

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences...
Série A et B : sciences
mathématiques. Sciences [...]

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences... Série A et B : sciences mathématiques. Sciences physiques / Académie des sciences ; [dir. publ. Guy de Dampierre]. 1979-12-10.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

TOPOLOGIE. — *La classe de cobordisme duale de la singularité et des points doubles d'une application différentiable.* Note (*) de Michèle Audin, présentée par Henri Cartan.

On calcule la classe de cobordisme duale à des désingularisations classiques de la singularité et des points doubles d'une application différentiable. Les démonstrations sont élémentaires et donnent comme corollaires des résultats connus en cohomologie.

We compute the cobordism class dual to classical desingularisations of the singularity and double points of a differentiable map. Proofs are elementary and give as corollaries known cohomological results.

I. LA CLASSE DE COBORDISME DUALE A LA SINGULARITÉ D'UN MORPHISME DE FIBRÉS. — Soient ξ et η deux fibrés vectoriels différentiables de base X compacte, $G_i(\xi)$ le fibré en grassmanniennes de i -plans associé à ξ . Soit

$$\tilde{\Sigma}^i = \{ (x, \alpha_x, Q^i) \mid Q^i \subset \ker \alpha_x \} \subset \underset{x}{\text{Hom}}(\xi, \eta) \times G_i(\xi) = E.$$

$\tilde{\Sigma}^i$ est une sous-variété de E ([3], [4]). On dira que $\psi : \xi \rightarrow \eta$ est un morphisme générique si $G(\psi)$ est transverse à $\tilde{\Sigma}^i$, où $G(\psi)$ est défini par :

$$\begin{array}{ccc} G_i(\xi) & \xrightarrow{G(\psi)} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\psi} & \text{Hom}(\xi, \eta) \end{array}$$

Dans ce cas, $\tilde{\Sigma}^i(\psi) = G(\psi)^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)$ est une sous-variété de $G_i(\xi)$. Si Y est une variété, $f \in C^\infty(X, Y)$, $\xi = TX$, $\eta = f^*TY$, $\psi = df$, on peut montrer [1] que df est générique pour presque toutes les applications f . On note alors $\tilde{\Sigma}^i(f) = \tilde{\Sigma}^i(df)$. Munie de la projection p de $G_i(\xi)$, $\tilde{\Sigma}^i(f)$ désingularise $\bar{\Sigma}^i(f) = \{ x \in X \mid \dim \ker df(x) \geq i \}$. On en déduit que $\bar{\Sigma}^i(f)$ porte une classe d'homologie (homologie voudra toujours dire $H_*(\cdot, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$). Cette classe a été calculée par Thom [6], Porteous [3], Ronga [4]. $(\tilde{\Sigma}^i(\psi), p)$ représente un élément de $N_*(X)$ (bordisme non orienté de X). Je calcule sa classe duale dans $N^*(X)$ dans les cas de dimension où $\bar{\Sigma}^i(\psi)$ contient toute la singularité de ψ .

THÉOREME 1. — Soient X une variété compacte, ξ et η deux fibrés vectoriels sur X , et ψ un morphisme générique de ξ dans η .

Alors :

- (i) si $\text{rg } \eta = \text{rg } \xi - i + 1$, la classe duale à $[\tilde{\Sigma}^i(\psi), p]$ est $w^i(\xi - \eta) \in N^i(X)$;
 - (ii) si $\text{rg } \eta = \text{rg } \xi + i - 1$, la classe duale à $[\tilde{\Sigma}^i(\psi), p]$ est $w^i(\eta - \xi) \in N^i(X)$.
- (w^i est la i -ième classe de Stiefel-Whitney en cobordisme non-orienté).

Démonstration de (i). — (a) $[\tilde{\Sigma}^i(\psi), p]$ ne dépend pas de ψ ; de plus on peut supposer que η est trivial, par un argument classique de suspension [4].

(b) Si η est trivial, en utilisant une application classifiant ξ , on est amené à calculer la classe duale à $[C_i, p]$, où :

$$C_i = \{ (P^q, Q^i) \mid Q^i \subset P^q \cap R^{N+i-1} \} \subset G_i(\gamma_q^N),$$

γ_q^N désigne le fibré universel sur la grassmannienne des q -plans dans R^{q+N} , notée G_q^N , p est la restriction de la projection $G_i(\gamma_q^N) \rightarrow G_q^N$, q est le rang de ξ . C_i désingularise le cycle de

Schubert $S_i = \{P^q \mid \dim P^q \cap R^{N+i-1} \geq i\}$ contenu dans G_q^N . On sait [2] que ce cycle de Schubert porte une classe d'homologie, duale de $w^i(\gamma_q^N) \in H^i(G_q^N)$. $[C_i, p]$ est donc *a priori* une bonne candidate pour représenter la classe duale à $w^i(\gamma_q^N) \in N^i(G_q^N)$.

(c) Propriétés des classes $[C_i, p]$. Soit $\sigma^i(\gamma_q^N) \in N^i(G_q^N)$ la classe duale à $[C_i, p]$.

Stabilité. — $k : G_q^N \hookrightarrow G_q^{N+1}$ est l'inclusion naturelle. On a

$$k^* \sigma^i(\gamma_q^{N+1}) = \sigma^i(\gamma_q^N).$$

Somme avec un fibré trivial. — $j : G_q^N \hookrightarrow G_{q+1}^N$ l'inclusion naturelle. On a

$$j^* \sigma^i(\gamma_{q+1}^N) = \sigma^i(\gamma_q^N).$$

Multiplication en degré maximal :

$$\mu : G_q^N \times G_r^M \rightarrow G_{q+r}^{N+M}, \quad \mu(P^q, Q^r) = P^q \oplus Q^r.$$

On a

$$\mu^* \sigma^{q+r}(\gamma_{q+r}^{N+M}) = \sigma^q(\gamma_q^N) \times \sigma^r(\gamma_r^M).$$

Normalisation. — $\sigma^1(\gamma_1^N) = e(\gamma_1^N)$, où e désigne la classe d'Euler en cobordisme.

(d) Identification des classes $\sigma^i(\gamma_q^N)$.

PROPOSITION. — Pour toute grassmannienne compacte G_q^N , soient données des variétés singulières (C_i, p) ($1 \leq i \leq q$) telles que :

(i) (C_i, p) désingularise le cycle de Schubert S_i ;

(ii) les classes duales $\sigma^i(\gamma_q^N)$ vérifient les quatre propriétés précédentes.

Alors :

$$\sigma_i(\gamma_q^N) = w^i(\gamma_q^N) \in N^i(G_q^N) \quad (1 \leq i \leq q).$$

Démonstration. — $H^*(G_q^N)$ est un anneau de polynômes en les classes duales aux S_i , et $N^*(G_q^N) = H^*(G_q^N) \otimes N^*(pt)$. Donc $N^*(G_q^N)$ est un anneau de polynômes en les classes $\sigma^i(\gamma_q^N)$ d'après (i). D'après la propriété de stabilité, les σ^i définissent des classes caractéristiques pour les fibrés vectoriels. En utilisant les propriétés de somme avec un fibré trivial et de multiplication en degré maximal, on peut alors montrer l'axiome de la somme de Whitney pour les classes totales σ . Par unicité des classes de Stiefel-Whitney en cobordisme, la propriété de normalisation permet de conclure.

II. LA CLASSE DUALE AUX POINTS DOUBLES D'UNE APPLICATION. — Soient X^q, Y^{q+1} ($i \geq 1$) deux variétés différentiables (X^q est compacte), et soit $f \in C^\infty(X, Y)$. On suppose que f est une application à croisements normaux, et que df est générique au sens de I: L'ensemble des telles applications est un ouvert dense de $C^\infty(X, Y)$.

Soit $\tilde{M}_2(f) = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y) \cup \tilde{\Sigma}^1(f) \subset (X \times X - \Delta_X) \cup G_1(TX) = \widetilde{X \times X}$. ($\widetilde{X \times X}$ est l'éclatée de $X \times X$ le long de la diagonale Δ_X ; c'est une variété de dimension $2q$). D'après les hypothèses faites sur f , $\tilde{M}_2(f)$ est une sous-variété de dimension $q-i$ de $\widetilde{X \times X}$ [5]. Elle est munie d'une application $p : \tilde{M}_2(f) \rightarrow X$; p est la composée :

$\tilde{M}_2(f) \subset \widetilde{X \times X} \xrightarrow{\sigma} X \times X \xrightarrow{p_1} X$, où σ est l'éclatement, et p_1 la première projection. Alors $(\tilde{M}_2(f), p)$ désingularise l'adhérence de l'ensemble des points doubles de f dans X , et représente une classe de bordisme $[\tilde{M}_2(f), p] \in N_{q-i}(X)$.

THÉOREME 2. — La classe duale à $[\tilde{M}_2(f), p]$ est :

$$f^* f_1(1) - w^i(f^* TY - TX) \in N^i(X),$$

où f_1 est l'homomorphisme de Gysin associé à f en cobordisme non orienté.

On rappelle que la classe duale à $f^* f_1(1)$ peut se représenter par $[I(f), p_1] \in N_{q-i}(X)$, où :

$I(f) = (f \times f')^{-1}(\Delta_Y) \subset X \times X \xrightarrow{p_1} X$, et f' est n'importe quelle application homotope à f et transverse à f .

LEMME FONDAMENTAL. — Sous les hypothèses du théorème 2, supposons qu'il existe une variété Z^{q+i-1} et une submersion $\pi : Y^{q+i} \rightarrow Z^{q+i-1}$ telle que :

(i) $g = \pi \circ f : X \rightarrow Z$, dg est générique;

(ii) le fibré sur Y des noyaux de $d\pi$ est un sous-fibré en droites trivial de TY .

Alors :

$$[I(f), p_1] = [\tilde{M}_2(f), p] + [\tilde{\Sigma}^1(g), p] \in N_{q-i}(X).$$

Démonstration du théorème 2. — La conclusion du lemme fondamental est la même que celle du théorème 2, en utilisant le théorème 1 et le fait que : $g^* TZ - TX = f^* TY - TX$. Dans le cas général, on applique le lemme fondamental à :

$$\begin{array}{ccc} X^q \times S^1 & \xrightarrow{f \times \text{Id}} & Y^{q+i} \times S^1 \\ & \searrow g & \downarrow \pi \\ & & Y^{q+i} \end{array}$$

Appelons m la classe duale à $[\tilde{M}_2(f), p]$. La conclusion du lemme fondamental nous dit :

$$m \otimes 1 = [f^* f_1(1)] \otimes 1 - w^i(f^* TY - TX) \otimes 1 \in N^i(X) \otimes N^0(S^1) \subset N^i(X \times S^1)$$

Ceci finit la démonstration du théorème 2.

Démonstration du lemme fondamental. — On construit explicitement un cobordisme entre les trois variétés $I(f)$, $\tilde{M}_2(f)$, et $\tilde{\Sigma}^1(g)$, compatible avec les applications, en utilisant le fibré trivial sur Y .

(a) Construction de $I(f)$. — On choisit une application f' définissant $I(f)$. Il existe un champ de vecteurs non nul sur Y , V_y , avec $d\pi(y)(V_y) = 0$. On pose

$$f'(x) = \exp_{f(x)}(\varepsilon V_{f(x)}).$$

Les hypothèses de généricité sur f et g entraînent que f' est transverse à f si ε est assez petit [1]. On a alors $I(f) \subset X \times X - \Delta_X \subset \widetilde{X \times X}$.

(b) $\tilde{\Sigma}^1(g) \subset G_1(TX) \subset \widetilde{X \times X}$, et $\tilde{M}_2(f) \cap \tilde{\Sigma}^1(g) = \tilde{\Sigma}^1(f)$. Soit :

$$W = \{(x, y) \in X \times X - \Delta_X \mid \exists t \in]0, 1] \text{ tel que } f(x) = \exp_{f(y)}(\varepsilon t V_{f(y)})\}.$$

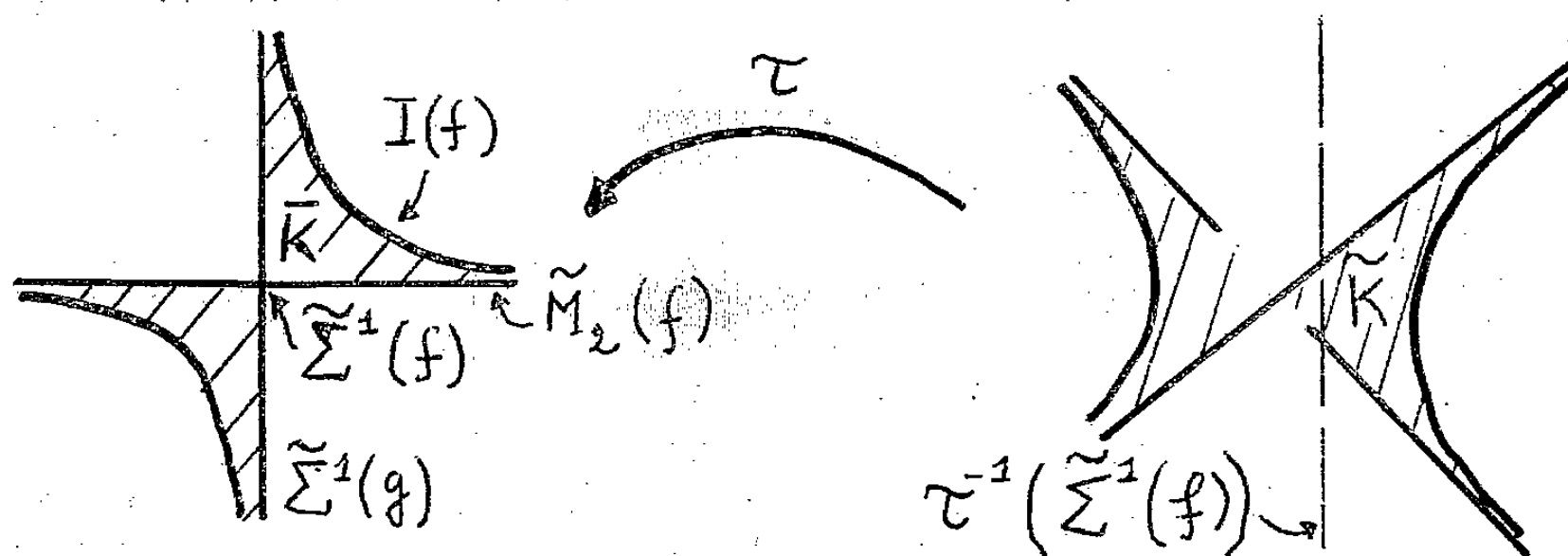
Si ε est petit, W est difféomorphe à $I(f) \times]0, 1]$. Son adhérence dans $\widetilde{X \times X}$ est : $\overline{W} = W \cup \tilde{\Sigma}^1(g) \cup \tilde{M}_2(f)$.

Soit $K = \overline{W} - \tilde{\Sigma}^1(f)$; on a $\overline{K} = K \cup \tilde{\Sigma}^1(f)$; les généricités de f et g permettent de montrer [1] que K est une sous-variété de $\widetilde{X \times X} - \tilde{\Sigma}^1(f)$, de bord

$$\partial K = I(f) \cup [\tilde{\Sigma}^1(g) - \tilde{\Sigma}^1(f)] \cup [\tilde{M}_2(f) - \tilde{\Sigma}^1(f)].$$

De plus, $\bar{K}$ se comporte bien au voisinage de $\tilde{\Sigma}^1(f)$.

(c) Éclater $X \times X$ le long de la sous-variété fermée $\tilde{\Sigma}^1(f)$ ne va rien changer aux classes de bordisme considérées [$\tilde{\Sigma}^1(f)$ est de codimension 1 dans $\tilde{\Sigma}^1(g)$, et $\tilde{M}_2(f)$ ne rencontre pas $I(f)$]; mais cette opération sépare $\tilde{\Sigma}^1(g)$ et $\tilde{M}_2(f)$. La transformée $\tilde{K}$ de $\bar{K}$ définit un cobordisme entre les trois variétés, ce qui finit la démonstration du lemme fondamental.



Remarque. — Le théorème 2 est analogue à un théorème de F. Ronga en homologie ordinaire [5]. Sa démonstration utilise des techniques difficiles à mettre en œuvre en cobordisme.

(*) Remise le 22 octobre 1979; acceptée, après révision, le 5 novembre 1979.

[1] M. AUDIN, *Thèse 3^e cycle*, Orsay, 1979.

[2] S. S. CHERN, *Ann. of Math.*, 49, 1948, p. 362-372.

[3] I. PORTEOUS, *Simple Singularities of Maps* [*Proceedings of Liverpool Singularities I*, (Lecture Notes in math., 192, 1971, p. 286-307)].

[4] F. RONGA, *Comment. Math. Helvet.*, 47, 1972, p. 15-32.

[5] F. RONGA, *Compositio Math.*, 27, 1973, p. 223-232.

[6] R. THOM, *Ann. Institut Fourier*, 1956, p. 43-87.

Université de Genève, Section de Mathématiques,
2-4, rue du Lièvre, CH-1211 Genève 24.