

COHOMOLOGIE QUANTIQUE

par Michèle AUDIN

A la mémoire de Claude Itzykson

Les personnages principaux de cet exposé sont des invariants (dits *de Gromov-Witten*, mais construits, dans la plus grande généralité, par Ruan et Tian [51]) pour les variétés symplectiques, définis à l'aide des espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes.

Ces espaces de modules ont été introduits et utilisés par Gromov en 1985 dans un article célèbre [28], notamment pour distinguer des variétés symplectiques, puis par McDuff en 1990 dans [43]¹ pour classifier certaines variétés symplectiques de dimension 4. Plus récemment, certains des invariants numériques qu'ils permettent de définir ont servi à Ruan [50] pour distinguer les classes de déformation de deux variétés kählériennes difféomorphes et Taubes en a relié d'autres aux invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques de dimension 4 pour démontrer une suite de résultats spectaculaires [54] (voir aussi [36]) dont l'unicité de la structure symplectique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

Si l'on en croit les physiciens, ces invariants symplectiques seraient utiles pour décrire les fonctions de corrélation en théorie topologique des champs. A ce titre, ils devraient satisfaire un axiome fondamental, la *règle de décomposition* (en anglais *composition law*) qui décrit le comportement de ces fonctions quand la surface de Riemann dégénère sur une surface singulière, et Ruan et Tian démontrent que c'est bien le cas.

En se restreignant aux courbes pseudo-holomorphes de genre 0 (c'est à dire aux sphères, dites *courbes rationnelles*), comme une sphère ne peut dégénérer que sur une réunion de sphères (le genre n'augmente pas), cette règle de décomposition permet de construire un produit *associatif* — dit *produit quantique* — sur la cohomologie de certaines variétés symplectiques, qui tient compte, grâce aux invariants de Gromov-Witten, de toutes les courbes rationnelles qu'elles contiennent — se restreindre aux courbes rationnelles constantes donnant le cup-produit usuel.

Dans cet exposé, je vais décrire assez de la construction des invariants pour pouvoir donner des énoncés précis sur le produit quantique et le calculer dans quelques exemples.

¹Voir aussi la conclusion récente de ce travail, en collaboration avec Lalonde, dans [37].

Au §1, je décrirai les invariants et ce qu'il faut démontrer pour les définir, ainsi que les règles de décomposition qu'ils satisfont. Au §2, je donnerai des indications sur les démonstrations et au §3 je définirai le produit quantique, donnerai certaines de ses propriétés ainsi que quelques exemples de calculs. Je terminerai par une liste d'allusions à des questions connexes (symétrie miroir et variétés de Frobenius notamment).

J'ai choisi d'axer ce texte sur les invariants "symplectiques" tels qu'ils sont définis par Ruan et Tian dans [51], mais j'ai utilisé au maximum les explications contenues dans le livre [45] de McDuff et Salamon. Il existe des approches algèbro-géométriques (la plus féconde sans doute via les "application stables" de Kontsevich [33], voir aussi [11, 12, 15, 38]), mais je n'en parlerai pas. Pour une approche complémentaire, on se reportera aux notes [23] de Fulton et Pandharipande.

Actualisation (septembre 1996). — Depuis la présentation orale et la première version de ce texte en novembre 1995, différents auteurs ont annoncé des améliorations significatives de certains des résultats qu'il expose.

Il s'agit principalement de la démonstration par Givental de la conjecture des miroirs ([26], voir le §3.3.3) et de la définition des invariants de Gromov-Witten pour toutes les variétés symplectiques (suppression des hypothèses de monotonie décrites ici dans les définitions 1.1.5 ou 1.1.3) notamment par Li et Tian [39], Behrend et Fantechi [9, 10] dans le cadre algèbro-géométrique et par Fukaya et Ono [22] et Siebert [52] dans le cadre symplectique. Ces derniers auteurs raffinent sérieusement les méthodes présentées ici au §2 pour se débarrasser des problèmes évoqués avant la définition 1.1.3.

En plus de cette note d'actualisation, le présent texte diffère de celui distribué en novembre 1995 par la mise à jour de la bibliographie et la correction de certaines des erreurs qu'il contenait.

Remerciements. — Je remercie les nombreuses personnes qui m'ont aidée et notamment Dusa McDuff, Jean-Yves Mériandol, Claude Sabbah et Claire Voisin aux conseils et suggestions desquels la mise au point de ce texte doit beaucoup, ainsi qu'O. Gabber et H. Spielberg pour m'avoir signalé des erreurs dans sa première version.

1. Les invariants de Gromov-Witten

On considère ici une variété symplectique (X, ω) et l'espace $\mathcal{J}$ des structures presque complexes adaptées à la forme symplectique. Rappelons qu'une *structure presque complexe* sur une variété X est une structure de fibré vectoriel complexe sur son fibré tangent, en symboles un champ J d'endomorphismes

$$J_x : T_x X \longrightarrow T_x X \text{ tels que } J_x^2 = -\text{Id} \quad \forall x \in X$$

et qu'elle est *adaptée* à une 2-forme non dégénérée ω si la forme bilinéaire $(\xi, \eta) \mapsto \omega(\xi, J\eta)$ est symétrique définie positive (bref, une métrique riemannienne).

Toute variété presque complexe a des classes de Chern (celles du fibré vectoriel complexe (TX, J)). En particulier, comme l'ensemble des structures presque complexes adaptées à une forme symplectique est contractile², donc connexe, une variété symplectique a des classes de Chern — ne dépendant pas de la structure presque complexe adaptée choisie.

Une des qualités des variétés presque complexes est que, à défaut de fonctions holomorphes³, elles possèdent localement beaucoup de *courbes* holomorphes⁴. Si Σ est une surface de Riemann (sa structure complexe j est fixée), une application $u : \Sigma \rightarrow X$ est dite *J-holomorphe* si son application tangente est linéaire sur $\mathbf{C}$, c'est à dire si

$$(1) \quad T_x u \circ j(\xi) = J \circ T_x u(\xi), \quad \forall x \in \Sigma, \quad \forall \xi \in T_x \Sigma.$$

1.1. Définition des invariants

On choisit sur X une structure presque complexe J adaptée à ω . Les invariants définis par Ruan et Tian dans [51] sont des homomorphismes

$$\Psi_{g,k,\ell}^A : H_* (X^{k+\ell}; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

Dans cette écriture,

- l'exposant A est une classe d'homologie, $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$,
- l'indice g est le genre d'une surface de Riemann Σ ,
- celle-ci est équipée d'un k -uplet de points marqués distincts $\vec{z} = (z_1, \dots, z_k)$ (on suppose $2g + k \geq 3$),
- le dernier indice est un entier, $\ell \in \mathbf{N}$.

L'idée, proche de celle utilisée par Donaldson ([18]) pour définir ses polynômes, est la suivante : étant données des classes d'homologie $a_1, \dots, a_k$ et $b_1, \dots, b_\ell \in H_*(X; \mathbf{Z})$ (représentées par des cycles auxquels je donne le même nom), l'image de $a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_\ell$, notée $\Psi_{g,k,\ell}^A(a_1 \otimes \dots \otimes a_k | b_1 \otimes \dots \otimes b_\ell)$ va compter toutes les *applications J-holomorphes* $u : \Sigma \rightarrow X$ qui représentent la classe A (c'est à dire telles que $u_*[\Sigma] = A \in H_2(X; \mathbf{Z})$), qui envoient les k points marqués dans $a_1, \dots, a_k$ et qui coupent $b_1, \dots, b_\ell$ (voir la figure 1).

Remarque. — Les “courbes” J -holomorphes dont il est question ici sont bien des applications $\Sigma \rightarrow X$, c'est à dire des courbes *paramétrées*. On pourrait aussi, mais je ne le ferai pas ici, admettre moins, ou pas, de points marqués (c'est à dire oublier la condition $2g + k \geq 3$) et quotienter par l'opération du groupe de reparamétrages. Le lien entre paramétrage, points marqués et courbe image devrait être clarifié par l'exemple suivant.

²Simplement parce que le groupe symplectique $Sp(2n; \mathbf{R})$ se rétracte sur le groupe unitaire $U(n)$, qui est sa composante compacte (voir par exemple [3]).

³Il n'y a en général pas de fonctions holomorphes, même localement : s'il y avait assez de fonctions holomorphes, on pourrait en faire des cartes analytiques et J serait *intégrable*.

⁴Une référence commode et assez complète pour les propriétés des courbes holomorphes dans les variétés symplectiques et presque complexes est le livre [4], que je cite donc systématiquement.

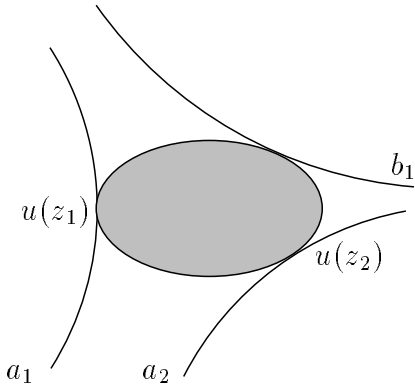


Figure 1

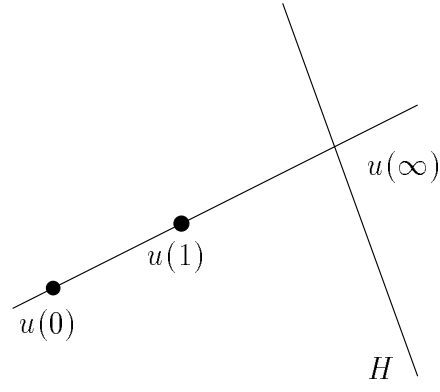


Figure 2

1.1.1. *Exemple.* — Prenons pour X l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$, avec sa forme de Kähler et sa structure complexe usuelles, et pour A le générateur de $H_2(\mathbf{P}^n; \mathbf{Z})$ (la classe des droites projectives). Soit $H \in H_{2(n-1)}(\mathbf{P}^n; \mathbf{Z})$ la classe des hyperplans.

L'invariant $\Psi_{0,3,0}^A(\text{pt} \otimes \text{pt} \otimes H)$ devrait compter les courbes rationnelles ($g = 0$) paramétrées de la classe A (c'est à dire les droites paramétrées), contraintes à passer par deux points donnés et à rencontrer un hyperplan fixé. Les deux points déterminent la droite (image) et son point de rencontre avec l'hyperplan, ces trois points ensemble fixent enfin le paramétrage (figure 2). L'invariant $\Psi_{0,3,0}^A$, une fois défini, devrait donner

$$\Psi_{0,3,0}^A(\text{pt} \otimes \text{pt} \otimes H) = 1$$

dans cet exemple.

Plus précisément, on considère l'espace $\mathcal{M}_g^A(J)$ des applications J -holomorphes $u : \Sigma \rightarrow X$ telles que $u_*[\Sigma] = A$ et l'application d'évaluation $\text{ev}_{z,\ell} :$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_g^A(J) \times \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{\ell \text{ fois}} & \longrightarrow & \underbrace{X \times \cdots \times X}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{X \times \cdots \times X}_{\ell \text{ fois}} \\ (u, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell) & \longmapsto & (u(z_1), \dots, u(z_k), u(\zeta_1), \dots, u(\zeta_\ell)). \end{array}$$

Si $\mathcal{M}_g^A(J)$ était une variété compacte orientée, elle porterait une classe fondamentale et on pourrait définir $\Psi_{g,k,\ell}^A(a)$ comme le nombre d'intersection

$$\Psi_{g,k,\ell}^A(a) = (\text{ev}_{z,\ell})_* \left([\mathcal{M}_g^A(J) \times \Sigma^\ell] \right) \cdot a \text{ pour } a \in H_* \left(X^{k+\ell}; \mathbf{Z} \right).$$

Que l'espace de modules $\mathcal{M}_g^A(J)$ soit une variété pour une structure presque complexe J assez générale ne pose pas de gros problème, à condition toutefois de se restreindre aux courbes *simples* (celles qui ne se factorisent pas par des revêtements multiples, voir le §2.1). Le prototype des énoncés de régularité est le suivant (voir [45]) :

1.1.2 PROPOSITION. — Soit (X, ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$ et soit $c_1 \in H^2(X; \mathbf{Z})$ sa première classe de Chern. Il existe une partie $\mathcal{J}\text{rég}(A)$ dans l'espace $\mathcal{J}$ des structures presque complexes adaptées à ω , qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses et telle que

1. Si $J \in \mathcal{J}_{\text{rég}}(A)$, l'espace $\mathcal{M}_g^A(J)$ des courbes J -holomorphes simples de la classe A est une variété (lisse) orientée de dimension $2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g)$.
2. Si J_0 et $J_1 \in \mathcal{J}_{\text{rég}}(A)$, il existe une partie dense $\mathcal{J}_{\text{rég}}(J_0, J_1)$ dans l'espace des homotopies de J_0 à J_1 telle que, pour toute homotopie $(J_t)_{t \in [0,1]}$ dans cette partie, l'espace

$$\mathcal{M}_g^A((J_t)_{t \in [0,1]}) = \{(t, u) \mid u \in \mathcal{M}_g^A(J_t)\}$$

soit une variété orientée dont le bord orienté est $\mathcal{M}_g^A(J_1) - \mathcal{M}_g^A(J_0)$.

J'expliquerai les idées de la démonstration au § 2.1. Le problème de compacité est plus sérieux : une suite de courbes J -holomorphes peut converger vers une courbe à bulles (penser à une suite de coniques planes dégénérant sur deux droites). On peut compactifier l'espace de modules et prolonger l'application d'évaluation, mais il n'est pas vrai en général que l'image de la frontière soit assez petite : une suite de courbes simples peut converger vers une courbe à bulles dont certaines composantes sont des revêtements multiples. Celles de ces bulles qui sont des revêtements multiples de courbes dont la classe de Chern est nulle peuvent donner des contributions de trop grande dimension. De même, en contemplant la formule pour la dimension dans la proposition 1.1.2, on voit que l'existence de classes A contenant des courbes J -holomorphes et pour lesquelles $\langle c_1, A \rangle \ll 0$ peut poser des problèmes. On se restreint donc à des variétés symplectiques dans lesquelles la première classe de Chern, calculée sur les courbes holomorphes, est assez positive :

1.1.3 DÉFINITION. — Une variété symplectique de dimension $2n$ est faiblement monotone si toute classe d'homologie A telle que $\langle \omega, A \rangle > 0$ et $\langle c_1, A \rangle \geq 3 - n$ vérifie $\langle c_1, A \rangle \geq 0$.

Remarques. — C'est notamment le cas, trivialement, pour toutes les variétés symplectiques de dimension ≤ 6 . D'autre part, pour J dans $\mathcal{J}_{\text{rég}}(A)$, si $\mathcal{M}_0^A(J)$ contient une courbe rationnelle non constante, sa dimension est au moins 6, la dimension du groupe de reparamétrage $PSL(2; \mathbf{C})$. Donc, pour toute courbe J -holomorphe simple u de la classe A , $\langle c_1, A \rangle = \langle u^* c_1, [\mathbf{P}^1] \rangle \geq 3 - n$ et $\langle \omega, A \rangle = \langle u^* \omega, [\mathbf{P}^1] \rangle > 0$, et donc sur une variété faiblement monotone, la première classe de Chern, évaluée sur toutes les courbes J -holomorphes est positive ou nulle.

Pour éviter les problèmes de revêtements multiples, Ruan et Tian exploitent une ruse due à et utilisée par Gromov ([28], voir aussi par exemple le § 4 de [48] et le § 5 de [5]) : on perturbe l'équation (1) des courbes holomorphes en se donnant une section anti- $\mathbf{C}$ -linéaire ν de $\text{Hom}(T\Sigma, TX)$ au-dessus de $\Sigma \times X$ et en considérant les applications u qui vérifient

$$(2) \quad \frac{1}{2} (T_x u + J \circ T_x u \circ j) = \nu(x, u(x)).$$

La courbe

$$\begin{aligned}\tilde{u} : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \times X \\ x &\longmapsto (x, u(x))\end{aligned}$$

est alors $\widetilde{J}_\nu$ -holomorphe, pour une structure presque complexe $\widetilde{J}_\nu$ sur $\Sigma \times X$ qui est la structure produit $j \times J$ quand $\nu = 0$. Notons qu'un tel $\tilde{u}$ ne peut pas être un revêtement multiple, et même qu'une limite de telles courbes ne peut contenir de revêtement multiple (voir le § 2.2). On appelle $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$ l'espace des courbes de la classe A satisfaisant (2).

1.1.4 THÉORÈME ([51]). — *Soit (X, ω) une variété symplectique compacte faiblement monotone de dimension $2n$. Dans l'espace des (J, ν) , il existe une partie $\widetilde{\mathcal{J}}\text{rég}(A)$ qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses et telle que, pour $(J, \nu) \in \widetilde{\mathcal{J}}\text{rég}(A)$, $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$ est une variété lisse orientée de dimension $2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g)$. De plus*

$$\bigcap_{\substack{\mathcal{K}^{\text{compact}} \\ \mathcal{K} \subset \mathcal{M}_g^A(J, \nu)}} \overline{\text{ev}_{\vec{z}, \ell} \left[\left(\mathcal{M}_g^A(J, \nu) - \mathcal{K} \right) \times \Sigma^\ell \right]}$$

est contenue dans une réunion finie d'images de variétés de dimensions majorées par

$$2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g) + 2\ell - 2.$$

Les idées de la démonstration seront résumées au § 2.2. Ce théorème permet d'affirmer que $(\mathcal{M}_g^A(J, \nu) \times \Sigma^\ell, \text{ev}_{\vec{z}, \ell})$ est un pseudo-cycle de $X^{k+\ell}$. Un pseudo-cycle d'une variété M est une application différentiable $f : V \rightarrow M$ définie sur une variété orientée de dimension r , et dont la frontière de l'image est assez petite, au sens précis où

$$\dim \left(\bigcap_{\substack{\mathcal{K}^{\text{compact}} \\ \mathcal{K} \subset V}} \overline{f(V - \mathcal{K})} \right) \leq r - 2.$$

Je renvoie à [45] pour les propriétés des pseudo-cycles. L'important ici est que tout pseudo-cycle définisse un morphisme d'intersection $H_*(M) \rightarrow \mathbf{Z}$. Il y a une relation évidente de bordisme entre pseudo-cycles et, bien sûr, deux pseudo-cycles bordants définissent le même morphisme.

Revenons à notre application d'évaluation. Un énoncé analogue à la dernière assertion de la proposition 1.1.2 donne des bordismes entre ces pseudo-cycles quand on change de J , de ν ou de $\vec{z}$. On peut donc *définir*, pour tout d ,

$$\Psi_{g, k, \ell}^A : H_d(X^{k+\ell}; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

le morphisme d'intersection avec ce pseudo-cycle, qui ne dépend que de A , g , k et ℓ . En particulier, $\Psi_{g, k, \ell}^A(a)$ ne peut être non nul que si la codimension de a dans $X^{k+\ell}$ coïncide avec la dimension de $\mathcal{M}_g^A(J, \nu) \times \Sigma^\ell$, c'est à dire si la dimension d de a vaut

$$d = 2n(g + k - 1) + 2\ell(n - 1) - 2\langle c_1, A \rangle.$$

Propriétés.

1. Comme $\Psi_{g,k,\ell}^A$ ne dépend pas du choix des points marqués, $\Psi_{g,k,\ell}^A(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_\ell)$ est une fonction symétrique (au signe près) des a_i d'une part et des b_j de l'autre (c'est pourquoi on la note plutôt $\Psi_{g,k,\ell}^A(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k | b_1 \otimes \cdots \otimes b_\ell)$). Elle est, bien sûr, multilinéaire en les a_i et les b_j .
2. C'est un invariant de la classe de déformation de (X, ω) .
3. Les invariants Ψ vérifient aussi une propriété d'invariance par monodromie (utile pour étudier les familles de variétés symplectiques), voir [55].

Remarque. — Plus surprenant, comme conséquence des résultats de Taubes [54], en dimension 4, certains des invariants $\Psi_{0,0,\ell}^A(\text{pt} \otimes \cdots \otimes \text{pt})$ (ainsi que des invariants un peu différents en genre > 0) sont des invariants du type de difféomorphisme orienté de X puisqu'ils coïncident avec les invariants de Seiberg-Witten. Remarquons qu'il s'agit dans $\Psi_{0,0,\ell}^A$ de courbes rationnelles sans point marqué, ce qui oblige à quotienter par le groupe de reparamétrage. D'autre part, ce type de résultats est réservé à la dimension 4 : en dimension 6, Ruan a produit dans [50] des exemples de variétés kählériennes difféomorphes avec des invariants différents.

Le cas des variétés symplectiques monotones. — La seule méthode dont on dispose vraiment pour calculer les invariants de Gromov-Witten consiste à évaluer des nombres de courbes *holomorphes* dans des variétés *complexes* comme dans l'exemple 1.1.1. Pour justifier une telle démarche, il faut notamment se débarrasser du terme perturbatif ν . C'est possible pour certains des invariants (notamment pour les $\Psi_{0,3,0}^A$, qu'on utilisera pour définir le produit quantique) dans les variétés symplectiques *monotones*. C'est une propriété nettement plus restrictive que celle de monotonie faible.

1.1.5 DÉFINITION. — *Une variété symplectique est monotone s'il existe un $\lambda > 0$ tel que $[\omega] = \lambda c_1 \in H^2(X; \mathbf{R})$.*

Notons le cas des *variétés de Fano* : une variété algébrique complexe X est de Fano si elle possède une classe de Kähler ω telle que (X, ω) soit une variété symplectique monotone⁵.

1.1.6 PROPOSITION. — *Soit (X, ω) une variété symplectique monotone de dimension $2n$. Soit $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ un triplet de points distincts sur $\mathbf{P}^1$. Pour J générique (dans une partie de $\mathcal{J}$ contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses), l'application d'évaluation*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_0^A(J) & \longrightarrow & X \times X \times X \\ u & \longmapsto & (u(z_1), u(z_2), u(z_3)) \end{array}$$

définit un invariant $\Phi_3^A : H_(X^3) \rightarrow \mathbf{Z}$ qui coïncide avec $\Psi_{0,3,0}^A$.*

⁵Plus techniquement, ce sont des variétés algébriques dont le fibré tangent est assez positif pour que la première classe de Chern soit dans le cône de Kähler.

1.2. Les règles de décomposition

La version simple de la règle de décomposition dont on a besoin pour définir la cohomologie quantique concerne une sphère avec quatre points marqués qui dégénère sur un bouquet de deux sphères, chacune gardant deux des points marqués (figure 3).

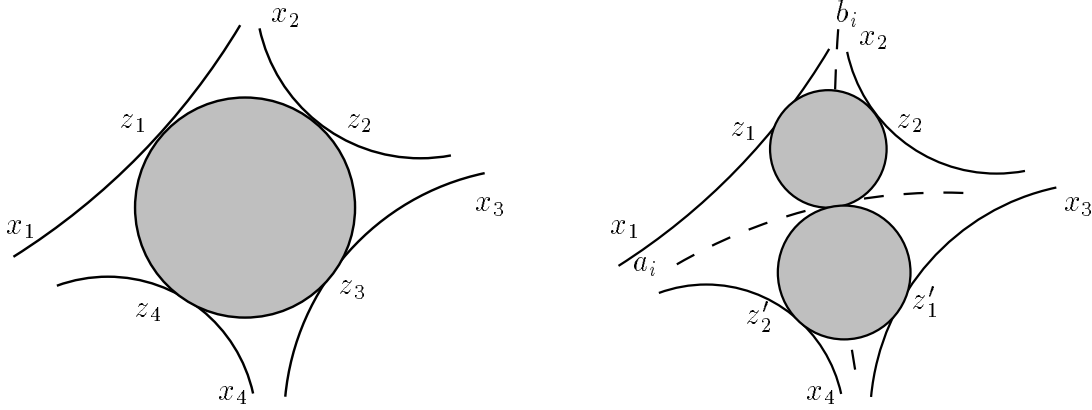


Figure 3 : règle de décomposition

Fixons une base $(a_1, \dots, a_N)$ de $H_*(X; \mathbf{Z})/\text{Torsion}$ et la base duale $(b_1, \dots, b_N)$ au sens où $a_i \cdot b_j = \delta_{i,j}$.

1.2.1 THÉORÈME. — *Sur une variété symplectique faiblement monotone,*

$$\Psi_{0,4,0}^A(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4) = \sum_{A=A_1+A_2} \sum_{i=1}^N \Psi_{0,3,0}^{A_1}(x_1 \otimes x_2 \otimes a_i) \Psi_{0,3,0}^{A_2}(b_i \otimes x_3 \otimes x_4).$$

Ruan et Tian donnent en fait une version beaucoup plus générale, décrivant le comportement de tous les invariants quand Σ dégénère sur une surface singulière. On vient de considérer leur comportement pour l'application

$$\sigma : \mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,3} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,4}$$

(on ajoute le point double de chaque côté, voir la figure 3). Comme il est d'usage, $\mathcal{M}_{g,k}$ désigne l'espace de modules des surfaces de Riemann de genre g avec k points marqués et $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$ sa compactification de Deligne-Mumford. Ruan et Tian considèrent plus généralement les applications naturelles

$$\sigma : \mathcal{M}_{g_1, k_1+1} \times \mathcal{M}_{g_2, k_2+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2, k_1+k_2}$$

(associée à une partition de $\{1, \dots, k_1 + k_2\}$ en deux parties à k_1 et k_2 éléments), et

$$\tau : \mathcal{M}_{g-1, k+2} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,k}$$

(on identifie les deux derniers points marqués). Pour simplifier l'écriture du théorème général (qui est constitué de deux formules), je vais considérer (suivant Tian [55]) des applications d'évaluation un peu plus générales qu'au § 1.1. On autorise Σ et $\vec{z}$ à varier, en définissant :

$$\mathcal{M}_{g,k}^A(J, \nu) = \{(\Sigma, \vec{z}, u) \mid (\Sigma, \vec{z}) \in \mathcal{M}_{g,k}, u : \Sigma \rightarrow X \text{ } J\text{-holomorphe, } u_*[\Sigma] = A\}$$

et l'application

$$\begin{aligned} \text{ev} : \mathcal{M}_{g,k}^A(J, \nu) &\longrightarrow \mathcal{M}_{g,k} \times X^k \\ (\Sigma, \vec{z}, u) &\longmapsto ((\Sigma, \vec{z}), u(z_1), \dots, u(z_k)). \end{aligned}$$

Un énoncé analogue au théorème 1.1.4, qu'il n'est pas indispensable d'écrire ici, autorise à définir des homomorphismes

$$\tilde{\Psi}_{g,k}^A : H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,k} \times X^k) \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

Remarque. — Les invariants du § 1.1 s'en déduisent : on vérifie que

$$\Psi_{g,k,\ell}^A(a) = \tilde{\Psi}_{g,k+\ell}^A(N_{k,\ell} \otimes a),$$

où $N_{k,\ell} \in H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,k+\ell})$ est la classe représentée par l'adhérence de

$$\mathcal{N}_{\Sigma, \vec{z}, \ell} = \{(\Sigma, \vec{z}, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell) \mid \zeta_1, \dots, \zeta_\ell \in \Sigma\}.$$

1.2.2 THÉORÈME (Règles de décomposition [51]). — *Soit (X, ω) une variété symplectique faiblement monotone. Pour toutes classes d'homologie $m_1 \in H_*(\mathcal{M}_{g_1, k_1+1})$, $m_2 \in H_*(\mathcal{M}_{g_2, k_2+1})$, $\tilde{\Psi}_{g_1, k_1+1}^{A_1}(\sigma_*(m_1 \otimes m_2) \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k)$ se décompose en*

$$\sum_{A=A_1+A_2} \sum_{i=1}^N \tilde{\Psi}_{g_1, k_1+1}^{A_1}(m_1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{k_1} \otimes a_i) \tilde{\Psi}_{g_2, k_2+1}^{A_2}(m_2 \otimes b_i \otimes x_{k_1+1} \otimes \dots \otimes x_{k_1+k_2}).$$

Pour toute classe $m \in H_*(\mathcal{M}_{g-1, k+2})$,

$$\tilde{\Psi}_{g,k}^A(\tau_*(m) \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\Psi}_{g-1, k+2}^A(m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes a_i \otimes b_i).$$

Remarque. — Il y a une différence importante entre ces invariants plus généraux et ceux que j'ai décrits au § précédent du fait que la surface de Riemann est autorisée à varier. Ceci rend les théorèmes de compacité plus délicats et techniques. Pour rester dans des limites de place et de technicité acceptables, je me restreindrai au cas des invariants Ψ à (Σ, j) fixées, ce qui est bien suffisant pour les courbes rationnelles, le théorème 1.2.1 et les applications que j'ai en vue.

2. Propriétés des espaces de modules de courbes holomorphes

2.1. Propriétés de régularité

Etant donnée une classe d'homologie $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$, on s'intéresse à l'espace⁶ $\mathfrak{X}(A)$ des applications $u : \Sigma \rightarrow X$ représentant la classe A . Si J est une structure presque

⁶Tous les espaces d'applications sont des espaces d'applications $\mathcal{C}^\infty$ munis de la topologie $\mathcal{C}^\infty$.

complexe sur X , on peut considérer la partie anti- $\mathbf{C}$ -linéaire de du :

$$\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j)$$

comme un élément de $\Omega^{0,1}(u^*TX)$ c'est à dire de $\mathcal{C}^\infty(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_J u^*TX)$.

Les courbes J -holomorphes dans $\mathcal{X}(A)$ sont les zéros de $\bar{\partial}_J$ (“équation de Cauchy-Riemann”). On peut considérer le “fibré vectoriel” $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}(A)$ dont la fibre $\mathcal{E}_u$ en $u \in \mathcal{X}(A)$ est $\Omega^{0,1}(u^*TX)$; $\bar{\partial}_J$ est alors une section de $\mathcal{E}$, et l'espace des courbes J -holomorphes de la classe A est l'ensemble des zéros de cette section. On peut alors se demander si cette section est transverse à la section nulle, en d'autres termes si la composition D_u^J

$$\mathcal{C}^\infty(u^*TX) = T_u\mathcal{X} \xrightarrow{T_u(\bar{\partial}_J)} T_{(u,0)}\mathcal{E} = T_u\mathcal{X} \oplus \mathcal{E}_u \xrightarrow{\text{proj}} \mathcal{E}_u = \Omega^{0,1}(u^*TX)$$

est une application linéaire surjective pour toute solution u de $\bar{\partial}_J u = 0$.

C'est un fait que D_u^J est Fredholm. Elle n'est pas en général linéaire sur $\mathbf{C}$ (elle l'est quand J est intégrable), mais sa partie antilinéaire est un opérateur d'ordre 0 (s'exprimant à l'aide du tenseur de Nijenhuis de J). On peut donc homotoper D_u^J , parmi les opérateurs de Fredholm, à sa partie $\mathbf{C}$ -linéaire, un opérateur $\bar{\partial}$, qui définit une structure holomorphe sur u^*TX . L'indice de D_u^J est alors donné par le théorème de Riemann-Roch (voir par exemple [24]) :

$$(3) \quad \text{Ind } D_u^J = 2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g),$$

c'est la dimension virtuelle de l'espace de modules des courbes J -holomorphes de genre g dans la classe A .

Remarque importante. — Il n'y a aucun espoir que cet espace soit, en général, une variété, même pour des structures presque complexes assez générales. Considérons par exemple l'espace $\widetilde{\mathbf{P}^2}$ obtenu en éclatant un point dans le plan projectif complexe $\mathbf{P}^2$ et la classe E du diviseur exceptionnel. La formule (3) appliquée à la classe $2E$, à la structure complexe usuelle et aux courbes rationnelles ($\Sigma = \mathbf{P}^1$) de cette classe donne une dimension virtuelle égale à 8. Mais les applications holomorphes de degré 2 de $\mathbf{P}^1$ dans lui-même forment un espace de dimension (réelle) 10 et donc, pour toute structure complexe J assez proche de la structure standard, il y a une famille de dimension au moins 10 de courbes J -holomorphes rationnelles dans la classe $2E$. Le problème provient de l'existence de courbes qui sont des revêtements multiples (et ne se pose que pour des classes A de la forme mB pour $m \geq 2$). Il y a deux façons possibles de le contourner. L'une, celle choisie par Ruan et Tian, est celle qui mène aux invariants Ψ : on perturbe l'équation de Cauchy-Riemann par un ν comme en 1.1. L'autre est de ne considérer dans $\mathcal{X}(A)$ que des courbes “injectives quelque part”. C'est l'approche choisie par McDuff et Salamon dans [45], suivant une remarque déjà ancienne de McDuff [42] : une courbe J -holomorphe est

- soit un revêtement multiple, c'est dire qu'elle peut s'écrire comme une composition

$$\Sigma \xrightarrow{\pi} \Sigma' \xrightarrow{\tilde{u}} X$$

où π est un revêtement ramifié,

- soit “injective quelque part”, c'est dire qu'il existe un point x de Σ avec $du(x) \neq 0$ et $u^{-1}(u(x)) = \{x\}$ (et alors l'ensemble de tels points x est un ouvert dense dans Σ). On appelle donc *simples* ces courbes injectives quelque part.

Soit $\mathcal{X}^s(A)$ l'espace des applications *simples* $u : \Sigma \longrightarrow X$ représentant la classe A . On considère l'“espace de modules universel”

$$\mathcal{M}_g^A = \{(u, J) \in \mathcal{X}^s(A) \times \mathcal{J} \mid \bar{\partial}_J u = 0\},$$

c'est un fibré sur $\mathcal{J}$ dont la fibre en J est $\mathcal{M}_g^A(J)$. On dira qu'un point $(u, J) \in \mathcal{M}_g^A$ est *régulier* si D_u^J est surjective et que $J \in \mathcal{J}$ est *régulière* pour A ($J \in \mathcal{J}^{\text{rég}}(A)$) si D_u^J est surjective pour tout u dans $\mathcal{M}_g^A(J)$.

Les démonstrations de la proposition 1.1.2 comme de la première assertion du théorème 1.1.4 utilisent des arguments standard : espaces d'applications $\mathcal{C}^k$ plutôt que $\mathcal{C}^\infty$ (de sorte que l'analogue de $\mathcal{J}$ est une variété banachique), régularité elliptique et Sard-Smale, je renvoie par exemple au chapitre 3 de [45].

Remarque. — La variété $\mathcal{M}_g^A(J)$ est mieux qu'orientée. Si J est intégrable, on a dit que D_u^J est $\mathbf{C}$ -linéaire, en particulier $\mathcal{M}_g^A(J)$ est *complexe*. Quand J n'est pas intégrable, $\mathcal{M}_g^A(J)$ n'a même pas de structure *presque complexe* en général, mais possède une structure presque complexe stable naturelle, qui définit son orientation (voir [42]).

Régularité de structures complexes usuelles. — On va vouloir calculer les invariants pour certaines variétés *projectives complexes*. C'est un changement de perspective : il y a une structure complexe (intégrable) meilleure que les autres et on veut savoir si on peut calculer les invariants en comptant les vraies courbes holomorphes (au moins rationnelles), autrement dit si cette structure complexe est régulière. On a déjà signalé que, pour une structure complexe intégrable J , D_u^J n'était autre que le $\bar{\partial}$ de Dolbeault. En particulier, D_u^J est surjective si et seulement si

$$\text{Im} \left(\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty(u^*TX) \longrightarrow \Omega^{0,1}(u^*TX) \right) = \Omega^{0,1}(u^*TX).$$

Comme Σ est une surface, c'est équivalent à demander que $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(u^*TX) = 0$.

Supposons maintenant que Σ soit une sphère ($g = 0$). Alors, grâce au théorème de Birkhoff, u^*TX est une somme de fibrés en droites. Pour tout fibré en droites $L \rightarrow \mathbf{P}^1$, on a

$$H_{\bar{\partial}}^{0,1}(L) = \left(H_{\bar{\partial}}^{1,0}(L^*) \right)^* = \left(H^0(L^*(-2)) \right)^*$$

de sorte que $\bar{\partial}$ est surjective si et seulement si pour chaque fibré en droites L apparaissant dans u^*TX , le fibré $L^*(-2)$ n'a pas de section holomorphe, c'est à dire si $c_1(L^*(-2)) < 0$, ou encore si $c_1(L) > -2$:

2.1.1 PROPOSITION. — *Soit $u : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ une courbe J -holomorphe avec J intégrable. Pour que D_u^J soit surjective, il faut et il suffit que tous les facteurs de u^*TX aient une classe de Chern $c_1 \geq -1$.*

Exemple. — Considérons l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec sa structure complexe naturelle J . Soit A la classe des droites projectives. Soit $u : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^n$ une courbe holomorphe de la classe A (c'est à dire une droite). Alors $u^*T\mathbf{P}^n = \mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(1)$, D_u^J est surjective (ceci pour tout u) et J est régulière pour A .

2.1.2 COROLLAIRE. — *Supposons J intégrable et le fibré tangent TX engendré par ses sections holomorphes. Alors J est régulière pour toutes les classes contenant des courbes rationnelles.*

En dimension 4, grâce à la formule d'adjonction, on déduit de la proposition 2.1.1 un critère simple et efficace :

2.1.3 PROPOSITION. — *Soit J une structure complexe (intégrable) sur une variété X de dimension 4. Soit $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$ une classe qui contient une sphère J -holomorphe plongée. Alors J est régulière pour A si et seulement si $A \cdot A \geq -1$.*

Contre-exemples. — On verra des exemples d'applications de ce résultat au §3.2. Voici une famille de contre-exemples. Il s'agit de la variété différentiable $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou $\widetilde{\mathbf{P}^2}$, avec la structure complexe de la surface de Hirzebruch X_k (espace total du fibré $\mathbf{P}(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{P}^1$, $k \geq 0$). Elle possède une sphère holomorphe plongée d'auto-intersection $-k$ (la section nulle du fibré $\mathcal{O}(-k)$). Pour $k \neq 0, 1$, la structure complexe n'est pas régulière pour cette classe.

Remarques. — Ces résultats s'appliquent à des courbes holomorphes rationnelles de variétés complexes, notamment pour calculer les invariants Φ définis par la proposition 1.1.6. Pour calculer des invariants en genre supérieur, on peut (toujours en dimension 4) utiliser les résultats de [30].

2.2. Propriétés de compacité

Les espaces $\mathcal{M}_g^A(J)$ et $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$ ne sont pas compacts en général : il peut se former des bulles, comme c'est le cas pour une suite de coniques planes qui converge vers deux droites. Le théorème de compacité de Gromov affirme qu'il n'arrive rien de pire. Pour mémoire :

2.2.1 THÉORÈME ([28]). — *Sur une variété symplectique compacte (X, ω) , soit une suite $(J_m)_{m \geq 0}$ de structures presque complexes adaptées qui converge (au sens $\mathcal{C}^\infty$) vers une structure presque complexe adaptée J . Soit $(u_m)_{m \geq 0}$ une suite de courbes d'aire bornée telles que u_m soit J_m -holomorphe. Elle a une sous-suite qui converge faiblement vers une courbe à bulles J -holomorphe.*

Ici, la convergence faible est une notion intermédiaire entre convergence des images et convergence des applications que je ne détaille pas : ce n'est pas cette version du théorème de compacité que je veux utiliser. Celui-ci a toutefois une conséquence immédiate de finitude dont j'aurai besoin. Une constante K étant fixée, considérons l'ensemble des classes A dans le réseau $H_2(X; \mathbf{Z})$ telles que $\langle \omega, A \rangle \leq K$. Etant donnée une structure presque complexe J , il y a un nombre fini de telles classes qui ont des représentants J -holomorphes (et même J' -holomorphes pour J' assez proche de J).

Voici maintenant la version du théorème 2.2.1 que je vais utiliser :

2.2.2 THÉORÈME. — *Soient sur une variété symplectique compacte (X, ω) une suite (J_m, ν_m) convergent (au sens $\mathcal{C}^\infty$) vers (J, ν) et une suite (u_m) de courbes $\Sigma \rightarrow X$ d'aires bornées telles que $\widetilde{u_m} : \Sigma \rightarrow \Sigma \times X$ soit $(J_m)_{\nu_m}$ -holomorphe. Alors, il existe une partie finie $F \subset \Sigma$ et une courbe $u : \Sigma \rightarrow X$ telle que*

- *La courbe $\tilde{u}$ est $\widetilde{J_\nu}$ -holomorphe.*
- *On peut extraire de $(\widetilde{u_m})$ une suite qui converge vers $\tilde{u}$ (ainsi que toutes ses dérivées) en dehors de F .*
- *Si $z \in F$ et si $\widetilde{u_m}(z)$ ne converge pas vers $\tilde{u}(z)$, alors il y a une courbe rationnelle non constante*

$$u^z : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \{z\} \times X$$

passant par $\tilde{u}(z)$.

Je renvoie pour la démonstration aux explications de Pansu [48]. On remarquera que toutes les bulles (les u^z) sont verticales (parce que les $\widetilde{u_m}$ sont des graphes) et que ce sont des sphères. De plus, la composante principale de la courbe limite, étant un graphe, est *simple*, ce qui évite les problèmes de revêtements multiples dont on peut se faire une idée en lisant [45] (par contre, rien n'oblige les bulles à être simples).

Idées de la démonstration de 1.1.4. — D'après le théorème 2.2.2, il y a, dans l'adhérence de $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$, des courbes à bulles $(u, v_1, \dots, v_N)$ (où les v_i sont des courbes rationnelles). La classe d'homologie A est décomposée en

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^N d_i B_i$$

où $d_i \geq 1$ est la multiplicité du revêtement v_i et A_0 la classe représentée par u . Oublions les multiplicités et écrivons $A' = A_0 + \sum B_i$. Comme (X, ω) est faiblement monotone, $\langle c_1, B_i \rangle \geq 0$ et $\langle c_1, A' \rangle \leq \langle c_1, A \rangle$. Pour décrire l'adhérence de $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$, il faut considérer des espaces d'applications $(u, v_1, \dots, v_N)$ représentant des classes A' avec $\langle c_1, A' \rangle \leq \langle c_1, A \rangle$.

On s'intéresse au prolongement de l'application d'évaluation à ces espaces (pour simplifier, on suppose ici que $\ell = 0$). Il faut donc s'inquiéter de la façon dont les

points marqués interfèrent avec la formation des bulles. Certains de ces points, disons $z_1, \dots, z_r$, sont dans F . Alors, tous les points de la i -ème bulle ($i \leq r$) sont des points d'accumulation d'une suite $u_m(z_i)$ de sorte qu'on doit ajouter à la frontière un paramètre ζ_i pour chacune de ces bulles : l'application d'évaluation $\text{ev}_{z,0}$ se prolonge en

$$e : (u, v_1, \dots, v_N, \zeta_1, \dots, \zeta_r) \longmapsto (v_1(\zeta_1), \dots, v_r(\zeta_r), u(z_{r+1}), \dots, u(z_k)).$$

Il y a un groupe de reparamétrage pour chacune des bulles, c'est le sous-groupe G_0 de $PSL(2; \mathbf{C})$ formé des transformations fixant un point (celui où s'accroche la bulle). Les évaluations $N \geq 1$, $\langle c_1, A' \rangle \leq \langle c_1, A \rangle$ et $\dim G_0 = 4$ permettent de conclure que, malgré l'ajout possible des r facteurs $\mathbf{P}^1$, la dimension de l'image de e est inférieure ou égale à $\dim \mathcal{M}_g^A(J, \nu) - 2$.

La finitude du nombre de ces petites strates est encore une conséquence de la positivité des classes de Chern (c'est à dire de la faible monotonie de (X, ω)) qui donne un nombre fini de décompositions possibles de A en $A_0 + \sum d_i B_i$.

Remarque. — J'ai choisi pour cet exposé des hypothèses simplifiant le plus possible la démonstration :

- d'une part l'utilisation de l'équation de Cauchy-Riemann *perturbée* qui donne une composante principale *simple* à toutes les courbes limites, comme dans [51],
- d'autre part le fait que la surface de Riemann (avec sa structure complexe) est fixée, comme dans [45].

Idées de la démonstration de la règle de décomposition 1.2.1. — La démonstration des règles de décomposition, dans la généralité de l'énoncé 1.2.2, occupe une grande partie du gros article [51] de Ruan et Tian. Il existe plusieurs démonstrations du théorème plus faible 1.2.1, ou de versions encore plus faibles, telles que

$$(4) \quad \Psi_{0,4,0}^A(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4) = \sum_{A=A_1+A_2} \sum_{i=1}^N \Phi_3^{A_1}(x_1 \otimes x_2 \otimes a_i) \Phi_3^{A_2}(b_i \otimes x_3 \otimes x_4)$$

pour des variétés symplectiques *monotones* (voire même avec des hypothèses plus restrictives, telles que $\langle c_1, A \rangle \geq 2$ pour toute classe A contenant des courbes rationnelles). Voir [45, 40].

Avec des différences assez notables dans la réalisation, toutes sont basées sur une sorte de réciproque au théorème de compacité : on considère les deux sphères avec leurs deux points marqués et leur point commun comme une courbe à bulles. Appelons z_1, z_2, z_3, z_4 les quatre points marqués et imaginons deux autres points z et t tendant l'un vers l'autre. Les courbes décomptées par le membre de gauche de (4) tendent vers des courbes à bulles qui ressemblent beaucoup à celles décomptées par le membre de droite (voir la figure 3). Reste à montrer que cette correspondance est bijective. Un argument de recollement de courbes holomorphes inspiré par les recollements de trajectoires ou

d'instantons décrits par Floer [21] ou Donaldson & Kronheimer [19] et différent suivant les auteurs, permet de construire de vraies courbes holomorphes arbitrairement près de la “courbe à bulles” et de conclure.

3. La cohomologie quantique

L'homologie et la cohomologie d'une variété orientée X portent respectivement la forme d'intersection $\cdot$ et le cup-produit $\smile$, reliés entre eux par la dualité de Poincaré $D : H^* \rightarrow H_*$ de telle façon que $a \cdot b = \langle \alpha, b \rangle = D(\alpha \smile \beta)$ si les dimensions de a et b sont complémentaires, et que

$$(5) \quad \langle \alpha \smile \beta, c \rangle = a \cdot b \cdot c.$$

Convention. — Dans les formules de ce §, les lettres latines désignent en général des classes d'homologie, les lettres grecques des classes de cohomologie, la dualité de Poincaré transformant logiquement grecques en latines et en particulier α en a , etc.

Supposons que X soit une variété algébrique complexe. L'idée (due à Vafa [56] et Witten [59]) de la cohomologie quantique est de remplacer le cup-produit par une autre structure d'anneau qui tienne compte non seulement des triples intersections comme dans (5) mais aussi de toutes les courbes rationnelles qui rencontrent des cycles représentant a, b, c . Le terme $a \cdot b \cdot c$, qui décrit, quand c varie, le cup-produit $\alpha \smile \beta$ correspondrait au décompte des courbes rationnelles *constantes* et il faudrait définir un terme analogue pour chaque classe d'homologie A de courbes rationnelles dans X .

3.1. Le produit quantique

Parce que je trouve les anneaux gradués plus agréables, pour éviter des problèmes de convergence et pour d'autres raisons que j'évoquerai au § 3.3.5, je vais essayer de définir ce produit sur le $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ -module libre⁷

$$QH^*(X) = H^*(X) \otimes \mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$$

où r est le rang de $H_2(X; \mathbf{Z})$ et $q_1, \dots, q_r$ sont r nouvelles variables inversibles : on choisit une base $(A_1, \dots, A_r)$ de $H_2(X; \mathbf{Z})$, les q_i en sont une version multiplicative. Le produit sera $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ -linéaire et défini par les valeurs des $\alpha \star \beta$ pour $\alpha, \beta \in H^*(X; \mathbf{Z})$. On écrira

$$(6) \quad \alpha \star \beta = \sum_{m \in \mathbf{Z}^r} (\alpha \star \beta)_m q^m$$

où $m \in \mathbf{Z}^r$ représente la classe $\sum m_i A_i$ et $\langle (\alpha \star \beta)_m, c \rangle = \Psi_{0,3,0}^m(a \otimes b \otimes c) \in \mathbf{Z}$. Pour alléger les notations, j'écrirai Ψ_k^m ou Ψ_k^A pour $\Psi_{0,k,0}^m$ ou $\Psi_{0,k,0}^A$. Ces invariants sont dits “à k points”.

⁷Je néglige la torsion, considérant $H_*(X; \mathbf{Z})$ comme $H_*(X; \mathbf{Z})/\text{Torsion}$ et $H^*(X; \mathbf{Z})$ comme son dual.

Dans (6), le terme $(\alpha \star \beta)_0$ est décrit par les invariants $\Psi_3^0(a \otimes b \otimes c)$ obtenus en “comptant” les courbes dont la classe d’homologie est nulle. Comme J est adaptée à la forme symplectique,

$$\langle \omega, A \rangle = \langle \omega, u_*[\mathbf{P}^1] \rangle = \int_{\mathbf{P}^1} u^* \omega > 0$$

pour toute courbe J -holomorphe u non constante. Les courbes représentant la classe nulle sont donc constantes, ainsi, à cause des points marqués, $\langle (\alpha \star \beta)_0, c \rangle = \Psi_3^0(a \otimes b \otimes c)$ est le nombre d’intersection $a \cdot b \cdot c$ et $(\alpha \star \beta)_0$ est le cup-produit ordinaire.

Remarques. — Il est possible (et bien plus élégant) de considérer l’anneau de polynômes $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ comme l’anneau de groupe $\mathbf{Z}[H_2(X; \mathbf{Z})]$ et donc l’anneau $QH^*(X)$ comme $H^*(X; \mathbf{Z}[H_2(X; \mathbf{Z})])$ (c’est à dire de ne pas choisir de base).

Le degré de la classe de cohomologie $(\alpha \star \beta)_m$ est $\deg \alpha + \deg \beta - 2\langle c_1, \sum m_i A_i \rangle$. Ecrivons la première classe de Chern de X dans la base $(p_1, \dots, p_r)$ de $H^2(X; \mathbf{Z})$ duale à $(A_1, \dots, A_r) : c_1 = d_1 p_1 + \dots + d_r p_r$. On définit ainsi r entiers $d_1, \dots, d_r$. Il suffit d’assigner à q_i le degré $2d_i$ pour avoir une multiplication graduée (la graduation est triviale quand $c_1 = 0$).

Malheureusement, même sur une variété faiblement monotone, il n’y a pas de raison que la somme dans (6) soit finie. La solution est de remplacer l’anneau de polynômes $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ par l’anneau de Novikov Λ_ω (voir [47, 31]) associé à l’homomorphisme

$$\begin{aligned} \omega : \Gamma \subset H_2(X; \mathbf{Z}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto \langle \omega, A \rangle \end{aligned}$$

où Γ est le sous-groupe des classes sphériques : on considère l’ensemble Λ_ω de toutes les séries formelles

$$\lambda = \sum_{m \in \mathbf{Z}^r} \lambda_m q^m$$

telles que, pour tout K , l’ensemble

$$\{m \in \mathbf{Z}^r \mid \lambda_m \neq 0 \text{ et } \langle \omega, \sum m_i A_i \rangle \leq K\}$$

soit fini. La formule

$$\lambda \mu = \sum_{m', m''} \lambda_{m'} \mu_{m''} q^{m' + m''}$$

définit bien (exercice) un produit sur Λ_ω , qui devient ainsi un anneau gradué (avec la même graduation que $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$).

Le théorème de compacité 2.2.1 garantit que la somme (6) est bien définie dans le Λ_ω -module $H^*(X) \otimes \Lambda_\omega$.

3.1.1 THÉORÈME. — Soit (X, ω) une variété symplectique faiblement monotone de dimension $2n$. Les formules

$$\alpha \star \beta = \sum_{m \in \mathbf{Z}^r} (\alpha \star \beta)_m q^m \in H^*(X) \otimes \Lambda_\omega \text{ avec } \langle (\alpha \star \beta)_m, c \rangle = \Psi_3^m(a \otimes b \otimes c) \in \mathbf{Z}$$

définissent sur $H^*(X) \otimes \Lambda_\omega$ une structure d'anneau commutatif gradué dont $1 \in H^0(X)$ est l'unité.

Démonstration. — L'associativité est une conséquence de la règle de décomposition en genre 0 pour les invariants à 3 ou 4 points, c'est à dire du théorème 1.2.1 :

$$\sum_{m'+m''=m} \sum_{i=1}^N \Psi_3^{m'}(a \otimes b \otimes a_i) \Psi_3^{m''}(b_i \otimes c \otimes d) = \Psi_{0,4,0}^m(a \otimes b \otimes c \otimes d).$$

Comme $\Psi_3^{m''}(D(\alpha \star \beta)_{m'} \otimes c \otimes d) = \sum_i \Psi_3^{m'}(a \otimes b \otimes a_i) \Psi_3^{m''}(b_i \otimes c \otimes d)$, elle donne

$$\sum_{m'+m''=m} \Psi_3^{m''}(D(\alpha \star \beta)_{m'} \otimes c \otimes d) = \Psi_{0,4,0}^m(a \otimes b \otimes c \otimes d).$$

On peut donc écrire

$$(\alpha \star \beta) \star \gamma = \sum_m (\alpha \star \beta \star \gamma)_m q^m,$$

en définissant $\langle (\alpha \star \beta \star \gamma)_m, d \rangle$ comme $\Psi_{0,4,0}^m(a \otimes b \otimes c \otimes d)$. Cette dernière expression est symétrique en α , β et γ . Comme le produit défini est commutatif (au sens gradué), cette propriété donne l'associativité.

Que la classe $1 \in H^0(X; \mathbf{Z})$ soit l'unité du produit quantique n'est pas difficile. La classe duale est la classe fondamentale $[X]$ et l'invariant $\Psi_3^A([X] \otimes b \otimes c)$ est nul quand la classe A est non nulle. On considère en effet l'intersection de l'image de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_0^A(J, \nu) & \longrightarrow & X \times X \\ u & \longmapsto & (u(z_2), u(z_3)) \end{array}$$

avec un cycle représentant $b \otimes c$. On a $\dim \mathcal{M}_0^A(J, \nu) = 2n + 2\langle c_1, A \rangle = \deg \beta + \deg \gamma$ mais l'application se factorise par le sous-groupe $\mathbf{C}^*$ de $PSL(2; \mathbf{C})$ constitué des éléments qui fixent les points marqués z_2 et z_3 . Si $\mathcal{M}_0^A(J, \nu)$ contient des applications non constantes (c'est à dire si $A \neq 0$), cette opération n'est pas triviale et la dimension de l'image est $\leq 2n + 2\langle c_1, A \rangle - 2$, ce qui fait qu'elle ne rencontre pas un représentant assez général de $b \otimes c$. $\square$

Un cas particulièrement agréable est celui des variétés symplectiques monotones : sur ces variétés, grâce à la remarque suivant le théorème de compacité 2.2.1, le nombre de classes A intervenant dans la somme (6) est fini, de sorte qu'on peut définir le produit quantique directement sur $H^*(X) \otimes \mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$, et même calculer avec les invariants Φ de la proposition 1.1.6. L'associativité est, comme ci-dessus, conséquence de la règle de décomposition, précisément de sa version contenue dans l'équation (4).

3.1.2 THÉORÈME. — Soit (X, ω) une variété symplectique monotone de dimension $2n$. Les formules

$$\alpha \star \beta = \sum_{m \in \mathbf{Z}^r} (\alpha \star \beta)_m q^m \text{ avec } \langle (\alpha \star \beta)_m, c \rangle = \Phi_3^m(a \otimes b \otimes c) \in \mathbf{Z}$$

définissent sur $H^*(X) \otimes \mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ une structure d'anneau commutatif gradué dont $1 \in H^0(X)$ est l'unité.

Remarques et variantes.

1. Il arrive que le produit quantique soit une *déformation* du cup-produit. C'est le cas quand on peut choisir la base $(A_1, \dots, A_r)$ de façon que les monomes apparaissant effectivement dans la somme (6) ne fassent pas intervenir d'exposant négatif, c'est à dire quand $H^2(X; \mathbf{Z})$ a une base $(p_1, \dots, p_r)$ telle que $\langle p_i, A \rangle > 0$ pour toutes les classes A qui contiennent des sphères J -holomorphes⁸. On peut alors définir le produit quantique sur $H^*(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}[q_1, \dots, q_r]$ (un sous-anneau⁹ de $QH^*(X)$)... ce qui permet de spécialiser en $q = 0$ pour retrouver le cup-produit.
2. Une autre variante consiste — dans le cas monotone — à spécialiser en $q = 1$. C'est pourquoi on trouve des formules sans variables q , notamment dans [60].
3. On trouve aussi dans la plupart des articles sur le sujet, et notamment dans [51], des formules analogues à (6), mais avec des $\exp(-t\langle \omega, A \rangle)$ à la place des q^m . Sur les variétés monotones, il suffit de spécialiser en $q_i = \exp(-t\lambda\langle c_1, A_i \rangle)$; sur les autres, la démarche soulève un délicat problème de convergence.
4. On peut généraliser le produit défini par l'équation (6) en définissant, pour tout $\xi \in H^*(X)$

$$(7) \quad \langle \alpha \star_\xi \beta, c \rangle = \sum_m \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{\ell!} \Psi_{0,3,\ell}^m(a \otimes b \otimes c | x \otimes \dots \otimes x) q^m,$$

où, bien sûr, $x = D\xi$. On vérifie sans mal que, pour chaque m , la somme

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{\ell!} \Psi_{0,3,\ell}^m(a \otimes b \otimes c | x \otimes \dots \otimes x)$$

contient un nombre fini de termes non nuls si $\deg \xi \neq 2$ ou est une série convergente (une exponentielle) si $\deg \xi = 2$. Ainsi l'équation (7) définit-elle un produit $\star_\xi$ sur $QH^*(X) \otimes \mathbf{C}$ (on sort de la cohomologie entière à cause des exponentielles) qui est le produit $\star$ quand $\xi = 0$ puisque $\Psi_{0,3,\ell}^m(a \otimes b \otimes c | 0) = 0$ pour $\ell \geq 1$. La règle de décomposition en genre 0 implique que le produit $\star_\xi$ est associatif. Ceci nous entraîne vers l'équation WDVV et les variétés de Frobenius (voir les §§ 3.3.2 et 3.3.4).

⁸C'est le cas pour toutes celles des variétés de Fano qui vérifient que $H^{2,0} = 0$.

⁹C'est $H^*(X; \mathbf{Z}[M])$ où M est un sous-monoïde de $H_2(X; \mathbf{Z})$ dont je laisse aux lecteurs le plaisir d'écrire la définition.

3.2. Exemples

Propriétés. — La cohomologie quantique manque de propriétés fonctorielles. Il est d'ailleurs plus correct de parler de produit quantique sur la cohomologie que de cohomologie quantique. Il est donc assez difficile d'utiliser la connaissance de la cohomologie quantique de telle variété pour calculer celle de telle autre. La seule propriété qui puisse aider à faire des calculs est le bon comportement par rapport au produit cartésien :

$$QH^*(X \times Y) = QH^*(X) \otimes QH^*(Y),$$

les invariants de Gromov-Witten de $X \times Y$ s'exprimant de façon évidente en fonction de ceux de X et de Y .

Une liste. — Il existe toutefois un certain nombre de (pré-)publications où est calculée la cohomologie quantique de tel ou tel espace (les démonstrations sont plus ou moins heuristiques selon les cas). Voici une liste¹⁰ qui ne prétend à aucune exhaustivité : grassmanniennes [11, 53, 60] (voir aussi le § 3.3.7), intersections complètes [8], surfaces rationnelles [15], variétés de drapeaux [14, 27] (voir aussi le § 3.3.5), variétés de drapeaux partielles [2], variétés homogènes [38], variétés toriques [6].

Je vais présenter ici deux exemples simples qui appartiennent à plusieurs des familles de cette liste, ceux de l'espace projectif et du plan éclaté en un point. Ce sont des exemples de variétés symplectiques monotones. J'évoquerai pour finir une famille de variétés faiblement monotones, celle des quintiques de $\mathbf{P}^4$.

L'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. — Appelons p le générateur de la cohomologie de $\mathbf{P}^n$, de sorte que

$$H^*(\mathbf{P}^n; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[p]/p^{n+1} \text{ et } c_1 = (n+1)p.$$

On introduit une variable inversible q de degré $2(n+1)$. Le seul produit quantique à calculer est $p^n \star p$. Mais

$$(p^n \star p)_{mA} \in H^{2(n+1)(1-m)}(\mathbf{P}^n)$$

(A est toujours le générateur du H_2) et le seul terme qui pourrait être non nul est $(p^n \star p)_A$, qui s'évalue sur des classes de dimension 0. On a vu au § 2.1 que la structure complexe de $\mathbf{P}^n$ est régulière pour A , de plus $\mathbf{P}^n$ est évidemment monotone, de sorte que le calcul de l'exemple 1.1.1 est valide et que

$$\langle (p^n \star p)_A, \text{pt} \rangle = \Psi_3^A(H \otimes \text{pt} \otimes \text{pt}) = \Phi_3^A(H \otimes \text{pt} \otimes \text{pt}) = 1.$$

On a ainsi montré :

3.2.1 PROPOSITION. — *L'anneau de cohomologie quantique $QH^*(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ est isomorphe à l'anneau $\mathbf{Z}[p, q, q^{-1}]/(p^{n+1} - q)$.*

¹⁰Par ordre alphabétique des variétés puis des auteurs.

Remarque. — Dans cet exemple comme dans le suivant, on calcule avec une structure complexe intégrable, de sorte que les espaces $\mathcal{M}_A(J)$ sont complexes (voir le § 2.1) et que tous les nombres d'intersection avec des cycles représentés par des sous-variétés complexes sont positifs.

Le plan éclaté en un point. — C'est l'exemple que je vais traiter en détail ici. On considère $X = \widetilde{\mathbf{P}^2}$ avec sa structure complexe (intégrable!) naturelle et une forme de Kähler adaptée. C'est une variété de Fano et il n'y a aucun problème de finitude. Appelons A_1 la classe d'une droite de $\mathbf{P}^2$ ne passant pas par le point éclaté et A_2 la classe du diviseur exceptionnel. On a ainsi une base de $H_2(X; \mathbf{Z})$, avec les intersections

$$A_1 \cdot A_1 = 1, \quad A_1 \cdot A_2 = 0, \quad A_2 \cdot A_2 = -1.$$

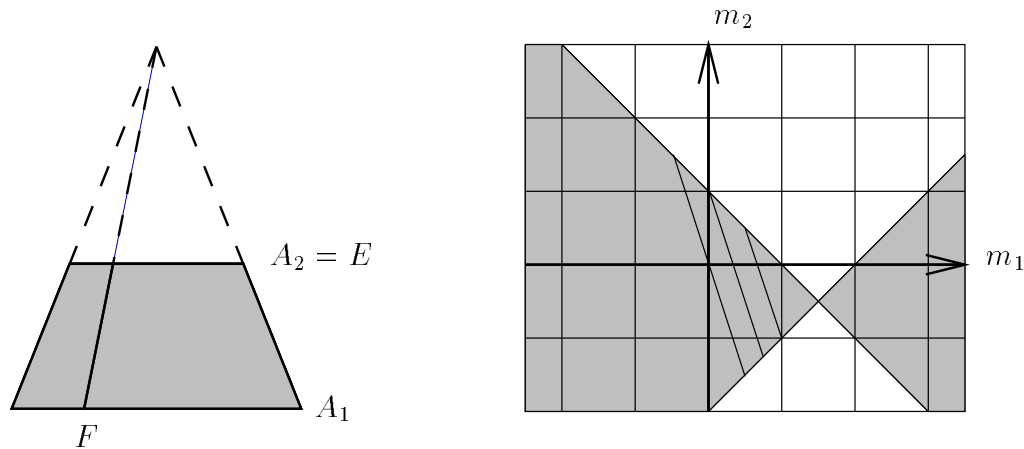


Figure 4 : $\widetilde{\mathbf{P}^2}$ et son homologie

Soit p_1, p_2 la base duale, de sorte que $H^*(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[p_1, p_2]/(p_1^2 + p_2^2, p_1 p_2)$. La première classe de Chern de X est $3p_1 + p_2$. On ajoute donc deux variables q_1 et q_2 de degrés respectifs 6 et 2.

Pour que $A = m_1 A_1 + m_2 A_2$ intervienne dans les sommes définissant le produit quantique, il faut que $\langle c_1, A \rangle = 3m_1 + m_2$ vaille 0, 1 ou 2. D'autre part, A doit être la classe d'une courbe rationnelle holomorphe et doit donc vérifier la formule d'adjonction¹¹, ici

$$2g - 2 = A \cdot A - \langle c_1, A \rangle \text{ avec } g \geq 0$$

(et égalité si et seulement si A est la classe d'une courbe plongée). On en déduit $A \cdot A - \langle c_1, A \rangle + 2 \geq 0$, soit

$$(m_1 + m_2 - 1)(m_1 - m_2 - 2) \geq 0.$$

Les classes autorisées sont en nombre fini (égal à 3) : ce sont les points du réseau qui sont à la fois dans le cône grisé défini par cette inégalité et sur les droites $c_1 = 0, 1$ ou 2 (figure 4). Il s'agit de 0, classe des courbes constantes, A_2 , classe de l'exceptionnel et

¹¹La même formule est vraie dans le cas non intégrable, voir [44].

$F = A_1 - A_2$, classe d'une fibre en considérant $\widetilde{\mathbf{P}^2}$ comme fibré sur $\mathbf{P}^1$. Il est à remarquer que ces deux classes contiennent des sphères holomorphes plongées (je viens d'en montrer) et ont une auto-intersection ≥ -1 . Grâce à la proposition 2.1.3, la structure complexe considérée est régulière pour ces classes. On peut donc continuer à calculer tranquillement.

Pour déterminer la structure multiplicative de $QH^*(\widetilde{\mathbf{P}^2})$, il suffit de déterminer les trois produits $p_i \star p_j$. Les invariants à déterminer ont les valeurs suivantes :

- D'abord, $\Phi_{A_1-A_2}(A_i \otimes A_j \otimes \text{pt})$: il s'agit de compter les courbes rationnelles dans la classe de la fibre, c'est à dire les droites de $\mathbf{P}^2$ passant par le point éclaté, contraintes à passer par un point fixé de $\mathbf{P}^2$. Il n'y en a qu'une, et elle rencontre des représentants de A_1 et de A_2 . Ainsi $\Phi_{A_1-A_2}(A_i \otimes A_j \otimes \text{pt}) = 1$ et, pour tous i et j ,

$$\langle (p_i \star p_j)_{A_1-A_2}, [\text{pt}] \rangle = 1.$$

- Ensuite $\Phi_{A_2}(A_i \otimes A_j \otimes A_k)$: ces courbes sont dans la classe de l'exceptionnel A_2 , qui contient une seule courbe, et celle-ci ne rencontre pas A_1 . Tous les invariants considérés ici sont donc nuls, sauf $\Phi_{A_2}(A_2 \otimes A_2 \otimes A_2)$. On trouve donc

$$\langle (p_2 \star p_2)_{A_2}, A_2 \rangle = 1 \text{ et } \langle (p_i \star p_j)_{A_2}, A_k \rangle = 0 \text{ si } i, j \text{ ou } k \neq 2.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la dualité de Poincaré ($Dp_1 = A_1$ et $Dp_2 = -A_2$) pour obtenir les produits

$$\begin{aligned} p_1 \star p_1 &= p_1^2 + q_1 q_2^{-1} \\ p_1 \star p_2 &= -q_1 q_2^{-1} \\ p_2 \star p_2 &= p_2^2 + p_2 q_2 + q_1 q_2^{-1} \end{aligned}$$

et finalement :

3.2.2 PROPOSITION. — *L'anneau de cohomologie quantique $QH^*(\widetilde{\mathbf{P}^2})$ du plan projectif éclaté en un point est isomorphe à l'anneau*

$$\mathbf{Z}[p_1, p_2, q_1, q_1^{-1}, q_2, q_2^{-1}] / (p_1^2 + p_2^2 - p_2 q_2 - 2q_1 q_2^{-1}, p_1 p_2 + q_1 q_2^{-1}).$$

Après ces deux exemples de variétés de Fano, venons-en à des exemples faiblement monotones puisque de dimension ≤ 6 , mais où $c_1 = 0$.

Les surfaces K3. — Si $n = 2$ et $c_1 = 0$, la formule (3) donne dimension 4 à tous les $\mathcal{M}_0^A(J)$. Les invariants à trois points se calculent sur $H_8(X^3; \mathbf{Z})$ donc forcément sur des classes $a \otimes b \otimes [X]$ avec $\dim a + \dim b = 4$. Comme dans la démonstration du théorème 3.1.1, on en déduit qu'ils sont tous nuls. Ainsi le produit quantique coïncide avec le cup-produit pour toutes les variétés hyperkähleriennes¹² de dimension 4.

¹²Ce qui prouve que la nullité du c_1 n'est pas une catastrophe.

Quantique des quintiques. — Soit X une hypersurface de degré 5 (quintique) dans $\mathbf{P}^4$. Grâce au théorème de Lefschetz, elle vérifie $H^2(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, engendré par la classe α duale à une section hyperplane $H \in H_4(X; \mathbf{Z})$ (α contient une forme de Kähler ω), et elle est simplement connexe. De plus, la première classe de Chern est nulle : les quintiques sont des exemples de variétés de Calabi-Yau. D'après la formule (3), la dimension virtuelle de tous les espaces de modules de courbes rationnelles J -holomorphes est 6. Tous les invariants à trois points se calculent donc sur $H_{12}(X^3; \mathbf{Z})$. La contribution des éléments de ce groupe contenant un facteur $[X]$ est triviale comme dans la démonstration du théorème 3.1.1. Il ne reste donc à calculer que les $\Psi_3^{mA}(H \otimes H \otimes H)$ pour $m \in \mathbf{Z}$ et A le générateur de $H_2(X; \mathbf{Z})$.

Soit C une courbe rationnelle (non paramétrée) de la classe mA . Elle possède un paramétrage simple $u : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ (avec $u_*[\mathbf{P}^1] = mA$). Comme $A \cdot H = 1$, $(mA) \cdot H = m$ et C compte pour m^3 dans $\Psi_3^{mA}(H \otimes H \otimes H)$.

En composant u avec une application rationnelle $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ de degré k , on voit que la même courbe (image) C va aussi contribuer à l'invariant $\Psi_3^{k(mA)}(H \otimes H \otimes H)$. Considérons le graphe

$$\tilde{v} : \zeta \longmapsto (\zeta, u \circ \varphi(\zeta)).$$

La structure complexe produit sur $\mathbf{P}^1 \times X$ n'est pas régulière pour la classe représentée par $\tilde{v}$, comme on peut le voir en appliquant la proposition 2.1.1 ou en remarquant, comme les applications rationnelles de degré k forment un espace de dimension $4k + 2$, que $\tilde{v}$ est dans une famille de dimension $4k + 8$. Il faut donc *vraiment* utiliser ici une perturbation de la structure complexe. Il existe une formule d'Aspinwall et Morrison [1] qui indique que la contribution d'un revêtement d'ordre k de C à $\Psi_3^{k(mA)}(H \otimes H \otimes H)$ devrait aussi être m^3 . On en trouvera une démonstration dans [41] et une autre plus récente dans [58], travail dans lequel C. Voisin a calculé les invariants de Gromov-Witten en question. Une conjecture (non démontrée) de Clemens affirme que les courbes rationnelles simples d'une quintique générale devraient être isolées. Si cette conjecture était vraie, le résultat de [58] permettrait de calculer complètement la cohomologie quantique des quintiques générales, en donnant :

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha \star \alpha &= \left[5 + \sum_{m \geq 1} \sum_{\{C \mid \deg C = m\}} m^3 (q^m + q^{2m} + \dots) \right] h \\ &= \left[5 + \sum_{m \geq 1} n_m m^3 \frac{q^m}{1 - q^m} \right] h \end{aligned}$$

où h est le générateur de $H^4(X; \mathbf{Z})$ (de sorte que $\alpha \smile \alpha = 5h$) et n_m est le nombre de courbes rationnelles de degré m (voir aussi le § 3.3.4) :

$$n_m = \# \{C \mid \deg C = m\}.$$

3.3. Motivations et autres références

Dans ce §, je cite sans beaucoup d'explications quelques mots-clés liés à ceux de “cohomologie quantique”. Les références données ne sont pas exhaustives, mais devraient être suffisantes pour permettre aux lecteurs de trouver leur chemin dans la littérature. Si certaines de ces allusions sont écrites au conditionnel, c'est que beaucoup des (remarquables) idées ayant engendré la cohomologie quantique sont dues à des physicien(ne)s.

3.3.1. Le point de vue de Kontsevich et Manin. — Ces auteurs décrivent dans [35] une théorie axiomatique (ou construction virtuelle, selon la terminologie de [57]) assez générale des invariants de Gromov-Witten : on peut imaginer par exemple qu'il existe une application

$$K_{0,k}^A : H^*(X^k) \longrightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,k})$$

de sorte que

$$\Psi_{0,k,0}^A(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) = \left\langle K_{0,k}^A(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k), [\overline{\mathcal{M}}_{0,k}] \right\rangle \in \mathbf{Q}$$

et plus généralement imaginer des

$$K_{g,k}^A : H^*(X^k) \longrightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,k})$$

satisfaisant une liste d'axiomes assez naturels dont l'un est une version de la règle de décomposition. La plupart des notions qui suivent trouvent leur expression dans ce langage. Voir [35].

3.3.2. Variétés de Frobenius. — Dans le produit $\star_\xi$ défini par l'équation (7) au § 3.1, remplaçons q^m par $\exp(-\langle \omega, A \rangle)$. Si la série est convergente (par exemple si (X, ω) est monotone), $\star_\xi$ munit $H^*(X; \mathbf{C}) = T_\xi H^*(X; \mathbf{C})$ d'une structure d'algèbre. Comme celle-ci dépend de ξ , on considère $H^*(X; \mathbf{C})$ ou au moins sa partie de degré pair, notée $\mathcal{H}$, comme une variété. On a ainsi un produit $\star_\xi$ sur chaque espace tangent $T_\xi \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ est munie d'une structure de variété de Frobenius, ce qui la rapproche des systèmes intégrables et des déformations isomonodromiques.

Pour le dire autrement, on considère la série S définie sur $H^*(X; \mathbf{C})$ par

$$S(\xi) = \sum_A \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{(\ell + 3)!} \Psi_{0,3,\ell}^A(x \otimes x \otimes x | x \otimes \cdots \otimes x) \exp(-\langle \omega, A \rangle),$$

le *potentiel de Gromov-Witten*. Dire que $\star_\xi$ est associatif équivaut à dire que S satisfait un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 3, dit équation WDVV (pour Witten, Dijkgraaf, Verlinde, Verlinde).

On peut aussi considérer la *connexion de Dubrovin* ∇_t définie sur le fibré tangent à $\mathcal{H}$ par $\nabla_t = d + t\Omega$, où la 1-forme Ω à valeurs dans les endomorphismes de $\mathcal{H}$ est la multiplication $\star_\xi$:

$$\Omega_\xi(\alpha)\beta = \alpha \star_\xi \beta.$$

L'associativité de $\star_\xi$ et l'existence du potentiel S se traduisent par la *platitude* de la connexion ∇_t pour tout t . Voir [20] et [29].

3.3.3. Symétrie miroir. — Les motivations pour définir la cohomologie quantique viennent de la physique — ou au moins des physiciens. Pour une part importante, il s'agit de la symétrie miroir, une étrange symétrie entre variétés de Calabi-Yau. Elle associerait à une variété X de Calabi-Yau une autre variété de Calabi-Yau X^* en échangeant certaines de leurs propriétés (voir [56, 59, 16, 34], le guide de Morrison [46] et le panorama [57] de C. Voisin).

L'accouplement de Yukawa normalisé sur X est une n -forme symétrique

$$\mathrm{Sym}^n H^1(X; TX) \longrightarrow \mathrm{Hom} \left(H^{n,0}(X), H^{0,n}(X) \right) \cong \left(H^{n,0}(X)^* \right)^{\otimes 2} \stackrel{\kappa}{\cong} \mathbf{C}$$

définie par le cup-produit des n -formes et le choix d'un élément $\kappa \in (H^{n,0}(X))^{\otimes 2}$. La symétrie miroir est supposée identifier $H^1(X; TX)$ avec $H^1(X^*; \Omega_{X^*}^1)$ et l'accouplement de Yukawa de X avec une n -forme symétrique

$$Y^* : \mathrm{Sym}^n H^1(X^*; \Omega_{X^*}^1) \longrightarrow \mathbf{C}$$

qui devrait être définie à l'aide du potentiel de Gromov-Witten (voir ci-dessus au § 3.3.2) :

$$Y^*(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) = \frac{\partial^n S}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_n}}(0)$$

si $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ est une base de $H^*(X^*; \mathbf{C})$ et $(t_1, \dots, t_k)$ sont les coordonnées dans cette base.

Un autre point de vue¹³ relie la connexion de Dubrovin définie par le produit quantique de X^* (§ 3.3.2) à la connexion de Gauss-Manin d'une famille de déformations de X (voir [57]).

3.3.4. Géométrie énumérative. — Les invariants de Gromov-Witten étant définis en comptant des courbes, la théorie devrait avoir des conséquences en géométrie énumérative (voir [1, 35, 32, 16, 51]). Dans le cas simple de $\mathbf{P}^2$, si l'on décompose une classe de cohomologie α sur la base $(1, p, p^2)$ en $\alpha = t_0 + t_1 p + t_2 p^2$, le potentiel de Gromov-Witten¹⁴ est

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}(t_0 t_1^2 + t_0^2 t_2) + \sum_{d \geq 1} N(d) \frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dt_1}$$

où $N(d)$ est le nombre de courbes rationnelles de degré d passant par $3d-1$ points donnés en position générale. L'associativité du produit quantique $\star_\xi$ permet de calculer¹⁵ $N(d)$ par récurrence [35] (voir aussi [16]).

Les phénomènes les plus spectaculaires se produisent via la symétrie miroir dans le cas des quintiques. Supposons qu'on sache vraiment déterminer la variété miroir X^* à

¹³C'est cette version de la conjecture des miroirs dont Givental [26] a annoncé récemment une démonstration pour les intersections complètes.

¹⁴Il y a une petite modification par rapport à la définition de celui-ci en 3.3.2 : on a spécialisé en $q = 1$.

¹⁵Que la série soit ou non convergente n'a aucune importance pour ce calcul.

partir de X . L'accouplement de Yukawa de X^* est facile à calculer, il devrait donner le potentiel de Gromov-Witten de X et celui-ci devrait permettre de calculer des nombres de courbes rationnelles dans X . On arrive aux prédictions impressionnantes de Candelas, de la Ossa, Green et Parkes [13] sur les nombres n_m déjà apparus dans la formule (8) pour certaines quintiques (voir [46]).

3.3.5. Géométrie homologique. — On a considéré au §3.3.2 la cohomologie comme une variété. Pourquoi ne pas y faire de la géométrie? C'est le point de vue de Givental [25]. Voici un exemple : on garde les notations p, q du §3.1, mais on remplace $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{C}$, on considère $\mathbf{C}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ comme l'anneau des fonctions régulières sur $H^2(X; \mathbf{C}^*)$ (que j'identifie à $H^2(X; \mathbf{C}/\mathbf{Z})$). Une fois la base $(A_1, \dots, A_r)$ de $H_2(X; \mathbf{Z})$ choisie, on peut considérer q_j comme la fonction

$$\begin{array}{ccc} H^2(X; \mathbf{C}/\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ \alpha & \longmapsto & \exp(2i\pi \langle \alpha, A_j \rangle). \end{array}$$

Supposons que l'anneau de cohomologie de X soit engendré par ses classes de degré 2 (les p , donc), la cohomologie quantique va naturellement être un quotient

$$QH^*(X) \otimes \mathbf{C} \cong \mathbf{C}[p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, q_1^{-1}, \dots, q_r^{-1}] / I.$$

L'idéal I décrit une sous-variété de l'espace des (p, q) c'est à dire $T^*H^2(X; \mathbf{C}/\mathbf{Z}) \dots$ qui est *lagrangienne*¹⁶ quand l'anneau $QH^*(X)$ est semi-simple. Dans le cas des variétés de drapeaux, c'est même un niveau d'un célèbre système intégrable, le système de Toda [27].

3.3.6. Cohomologie de Floer. — La cohomologie de Floer de l'espace des lacets de X peut être munie d'une structure multiplicative qui la rend isomorphe à la cohomologie quantique de X (voir [49]).

3.3.7. Algèbre de fusion et cohomologie de la grassmannienne. — Witten indique dans [60] comment la cohomologie quantique de la grassmannienne est liée aux espaces de modules de fibrés et à l'algèbre de fusion (voir la description de Beauville dans [7]). Considérons l'algèbre $\mathcal{R}_n$ des représentations de dimension finie du groupe unitaire $U(n)$. On sait qu'elle est isomorphe (sur $\mathbf{Q}$) à la cohomologie de l'espace classifiant $BU(n)$: à chaque représentation λ est associé un fibré vectoriel E_λ sur la grassmannienne $G_n(\mathbf{C}^N)$ des sous-espaces de dimension n de $\mathbf{C}^N$. En composant avec le caractère de Chern, on en déduit des morphismes

$$\text{ch} : \mathcal{R}_n \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^*(G_n(\mathbf{C}^N); \mathbf{Q})$$

compatibles lorsque N augmente et qui définissent un isomorphisme

$$\text{ch} : \mathcal{R}_n \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^*(BU(n); \mathbf{Q}).$$

¹⁶Le cotangent a sa structure symplectique canonique. On appréciera le choix des notations.

Witten construit dans [60] une sous-algèbre $\mathcal{R}_{n,N}$ de $\mathcal{R}_n$ (c'est l'algèbre de fusion) et un produit sur celle-ci, le *produit de Verlinde*, qui est différent du produit usuel (le produit tensoriel). Pour le définir, on commence par construire des nombres $N(\Sigma, \vec{\lambda})$ associés à une surface de Riemann Σ munie d'un k -uplet $\vec{z}$ de points marqués (qui n'apparaissent pas dans la notation) et d'un k -uplet $\vec{\lambda}$ de représentations de $U(n)$: on associe à ces données un fibré vectoriel sur l'espace de modules des connexions plates sur le $U(n)$ -fibré principal $\Sigma \times U(n)$, dont $N(\Sigma, \vec{\lambda})$ est la dimension de l'espace des sections holomorphes. Ces nombres satisfont des *règles de fusion* très similaires aux règles de décomposition du § 1.2, ce qui fait que le cas où $\Sigma = \mathbf{P}^1$ permet de construire le produit associatif recherché.

Selon Witten, le produit de Verlinde devrait être analogue au produit quantique au sens où on devrait pouvoir définir un *caractère de Chern*¹⁷

$$\mathrm{qh} : \mathcal{R}_{n,N} \longrightarrow QH^*(G_n(\mathbf{C}^N))$$

qui soit un isomorphisme d'anneaux.

Bibliographie

- [1] P. ASPINWALL, D. MORRISON, *Topological field theory and rational curves*, Commun. Math. Phys. **151** (1993), 245–262.
- [2] A. ASTACHEVICH, V. SADOV, *Quantum cohomology of partial flag manifolds*, Commun. Math. Phys. **170** (1995), 503–528.
- [3] M. AUDIN, *Symplectic and almost complex manifolds*, in [4].
- [4] M. AUDIN, J. LAFONTAINE, EDS, *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math. 117, Birkhäuser, 1994.
- [5] M. AUDIN, F. LALONDE, L. POLTEROVICH, *Symplectic rigidity: Lagrangian submanifolds*, in [4].
- [6] V. BATYREV, *Quantum cohomology ring of toric manifolds*, Astérisque **218** (1993), 9–34.
- [7] A. BEAUVILLE, *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula*, Israel Math. Conferences Proc. **9** (1996), 75–96.

¹⁷Analogie quantique du caractère de Chern.

- [8] A. BEAUVILLE, *Quantum cohomology of complete intersections*, Математическая физика, анализ, геометрия **2** (1995), 384–398.
- [9] K. BEHREND, *GW-invariants in algebraic geometry*, preprint (1996).
- [10] K. BEHREND, B. FANTECHI, *The intrinsic normal cone*, preprint (1996).
- [11] A. BERTRAM, *Modular Schubert calculus*, Advances in Math. (à paraître).
- [12] A. BERTRAM, G. DASKALOPOULOS, R. WENTWORTH, *Gromov invariants for holomorphic maps from Riemann surfaces to Grassmannians*, Journ. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 529–571.
- [13] P. CANDELAS, X. DE LA OSSA, P. GREEN, L. PARKES, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory*, Nucl. Phys. **B359** (1991), 21–74.
- [14] I. CIOCAN-FONTANINE, *Quantum cohomology of flag varieties*, IMRN **6** (1995), 263–277.
- [15] B. CRAUDER, R. MIRANDA, *Quantum cohomology of rational surfaces*, in [17].
- [16] P. DI FRANCESCO, C. ITZYKSON, *Quantum intersection rings*, in [17].
- [17] R. DIJKGRAAF, C. FABER, G. VAN DER GEER, EDS, *The moduli space of curves*, Progress in Math. 129, Birkhäuser, 1995.
- [18] S. DONALDSON, *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 397–428.
- [19] S. DONALDSON, P. KRONHEIMER, *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press, 1990.
- [20] B. DUBROVIN, *Integrable systems and classification of 2-dimensional topological field theories* in *Integrable systems, the Verdier memorial conference*, edited by O. BABELON, P. CARTIER, Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, Progress in Math. 115, Birkhäuser, 1994, et *Geometry of 2D topological field theories*, Lecture Notes in Math. 1620, Springer, 1995.
- [21] A. FLOER, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), 575–611.
- [22] K. FUKAYA, K. ONO, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant* (sic), preprint (1996).
- [23] W. FULTON, R. PANDHARIPANDE, *Notes on stable maps and quantum cohomology*, preprint (1996).

- [24] P. GAUDUCHON, *Connexions linéaires, classes de Chern, théorème de Riemann-Roch*, in [4].
- [25] A. GIVENTAL, *Homological geometry and mirror symmetry*, in *I.C.M. Zürich (1994)*, Birkhäuser, 1995, 473–480.
- [26] A. GIVENTAL, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, IMRN (1996, à paraître).
- [27] A. GIVENTAL, B. KIM, *Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices*, Commun. Math. Phys. **168** (1995), 609–641.
- [28] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
- [29] N. HITCHIN, *Frobenius manifolds*, in *Gauge Theory and Symplectic Geometry*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal, 1995, Kluwer, à paraître.
- [30] H. HOFER, V. LIZAN, J.-C. SIKORAV, *On genericity for holomorphic curves in 4-dimensional almost-complex manifolds*, The Journ. of Geom. Anal. (à paraître).
- [31] H. HOFER, D. SALAMON, *Floer homology and Novikov rings*, in *the Floer memorial volume*, Progress in Math. 133, Birkhäuser, 1995.
- [32] C. ITZYKSON, *Counting rational curves on rational surfaces*, preprint (1994).
- [33] M. KONTSEVICH, *Enumeration of rational curves via torus actions*, in [17].
- [34] M. KONTSEVICH, *Mirror symmetry in dimension 3*, in *Séminaire Bourbaki 1994-95*, Astérisque **237** (1996).
- [35] M. KONTSEVICH, YU. MANIN, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, Commun. Math. Phys. **164** (1994), 525–562.
- [36] D. KOTSCHICK, *The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifolds [after C. H. Taubes]*, in *Séminaire Bourbaki 1995-96*, Astérisque, ce volume.
- [37] F. LALONDE, D. McDUFF, *The classification of ruled symplectic 4-manifolds*, Math. Res. Letters (1996), à paraître.
- [38] J. LI, G. TIAN, *The quantum cohomology of homogeneous varieties*, preprint (1995).
- [39] J. LI, G. TIAN, *Virtual moduli cycles and GW-invariants*, preprint (1996).
- [40] G. LIU, *Associativity of quantum multiplication*, preprint (1995).
- [41] YU. MANIN, *Generating functions in algebraic geometry and sums over trees*, in [17].

- [42] D. McDUFF, *Examples of symplectic structures*, Invent. Math. **89** (1987), 13–36.
- [43] D. McDUFF, *The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds*, Journ. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 679–712.
- [44] D. McDUFF, *Singularities and positivity of intersections of J-holomorphic curves*, in [4].
- [45] D. McDUFF, D. SALAMON, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, Amer. Math. Soc., 1994, tirage corrigé, 1995.
- [46] D. MORRISON, *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: a guide for mathematicians*, Journ. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 223–247.
- [47] S. NOVIKOV, *Multivalued functions and functionals — an analogue of the Morse theory*, Soviet Math. Dokl. **24** (1981), 222–225.
- [48] P. PANSU, *Compactness*, in [4].
- [49] S. PIUNIKHIN, D. SALAMON, M. SCHWARZ, *Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology*, preprint (1995).
- [50] Y. RUAN, *Symplectic topology on algebraic 3-folds*, Journal of Diff. Geometry **39** (1994), 215–227.
- [51] Y. RUAN, G. TIAN, *A mathematical theory of quantum cohomology* (annonce), Math. Res. Letters **1** (1994), 269–278, et *A mathematical theory of quantum cohomology*, Journal of Diff. Geometry **42** (1995), 259–367.
- [52] B. SIEBERT, *Gromov-Witten invariants for general symplectic manifolds*, preprint (1996).
- [53] B. SIEBERT, G. TIAN, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, preprint (1994).
- [54] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten and the Gromov Invariants*, Math. Res. Letters **2** (1995), 221–238.
- [55] G. TIAN, *Quantum cohomology and its associativity*, preprint (1995).
- [56] C. VAFA, *Topological mirrors and quantum rings*, in *Essays on Mirror manifolds*, S. T. Yau Ed., International Press, Hong-Kong, 1992.
- [57] C. VOISIN, *Symétrie miroir*, Panoramas et Synthèses, volume 2, Société Mathématique de France, 1996.
- [58] C. VOISIN, *A mathematical proof of Aspinwall-Morrison formula*, Compositio Math. (à paraître).

- [59] E. WITTEN, *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in Diff. Geometry **1** (1991), 243–310.
- [60] E. WITTEN, *The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian*, preprint (1993).

Michèle AUDIN
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
maudin@math.u-strasbg.fr