

# Structure de contact sur certains espaces de courbes hyperelliptiques et variables d'action pour les géodésiques de l'ellipsoïde

Michèle AUDIN

Institut de recherche mathématique avancée, université Louis-Pasteur et CNRS, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France  
Courriel : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr  
Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>  
(Reçu le 5 février 1998, accepté le 9 février 1998)

---

**Résumé.** On construit une structure de contact sur un espace de Hurwitz de courbes hyperelliptiques de genre  $n$ . Elle est définie à l'aide d'une famille de formes méromorphes qui permet aussi de construire des coordonnées d'action pour le système des géodésiques de l'ellipsoïde. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris.

## *Contact structure on certain spaces of hyperelliptic curves and action coordinates for the geodesics on the ellipsoid*

**Abstract.** A contact structure on a Hurwitz space of genus  $n$  hyperelliptic curves is constructed. It is defined with the help of a family of meromorphic forms that may also be used to construct action coordinates for the "geodesics on the ellipsoid" system. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris.

---

## *Abridged English Version*

In this Note, we consider various versions of the Hurwitz space  $\mathcal{H}_{n;1}$  of isomorphism classes of data  $(C, z, p)$ , where  $C$  is a smooth compact complex curve of genus  $n$ ,  $z$  is a degree 2 meromorphic function on  $C$ , and  $p$  is a point in  $C$  such that the pole divisor of  $z$  is  $2p$ .

Notice that  $z$  has  $2n + 1$  branch points in  $C$ . In the version denoted  $\mathcal{H}_{n;1}$ , they are partitioned in two subsets of cardinality  $n$ ,  $n + 1$ , respectively. In the version denoted  $\hat{\mathcal{H}}_{n;1}$ , the points of the second subset are ordered. If  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$  are distinct points in  $C$ , we will also consider the subset  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$  of  $\hat{\mathcal{H}}_{n;1}$  consisting of the elements for which the second subset is  $\alpha$ .

---

Note présentée par Charles-Michel MARLE.

To give the class  $(C, z, p)$  is equivalent to giving an equation of  $C$  of the form:

$$h^2 = -\frac{Q(z)}{R(z)},$$

where  $R$  is a degree  $n + 1$  polynomial ( $R = \prod(\alpha_i - z)$  in  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$ ) and  $Q$  a degree  $n$  polynomial (the  $n$  roots  $(x_1, \dots, x_n)$  of  $Q$  define a set of local coordinates on  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$ ).

The main tool in this work is the meromorphic form  $\sigma = h dz$  whose derivatives with respect to the moduli  $(x_1, \dots, x_n)$  generate the space of holomorphic 1-forms on  $C$  (Proposition 1.1). It allows first to define a 1-form  $\Omega_\sigma$  on  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$  (Formula 2). It turns out that  $\Omega_\sigma$  is a contact form and that the foliation of  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$  by the various  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$  is a Legendrian one (Proposition 2.1).

The curves in the family  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$  are precisely those appearing in the integration of the (completely integrable) system called “geodesics on the ellipsoid”. The differential system giving the geodesics of the quadric  $Q_z$  (Equation 3) has been put in Lax form by Moser [12], namely:

$$\frac{d}{dt} A_h = [A_h, B_h], \quad (1)$$

where  $A_h$  and  $B_h$  are  $n + 1$  by  $n + 1$  matrices whose entries are functions on the phase space  $TS^n$  of the system and  $h$  is an indeterminate. The eigenvalues of the matrices  $A_h$  define curves  $C$  of the family  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$  and their eigenvectors allow, for instance, to describe the Liouville tori (see [1]).

It is shown here that the “eigenvector mapping” defines a map  $\varphi$  from an open dense subspace of the phase space  $TS^n$  to the family of symmetric products of spectral curves:

$$\varphi : (TS^n)_0 \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{C},$$

that pulls the “algebraic” form  $\sigma$  back to the Liouville form of the phase space of this integrable system (Theorem 3.1).

The curves  $C$  obtained in the actual (real) integrable system are real curves whose real part has  $n + 1$  components  $C_0, \dots, C_n$  and, together with the real algebro-geometric study made in [1], this allows to show that the integration of the algebraic form  $\sigma$ :

$$C \longmapsto \left( \int_{[C_1]} \sigma, \dots, \int_{[C_n]} \sigma \right),$$

define action coordinates for this system (Theorem 3.2).

The levels  $\mathcal{T}_C$  carry an affine structure (as unions of Liouville tori). The eigenvector mapping relates it to the canonical affine structure of the Jacobian of  $C$ . Theorem 3.2 can be understood as the description (via the eigenvector mapping again) of the affine structure *transversal* to the foliation of the phase space  $TS^n$  by the levels  $\mathcal{T}_C$ , related now with an affine structure on  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$ .

Several affine structures on this Hurwitz space appear here. Recall also from [4] that, on the tangent sheaf to  $\mathcal{H}_{n;1}$ , there is a ring structure (described, in a coordinate free way, in Proposition 4.1). This is part of the Frobenius manifold structure on  $\mathcal{H}_{n;1}$  discovered by Dubrovin. Although this defines a ring structure also on the tangent sheaf to the subspace  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha \subset \tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$ , and although the construction of the form  $\Omega_\sigma$  is very similar to the constructions of Dubrovin, the relations between this structure and the affine structures considered here are not clear yet.

## 1. Espaces de Hurwitz

On considère ici l'espace  $\mathcal{H}_{n;1}$  des classes d'isomorphisme des données  $(C, z, p)$ , où  $C$  est une surface de Riemann compacte de genre  $n$ ,  $z$  une fonction de degré 2 sur  $C$  et  $p$  un point de  $C$  qui est un (le) pôle double de  $z$ . C'est un *espace de Hurwitz* au sens de [7] (voir aussi [6] et [4]). On utilisera les variantes suivantes de l'espace  $\mathcal{H}_{n;1}$  :

- l'espace de Hurwitz  $\mathcal{H}_{n;1}$  a un revêtement  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$  de degré  $C_{2n+1}^n$  : la fonction  $z$  a  $2n+1$  points de ramification distincts à distance finie, on les partage en deux paquets de  $n$  et  $n+1$  points respectivement. De même, il a un revêtement  $\hat{\mathcal{H}}_{n;1}$  de degré  $(n+1)!C_{2n+1}^n$  : les  $n+1$  éléments du deuxième paquet sont ordonnés ;
- l'espace  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$  « à  $\alpha$  fixé ». On appelle  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$  le sous-espace de ce revêtement dans lequel on impose que les  $n+1$  éléments de ce deuxième paquet soient, dans l'ordre,  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ .

Avoir partagé les points de ramification en deux paquets permet de décrire uniquement tout élément de  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$  par une équation de la forme :

$$h^2 = -\frac{Q(z)}{R(z)},$$

où  $R$  est un polynôme de degré  $n+1$ ,  $Q$  un polynôme de degré  $n$ . Les éléments de  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$  correspondent à  $R(z) = \prod_{i=1}^{n+1} (\alpha_i - z)$ . Les racines  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $Q$  peuvent servir de coordonnées locales sur  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$ . Sur  $\mathcal{H}_{n;1}$ , on a un fibré  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}_{n;1}$  dont la fibre en  $(C, z, p)$  est la courbe  $C$  elle-même, on considère aussi les fibrés induits sur  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$ ,  $\hat{\mathcal{H}}_{n;1}$  et  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$ .

L'expression  $\sigma = h dz$  définit une forme méromorphe sur chaque courbe  $C$  (avec un pôle double en  $\infty$ ) qui est l'outil principal de ce travail. On vérifie facilement :

PROPOSITION 1.1. – *Les formes obtenues en dérivant  $\sigma$  par rapport aux coordonnées*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

*forment une base de l'espace  $H^0(\Omega_C^1)$  des formes holomorphes sur  $C$ .*

## 2. La forme de contact

La forme  $\sigma$  permet de construire une 1-forme  $\Omega_\sigma$  sur le revêtement  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$  analogue aux formes que construit Dubrovin au chapitre 5 de [4] : si  $P_1, \dots, P_{2n+1}$  sont les points de ramification de  $z$  à distance finie et  $(u_1, \dots, u_n)$  leurs images par  $z$ , on pose :

$$\Omega_\sigma = \sum_k \left( \text{Rés}_{P_k} \frac{\sigma^2}{dz} \right) du_k. \quad (2)$$

PROPOSITION 2.1. – *La forme  $\Omega_\sigma$  est une forme de contact sur  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$  et le feuilletage de  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1}$  par les  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$  est legendrien.*

*Résumé de la démonstration.* – Ici  $\sigma^2/dz = h^2 dz$  et  $\text{Rés}_{(0, z_i)}(h^2 dz) = 0$ ,  $\text{Rés}_{(0, \alpha_j)}(h^2 dz) = F_j$ , avec

$$F_j = \text{Rés}_{\alpha_j} \left\{ (-1)^n \frac{\prod_{i=1}^n (z - x_i)}{\prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_j - z)} dz \right\},$$

M. Audin

qui est bien définie sur  $\tilde{\mathcal{H}}_{n;1} : x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  sont distincts. Ainsi,

$$\Omega_\sigma = \sum_{j=1}^{n+1} F_j d\alpha_j.$$

On envoie  $\hat{\mathcal{H}}_{n;1}$  dans  $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$  par :

$$(\{x_1, \dots, x_n\}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \longmapsto (F_1, \dots, F_{n+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}),$$

on vérifie que la forme  $\varpi = \sum F_j d\alpha_j$  est une forme de contact sur l'hypersurface  $\sum F_j = 1$  de  $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$  et que

$$\{x_1, \dots, x_n\} \longmapsto (F_1, \dots, F_{n+1})$$

est, pour tout  $\alpha$ , un difféomorphisme local de l'ensemble des familles de  $n$  nombres complexes distincts et distincts des  $\alpha_j$  dans l'hypersurface  $\sum F_j = 1$ .

### 3. Variables d'action

Dans le problème dit des « géodésiques de l'ellipsoïde », on considère les géodésiques de la famille de quadriques homofocales :

$$Q_z : \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{\alpha_i - z} = 1, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbf{R}, \quad \alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1}. \quad (3)$$

L'espace de phases est l'espace des droites affines orientées de  $\mathbf{R}^{n+1}$ . On l'identifie à

$$TS^n = \{(p, u) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1 \text{ et } p \cdot u = 0\}$$

$((p, u)$  représente la droite des  $u + tp$ , orientée par  $p$ ). Il est ainsi muni d'une forme de Liouville

$$\lambda = \sum u_j dp_j$$

et d'une forme symplectique  $\omega = d\lambda$ . Le système différentiel est complètement intégrable (voir [9]), il a été mis sous forme de Lax (équation 1) par Moser [12]. La courbe (spectrale) d'équation  $\det(A_h + h^2 z \text{Id}) = 0$  est une courbe  $C$  de la famille  $\mathcal{H}_{n;1}^\alpha$ . Elle ne dépend que du niveau commun des intégrales premières du système dans lequel se trouve le point  $(p, u)$  définissant  $A_h$ . Appelons  $\mathcal{T}_C$  ce niveau. Ses composantes connexes sont les « tores de Liouville ».

Les vecteurs propres des matrices  $A_h$  permettent de décrire la topologie des niveaux  $\mathcal{T}_C$  (et les tores de Liouville) (voir [1] et plus généralement [2]). Appelons  $(TS^n)_0$  l'ouvert dense de  $TS^n$  formé des points  $(p, u)$  tels que la courbe  $C$  soit lisse. En associant à  $(p, u)$  les pôles d'un vecteur propre de  $A_h$  pour la valeur propre  $-h^2 z$ , on définit une application

$$\varphi : (TS^n)_0 \longrightarrow S^n \mathcal{C},$$

où  $S^n \mathcal{C}$  désigne le produit symétrique

$$S^n \mathcal{C} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{n;1} \text{ ou } \hat{\mathcal{H}}_{n;1},$$

sur lequel est définie la forme

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n h_i dz_i.$$

**THÉOREME 3.1.** – *Les vecteurs propres des matrices de Lax de Moser définissent une application*

$$\varphi : (TS^n)_0 \longrightarrow S^n \mathcal{C}$$

qui vérifie  $\varphi^* \sigma_n = -2\lambda$ .

La démonstration de ce théorème est un calcul élémentaire mais un peu long.

On utilise ensuite pleinement la géométrie *réelle* du problème. Appelons  $\mathcal{H}^0$  l'ouvert de la partie réelle de  $\mathcal{H}_{n,1}^\alpha$  formé des courbes  $C$  définis par des  $x_i$  qui :

- sont réels,
- sont disposés par rapport aux  $\alpha_i$  de façon que la partie réelle de  $C$  ait  $n + 1$  composantes connexes  $C_0, \dots, C_n$ .

Ce sont les courbes qui sont effectivement atteintes par l'application  $(p, u) \mapsto C$  (voir [10], [1]).

**THÉOREME 3.2.** – *Les fonctions définies sur l'espace  $\mathcal{H}^0$  par :*

$$C \longmapsto \left( \int_{[C_1]} \sigma, \dots, \int_{[C_n]} \sigma \right),$$

définissent, par composition avec l'application

$$(TS^n)_0 \longrightarrow \mathcal{H}^0,$$

des variables d'action au voisinage de chaque composante connexe de  $\mathcal{T}_C$ .

**Remarque 3.3.** – Il est classique (voir [5], [11], [3]) que les formes vérifiant la propriété 1.1 sont liées aux variables d'action des systèmes intégrables. Ici l'originalité est dans l'utilisation de l'application de vecteurs propres  $\varphi$ .

#### 4. Structures supplémentaires

La structure de contact pour laquelle  $\mathcal{H}_{n,1}^\alpha$  est legendrienne ainsi que les coordonnées  $(t_1, \dots, t_n)$  définies en intégrant la forme  $\sigma$  comme dans le théorème 3.2 définissent deux structures affines sur  $\mathcal{H}_{n,1}^\alpha$ . La seconde est la structure affine transverse aux feuilles du système intégrable. Il est à noter que les deux structures ne coïncident pas.

Il y a d'autre part sur  $\mathcal{H}_{n,1}$  et ses revêtements une structure très riche, celle de variété de Frobenius (voir [4]). Cette structure consiste en une structure affine accompagnée d'une structure d'anneau sur le faisceau des champs de vecteurs, avec des conditions de compatibilité compliquées (voir aussi [8]). Rappelons que Dubrovin définit des produits sur les espaces tangents aux espaces de Hurwitz à l'aide des coordonnées locales définies par les points de ramification de  $z$ . Donnons ici une description un peu plus intrinsèque dans le cas des espaces de courbes hyperelliptiques.

On décrit les éléments de  $\mathcal{H}_{n,1}$  par des équations  $y^2 = P(z)$ , où  $P$  est un polynôme unitaire de degré  $2n + 1$ . On identifie ainsi l'espace tangent à  $\mathcal{H}_{n,1}$  en la courbe définie par  $P$  à l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $2n$ . Comme les racines de  $P$  sont supposées distinctes,  $P$  et  $P'$  sont premiers entre eux. Il existe donc deux polynômes  $U$  et  $V$  avec

$$-P'U + PV = 1, \quad \deg U < 2n + 1, \quad \deg V < 2n,$$

et l'on définit la multiplication sur l'espace tangent en  $P$  par :

$\alpha \star_P \beta$  est le reste de  $\alpha\beta U$  dans la division euclidienne par  $P$ .

PROPOSITION 4.1. – *La loi  $\star_P$  définit une structure d'anneau commutatif unitaire sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $2n$ , l'unité étant le polynôme  $-P'$ . De plus, les valeurs critiques  $u_1, \dots, u_{2n+1}$  de la fonction  $z$  dans  $\mathbb{C}$  sont les coordonnées canoniques au sens où*

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \star \frac{\partial}{\partial u_\ell} = \delta_{k,\ell} \frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Pour conclure, remarquons que cette structure d'anneau définit aussi bien une structure d'anneau sur le faisceau tangent au sous-espace  $\mathcal{H}_{n,1}^\alpha$ , d'autre part, dans la construction de structures de Frobenius, les formes  $\Omega_\varphi$  construites comme notre  $\Omega_\sigma$  à l'aide de familles de formes méromorphes  $\varphi$  sur les courbes  $C$  jouent un rôle très important. Notre  $\Omega_\sigma$  ne permet pas de construire une telle structure (parce que  $\sigma$  s'annule en certains points de ramification de  $z$ )... mais tout ceci cache certainement une structure plus riche, sur laquelle j'espère revenir ultérieurement.

### Références bibliographiques

- [1] Audin M., Courbes algébriques et systèmes intégrables: géodésiques des quadriques, *Expositiones Math.* 12 (1994) 193–226.
- [2] Audin M., *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996.
- [3] Babelon O., Talon M., The symplectic structure of the spin Calogero model, preprint, 1997.
- [4] Dubrovin B., *Geometry of 2d topological field theories*, Lecture Notes in Math. 1620, Springer-Verlag, 1995.
- [5] Dubrovin B., Krichever I., Novikov S., *Integrable systems I, Dynamical systems IV*, *Encyclopædia of Math. Sci.*, Springer, 1985.
- [6] Emsalem M., Familles de revêtements de la droite projective, *Bull. Soc. Math. France* 123 (1996) 47–85.
- [7] Fulton W., Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, *Ann. Math.* 90 (1969) 542–575.
- [8] Hitchin N., *Lectures on Frobenius manifolds*, Séminaire de Mathématiques Supérieures de Montréal, Kluwer, 1997.
- [9] Jacobi C., *Vorlesungen über Dynamik, Gesammelte Werke, Supplementband*, Berlin, 1884.
- [10] Knörrer H., Geodesics on the ellipsoid, *Invent. Math.* 39 (1980) 119–143.
- [11] Krichever I.M., Phong D.H., *Symplectic forms in the theory of solitons*, preprint, 1997.
- [12] Moser J., *Geometry of quadrics and spectral theory*, The Chern Symposium, Springer, 1980, pp. 147–188.