

Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1986-11-28.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

TOPOLOGIE. — *Une obstruction topologique à l'existence de plongements lagrangiens.*
Note de Michèle Audin, présentée par Henri Cartan.

Sous certaines hypothèses, je montre que toutes les immersions lagrangiennes d'une variété de dimension n dans $\mathbf{R}^{2n}$ sont dans la même classe d'homotopie régulière (parmi les immersions ordinaires). Un calcul de points doubles permet ensuite de décider si cette classe contient ou non un plongement, à l'aide d'invariants classiques de la variété.

TOPOLOGY. — A topological obstruction to the existence of Lagrange imbeddings.

Under certain assumptions, I show that all Lagrange immersions of an n -dimensional manifold into $\mathbf{R}^{2n}$ lie in the same regular homotopy class (among ordinary immersions). A computation of double points allows then to decide whether that class contains an imbedding, in terms of classical invariants of the manifold.

Je vais montrer que, sous certaines hypothèses, toutes les immersions lagrangiennes d'une variété donnée V dans $\mathbf{R}^{2n}$ sont régulièrement homotopes parmi les immersions ordinaires. Je calculerai ensuite le « nombre de points doubles » au sens de Whitney [14] de ces immersions en fonction d'invariants classiques de la variété V . De toute évidence, ces nombres seront des obstructions à l'existence de plongements lagrangiens de V dans $\mathbf{R}^{2n}$.

Quand la dimension n de V est paire, et V orientable, les résultats sont classiques et d'ailleurs très faciles à démontrer. Quand la variété est la sphère S^n , ils sont tous implicitement ou explicitement dans [8]. A ma connaissance, cet article de Kawashima est le seul ayant abordé ce type de questions, bien que les questions d'existence de plongements lagrangiens soient très à la mode depuis quelques années.

A titre de motivation, rappelons que Gromov a démontré [6] (conjecture d'Arnold [3]) que, si V possède un plongement lagrangien, alors $H^1(V; \mathbf{R}) \neq 0$. D'autre part, Kawashima a construit des plongements lagrangiens de toutes les variétés de la forme $S^1 \times W$, où W est n'importe quelle variété stablement parallélisable. Non seulement ces variétés vérifient la condition sur le H^1 , mais en plus elles sont parallélisables. Je montrerai que cette dernière propriété est nécessaire.

D'autre part, Givental [5] vient de construire des exemples de plongements lagrangiens un peu inattendus : il s'agit de plongements des surfaces non orientables dont la caractéristique d'Euler est divisible par quatre (à ma connaissance, ce sont les seuls exemples connus où la caractéristique d'Euler n'est pas nulle — c'est cela qui est inattendu), et il demande si la condition est nécessaire. Le calcul de points doubles dira que oui [c'est d'ailleurs aussi un corollaire d'un théorème de Whitney ([13] et [11])].

Les méthodes que je vais utiliser sont, dans un sens, très grossières, puisque je n'utiliserai pas vraiment le caractère lagrangien des immersions considérées : je retiendrai seulement que, si f est lagrangienne, alors son fibré normal est isomorphe au fibré tangent de la variété. Pourtant, dans le cas des surfaces, les exemples de Givental montrent que le résultat est le meilleur possible. Le lecteur de [8] verra par contre que le théorème 1 ci-dessous est vrai pour la sphère S^7 , alors que je ne peux pas l'obtenir par ces méthodes (par contre, il est grossièrement faux pour les dimensions 1 et 3).

THÉORÈME 1. — *Soit V une variété compacte sans bord, connexe, de dimension $n \neq 1, 3$ et 7. Si $n+1$ est une puissance de 2, on suppose en plus que V est stablement parallélisable. Alors, il existe au plus une classe d'homotopie régulière d'immersions de V dans $\mathbf{R}^{2n}$ qui contient des immersions lagrangiennes.*

Si $f: V^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est une immersion, $d(f)$ désigne son « nombre de points doubles »; on a $d(f) \in \mathbb{Z}$ si n est pair et V orientable, et $d(f) \in \mathbb{Z}/2$ dans tous les autres cas.

THÉORÈME 2. — Soit V une variété compacte sans bord, connexe, de dimension $n \neq 1, 3$ et 7 , et soit $f: V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ une immersion lagrangienne.

(a) Si n est pair et V orientable,

$$d(f) = (-1)^{\varepsilon(n)} \frac{1}{2} \chi(V) \in \mathbb{Z} \quad \text{où } \varepsilon(n) = 1 + n/2.$$

(b) Si n est pair et V non orientable,

$$d(f) = \frac{1}{2} \chi(V) \pmod{2} \in \mathbb{Z}/2.$$

(c) Si $n \equiv 1 \pmod{4}$ et V orientable, ou si n est impair (quelconque) et V stablement parallélisable,

$$d(f) = \hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V) \in \mathbb{Z}/2.$$

Ici, $\chi(V) \in \mathbb{Z}$ est la caractéristique d'Euler (elle est paire quand V possède des immersions lagrangiennes), et $\hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V)$ est la semi-caractéristique de Kervaire à coefficients $\mathbb{Z}/2$, c'est-à-dire, si $n = 2r + 1$:

$$\hat{\chi}_{\mathbb{Z}/2}(V) = \sum_{i=0}^r \dim H^i(V; \mathbb{Z}/2) \pmod{2}.$$

COROLLAIRE 1. — Pour qu'une variété stablement parallélisable possède un plongement lagrangien dans $\mathbb{R}^{2n}$, il est nécessaire qu'elle soit parallélisable.

COROLLAIRE 2. — Pour qu'une variété non orientable de dimension paire possède un plongement lagrangien, il est nécessaire que sa caractéristique d'Euler soit divisible par quatre.

Le cas des sphères suffit à se convaincre que la condition donnée par le corollaire 1 n'est pas suffisante! Voici un autre exemple : d'après le théorème 2 c), toutes les immersions lagrangiennes génériques de $SU(3)/SO(3)$ dans $\mathbb{R}^{10}$ ont un nombre pair de points doubles et sont régulièrement homotopes (parmi les immersions ordinaires) à un plongement. Bien entendu, comme $SU(3)/SO(3)$ est simplement connexe, cette variété ne possède pas de plongement lagrangien.

A titre d'exemple significatif, voici les démonstrations pour les variétés stablement parallélisables de dimension n impaire ($n \neq 1, 3$ et 7).

On considère une immersion f de la forme

$$f: V^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

où g est une immersion. Il est classique (voir par exemple [9]) que le nombre de points doubles d'une approximation générique de f est l'invariant de Hopf de la parallélisation stable de V définie par g (modulo 2). D'après Adams [1], ce nombre est donc pair. Suivant Whitney [14], il n'est pas difficile de construire une immersion f' de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui a un point double de plus, en particulier un nombre impair de points doubles. Les deux classes

d'homotopie régulière d'immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ sont donc :

(a) celle contenant f , elle contient toutes les immersions dont le fibré normal est trivialisable;

(b) celle contenant f' , dont le fibré normal n'est pas trivialisable (il va sans dire que, si $n=1, 3$ ou 7 , ce résultat est faux).

Maintenant, les immersions lagrangiennes de V sont dans la classe (a) quand V est parallélisable, dans la classe (b) sinon. On en déduit le théorème 1 et le corollaire 1, aussi le théorème 2 grâce à [4].

L'idée de la démonstration dans le cas général (toujours quand n est impair) est analogue :

1. Sous les hypothèses du théorème 1, on montre que deux immersions de V dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui ne sont pas régulièrement homotopes ont des fibrés normaux qui ne sont pas isomorphes. Ce résultat ne peut pas être une trivialité, et n'est pas donné par la classification des immersions : il est faux par exemple pour les espaces projectifs réels $\mathbb{P}^n$ quand $n+1$ est une puissance de 2 (et malheureusement, aussi pour des variétés qui possèdent des immersions lagrangiennes). Pour le démontrer, on utilise un résultat de James et Thomas [7].

On en déduit le théorème 1 : parmi ces fibrés, au plus un est isomorphe au fibré tangent à V .

2. Maintenant, on a deux fibrés de rang n sur V , qui sont stablement isomorphes au fibré normal absolu de V , et qui ne sont pas isomorphes, d'une part; et d'autre part une classe d'immersions avec $d(f)=0$ et une autre avec $d(f)=1$. Il reste à distinguer les deux fibrés l'un de l'autre, en disant lequel correspond à quel nombre $d(f)$.

L'idée est de distinguer les deux fibrés par le nombre de sections indépendantes qu'ils possèdent : on montre que l'un correspond à des immersions (*) $V^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-2} \subset \mathbb{R}^{2n}$ (je suppose $n \equiv 1 \pmod{4}$) et l'autre pas (ce qui est analogue à l'étude faite dans le cas stablement parallélisable), en calculant le nombre de points doubles des immersions de la forme (*) et en vérifiant qu'il ne dépend que de V .

On conclut en comptant le nombre de sections indépendantes du fibré tangent à V et en utilisant [2].

Dans le cas des variétés non orientables de dimension paire, la démonstration du théorème 2 consiste à montrer une généralisation aux immersions d'un théorème de Mahowald sur les plongements. C'est un calcul de carré de Pontrjagyn que Jean Lannes avait donné dans un cours Peccot en 1978 (voir aussi [10]). Dans le cas des immersions lagrangiennes, ce calcul donne la formule (2b). Les méthodes conduisant au calcul des points doubles de (*) viennent aussi de ce cours et de la thèse de Vogel [12]. Je remercie vivement Jean Lannes de m'avoir expliqué comment on finissait les calculs; sans lui, je n'aurais pu achever la démonstration du théorème 2.

Reçue le 27 octobre 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. F. ADAMS, On the non existence of elements of Hopf invariant one, *Ann. Math.*, 72, 1960, p. 20-104.
- [2] M. F. ATIYAH et J. L. DUPONT, Vector fields with finite singularities, *Acta Math.*, 128, 1972, p. 1-40.
- [3] V. I. ARNOLD, Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique, *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 3719-3722.
- [4] G. E. BREDON et A. KOSINSKI, Vector fields on π -manifolds, *Ann. Math.*, 84, 1966, p. 85-90.

- [5] A. B. GIVENTAL, Plongements lagrangiens de surfaces et parapluies ouverts de Whitney, *Funk. Anal. evo Priloj.*, 20, n° 3, 1986, p. 35-41.
- [6] M. GROMOV, Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.*, 82, 1985, p. 307-347.
- [7] I. JAMES et E. THOMAS, An approach to the enumeration problem for non stable vector bundles, *J. Math. Mech.*, 14, 1965, p. 485-506.
- [8] T. KAWASHIMA, Some remarks on Lagrangian imbeddings, *J. Math. Soc. Japan*, 33, 1985, p. 281-294.
- [9] U. KOSCHORKE et B. SANDERSON, Geometric interpretation of the generalized Hopf invariant, *Math. Scand.*, 4, 1977, p. 199-217.
- [10] J. LANNES, Sur les immersions de Boy, *Algebraic Topology Aarhus*, 1982, Madsen et Oliver, *Lecture notes in Mathematics*, n° 1051, Springer.
- [11] W. S. MASSEV, Pontrjagyn squares in the Thom space of a bundle, *Pacific J. of Math.*, 3, 1965, p. 133-142.
- [12] P. VOGEL, Cobordismes d'immersions, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 7, 1974, p. 317-358.
- [13] H. WHITNEY, *On the topology of differentiable manifolds*, *Lectures in topology*, Mich. Univ. Press, 1940.
- [14] H. WHITNEY, The self intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space, *Ann. Math.*, 45, 1944, p. 220-246.

Université de Paris-Sud, Mathématique, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex.