

[Comptes rendus des séances
de l'Académie des sciences.
Série 1, Mathématique]

Académie des sciences (France). Auteur du texte. [Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique]. 1982-03-01.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

TOPOLOGIE. — *Obstructions à trouver un champ de k -repères dans un fibré vectoriel.*
Note (*) de Michèle Audin, présentée par Henri Cartan.

On établit des relations entre divers types d'obstructions à trouver un champ de k -repères dans un fibré vectoriel sur une variété; ces relations permettent de calculer l'élément du groupe π_1^s défini par E. Miller comme obstruction à trouver un champ de 2-repères tangents sur une variété qui possède un champ de vecteurs non nul.

TOPOLOGY. — Obstructions on the Existence of a k -Field in a Vector Bundle.

Some relations between different kinds of obstructions to the existence of a k -field in a vector bundle with a manifold basis are established; these relations allow one to compute the element of the group π_1^s , defined by E. Miller to be an obstruction to the existence of a tangent 2-field on a manifold which already has a tangent vector field.

Soient X une variété différentiable compacte de dimension m et ξ un fibré vectoriel réel de rang n sur X . On veut savoir si ξ admet un champ de k -repères.

1. OBSTRUCTION DE DAX. — Si V est une variété et η un fibré vectoriel stable sur V , appelons $\Omega^N(V; \eta)$ le groupe de cobordisme normal des applications $f: M \rightarrow V$, où M est une variété, $\dim V - \dim M = N$, f est propre et son fibré normal stable est équivalent à η [3].

Soit P^r l'espace projectif réel de dimension r ; notons λ_r son fibré en droites canonique. L'obstruction de Dax $\sigma_{n-k+1}(\xi)$ se trouve dans :

$$\Omega^{n+l}(P^{k+l-1} \times X; \lambda_{k+l-1} \otimes \xi^{n+l}),$$

où $\xi^{n+l} = \xi \oplus \varepsilon^l$, et l est assez grand. Par définition, $\sigma_{n-k+1}(\xi)$ est la classe de cobordisme normal des zéros de n'importe quelle section transverse de $\lambda_{k+l-1} \otimes \xi^{n+l}$. C'est une obstruction pour le problème stable (trouver un champ de $(k+l)$ -repères dans ξ^{n+l} , pour un l assez large), complète si $n-k \geq (m+1)/2$ ([2], voir aussi [5]).

Interprétation en termes de singularités. — Le problème est équivalent à trouver un morphisme injectif de fibrés vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon^k & \hookrightarrow & \xi \\ \searrow & & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

Choisissons donc un morphisme générique quelconque $\varphi: \varepsilon^k \rightarrow \xi$, et posons :

$$\tilde{\Sigma}^1(\varphi) = \{(l, x) \in P^{k-1} \times X \mid l \subset \ker \varphi_x\}.$$

C'est une sous-variété de $P^{k-1} \times X$, de codimension n , elle s'envoie sur l'ensemble singulier $\bar{\Sigma}^1(\varphi)$ par la deuxième projection de $P^{k-1} \times X$. On peut la « suspendre » :

$$\tilde{\Sigma}^1(\varphi) = \tilde{\Sigma}^1(\varphi \oplus \text{id}) \subset P^{k+l-1} \times X, \quad \varphi \oplus \text{id}: \varepsilon^k \oplus \varepsilon^l \rightarrow \xi \oplus \varepsilon^l = \xi^{n+l}.$$

Le morphisme φ détermine une section de $\lambda_{k+l-1} \otimes \xi^{n+l} = \text{Hom}(\lambda_{k+l-1}, \xi^{n+l})$, par :

$$s_\varphi(l, x) = (\varphi_x \oplus \text{id})|_l,$$

et les zéros de s_φ sont exactement les points de $\tilde{\Sigma}^1(\varphi)$. Si on note par des crochets les classes de cobordisme normal, on obtient donc :

$$\sigma_{n-k+1}(\xi) = [\tilde{\Sigma}^1(\varphi)].$$

Remarque. — Les groupes de cobordisme normal ne se laissent pas calculer facilement. Si on « oublie » le fibré ξ , $\sigma_{n-k+1}(\xi)$ détermine une classe de cobordisme non-orienté de X , associée aux opérations de Steenrod [1]; bien entendu, l'obstruction de Dax perd alors son caractère « complet ».

2. OBSTRUCTION D'E. MILLER. — Supposons que X possède un champ tangent $\mathcal{X}$ de $(k-1)$ repères. E. Miller associe à $\mathcal{X}$ un élément du groupe d'homotopie stable π_{k-1}^s , qui est nul si $\mathcal{X}$ se prolonge à un champ de k -repères [4]. A la lumière de ce qui précède, on peut définir cet élément $\Delta(\mathcal{X})$ de la manière suivante. Considérons un fibré ξ quelconque sur X , possédant un champ $\mathcal{X}$ de $(k-1)$ -repères. On a alors un morphisme injectif, noté encore $\mathcal{X} : \varepsilon^{k-1} \hookrightarrow \xi$. Choisissons un prolongement générique de $\mathcal{X}$, $\varphi : \varepsilon^k \rightarrow \xi$. Alors $\Sigma^1(\varphi)$ est une sous-variété fermée de X , et son fibré normal est stablement isomorphe à ξ , où :

$$\Sigma^1(\varphi) = \{x \in X \mid \dim \ker \varphi_x = 1\}.$$

On peut alors considérer sa classe de cobordisme :

$$\tilde{\Delta}(\mathcal{X}) = [\Sigma^1(\varphi)] \in \Omega^{n-k+1}(X; \xi),$$

qui ne dépend pas du prolongement générique φ choisi. Si $\xi = TX$, on a :

$$\Omega^{n-k+1}(X; \xi) \simeq \Omega_{k-1}^{fr}(X) \xrightarrow{\theta} \Omega_{k-1}^{fr} \simeq \pi_{k-1}^s,$$

où $\Omega_*^{fr}(\quad)$ est le bordisme de variétés stablement parallélisées et θ l'« oubli ».

DÉFINITION. — $\theta(\tilde{\Delta}(\mathcal{X})) = \Delta(\mathcal{X})$, obstruction d'E. Miller.

Rapport avec l'obstruction de Dax. — On a une suite exacte et un isomorphisme de Thom, Φ :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{n+l}(\mathbb{P}^{k+l-1} \times X, \mathbb{P}^{k+l-2} \times X; \lambda_{k+l-1} \otimes \xi^{n+l}) & & \\ \uparrow \Phi & & \\ \Omega^{n-k+1}(X; \xi) & & \\ \xrightarrow{j^*} \Omega^{n+l}(\mathbb{P}^{k+l-1} \times X; \lambda_{k+l-1} \otimes \xi^{n+l}) & \xrightarrow{i^*} & \Omega^{n+l}(\mathbb{P}^{k+l-2} \times X; \lambda_{k+l-2} \otimes \xi^{n+l}). \end{array}$$

PROPOSITION 1. — $j^* \Phi(\tilde{\Delta}(\mathcal{X})) = \sigma_{n-k+1}(\xi)$.

3. INDICE D'UN CHAMP DE k -REPÈRES A SINGULARITÉS ISOLÉES. — S'il existe dans ξ un champ de k -repères à singularités isolées, on peut lui associer son indice; c'est un élément de $\pi_{m-1}(V_k(\mathbb{R}^n))$ (voir [6], par exemple).

Rapport avec l'obstruction d'E. Miller. — Dans le cas où ξ est le fibré tangent à X , supposons qu'il existe sur X un champ singulier de k -repères tangents $(\mathcal{X}, Y)$, tel que :

- $\mathcal{X}$ est un champ de $(k-1)$ -repères tangents sans singularités;
- les singularités de $(\mathcal{X}, Y)$ sont isolées.

Considérons alors la suite exacte d'homotopie de la fibration :

$$S^{n-k} \xrightarrow{i} V_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{p} V_{k-1}(\mathbb{R}^n)$$

et supposons la dimension n de X assez grande pour que $\pi_{n-1}(S^{n-k}) \simeq \pi_{k-1}^s$. On peut alors considérer que $\Delta(\mathcal{X}) \in \pi_{n-1}(S^{n-k})$.

PROPOSITION 3. — $i_*(\Delta(\mathcal{X})) = \text{ind}(\mathcal{X}, Y)$, où ind désigne l'indice.

Démonstration. — Si $k \geq 2$, le morphisme $\psi : \varepsilon^k \rightarrow TX$ induit par $(\mathcal{X}, Y)$ n'est pas générique puisque ses singularités sont isolées. En fait, il existe un morphisme générique dont les composantes de l'ensemble singulier sont concentrées près des points singuliers de ψ . Plus précisément, soit S l'ensemble des points singuliers de $(\mathcal{X}, Y)$, et, pour tout élément x de S , soient B_x^n une boule fermée voisinage de x , et S_x^{n-1} une sphère centrée en x , tels que :

- $x, y \in S, x \neq y \Rightarrow B_x^n \cap B_y^n = \emptyset$;
- $S_x^{n-1} \subset \overset{\circ}{B}_x^n$.

La restriction $TX|_{B_x^n}$ est triviale, appelons $\mathbb{R}^{n-k+1}$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ supplémentaire de celui engendré par $\mathcal{X}$ sur B_x^n , et considérons la composition $\tilde{Y}$:

$$S_x^{n-1} \xrightarrow{\tilde{Y}} \mathbb{R}^{n-k+1} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}^{n-k+1} \rightarrow S^{n-k},$$

où la deuxième application est la rétraction. On peut supposer que $\tilde{Y}$ est différentiable, soit y_x une valeur régulière de $\tilde{Y}$ dans S^{n-k} . Avec ces notations, on a le lemme suivant :

LEMME TECHNIQUE. — Il existe un morphisme générique $\varphi : \varepsilon^k \rightarrow TX$ tel que :

- (i) $\sigma|_{\varepsilon^{k-1}}$ est induit par $\mathcal{X}$, où $\varepsilon^{k-1} = X \times (\mathbb{R}^{k-1} \times 0) \subset X \times \mathbb{R}^k = \varepsilon^k$;
- (ii) $\varphi|_{\overset{\circ}{B}_x^n \cup B_x^n}$ est induit par $(\mathcal{X}, Y)$;
- (iii) $\Sigma^1(\varphi) \cap B_x^n = \tilde{Y}^{-1}(y_x) \subset S_x^{n-1}$.

La proposition en découle : $\Delta(\mathcal{X}) = [\Sigma^1(\varphi)]$ grâce à (i), $\Sigma^1(\varphi) \subset \bigcup_{x \in S} B_x^n$ par (ii). Si on note $[Y]_x$ la classe d'homotopie de $\tilde{Y} : S_x^{n-1} \rightarrow S^{n-k}$, on a, dans Ω_{k-1}^{fr} :

$$\sum_{x \in S} [\tilde{Y}^{-1}(y_x)] = \sum_{x \in S} [\Sigma^1(\varphi) \cap B_x^n] = [\Sigma^1(\varphi)] = \Delta(\mathcal{X}),$$

et, par l'isomorphisme $\Omega_{k-1}^{fr} \simeq \pi_{n-1}(S^{n-k})$, $\sum_{x \in S} [\tilde{Y}^{-1}(y_x)]$ correspond à $\sum_{x \in S} [Y]_x$; comme $\mathcal{X}$ est non singulier, $\text{ind}(\mathcal{X}, Y) = i_* \left(\sum_{x \in S} [Y]_x \right)$, ce qui finit la démonstration.

4. APPLICATIONS AU CALCUL DE $\Delta(\mathcal{X})$ ($k=2$). — Notons d'abord ce qui n'est qu'une reformulation du théorème de Hopf :

PROPOSITION 4. — Si $k=1$, $\Delta(\mathcal{X}) \in \pi_0^s = \mathbb{Z}$, $\Delta(\mathcal{X}) = \chi(X)$, la caractéristique d'Euler de χ . (C'est le cas où $\Delta(\mathcal{X})$ est la singularité d'un morphisme $\varepsilon^1 \rightarrow TX$.)

Mais le proposition 3, jointe aux théorèmes (profonds) énoncés dans [6], permet aussi de démontrer le théorème suivant, ce qui répond à une question posée par Larry Smith :

Supposons que X soit orientable de dimension $n \geq 5$; si $\chi(X) = 0$, alors X a un champ tangent de vecteurs $\mathcal{X}$; on peut définir $\Delta(\mathcal{X}) \in \pi_1^s \simeq \mathbb{Z}/2$.

THÉORÈME. — Sous ces hypothèses :

- si $n \equiv 0 \pmod{4}$, $\Delta(\mathcal{X}) = 1/2 \sigma(X) \pmod{2}$;
- si $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$, $\Delta(\mathcal{X}) = 0$;
- si $n \equiv 1 \pmod{4}$ et si $w^{n-1}(X) = 0$, $\Delta(\mathcal{X}) = \chi_{1/2}(X)$, où $\chi_{1/2}(X) = \sum \dim H^{2i}(X; \mathbb{R})$ est la semi-caractéristique de Kervaire, et $\sigma(X)$ est la signature de X .

-
- [1] M. AUDIN, *Comptes rendus*, 291, série B, 1980, p. 307.
 - [2] J. P. DAX, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 5, 1972, p. 303-377.
 - [3] J. P. DAX, *Comptes rendus*, 279, série B, 1974, p. 545.
 - [4] E. MILLER, définition communiquée par Larry Smith.
 - [5] H. A. SALOMONSEN, *Math. Scand.*, 32, 1973, p. 87-111.
 - [6] E. THOMAS, *Bull. A.M.S.*, 75, 1969, p. 643-683.

Université de Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex.