

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences...
Série A et B : sciences
mathématiques. Sciences [...]

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences... Série A et B : sciences mathématiques. Sciences physiques / Académie des sciences ; [dir. publ. Guy de Dampierre]. 1980-09-29.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

TOPOLOGIE. — *La classe de cobordisme de la singularité d'un morphisme de fibrés vectoriels et des points doubles d'une application.* Note (*) de Michèle Audin, présentée par Henri Cartan.

On calcule la classe de cobordisme représentée par la désingularisation canonique de la singularité d'un morphisme de fibrés vectoriels. Cette Note corrige un résultat erroné annoncé antérieurement, permet de calculer l'homomorphisme de Gysin induit par la projection d'un fibré en projectifs; on calcule en outre la classe de cobordisme des points doubles d'une application analytique complexe.

We compute the cobordism class represented by the canonical desingularization of the singularity of a vector bundle morphism. This Note corrects a previously announced false result, allows one to calculate the Gysin homomorphism induced by a projective bundle projection; moreover we compute the cobordism class of the double points of a complex analytic mapping.

Soit $\varphi : \xi \rightarrow \eta$ un morphisme générique de fibrés vectoriels complexes au-dessus d'une variété X , et soit $\tilde{\Sigma}^i(\varphi) = \{(x, Q^i) \mid x \in X, Q^i \subset \ker \varphi_x\}$ la désingularisation canonique de la singularité $\Sigma^i(\varphi) \subset X$ [3]; $\tilde{\Sigma}^i(\varphi)$ est contenu dans $G_i(\xi)$, fibré en grassmanniennes des i -plans associé à $\xi : G_i(\xi) \rightarrow X$. On veut calculer $[\tilde{\Sigma}^i(\varphi), \pi | \tilde{\Sigma}^i(\varphi)] \in U^*(X)$, anneau de cobordisme complexe de X .

1. LEMME PRINCIPAL. — Soient ξ' tel que $\xi \oplus \xi' = \varepsilon^{K+i}$ (K assez grand), $G_i^K = G_i(\mathbb{C}^{K+i})$, $p : G_i^K \times X \rightarrow X$ la deuxième projection, γ_i^* le dual du fibré canonique sur G_i^K . Alors :

$$[\tilde{\Sigma}^i(\varphi), \pi | \tilde{\Sigma}^i(\varphi)] = p_*(e(\gamma_i^* \otimes (\eta \oplus \xi'))),$$

où e est la classe d'Euler en cobordisme complexe, et p_* l'homomorphisme de Gysin associé à p .

Démonstration. — On considère :

$$\begin{aligned} \varphi \oplus 1_{\xi'} : \xi \oplus \xi' &\rightarrow \eta \oplus \xi'. \\ \tilde{\Sigma}^i(\varphi \oplus 1_{\xi'}) &= \tilde{\Sigma}^i(\varphi) \subset G_i(\xi) \subset G_i(\xi \oplus \xi') = G_i^K \times X. \end{aligned}$$

Donc d'après [6] :

$$[\tilde{\Sigma}^i(\varphi), \pi | \tilde{\Sigma}^i(\varphi)] = p_*(e(\text{Hom}(\gamma_i, \eta \oplus \xi'))) = p_*(e(\gamma_i^* \otimes (\eta \oplus \xi'))).$$

En faisant les modifications d'usage pour passer au cas du cobordisme réel (non orienté), on obtient :

THÉORÈME 1 (McCroory [2]). — Soit $\varphi : \xi^n \rightarrow \eta^j$ un morphisme générique de fibrés vectoriels réels, et soit q^k la classe caractéristique associée à l'opération de Steenrod-tom Dieck Q^k . Alors :

$$[\tilde{\Sigma}^1(\varphi), \pi | \tilde{\Sigma}^1(\varphi)] = q^{j-n+1}(\eta - \xi) \in N^{j-n+1}(X).$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que :

$$p_*(e(\gamma_1^* \otimes (\eta \oplus \xi'))) = q^{j-n+1}(\eta \oplus \xi').$$

Par définition :

$$q^{j-n+1}(\eta \oplus \xi') = p_{1*} Q^{j-n+1} i_{1*}(1),$$

où $p_1 : \eta \oplus \xi' \rightarrow X$ et $i_1 : X \rightarrow \eta \oplus \xi'$ sont la projection et la section nulle. Donc $q^{j-n+1}(\eta \oplus \xi')$ est l'intersection transversalisée des deux sous-variétés :

$$\mathbb{R}P^K \times (\eta \oplus \xi') \xrightarrow{\Delta} S^K \times_{\mathbb{Z}_2} ((\eta \oplus \xi') \times (\eta \oplus \xi')) \xrightarrow{1 \times \mathbb{Z}_2(i_1 \times i_1)} S^K \times_{\mathbb{Z}_2} (X \times X),$$

considérée comme élément du cobordisme de X par projection :

$$\mathbb{R}P^K \times (\eta \oplus \xi') \rightarrow \eta \oplus \xi' \xrightarrow{p_1} X. \quad [5].$$

L'intersection ensembliste est $\mathbb{R}P^K \times X$, le fibré « excès » est $\gamma_1^* \otimes (\eta \oplus \xi')$, sa classe d'Euler représente l'intersection transverse d'après [5], prop. 3.3.

Remarque. — Comme me l'a fait remarquer C. McCrory, ce résultat corrige les énoncés erronés de [1] dans lesquels il faut donc remplacer w^i par q^i (voir plus bas des expressions plus explicites).

2. CLASSE DE LA SINGULARITÉ $\tilde{\Sigma}^1(\varphi)$. — On considère le cas où $i=1$. Pour un fibré ζ de rang m , posons $e(\gamma_1^* \otimes \zeta) = \sum_{k \geq 0} \alpha^{m-k}(\zeta) z^k$, où $z = e(\gamma_1^*)$. Les α^i sont des classes caractéristiques multiplicatives pour les fibrés vectoriels stables.

LEMME :

$$\alpha^k(\zeta) = c^k(\zeta) + \sum_{i \geq 1} c^{k+i}(\zeta) \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_s = i \\ i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \geq 1}} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_s j_s} \sigma_{(i_1-1, \dots, i_s-1)}(\zeta),$$

où $\sigma_{(i_1, \dots, i_s)}(\zeta)$ est la somme symétrisée $\sum \mu_1^{i_1} \dots \mu_s^{i_s}$, les μ_i étant les générateurs symboliques pour les classes de Chern $c^k(\zeta)$ de ζ , et les a_{ij} les coefficients du groupe formel F de U^* .

L'application $p_* : U^*(X)[z]/z^{k+1} = U^*(\mathbb{C}P^K \times X) \rightarrow U^*(X)$ est déterminée par $p_*(z^k) = [\mathbb{C}P^{K-k}] \in U^*(pt)$, en considérant $U^*(X)$ comme un $U^*(pt)$ -module.

THÉORÈME 2. — Soit $\varphi : \xi^n \rightarrow \eta^{n+i}$ un morphisme générique de fibrés vectoriels complexes. Alors :

$$[\tilde{\Sigma}^1(\varphi), \pi | \tilde{\Sigma}^1(\varphi)] = \sum_k \alpha^{i+k+1}(\eta - \xi) [\mathbb{C}P^k].$$

Exemples. — Si X est complexe de dimension n , on trouve :

$$i=n-1 : [\tilde{\Sigma}^1, \pi] = c^n(\eta - \xi),$$

$$i=n-2 : [\tilde{\Sigma}^1, \pi] = c^{n-1}(\eta - \xi) + c^n(\eta - \xi)(na_{11} + [\mathbb{C}P^1]).$$

3. HOMOMORPHISME DE GYSIN ASSOCIÉ À $\pi : P(\xi) \rightarrow X$. — Soient ξ_1^* le dual du fibré en droites canonique sur $P(\xi)$ et $t = e(\xi_1^*)$. Pour connaître π_* , il suffit de savoir calculer $\pi_*(t^j)$. En appliquant le théorème 2 avec η trivial, on obtient :

$$\text{THÉORÈME 3. — Si } \text{rg } \xi = n, \pi_*(t^j) = \sum_k \alpha^k(-\xi) [\mathbb{C}P^{n-1+k-j}].$$

Si on pose $\omega(Z) = \sum_{i \geq 0} [\mathbb{C}P^i] Z^i dZ$, et si les λ_k sont les générateurs symboliques pour les classes de Chern de ξ , on peut reformuler le théorème 3 en :

COROLLAIRE :

$$\pi_*(t^j) = \text{Res} \left[\frac{Z^j \omega(Z)}{\prod_{k=1}^n F(Z, \lambda_k)} \right],$$

ce qui est équivalent au théorème annoncé par Quillen dans [4].

4. POINTS DOUBLES. — Soient X^n et Y^{n+i} deux variétés analytiques complexes et $f: X^n \rightarrow Y^{n+i}$ ($i \geq 1$) une application holomorphe propre; soit $\tilde{M}_2(f)$ la désingularisation des points doubles de f [7]. C'est une sous-variété de l'éclatée $X \tilde{\times} X$ de $X \times X$ le long de la diagonale. Soit P la composition de l'éclatement et de la première projection.

THÉORÈME 4 :

$$[\tilde{M}_2(f), P] = f^* f_* (1) - \sum_{k \geq 0} \alpha^{i+k} (f^* TY - TX) [\mathbb{C} P^k] - \sum_{j > 0} \bar{b}_j \sum_k \alpha^{i+k} (f^* TY - TX) [\mathbb{C} P^{k-j}],$$

où les $\bar{b}_i$ sont les coefficients de la série $-Z/\theta(Z)$, θ étant l'unique série vérifiant $F(Z, \theta(Z)) = 0$.

Démonstration. — On suit l'idée de la démonstration cohomologique de [7], les calculs analogues en cobordisme étant rendus possibles par le théorème 2 appliqué à $\pi: P(TX) \rightarrow X$.

Remarque. — Dans le cas réel les $\bar{b}_i$ sont nuls; on retrouve le résultat montré géométriquement dans [1, th. 2] (compte tenu de la correction de l'énoncé mentionnée plus haut).

(*) Remise le 22 septembre 1980.

[1] M. AUDIN, *Comptes rendus*, 289, série A, 1979, p. 719.

[2] C. McCrory, *B.A.M.S.*, 82, 1976, p. 281-283.

[3] I. PORTEOUS, *Simple Singularities of Maps* (Springer Lecture Notes in Math., n° 192, 1971, p. 286-307).

[4] D. QUILLEN, *B.A.M.S.*, 75, 1969, p. 1293-1298.

[5] D. QUILLEN, *Advances in Math.*, 7, 1971, p. 29-56.

[6] F. RONGA, *Comment. Math. Helvet.*, 47, 1972, p. 15-32.

[7] F. RONGA, *Compositio Math.*, 27, 1973, p. 223-232.

Université de Genève, Section de mathématiques,
2-4, rue du Lièvre, CH-1211 Genève 24.