel linéaire dont les coefficients sont des fonctions m eromorphes sur la courbe Γ . Avec la dérivation par rapport à la variable temporelle t , le corps des fonctions m eromorphes $\mathcal{M}(\Gamma)$ est un corps différentiel dont le corps des constantes est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On peut aussi en considérer des versions locale (le corps des fractions de l'anneau des germes de fonctions analytiques en un point) ou formelle. La théorie de Galois différentielle (existence et unicité de l'extension de Picard-Vessiot, plus petite extension « qui contient toutes les solutions » de l'équation différentielle) s'applique à l'équation différentielle linéaire, qui est donc munie d'un groupe de Galois⁽⁸⁾, lequel peut se représenter comme un sous-groupe *algébrique* de $\mathrm{GL}(m; \mathbf{C})$. Le point de vue des « fibrés avec connexion » évoqué dans la remarque 2.1 mène à la construction tannakienne du groupe de Galois (voir [22]).

Les intégrales premières du champ X sont, par définition, constantes le long de Γ . On vérifie sans mal :

LEMME 2.5 ([26]). — Le groupe de Galois de l'équation aux variations laisse invariante la forme initiale f° de l'intégrale première m eromorphe f . $\square$

Le groupe de Galois contient notamment le groupe de monodromie de l'équation différentielle, représentation du groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, x)$ dans $\mathrm{GL}(T_x W)$ — identifié à $\mathrm{GL}(m; \mathbf{C})$ — obtenue en prolongeant analytiquement une base des solutions en x le long des lacets basés en x .

Supposons que les points singuliers de l'équation différentielle linéaire (pôles des coefficients) soient *réguliers*, c'est-à-dire que les solutions soient à croissance modérée au voisinage de ces points. Le groupe de Galois est alors l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie.

Si au contraire le point $a \in \Gamma$ est un point singulier irrégulier, le groupe de Galois prend en compte le phénomène de Stokes au voisinage de a et contient le *groupe de Stokes*, obtenu en comparant les développements asymptotiques des solutions dans les différents secteurs au voisinage de a (voir [22]).

Un remarquable théorème de Ramis ([23, théorème 6], voir aussi [5]) affirme que le groupe de Galois analytique local en a est topologiquement engendré par le groupe de Galois formel en a (qui contient aussi la monodromie formelle et le *tore exponentiel*, dont nous n'aurons pas besoin ici) et le groupe de Stokes.

Cette richesse locale du groupe de Galois contribue à faire sa force dans les applications, comme on le verra aux çà 3.3.2 et 3.4.

⁽⁸⁾Pour les bases de la théorie de Galois différentielle, dont le premier paragraphe de [5] est un résumé impressionnant d'efficacité (voir aussi [6]), je renvoie à [15, 22, 21, 30].

2.4. Points singuliers de l'équation aux variations

Pour que l'équation aux variations le long de la trajectoire Γ ait des points singuliers, on aura besoin

- de « points à l'infini » sur Γ et donc aussi sur W . On supposera que le champ de vecteurs X , de même que les intégrales premières, est méromorphe,
- et plus généralement, de points singuliers sur la trajectoire. On s'autorisera donc à appeler « trajectoire » de X la réunion d'une authentique trajectoire et de certains de ses points d'accumulation, et Γ la surface de Riemann normalisée.

Par exemple, on pourra considérer la courbe cuspidale (9) *avec* son point singulier ($q_2 = p_2 = 0, t = \infty$) — la surface de Riemann Γ est $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{0\}$ — ou la droite (10) *avec* son point à l'infini — la surface de Riemann est $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

2.5. Cas d'un système hamiltonien

Pour appliquer, au § 3, les constructions précédentes au cas d'un système hamiltonien, on supposera que la variété W est analytique complexe, que la forme symplectique ω est une forme (symplectique complexe) méromorphe sur W et que le hamiltonien H , tout comme les autres intégrales premières, est une fonction méromorphe.

Remarquons que, dans le cas d'un système hamiltonien, le groupe de Galois (et donc aussi le groupe de monodromie) est symplectique :

LEMME 2.6. — Si X est un champ de vecteurs hamiltonien sur une variété symplectique W , le groupe de Galois de l'équation aux variations le long d'une trajectoire Γ , vu comme sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(T_x W)$, est un sous-groupe du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(T_x W)$.

C'est facile, aussi bien du point de vue tannakien, qui est particulièrement bien adapté à ce type de propriété qu'à partir d'une construction directe de l'extension de Picard-Vessiot. □

3. THÉORÈMES DE NON-INTÉGRABILITÉ

La toute première approche à la non-intégrabilité est due à S. Kowalevskaya [17] : pour étudier l'intégrabilité du système décrivant le mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant, elle s'est demandé à quelle condition les solutions du système hamiltonien sont des fonctions *méromorphes*⁽⁹⁾, c'est-à-dire sans ramifications, logarithmes, singularités mobiles autres que des pôles. Elle a démontré que cette propriété n'est satisfaite que dans trois cas (ce sont les cas où l'on sait maintenant que le système

⁽⁹⁾C'est ce qu'on appelle aujourd'hui la « propriété de Painlevé » ou le « test » de Painlevé (sans doute un *plagiat par anticipation* [20] de la part de Kowalevskaya).

est intégrable au sens utilisé dans ce texte), mettant ainsi notamment en évidence le cas qui porte son nom et dans lequel elle a exhibé l'intégrale première manquante. La relation entre l'intégrabilité au sens (dit « de Liouville ») considéré ici et la douceur des singularités des solutions n'est pas complètement élucidée (voir par exemple [36]). Les méthodes d'algèbre différentielle exposées ici s'en approchent — à l'ordre 1.

3.1. Deux théorèmes

Dans le cas d'une trajectoire générique d'un système intégrable, on vérifie facilement [3] que le groupe de Galois est « très petit » (pour un groupe algébrique!), il est notamment connexe et abélien. Dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a toujours :

THÉORÈME 3.1 ([26]). — *Soit Γ une trajectoire non stationnaire du champ hamiltonien méromorphe X sur la variété symplectique analytique W de dimension $2n$. Si X possède n intégrales premières méromorphes indépendantes en involution, alors le groupe de Galois de l'équation aux variations le long de Γ est virtuellement⁽¹⁰⁾ abélien.*

Démonstration. — Fixons un point x sur Γ . Sur l'espace vectoriel $T_x W$ muni de la forme symplectique (constante) ω_x , le lemme de Ziglin (théorème 2.3) fournit n fonctions indépendantes : les formes initiales en x de n intégrales premières indépendantes du champ X . Appelons-les $F_1, \dots, F_n$. On a bien sûr :

LEMME 3.2. — Si f et g sont des fonctions méromorphes sur W qui commutent pour le crochet de Poisson défini par ω , leurs formes initiales en x sont des fonctions sur $T_x W$ qui commutent pour le crochet de Poisson défini sur cet espace vectoriel par ω_x . $\square$

Les fonctions $F_1, \dots, F_n$ sont donc en involution et invariantes par le groupe de Galois (lemme 2.5), lequel groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symplectique (lemme 2.6). Le théorème est alors conséquence du lemme de géométrie symplectique 1.1. $\square$

La même démonstration donne :

THÉORÈME 3.3. — *Soit Γ une trajectoire non stationnaire du champ hamiltonien méromorphe X sur la variété symplectique analytique W de dimension $2n$. Si X possède n intégrales premières méromorphes indépendantes en involution, alors l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie de l'équation aux variations le long de Γ est un groupe algébrique virtuellement abélien.* $\square$

COROLLAIRE 3.4 ([37]). — *Soit Γ une trajectoire non stationnaire du champ hamiltonien méromorphe X sur la variété symplectique analytique W de dimension $2n$. Supposons que X possède n intégrales premières méromorphes indépendantes en involution. Si g et g' sont deux éléments non résonants du groupe de monodromie le long de Γ , ils commutent.*

⁽¹⁰⁾Un groupe algébrique est dit *virtuellement* *truc* si sa composante neutre est *truche*.

Démonstration. — Appelons H l'adhérence de Zariski du sous-groupe de $\mathrm{Sp}(E)$ engendré par g . Dire que g n'est pas résonant, c'est dire que H est un tore maximal. En particulier, ce groupe est connexe. De même pour l'adhérence de Zariski du sous-groupe engendré par g' . Les deux éléments g et g' sont donc dans la composante neutre de l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie, qui est commutative grâce au théorème 3.3. $\square$

REMARQUE 3.5. — Si la démonstration proposée ici est beaucoup plus simple que la démonstration de Ziglin, le théorème de Ziglin est en fait un peu plus fort que l'énoncé présenté ici, il s'applique à des intégrales premières qui ne commutent pas nécessairement entre elles. Dans le cas de deux degrés de liberté ($2n = 4$), une deuxième intégrale première est toujours en involution avec le hamiltonien et il n'y a pas de différence entre l'énoncé originel de Ziglin et le corollaire 3.4.

3.2. Vers les applications

Le groupe de Galois est souvent difficile à calculer. Pour les applications, il est parfois pratique de le « réduire ». Précisément, la géométrie symplectique dispose d'un procédé, la *réduction symplectique*, qui peut être utilisé ici pour abaisser l'ordre de l'équation linéarisée $DY = 0$.

Considérons un sous-fibré isotrope $E \subset i^*TW$ et son orthogonal (pour ω) E° , de sorte que $E \subset E^\circ$. On vérifie sans difficulté :

LEMME 3.6. — Le fibré E est invariant par l'opérateur D si et seulement si le fibré E° l'est. $\square$

Ainsi D définit-il un opérateur, noté D_N , sur le fibré symplectique E°/E . Comme la trajectoire Γ n'est pas stationnaire, le fibré i^*TW contient toujours un sous-fibré isotrope, le fibré tangent $T\Gamma$, engendré par X . Appelons Q le niveau de la fonction H dans lequel se trouve la trajectoire Γ . L'orthogonal du fibré tangent $T\Gamma$ n'est autre que i^*TQ : comme $\omega(X, Y) = -dH(Y)$, l'orthogonal de X est le noyau de dH . Il est bien clair que le sous-fibré $T\Gamma$ de i^*TW est invariant par D : si X et Y sont tangents à Γ , alors $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ est tangent à Γ . Donc le lemme s'applique à

$$T\Gamma \subset i^*TQ \subset i^*TW.$$

Le fibré réduit $i^*TQ/T\Gamma$ est noté N (pour « normal » : c'est le fibré symplectique normal à Γ). Il est muni de l'opérateur D_N . L'équation $D_N Z = 0$ est dite équation aux variations *normales*. Comme pour l'équation aux variations, il est parfois agréable de considérer la connexion $\nabla_N = D_N \otimes dt$.

Dans le cas d'un flot géodésique, l'équation aux variations normales est simplement celle des champs de Jacobi orthogonaux à la géodésique considérée.

EXEMPLE (Hénon-Heiles — suite). — Revenons au système linéaire obtenu en linéarisant le système de Hénon-Heiles le long d'une solution Γ contenue dans le plan $q_1 = p_1 = 0$. Le fibré symplectique normal à Γ s'identifie au fibré trivial de fibre le plan des (Q_1, P_1) . L'équation aux variations normales est

$$\dot{Q}_1 = P_1, \quad \dot{P}_1 = (-A + 2q_2(t))Q_1$$

système équivalent à l'équation linéaire du second ordre

$$(11) \quad \ddot{Q} + (A - 2q_2(t))Q = 0$$

(où $Q = Q_1$).

C'est la proposition suivante qui va permettre les applications.

PROPOSITION 3.7. — *Le groupe de Galois de D_N est un quotient du groupe de Galois de D (par un sous-groupe abélien).*

Ici aussi le point de vue tannakien est sans doute le mieux adapté. Du point de vue de la théorie de Picard-Vessiot, la proposition n'est pas très difficile à démontrer, on vérifie qu'on peut construire les solutions de D à partir de celles de D_N , de sorte que l'extension de Picard-Vessiot de D est une extension de celle de D_N (voir les articles originaux [26, 24] ou par exemple [3]). $\square$

COROLLAIRE 3.8. — *Pour qu'un système soit intégrable, il est nécessaire que le groupe de Galois de l'équation aux variations normales le long d'une trajectoire non stationnaire soit virtuellement abélien.* $\square$

3.3. Application aux hamiltoniens de Hénon-Heiles

Les résultats de Ziglin et de Morales & Ramis ont trouvé des applications à la non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens variés :

- solide pesant [38],
- champ de Yang-Mills avec groupe de jauge $SU(2)$ [38],
- différents cas de systèmes à n corps dans divers potentiels,
 - en $1/r^2$ [13]
 - ou newtoniens,
 - par le groupe de Galois [8]⁽¹¹⁾
 - ou par le groupe de monodromie [31],
- système de Hénon-Heiles [12],
- toute une classe de potentiels homogènes [35, 25],
- modèle cosmologique dit « Bianchi IX » [27, 24],

⁽¹¹⁾Le fait que le groupe de Galois soit *algébrique* permet parfois de l'évaluer par des méthodes algébriques, en particulier à l'aide du calcul formel.

– pendule à ressort [27, 24].

Ziglin applique notamment son théorème dans [38] pour démontrer que le mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant n'est pas intégrable avec des intégrales premières méromorphes, sauf dans les cas où précisément, on sait qu'il est intégrable⁽¹²⁾. Suite à l'indication donnée par la méthode de Kowalevskaya évoquée ci-dessus, un résultat plus faible (pas d'intégrale supplémentaire holomorphe) avait été démontré par Husson [11]. La méthode qu'utilise Ziglin pour le solide est semblable à celle qu'il utilise pour le système de Hénon-Heiles et que je vais expliquer ici (courbes elliptiques), mais un peu plus lourde (il y a plus de paramètres), c'est pourquoi je ne présente ici que des applications à la non-intégrabilité du système de Hénon-Heiles pour certaines valeurs des paramètres.

Dans la première série, essentiellement due à Ziglin, la surface de Riemann Γ est le complémentaire d'un point dans une courbe elliptique, l'équation aux variations normales a une singularité régulière, le groupe de Galois est simplement l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie, une représentation linéaire d'un groupe libre à deux générateurs, qui a une forte tendance à la non-commutativité.

Dans la deuxième série, la surface de Riemann est rationnelle, la monodromie ne donne aucun résultat mais l'équation a une singularité irrégulière et le groupe de Galois contient, grâce au phénomène de Stokes⁽¹³⁾, assez de non-commutativité.

Ici le système a deux degrés de liberté, l'équation aux variations normales est d'ordre 2 — c'est l'équation (11) — et son groupe de Galois est un sous-groupe du groupe symplectique (lemme 2.6), ici de $SL(2; \mathbf{C})$.

3.3.1. Le cas elliptique, preuve par la monodromie. — L'équation aux variations normales (11) le long de la solution (8) est⁽¹⁴⁾

$$\ddot{Q} - \left(\frac{B}{\lambda} - A + \frac{12}{\lambda} \wp(t) \right) Q = 0.$$

Étudions les solutions au voisinage de $t = 0$. La fonction $\wp$ a un pôle double en 0, qui correspond au point $q_2 = p_2 = \infty$ sur Γ_h . Les solutions de l'équation aux variations normales s'obtiennent, au voisinage de 0, par la méthode de Frobenius, en écrivant cette équation $t^2 \ddot{Q} + f(t)Q = 0$ et en cherchant les solutions de la forme

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\rho+k}, \quad c_0 \neq 0.$$

⁽¹²⁾les trois cas déjà mentionnés : le point fixe est le centre de gravité, le solide a un axe de révolution, le cas de Kowalevskaya, voir par exemple [2] ou [32]

⁽¹³⁾Rappelons que le groupe de Stokes est engendré par des matrices unipotentes, ce qui explique sa forte tendance à la non-commutativité.

⁽¹⁴⁾C'est une « équation de Lamé » (voir [34])... mais j'ai essayé de ne pas trop utiliser la botanique des équations différentielles.

Le nombre ρ doit être solution de l'équation indicelle

$$\rho(\rho - 1) + f(0) = 0, \text{ avec ici } f(0) = -\frac{12}{\lambda},$$

qui a deux racines distinctes ρ_1 et ρ_2 pour $\lambda \neq -48$. Si la différence $\rho_1 - \rho_2$ n'est pas un entier, l'équation a alors deux solutions indépendantes de la forme

$$t^{\rho_1} \alpha_1(t), \quad t^{\rho_2} \alpha_2(t)$$

où α_1 et α_2 sont analytiques⁽¹⁵⁾ au voisinage de 0. Le prolongement analytique d'une détermination de t^{ρ_i} le long d'un petit lacet γ faisant le tour de 0 donne la monodromie $\tilde{\gamma}$ de ce lacet. Elle est diagonale dans la base considérée et ses valeurs propres sont $\exp(2i\pi\rho_1)$ et $\exp(2i\pi\rho_2)$ (elle est bien dans $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$, puisque $\rho_1 + \rho_2 = 1$).

Étudions maintenant le groupe de Galois de l'équation aux variations normales. Comme celle-ci est à singularité régulière, ce groupe est l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie, sous-groupe de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ engendré par la monodromie le long de deux générateurs α et β du groupe fondamental de Γ_h , que je vais choisir ici comme venant d'une base d'un parallélogramme de périodes. Par exemple, le lacet γ dont je viens d'évaluer la monodromie est le commutateur $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas rationnels, $\tilde{\gamma}$ n'est pas d'ordre fini et le groupe de Galois contient un sous-groupe conjugué au groupe des matrices diagonales.

PROPOSITION 3.9 ([38]). — *Si $A \neq (2k+1)^2\pi^2/4$, $B \neq 0$ et si $\rho^2 - \rho - \frac{12}{\lambda}$ n'a pas de racine rationnelle, le système de Hénon-Heiles n'a pas de deuxième intégrale première méromorphe sur $\mathbf{C}^4$.*

Démonstration. — Supposons au contraire le système intégrable. Alors la composante neutre du groupe de Galois doit être un sous-groupe abélien. Comme nous venons de remarquer que ce groupe n'est pas fini, les seules possibilités⁽¹⁶⁾ sont

- que tous ses éléments soient triangulaires dans la même base; ici, comme $\tilde{\gamma}$ est un commutateur, ses valeurs propres devraient être égales à 1, ce que nous avons exclu,
- qu'il contienne un sous-groupe d'indice 2 dont tous les éléments sont diagonalisables dans la base de vecteurs propres de $\tilde{\gamma}$ et un élément qui échange les directions propres de $\tilde{\gamma}$, ce que je vais exclure maintenant.

En effet, dans ce cas, la matrice de cet élément dans une base de vecteurs propres de $\tilde{\gamma}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ et ses valeurs propres sont } \pm i.$$

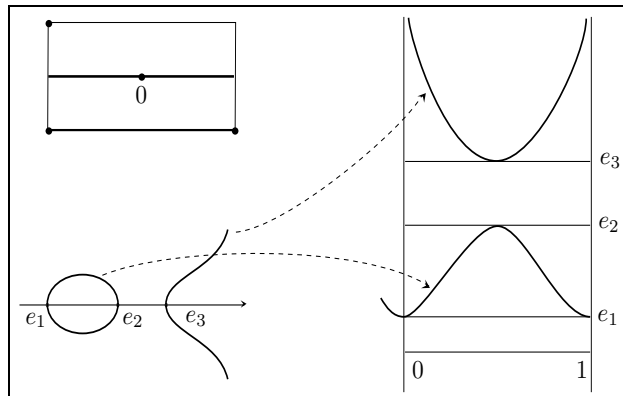
⁽¹⁵⁾ce qui montre en particulier que la singularité en 0 est régulière

⁽¹⁶⁾Voir par exemple [15] pour les propriétés des sous-groupes algébriques de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ utilisées ici.

On regarde ce qui se passe quand h tend vers 0. La courbe elliptique (7), qui a pour équation

$$(12) \quad y^2 = 4 \left(x + \frac{B}{12} \right)^2 \left(x - \frac{B}{6} \right) + \frac{h\lambda^2}{18}$$

tend vers une cubique à point double (il est important ici que B ne soit pas nul) : e_1



La courbe elliptique et sa fonction $\wp$

et e_2 tendent vers $-B/12$ (notation de la figure⁽¹⁷⁾). On peut choisir pour α un cycle paramétré par $[0, 1]$ qui est contracté à la limite (cycle évanescent), l'ovale réel de la figure, par exemple, de sorte que la fonction $\wp$ tend vers une constante (ici $-B/12$) le long de α (voir la figure). Pour h proche de 0, l'équation aux variations normales le long de α est proche de

$$\ddot{Q} + AQ = 0$$

où la fonction constante A est considérée comme périodique de période 1. Pour $A \leq 0$, les valeurs propres de la monodromie de cette équation sont réelles. Pour $A > 0$, ce sont $e^{\pm i\sqrt{A}}$, qui ne peuvent être égales à $\pm i$ que si A est de la forme exclue. Quand h est assez proche de 0, elles ne peuvent donc être égales à $\pm i$. $\square$

Pour montrer que les valeurs propres de $\tilde{\alpha}$ ne sont pas égales à $\pm i$ pour tout h , il suffit de montrer qu'elles dépendent *effectivement* de h . Si c'est le cas, il est clair que $\tilde{\alpha}$ n'est pas résonant pour les valeurs générales de h et il n'est pas nécessaire de supposer que $\tilde{\gamma}$ est d'ordre infini, autrement dit, on peut remplacer « rationnelle » par « entière » dans l'énoncé de la proposition 3.9. Dans [12], Ito montre que les valeurs propres sont des fonctions analytiques non constantes de h . En plus, il exhibe une autre solution particulière, encore une courbe elliptique, qui donne des résultats analogues, mais avec une autre valeur de λ , de quoi il peut déduire :

PROPOSITION 3.10 ([12, 38]). — *Supposons $A = B \neq 0$. Pour λ différent de 1, 2 et 6, le hamiltonien de Hénon-Heiles n'a pas de deuxième intégrale méromorphe sur $\mathbf{C}^4$.* $\square$

⁽¹⁷⁾Cette figure a été dessinée par Raymond Seroul.

Pour $\lambda = 1$ ou 6 , nous avons vu au § 1.2 que le système est intégrable. Le cas $\lambda = 2$ reste ouvert (voir le § 4).

3.3.2. Le cas rationnel, preuve par le groupe de Galois. — On considère maintenant le cas où $B = 0$. L'exemple le plus simple d'application du théorème 3.1 est celui où $\lambda = 0$.

PROPOSITION 3.11 ([3]). — *Pour $\lambda = B = 0$, le hamiltonien de Hénon-Heiles n'a pas de deuxième intégrale rationnelle sur $\mathbf{C}^4$.*

Démonstration. — Le hamiltonien (4) est ici

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \left(\frac{A}{2} - q_2 \right) q_1^2.$$

On choisit une solution particulière

$$q_1 = p_1 = 0 \quad q_2 = -\frac{1}{2}(t - A), \quad p_2 = -\frac{1}{2}.$$

L'équation aux variations normales (11) est tout simplement $\ddot{Q} + tQ = 0$. C'est un bel exemple (académique !) menant à une équation d'Airy, équation dont toutes les solutions sont des fonctions entières (c'est clair) mais aucune n'est algébrique sur $\mathbf{C}(t)$ (c'est presque aussi clair). On se débrouille donc pour que $\mathbf{C}(t)$ soit le corps des fonctions de Γ , il suffit pour cela d'ajouter un point à l'infini à la droite (jusque-là) affine Γ en ajoutant un hyperplan à l'infini à $\mathbf{C}^4$. On se restreint ainsi à des intégrales premières rationnelles en les coordonnées q_i, p_i . Il est classique (mais pas trivial, voir une démonstration algébrique dans [15] ou par le phénomène de Stokes dans [22]) que le groupe de Galois de l'équation d'Airy sur $\mathbf{C}(t)$ est le groupe $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ tout entier. $\square$

REMARQUE 3.12. — La courbe Γ complétée reste simplement connexe, le groupe de Galois obtenu ne contient donc pas de monodromie (dit autrement, les solutions sont entières). Cet exemple, tout académique qu'il soit, n'est pas justiciable des méthodes de [37].

Avec $B = 0$ mais $\lambda \neq 0$, on utilise toujours une courbe singulière, la cubique cuspidale correspondant à la valeur 0 du hamiltonien

$$p_2^2 = \frac{2\lambda}{3} q_2^3, \text{ paramétrée par } q_2 = \frac{6}{\lambda t^2}, \quad p_2 = -\frac{12}{\lambda t^3}.$$

L'équation aux variations normales (11) est maintenant

$$\ddot{Q} + \left(A - \frac{12}{\lambda t^2} \right) Q = 0.$$

Depuis que B est nul, la singularité de la courbe elliptique considérée au § 3.3.1 (ici pour $t = \infty$) a acquis de l'épaisseur, c'est une singularité irrégulière, elle va porter toute l'information que portait la monodromie dans l'exemple étudié au § 3.3.1. Quand A n'est pas nul, l'équation est une équation « de Whittaker », dont le groupe de Galois n'est virtuellement abélien que si $\lambda = 12/k(k+1)$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Si λ n'est pas de cette forme,

on montre, comme dans le cas de l'équation d'Airy, que le groupe de Galois est $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ — toujours le phénomène de Stokes [22]⁽¹⁸⁾.

PROPOSITION 3.13 ([26]). — *Supposons $B = 0$ et $A \neq 0$. Si λ n'est pas de la forme $12/k(k+1)$ pour un k entier, le hamiltonien de Hénon-Heiles n'a pas de deuxième intégrale première méromorphe sur $\mathbf{C}^4$.* $\square$

3.4. Non-intégrabilité réelle

Les systèmes de la mécanique hamiltonienne sont des systèmes différentiels réels sur des variétés symplectiques réelles. Les théorèmes de non-intégrabilité dont il est question ici s'appliquent à une situation analytique complexe. Par exemple, les résultats du § 3.3 interdisent au système de Hénon-Heiles d'avoir une intégrale première méromorphe complexe sur $\mathbf{C}^4$ mais pas d'avoir une intégrale première méromorphe réelle sur $\mathbf{R}^4$ (avec des singularités essentielles non réelles).

Considérons donc un hamiltonien analytique réel H sur une variété symplectique analytique réelle W . On peut bien sûr complexifier W et H . Rappelons toutefois que, si la complexification existe, elle n'est pas unique. Seul le germe de la complexifiée W^* le long de W est uniquement défini (voir par exemple [33] pour une démonstration de l'existence et de l'unicité de ce germe).

La stratégie pour appliquer les théorèmes du § 3.1 est la suivante : choisir une trajectoire (réelle) $\Gamma_{\mathbf{R}}$ du champ hamiltonien et considérer l'équation aux variations le long de la trajectoire complexe $\Gamma^* \subset W^*$.

Ici aussi, le théorème de Morales et Ramis s'applique beaucoup plus facilement que celui de Ziglin à cause de sa nature *locale*. Si l'équation aux variations a un point singulier *irrégulier*, le groupe de Galois local en ce point peut déjà être assez gros, puisqu'il contient en particulier tout le groupe de Stokes (voir le § 2.3). Par exemple, les résultats du § 3.3.2 sont obtenus en considérant un groupe de Galois qui est identique au groupe de Galois local en $t = \infty$. Ils s'appliquent donc dans un voisinage arbitrairement petit de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{C}^4$, c'est-à-dire au germe de la complexification de $\mathbf{R}^4$. Ils donnent directement les énoncés analogues en remplaçant $\mathbf{C}^4$ par $\mathbf{R}^4$.

Avec le théorème de Ziglin, c'est un peu plus délicat : le groupe fondamental d'une trajectoire réelle est incapable de produire des éléments du groupe de monodromie qui ne commutent pas ! Pour obtenir des énoncés réels de non-intégrabilité en utilisant la monodromie, il faut être capable de trouver, pour toute complexification W^* de W , une trajectoire réelle $\Gamma_{\mathbf{R}}$ du champ hamiltonien telle que la trajectoire complexe correspondante Γ^* ait un groupe fondamental non abélien... et des éléments non résonants qui ne commutent pas dans le groupe de monodromie.

⁽¹⁸⁾On peut aussi démontrer que le groupe de Galois n'est pas virtuellement abélien en étudiant la factorisation de l'opérateur $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + \left(A - \frac{12}{\lambda t^2}\right)$, ce que fait D. Boucher dans [9] — une illustration de la remarque exprimée dans la note 11.

Dans [39], Ziglin revient sur les aspects réels des exemples étudiés dans [38]. Considérons à nouveau l'exemple de Hénon-Heiles comme au § 3.3.1. Fixons un voisinage $W_\varepsilon^\star$

$$|\operatorname{Im} q_i| < \varepsilon, \quad |\operatorname{Im} p_i| < \varepsilon$$

de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{C}^4$. On vérifie qu'il existe une courbe elliptique (12) avec deux cycles qui engendrent le groupe fondamental et sont contenus dans $W_\varepsilon^\star$. Par exemple, pour B et h strictement positifs, la partie réelle de la courbe (12) a deux composantes connexes. Choisissons pour $\Gamma_{\mathbf{R}}$ la composante compacte (« ovale ») et appelons $\Gamma_\varepsilon^\star$ l'intersection de la courbe complexe avec l'ouvert $W_\varepsilon^\star$. Le groupe fondamental de la courbe complexe Γ est engendré par l'ovale $\Gamma_{\mathbf{R}}$ et le cycle de support $y \in i\mathbf{R}$, $x \in [e_2, e_3]$ (notations de la figure page 16) dont on vérifie sans mal qu'il est contenu dans $W_\varepsilon^\star$ pour $h\lambda^2 \in \left] \frac{B^3}{6} - 18\varepsilon, \frac{B^3}{6} \right[$. Grâce à l'argument d'Ito sur la variation des valeurs propres, on en déduit qu'il existe des valeurs de h dans cet intervalle pour lesquelles le groupe de monodromie contient deux éléments non résonants qui ne commutent pas. C'est ainsi que Ziglin peut conclure à la non-existence d'une deuxième intégrale première méromorphe sur $\mathbf{R}^4$.

REMARQUE 3.14. — La théorie de Picard-Vessiot et la monodromie utilisent de façon essentielle le caractère *analytique* du hamiltonien. Le lemme de Ziglin, lui, utilise l'analyticité des éventuelles intégrales premières. Ces méthodes ne permettent donc pas, ou pas encore, de montrer la non-intégrabilité au sens $\mathcal{C}^\infty$ d'un système hamiltonien (même analytique).

4. VARIATIONS SUPÉRIEURES

Après le grand déballage de l'équation de Hénon-Heiles rapporté au § 3.3.1, le cas où $A = B \neq 0$ et $\lambda = 2$ reste en suspens. Dans ce cas, les simulations numériques comme le « test de Painlevé » indiquent que le système ne devrait pas être intégrable [10]⁽¹⁹⁾. L'équation aux variations normales (11) est

$$\ddot{Q} + \left(\frac{1}{2} - 6\wp \right) Q = 0$$

dont $Q = \wp + \frac{1}{12}$ est solution, mais celle-là est conservée par le groupe de Galois, de sorte que celui-ci est un sous-groupe du groupe (abélien!) des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbf{C}$).

Dans un travail en préparation, Morales, Ramis et Simó proposent de mieux approcher le système hamiltonien par des équations différentielles linéaires en utilisant des équations aux variations d'ordre supérieur. L'équation aux variations (ordinaire, à l'ordre 1) porte

⁽¹⁹⁾Dans cet article, il est montré que toutes les solutions du système de Hénon-Heiles ne sont méromorphes que si $\lambda = 1$ ou 6.

sur une variation à l'ordre 1, un champ de vecteurs Y tangent à W le long de la trajectoire Γ . Morales, Ramis et Simó définissent l'équation aux variations d'ordre k comme une équation différentielle *linéaire* portant sur le jet d'ordre k du flot. En tant qu'équation différentielle linéaire, elle arrive accompagnée d'un groupe de Galois G_k . La troncature des jets induit des morphismes surjectifs $G_k \rightarrow G_{k-1}$. L'application du lemme 1.1 dans cette situation donne la commutativité virtuelle de tous les groupes G_k quand le système est intégrable.

Évidemment, ce nouveau théorème serait plus fort que le théorème 3.1, mais aussi plus difficile à appliquer : l'ordre de l'équation aux variations devient rapidement très grand, ce qui rend le groupe de Galois difficile à calculer. Notons toutefois qu'on n'a pas vraiment besoin de calculer ce groupe, mais seulement d'exclure la commutativité de sa composante neutre. Nos auteurs pensent ainsi pouvoir régler le cas de Hénon-Heiles en suspens en utilisant le groupe de Galois de la troisième équation aux variations.

Références

- [1] V. I. ARNOLD – *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.
- [2] M. AUDIN – *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999, traduction en japonais, Kyoritsu, 2000.
- [3] ———, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.
- [4] A. BAIDER, R. C. CHURCHILL, D. L. ROD & M. F. SINGER – « On the infinitesimal geometry of integrable systems », *Fields Institute communications, American Math. Soc.* **7** (1996), p. 5–56.
- [5] D. BERTRAND – « Groupes algébriques et équations différentielles linéaires », *Séminaire Bourbaki, 1991-92, Astérisque* **206** (1992), p. 183–204.
- [6] ———, « Lectures on differential Galois theory, by Andy R. Magid (review) », *Bull. Amer. Math. Soc.* **33** (1996), p. 289–294.
- [7] A. BLANCHARD – « Groupes algébriques et équations différentielles linéaires [d'après E. Kolchin] », *Séminaire Bourbaki* (1949-50), Réédition, Société Mathématique de France.
- [8] D. BOUCHER – « Sur la non-intégrabilité du problème plan des trois corps de masses égales », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 5, p. 391–394.
- [9] ———, « Sur les équations différentielles linéaires paramétrées, une application aux systèmes hamiltoniens », *Thèse, Université de Limoges* (2000).
- [10] T. BOUNTIS, H. SEGUR & F. VIVALDI – « Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property », *Phys. Rev. A (3)* **25** (1982), p. 1257–1264.
- [11] E. HUSSON – « Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** (1906), p. 73–152.
- [12] H. ITO – « Non-integrability of Hénon-Heiles system and a theorem of Ziglin », *Kodai Math. J.* **8** (1985), p. 120–138.
- [13] E. JULLIARD TOSEL – « Un résultat de non-intégrabilité pour le potentiel en $1/r^2$ », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), no. 4, p. 387–392.
- [14] ———, « Meromorphic parametric non-integrability ; the inverse square potential », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **152** (2000), no. 3, p. 187–205.

- [15] I. KAPLANSKY – *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1976, Actuelles Scientifiques et Industrielles, No. 1251, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. V.
- [16] E. KOLCHIN – *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York, 1973.
- [17] S. KOWALEVSKI – « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177–232.
- [18] V. V. KOZLOV – « Integrability and nonintegrability in Hamiltonian mechanics », *Uspekhi Mat. Nauk* **38** (1983), no. 1(229), p. 3–67, 240.
- [19] ———, *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Translated from the Russian manuscript by S. V. Bolotin, D. Treshchev and Yuri Fedorov.
- [20] F. LE LIONNAIS – « Le second manifeste (1973) », La bibliothèque oulipienne 2, Ramsay, Paris, 1987, p. vii–xi.
- [21] A. MAGID – *Lectures on differential Galois theory*, University lecture series, 7, American Mathematical Society, 1994.
- [22] J. MARTINET & J.-P. RAMIS – « Théorie de Galois différentielle et resommation », *Computer algebra and differential equations* (E. Tournier, éd.), Academic Press, 1989, p. 117–214.
- [23] ———, « Elementary acceleration and multisummability », *Ann. I.H.P., Phys. Th.* **54** (1991), p. 331–401.
- [24] J. MORALES-RUIZ – *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.
- [25] J. MORALES-RUIZ & J.-P. RAMIS – « A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001).
- [26] ———, « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001).
- [27] ———, « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, II », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001).
- [28] A. M. PERELOMOV – *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras. Vol. I*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990, Translated from the Russian by A. G. Reyman.
- [29] H. POINCARÉ – *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987, Réimpression de l'édition originale de 1899.
- [30] M. VAN DER PUT – « Recent work on differential Galois theory », *Séminaire Bourbaki, 1997-98, Astérisque* **252** (1998), p. 341–367.
- [31] A. TSYGVINTSEV – « La non-intégrabilité méromorphe du problème plan des trois corps », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), p. 241–244.
- [32] J.-L. VERDIER – « Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques [d'après M. Adler et P. van Moerbeke] », Séminaire Bourbaki, 1980-81, Springer, Berlin, 1981, p. 85–94.
- [33] H. WHITNEY & F. BRUHAT – « Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels », *Comment. Math. Helv.* **33** (1959), p. 132–160.
- [34] E. T. WHITTAKER & G. N. WATSON – *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.
- [35] H. YOSHIDA – « A criterion for the nonexistence of first integrals in Hamiltonian systems with a homogeneous potential », *Physica D* **29** (1987), p. 128–142.
- [36] V. E. ZAKHAROV (éd.) – *What is integrability ?*, Springer, Berlin, 1991.
- [37] S. L. ZIGLIN – « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I », *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982), p. 181–189.

- [38] ———, « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II », *Funct. Anal. Appl.* **17** (1983), p. 6–17.
- [39] ———, « The absence of an additional real-analytic first integral in some problems of dynamics », *Funct. Anal. Appl.* **31** (1997), p. 3–9.

Michèle AUDIN

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS

7 rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex

France

E-mail : `maudin@math.u-strasbg.fr`