

Michèle AUDIN

*Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex*

LA théorie des variétés de dimension 4 est en pleine effervescence : la démonstration de théorèmes difficiles des années quatre-vingt se trouve très simplifiée par une idée lancée par Seiberg et Witten durant l'été 1994 qui permet naturellement aussi de démontrer de nouveaux théorèmes.

Je vais en particulier rapporter quelques résultats annoncés par Taubes et qui montrent que l'idée de Seiberg et Witten est bien plus qu'une astuce visant à simplifier la vie des géomètres de la dimension 4.

Je vais essayer de brosser à chaud pour les lecteurs (supposés génériquement non-spécialistes) de la Gazette un tableau de la situation aujourd'hui¹. Veuillez considérer ces quelques pages plus comme un reportage que comme un article de mathématiques : l'idée est féconde et beaucoup de mathématiciens s'en sont saisis, les moyens de diffusion actuels favorisant la rapidité de la communication et la multiplication des annonces. Ainsi vais-je essayer de donner une idée de quelques résultats dont je n'ai pas vu de démonstration complète (aucune n'est publiée) mais que je trouve spectaculaires... au train où vont les choses, il est vraisemblable que bien d'autres théorèmes auront été au moins annoncés pendant la fabrication de cette Gazette.

De nombreuses personnes m'ont fourni des photocopies, des fichiers ou des explications, notamment M. Katz, D. Kotschick, F. Lalonde, J. Lannes et M. Slupinski. L'idée d'écrire dès maintenant un survol de la théorie est née au cours d'une discussion avec Jean-Pierre Kahane. Marc Chaperon, aidé d'un lecteur qui a préféré se cacher sous les initiales P.L., a bien voulu critiquer ce texte au fur et à mesure de son écriture. Que tous soient remerciés.

La problématique est, d'abord, de comprendre comment sont faites les variétés de dimension 4.

Exemple (en dimension 2) : Pour les variétés² de dimension 2, les surfaces, il y a un invariant numérique, le *genre*, qui dit tout sur la topologie de la surface. Chacun sait que le genre g est le nombre de trous, ou plutôt d'anses, de la surface, ici il est plus pertinent (mais équivalent) de le définir par

$$2g = \dim H^1(X).$$

¹ Article remis à la Gazette le 21 mars 1995.

² Toutes les variétés dont il sera question dans cet article seront orientées, compactes et sans bord, sauf mention explicite du contraire.

Dans les dimensions supérieures, la topologie algébrique de la variété fournit aussi des invariants, mais ils ne sont pas suffisants pour déterminer le type d'homéomorphisme ou de difféomorphisme de la variété.

Exemple (en dimension 4) : Pour les variétés de dimension 4, on sait depuis longtemps que la *forme d'intersection*

$$H_2(W; \mathbf{Z}) \times H_2(W; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

(on représente deux classes d'homologie par des cycles en position générale et on compte leurs points d'intersection avec un signe convenable) est un invariant important (voir notamment les travaux de Rokhlin, par exemple dans [12]). C'est une forme quadratique entière. Comme tous les invariants provenant de la cohomologie, celui-ci ne dépend que du *type d'homotopie* de la variété. Il est remarquable que, pour une variété de dimension 4 simplement connexe, il détermine ce type d'homotopie (c'est un résultat de Milnor en 1958).

Pour étudier la topologie des variétés de grandes dimensions, on dispose de méthodes anciennes³ et efficaces. La plus célèbre est la théorie de Morse : on utilise une (des) fonction(s) sur la variété. Si il y a assez de place, on peut la modifier de façon à avoir un contrôle assez précis de tous ses points critiques et ainsi, de la topologie de la variété. Ce type de méthodes (la topologie différentielle classique) a fourni de nombreux résultats, les plus achevés étant les théorèmes du *h*-cobordisme (et du *s*-cobordisme) de Smale (1964), dont un corollaire est la solution de la conjecture de Poincaré : si une variété a le même type d'homotopie qu'une sphère, elle lui est homéomorphe.

Ceci ne s'applique qu'aux dimensions 5 et plus. J'ai déjà évoqué la dimension 2, la dimension 3 est un monde différent, je n'en parlerai pas. Reste la dimension 4. Je renvoie les lecteurs intéressés à l'excellent premier chapitre du livre [7] de Donaldson et Kronheimer, où est brossé un tableau précis de la situation "à l'âge classique" ainsi que d'une partie des résultats obtenus par les méthodes "modernes" que je vais évoquer maintenant.

1. Le triomphe des espaces de modules

La grande idée développée et illustrée spectaculairement par Donaldson dès le début des années quatre-vingt est l'utilisation des *espaces de modules*. Il va sans dire que les modules dont il est question ici ne sont pas des "espèces d'espaces vectoriels" (en anglais on les appelle des *moduli*). On est prié de considérer la locution *espaces de modules* comme un tout. En gros, il s'agit d'espaces de structures, comme classiquement l'espace de toutes les structures de surface de Riemann sur une surface topologique donnée. Utilisés depuis longtemps en géométrie algébrique, ces espaces ont ainsi fait une entrée remarquée dans le monde de la topologie différentielle. On

³ Il n'est évidemment pas question de faire ici une histoire du sujet.

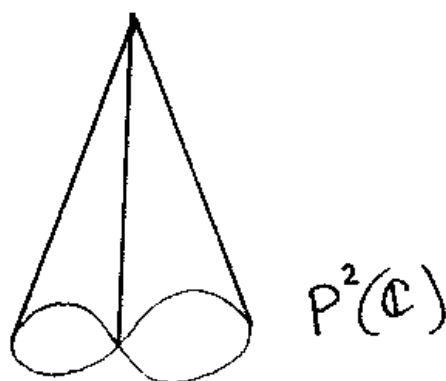
considère une variété de dimension 4 et un fibré principal de groupe $SU(2)$ sur cette variété. L'espace de modules qu'utilise Donaldson est l'espace $\mathcal{M}$ de toutes les *connexions principales anti-auto-duales* (j'écrirai ASD) sur ce fibré, modulo les automorphismes du fibré — ceux-ci forment le *groupe de jauge*.

Illustrons la méthode en rappelant comment Donaldson l'applique, pour faire exploser, en 1982, sa première bombe [6].

1.1 Le “premier théorème” de Donaldson. On considère une variété W de dimension 4. Aux restrictions déjà faites, on ajoute ici l'hypothèse que W est simplement connexe. On suppose que la forme d'intersection est définie négative. Le théorème affirme alors que celle-ci est *diagonalisable*.

Naturellement, il y a beaucoup de formes quadratiques définies négatives qu'on ne peut pas diagonaliser⁴ *sur les entiers*, notamment toutes les formes paires, telles la célèbre E_8 : ainsi les formes d'intersection des variétés différentielles⁵ de dimension 4 simplement connexes sont assez spéciales.

La stratégie de la démonstration de Donaldson est la suivante : on choisit convenablement le $SU(2)$ -fibré principal sur la variété W , de sorte que la dimension de l'espace de modules $\mathcal{M}$ associé soit 5 (elle se laisse calculer par un théorème d'indice). J'ai mentionné le fait que $\mathcal{M}$ est (presque) une variété. En fait, $\mathcal{M}$ a des points singuliers⁶, mais Donaldson les comprend bien. Ils ne proviennent pas de la condition ASD, qui, elle, va donner (génériquement) une variété, mais du passage au quotient par le groupe de jauge : ils proviennent des connexions ASD *réductibles*, points où l'opération de ce groupe n'est pas libre. Leur nombre est le rang b_2 de $H_2(W)$ et chacun d'eux ressemble au sommet d'un cône sur un plan projectif complexe :



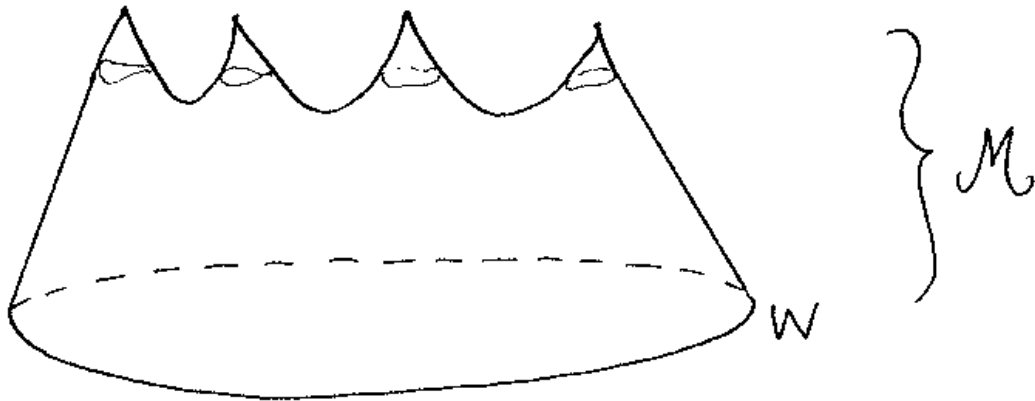
Autre problème, $\mathcal{M}$ n'est pas compact. Voici une idée très grossière de ce

⁴ Voir par exemple [20].

⁵ C'est aussi en contraste total avec le cas des variétés topologiques, étudiées par Freedman : d'où par exemple l'existence de structures différentielles “exotiques” (non équivalentes à la structure standard) sur $\mathbb{R}^4$ — ceci ne peut arriver que dans cette dimension — et celle de variétés topologiques de dimension 4 qui ne possèdent *aucune* structure différentielle.

⁶ Je simplifie outrageusement ici : la condition ASD est définie à l'aide d'une métrique riemannienne sur W et il faut faire une hypothèse de généricité sur cette métrique.

que peut être une suite “tendant vers l’infini” dans $\mathcal{M}$. Remarquons d’abord que la courbure totale d’une connexion est imposée : elle ne dépend que du fibré⁷. De sorte que si une connexion est plate quelque part, elle doit être très courbe ailleurs. Fixons un point $w \in W$ et considérons une suite de connexions ASD dont la courbure est concentrée dans les boules de rayon $1/n$ centrées en w . On conçoit que le point w puisse être considéré comme limite d’une telle suite. Tout ça est vraiment très rapide mais donne quand même une idée de ce que peut être une compactification de l’espace de modules $\mathcal{M}$: en dehors des points singuliers déjà décrits, il s’agit d’une variété de dimension 5 dont le bord est notre variété W d’origine. En découpant des petits voisinages des points singuliers, on obtient un objet géométrique



qui relie un certain nombre d’exemplaires de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ à la variété qu’on veut étudier. Si on fait attention aux orientations, on peut en déduire que la forme d’intersection de W est isomorphe à celle de la réunion des copies de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ – avec la mauvaise orientation – c’est à dire à la forme diagonale définie négative : c’est le théorème.

La réalisation technique du programme que je viens d’exposer brièvement est très délicate. Même en oubliant l’orientabilité de l’espace $\mathcal{M}$, il reste la difficile question de la compactification : faire converger des connexions vers des points de W requiert des théorèmes d’analyse dure à la Uhlenbeck (voir encore [7]).

1.2 Remarques complémentaires. D’abord, je n’ai pas défini ASD.

Sur une variété riemannienne orientée, on a un opérateur $*$, l’étoile de Hodge, qui transforme une forme différentielle en une forme de degré complémentaire ; elle se définit par comparaison de la métrique sur les formes et du produit $\wedge$:

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle d\mu$$

où $d\mu$ est l’élément de volume de la métrique riemannienne.

⁷ Le choix d’un $SU(2)$ -fibré principal revient au choix d’un élément de $H^2(W; \mathbf{Z})$, sa deuxième classe de Chern. Si celle-ci n’est pas nulle, il ne possède aucune connexion plate (c’est la formule de Chern-Weil). Pour le choix fait ici elle vaut 1.

Les connexions ASD sont les connexions A dont la courbure F_A vérifie l'équation

$$(\text{ASD}) \quad *F_A = -F_A$$

(où $*$ est l'étoile de Hodge d'une métrique riemannienne sur W) ou encore $F_A^+ = 0$, si on définit la partie auto-duale de la courbure par

$$F_A^+ = \frac{1}{2}(F_A + *F_A).$$

La courbure F_A est une 2-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$ et l'étoile transforme 2-formes en $4 - 2 = 2$ -formes – un nouvel effet de la dimension 4.

Les solutions de cette équation⁸ sont les minima absolus de la *fonctionnelle de Yang-Mills*

$$\int_W \|F_A\|^2,$$

voilà qui nous ramène à la théorie de Morse, sur un espace de dimension infinie cette fois, l'espace de toutes les connexions sur le fibré. En particulier, elles en sont des points critiques, ce qui se traduit par le fait qu'elles vérifient l'équation de Yang-Mills

$$(\text{YM}) \quad d_A^* F_A = 0$$

qu'il est habituel de considérer comme une "version non-abélienne" des équations de Maxwell. Dans le cas d'un fibré en cercles $S^1 \cong U(1)$ ou, ce qui revient au même, d'un fibré en droites complexes (cas abélien), l'équation (ASD) décrit les connexions dont la forme de courbure F_A est *harmonique* et on tombe dans le champ d'applications de la théorie de Hodge (voir le joli petit livre [1] d'Atiyah pour plus d'explications). Nous allons assister maintenant à un retour de l'abélien, à contre-courant de quelques modes.

Naturellement, depuis 1982, Donaldson lui-même, et quelques autres, ont bien développé la théorie et démontré beaucoup de très beaux théorèmes. Sans chercher à être exhaustive, j'en mentionnerai de trois types :

- (a) Dans la lignée de ce que je viens d'expliquer, réalisation de formes quadratiques entières comme formes d'intersection de variétés de dimension 4,
- (b) Construction de nouveaux invariants de type cohomologique, pour les variétés de dimension 4. Ce sont les célèbres "polynômes de Donaldson", qui ont des applications spectaculaires, notamment pour
 - (b1) montrer que, en général, une surface complexe⁹ ne se décompose pas en somme connexe de deux variétés de dimension 4,
 - (b2) fournir des contre-exemples au "théorème du h -cobordisme" en dimension 4. Jusqu'en 1987, on ne savait pas si cet énoncé était vrai ou faux dans cette dimension.

⁸ Au moins pour un fibré principal à $c_2 > 0$.

⁹ Les surfaces complexes fournissent de nombreux exemples de variétés de dimension 4.

(c) Etude des surfaces contenues dans les variétés de dimension 4, par Kronheimer et Mrowka (voir l'exposé [5]), permettant notamment de confirmer une ancienne conjecture de Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques.

Une autre motivation était une conjecture de Thom sur le genre minimum d'une surface représentant une classe d'homologie donnée (voir un énoncé précis un peu plus loin) que les auteurs n'avaient pas complètement résolue par ce type de méthodes.

2. Le nouvel espace de modules

L'avancée de l'été dernier tient dans deux équations, formules [19] que certains n'hésiteraient sans doute pas à qualifier de magiques :

$$(SW) \quad D_A \psi = 0 \quad F_A^+ = \frac{1}{4} \tau(\psi \otimes \psi^*).$$

Tant que je n'ai pas expliqué de quoi il s'agissait, ça n'a pas plus de sens de les recopier ici que ça n'aurait de les taguer sur les murs de l'IHP, pourtant, je ne définirai les termes qu'un peu plus bas.

D'une certaine façon, ça n'est pas bien révolutionnaire : on est toujours en train de considérer un espace de modules. Ce qui est nouveau, et surtout efficace, c'est que cet espace de modules est beaucoup plus simple que celui des connexions ASD. Par exemple, on montre facilement qu'il est compact. On se souvient que la compactification de l'espace de modules de Donaldson était une opération assez douloureuse. La preuve de la compacité du nouvel espace de modules (NEM) est du même niveau de difficulté que l'étude des points singuliers de $\mathcal{M}$. Disons, pour les spécialistes, que les deux sont fondées sur des formules de Weitzenböck.

C'est cette simplicité qui fait qu'il (le NEM) permet de démontrer plus facilement des résultats appartenant à la même famille que ceux que j'ai évoqués ci-dessus – y compris de nouveaux théorèmes. Je vais évoquer rapidement maintenant : comment le NEM donne le premier théorème de Donaldson, quelques résultats nouveaux sur les variétés de dimension 4, et ce qu'est le NEM, bien sûr.

Tout ceci suffirait sans doute à ajouter de nouvelles couronnes sur la tête de Witten¹⁰. Mais il y a *beaucoup* mieux, les équations de Seiberg-Witten font beaucoup mieux que de démontrer des théorèmes de topologie différentielle, c'est ce que j'expliquerai dans la dernière partie de cet article.

2.1 Les équations de Seiberg-Witten. Il est temps de donner une idée de ce dont il est question dans les équations de Seiberg-Witten. La définition des termes qui y figurent est un peu technique, mais rien n'est difficile et les

¹⁰ De nombreuses couronnes lui ont été tressées, et des hymnes lui ont été chantés par de plus lyriques que moi, notamment dans ces pages, voir [4].

notions utilisées sont très classiques (voir par exemple [14]). Je vais décrire ça très rapidement. Je suggère au lecteur d'omettre ce paragraphe s'il ne veut que se faire une idée des résultats.

Il s'agit donc d'un couple (A, ψ) . La variété W est munie d'une structure Spin^c : le groupe $\text{Spin}^c(4)$ est une extension

$$1 \rightarrow S^1 \rightarrow \text{Spin}^c(4) \rightarrow SO(4) \rightarrow 1$$

de la même façon que le groupe $\text{Spin}(4)$ est une extension de $SO(4)$ par $\{\pm 1\}$. Comme plus haut, la variété W est munie d'une métrique riemannienne auxiliaire, le fibré des repères orthonormés directs est un $SO(4)$ -fibré principal. La structure Spin^c est une classe d'équivalence de relèvements¹¹ de celui-ci en un $\text{Spin}^c(4)$ -fibré principal.

Cette structure permet de définir deux fibrés de spineurs S_+ et S_- , fibrés en plans complexes sur W . Dans les équations (SW), ψ est une section de S_+ et A une connexion sur le fibré en droites $L = \Lambda^2 S_+$. La connexion de Levi-Civita de W et A définissent une connexion ∇_A sur S_+ et D_A est l'opérateur de Dirac associé : c'est un opérateur elliptique d'ordre 1 qui transforme sections de S_+ en sections de S_- . Ceci explique les termes de la première équation. Dans la deuxième, F_A est la courbure de A , une 2-forme sur W , P_+ est la projection orthogonale sur l'espace Λ_+ des 2-formes ASD. Reste le

$$\tau : \text{End}(S_+) \longrightarrow \Lambda_+ \otimes \mathbb{C}$$

défini grâce à la multiplication de Clifford. EVPVFEM¹²

La vraie raison pour laquelle ces équations sont plus simples que l'équation (ASD) est un peu cachée. Les équations (SW) mettent en jeu une connexion A , sa courbure F_A et la partie ASD de celle-ci, mais maintenant, A est une connexion sur un fibré en *droites* complexes, en d'autres termes sur un S^1 -fibré principal au lieu d'un $SU(2)$ -fibré principal : chassez le commutatif... Plus précisément, l'espace de modules $\mathcal{M}$ de Donaldson était le quotient de l'espace des connexions ASD par l'opération du groupe de jauge, le groupe de tous les automorphismes du fibré. Le nouveau groupe de jauge, celui qui opère sur les solutions des équations (SW) est simplement le groupe (commutatif) de toutes les applications C^∞ de la variété W dans le cercle S^1 .

J'ai déjà dit que le NEM était compact à cause de la formule de Weitzenböck pour l'opérateur de Dirac. Cette même formule montre en plus que, dès que la courbure scalaire de la métrique sur W est positive, il n'y a pas de spineur harmonique non trivial sur W . En d'autres termes, toute solution (A, ψ) de (SW) a $\psi = 0$... ne reste qu'une connexion ASD sur un fibré en cercles.

¹¹ La condition pour qu'un fibré possède une structure Spin^c est que sa deuxième classe de Stiefel-Whitney soit la réduction modulo 2 d'une classe entière. C'est toujours le cas pour le fibré tangent d'une variété orientable : toutes ces variétés ont donc des structures Spin^c , contrairement à ce qui se passe avec les structures Spin .

¹² Version moliéresque du CQFD.

Plus généralement, toutes les structures Spin^c sauf peut-être un nombre fini d'entre elles¹³ vont donner des équations (SW) dont les solutions ont $\psi = 0$.

2.2 Le premier théorème de Donaldson (bis). Considérons une variété de dimension 4 simplement connexe W . Pour tout choix de structure Spin^c sur W (et pour une métrique générique), le NEM est compact et c'est une variété à l'exception d'un *unique* point singulier, dont il est facile de décrire un voisinage¹⁴. En considérant le bord d'un tel voisinage, on se convainc, par un argument classique de cobordisme, que cette situation est impossible dès que l'espace de modules est de dimension strictement positive.

Sa dimension est donnée par le théorème de l'indice. En supposant maintenant que la forme d'intersection de W est définie négative, on trouve $(c_1(L)^2 + b_2 - 4)/4$, où $b_2 = \dim H_2(W)$ et $c_1(L)$ est la première classe de Chern du fibré $L = \Lambda^2 S_+$ déterminé par la structure Spin^c . On en arrive ainsi à un énoncé assez facile¹⁵ et purement arithmétique : si la forme quadratique q sur $\mathbf{Z}^{b_2}$ est définie négative et si elle n'est pas diagonalisable, elle possède un élément caractéristique¹⁶ x tel que $|q(x)| < b_2 - 4$.

Un tel x correspond alors à une structure Spin^c qui donne un NEM de dimension positive. D'où une contradiction : notre forme est diagonalisable.

2.3 Chronique de quelques résultats annoncés. D'abord, Kronheimer et Mrowka [17] démontrent la conjecture de Thom, à laquelle j'ai déjà fait allusion plus haut, en toute généralité. Voici ce dont il s'agit : on suppose que Σ est une surface orientée plongée dans le plan projectif complexe $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, et qu'elle est dans la même classe d'homologie qu'une courbe algébrique lisse de degré d . Alors son genre g est plus grand que celui de cette courbe : $g \geq (d-1)(d-2)/2$.

A ma connaissance, on ne sait pas encore si les invariants "numériques" qu'on peut construire à partir du NEM contiennent tous les invariants de Donaldson.

Il y a semble-t-il de nombreuses applications aux surfaces complexes, avec notamment comme conséquence le fait que certains invariants algébriques sont des invariants du type de difféomorphisme de la surface : c'est le cas

¹³ Le groupe $H^2(W; \mathbf{Z})$ opère transitivement sur les structures Spin^c .

¹⁴ De même que dans le cas du $\mathcal{M}$ de Donaldson, un point singulier provient d'un point où l'action du groupe n'est pas libre, ici tout est très simple parce que le groupe de jauge est très simple. On montre que le NEM est quotient d'une variété de dimension finie par une action de S^1 avec un unique point fixe, au voisinage duquel l'opération est, bien sûr, linéaire. Là encore, j'ai outrageusement simplifié : il faut perturber les équations (SW) pour avoir un NEM lisse et l'étude du point singulier est un peu moins évidente.

¹⁵ La démonstration appartient au folklore de la théorie des formes quadratiques, comme me l'a expliqué Jean Lannes : on compare la fonction ϑ de la forme q à celle de la forme diagonale (c'est analogue à la démonstration de l'évaluation du nombre de façons de décomposer un entier en somme de carrés qu'on trouve à la fin du livre de Gunning [13]). Ce n'est sans doute pas le lieu de discuter si ce résultat était ou non bien connu, en tous cas, une démonstration est écrite dans [8].

¹⁶ C'est à dire un élément x tel que $\langle x, y \rangle \equiv \langle x, x \rangle \pmod{2}$ pour tout y (voir [20]).

notamment pour les “pluri-genres” (corollaire de résultats de Friedman et Morgan [9]).

3. De Gromov à Seiberg et Witten, en suivant Taubes

Je vais maintenant donner une idée de quelques résultats obtenus par Taubes dans une série [21] de papiers “symplectiques”.

Il va être donc question de variétés symplectiques. Rappelons qu’une variété symplectique est une variété munie d’une forme différentielle non dégénérée de degré 2 qui est fermée, la *forme symplectique*. Par exemple une variété kählérienne, mais il y en a d’autres.

Sur chaque espace tangent, la structure est très simple, c’est celle de $\mathbf{R}^{2n}$ avec une forme bilinéaire alternée non-dégénérée, et comme elles sont toutes isomorphes, on peut considérer que $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$ et que la forme est la partie imaginaire de la forme hermitienne usuelle

$$\langle Z, Z' \rangle = (Z, Z') + i\omega(Z, Z'),$$

la partie réelle en étant le produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^{2n}$.

On peut globaliser cette construction. Il s’ensuit que la variété peut être munie d’une structure presque complexe (plus simplement, son fibré tangent est un fibré vectoriel complexe¹⁷) — ce qui ne veut pas dire que la variété est complexe. Comme dans le cas de $\mathbf{C}^n$, la structure complexe et la forme symplectique sont reliées par la condition que $\omega(JZ, Z')$ définit une métrique riemannienne sur W . On dit que J est adaptée à ω .

Pour ceci on a utilisé exclusivement que la forme symplectique est une 2-forme non-dégénérée. Utiliser qu’elle est fermée mène à des choses plus subtiles, comme on va voir, mais d’abord au fait que, *localement*, toutes les variétés symplectiques sont isomorphes. C’est le théorème de Darboux. Et s’il n’y a pas d’invariant local, c’est que les problèmes sont globaux, donc difficiles.

3.1 Être ou ne pas être symplectique. On sait en fait assez peu de choses globales sur les variétés symplectiques. Choisissons par exemple une variété W de dimension 4 et demandons-nous si elle peut posséder une forme symplectique ω . Il y a des “obstructions” immédiates : la forme ω devant être non dégénérée, $\omega \wedge \omega$ serait une forme volume et donc W doit être orientable (et elle sera orientée par ω). En plus, ω est fermée et représente donc une classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(W; \mathbf{R})$ telle que $[\omega]^2 \neq 0$, et en particulier $[\omega] \neq 0$ (par exemple, W ne peut être la sphère S^4). On a vu aussi que W devait avoir une structure presque complexe, on montre ainsi par exemple que si W est la somme connexe de deux variétés presque complexes, elle

¹⁷ Brutalement : la composante compacte du groupe symplectique $Sp(2n; \mathbf{R})$ est le groupe unitaire $U(n)$.

ne peut être symplectique : c'est le cas par exemple de la somme connexe $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})\#\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

Il existe des méthodes pour construire des variétés symplectiques, notamment celles développées par Gompf [10], mais on est (était?) assez démunie pour décider qu'une variété ne peut pas être symplectique, en dehors des remarques ci-dessus. Aucune d'elles ne s'applique¹⁸, par exemple, à la somme connexe $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})\#\mathbf{P}^2(\mathbf{C})\#\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

La première famille de résultats de Taubes donne des réponses nouvelles à ce type de questions : on remarque tout d'abord qu'une forme symplectique définit une structure Spin^c et que le NEM correspondant est de dimension 0. C'est donc un nombre fini de points (il est compact) et comme il est orienté, chacun de ces points arrive avec un signe, on en déduit un élément de $\mathbf{Z}$.

Taubes montre que, si $b_2^+ \geq 2$, ce nombre est ± 1 .

Ici b_2^+ désigne la dimension du plus grand sous-espace de $H_2(W)$ sur lequel la forme d'intersection est définie positive – c'est au moins 1 pour une variété symplectique.

D'autre part il montre que les invariants des variétés qui sont des sommes connexes sont nuls si les formes d'intersection des morceaux ne sont pas définies négatives, et ça donne des foules d'exemples de variétés qui ne peuvent être symplectiques¹⁹. Par exemple $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})\#\mathbf{P}^2(\mathbf{C})\#\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, justement, et c'est nouveau.

La méthode est la suivante : Taubes construit, grâce à la forme symplectique, une famille de perturbations des équations (SW) qui ont une solution commune évidente. Il montre que les solutions de ces équations perturbées donnent le même invariant que le NEM. La famille est indexée par un réel $r \geq 0$ et la dernière étape consiste à montrer que, pour r assez grand, la solution en question est la seule solution.

La première étape est la plus facile, mais elle met déjà en évidence les relations entre forme symplectique et équations (SW). Mieux : on peut construire les équations et la "solution" présumée pour n'importe quelle 2-forme non-dégénérée, mais celle-ci n'est une solution, précisément, que quand la forme est *fermée* : les équations (SW) sont donc spécialement bien adaptées à la géométrie symplectique puisqu'elles font dès le départ une distinction entre forme non-dégénérée (ou variété presque complexe) et forme fermée non-dégénérée (ou variété symplectique).

3.2 Les courbes holomorphes de Gromov. Dans les années quatre-vingt, il y a eu une autre bombe géométrique que celles lancées d'Oxford par

¹⁸ En utilisant la machinerie de Gromov survolée au § suivant et les résultats de D. McDuff on montre aisément que cette variété ne peut avoir de structure symplectique qui ressemble à la structure standard de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ près d'un $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ d'un des morceaux (voir [2] pour un exposé des méthodes dites *soft* évoquées dans ce §).

¹⁹ Mais il y a des variétés non symplectiques dont les invariants sont non nuls, voir [16] pour ce type de résultats.

Donaldson. Je veux parler de l'article [11] de Gromov de 1985, qui, lui, a profondément transformé la géométrie symplectique.

On a vu qu'une variété symplectique était presque complexe, et c'est assez pour qu'elle ait, au moins localement, beaucoup de "courbes pseudo²⁰-holomorphes", c'est à dire d'applications f d'une surface de Riemann Σ dans la variété W telle que

$$T_x f \circ i = J \circ T_x f$$

i désignant la multiplication par $\sqrt{-1} = i$, la structure complexe de la surface de Riemann et J l'objet analogue sur l'espace tangent à W au point $f(x)$.

Ceci n'utilisait que la non dégénérescence. Reste à utiliser que la forme est fermée. C'est ce qui permet de démontrer un "lemme de Schwarz", une propriété d'équicontinuité et le théorème de compacité de Gromov, que je ne vais pas énoncer précisément ici, mais qui donne la compacité des espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes que nous allons utiliser plus bas, suivant Taubes.

Une des premières applications, tirée par Gromov lui-même dans [11], de sa théorie, est le théorème suivant :

Soit ω une forme symplectique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et J une structure presque complexe adaptée. S'il existe une courbe J -holomorphe dont la classe d'homologie est celle de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, alors il existe un difféomorphisme de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ dans lui-même qui envoie ω sur la forme de Kähler usuelle.

La question à laquelle ce théorème semble s'apprêter à répondre est du type : combien de formes symplectiques non isomorphes y a-t-il sur telle ou telle variété symplectique (ici $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$) ? Encore un problème sur lequel on ne savait pas grand chose. . .

Les "espaces de modules" de courbes holomorphes dans une classe d'homologie donnée ont été utilisés entre autres par Dusa McDuff dont les travaux ont permis de commencer à comprendre un peu la topologie des variétés symplectiques de dimension 4. Ce sont aussi eux qui servent à définir la multiplication "quantique" sur la cohomologie de certaines variétés symplectiques (en général kählériennes), d'où un regain d'intérêt récent et leur nouvelle dénomination. . . invariants de Gromov-Witten, bien sûr (voir [18]). Leur gros avantage, même dans le cas des variétés kählériennes où on a une vraie structure complexe, c'est qu'on considère ici que la structure presque complexe peut varier : les espaces en question seront des variétés pour des J génériques.

Cette théorie a de nombreuses autres applications, elle a aidé à la naissance de la "topologie symplectique" (théorème du chameau par Eliashberg et Gromov, par exemple), voir [3] pour une description des méthodes et résultats.

²⁰ Suivant les auteurs de [3], je supprimerais le préfixe pseudo.

3.3 $SW \equiv Gr \bmod (Ta)$. Le dernier des théorèmes de Taubes dont je veux parler ici est l'identification des invariants de Gromov à ceux de Seiberg-Witten. On va mettre toutes les structures ensemble, mais de façon un peu plus générale qu'au § précédent : W est une variété symplectique de dimension 4. Ainsi, elle a une structure Spin^c préférée. On la munit, en plus, d'un fibré en droites complexe E , ce qui permet de tordre la structure Spin^c pour en obtenir une autre : c'est un aspect important de la théorie que le groupe des fibrés en droites complexes sur W opère – transitivement – sur l'ensemble de toutes les structures Spin^c .

On a ainsi un NEM pour cette structure Spin^c et aussi un espace de courbes holomorphes dont la classe d'homologie est duale à $c_1(E)$. À partir de chacun de ces espaces, on construit un nombre entier. On compte simplement les points avec leur orientation si l'espace est de dimension ≤ 0 . Sur le NEM, il y a un fibré en droites complexes et on peut compter le nombre de zéros communs d'un nombre ad hoc de sections génériques de ce fibré. De même, pour les courbes holomorphes, on fixe un certain nombre de points dans W et on regarde les courbes holomorphes de la classe donnée qui passent par ces points. Si le nombre de ces points a été bien choisi, on arrive à un espace de dimension 0, un entier encore une fois.

Le théorème principal annoncé par Taubes est que *les invariants ainsi construits coïncident* (pour tout fibré E).

Les idées pour la démonstration semblent assez naturelles : construire des courbes holomorphes à partir de solutions de (SW) (perturbées, ici aussi) et inversement. Du point de vue technique, c'est pas mal d'analyse.

On conçoit qu'un tel théorème puisse entraîner des résultats d'*existence* de courbes holomorphes (globales) : si l'invariant de Seiberg-Witten associé à E n'est pas nul, ça oblige la classe duale à $c_1(E)$ à contenir des courbes holomorphes (pour des structures complexes génériques adaptées à la forme symplectique)... en particulier, Taubes arrive à montrer que, *pour toute structure symplectique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, il y a une courbe holomorphe dans la classe de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.*

Avec le résultat de Gromov rapporté plus haut, on en déduit, enfin, l'unicité de la structure symplectique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

Le papier en question contient bien d'autres applications. Je m'arrêterai là dans la description des résultats : il est vraisemblable qu'on va pouvoir comprendre les variétés symplectiques de dimension 4 aussi bien qu'on comprend les surfaces complexes.

Post-Scriptum. Je ne veux pas discuter ici les tenants et aboutissants physiques de la chose (voir l'article de Kotschick [15]). Il faut toutefois mentionner que les équations (SW) ne semblent être que la partie visible d'un iceberg de couples d'équations dont on peut espérer bien d'autres

Références

- [1] M. F. Atiyah, "The geometry of Yang-Mills fields", Fermi Lectures, Scuola Normale, Pisa 1979.
- [2] M. Audin, "Exemples de variétés presque complexes", *l'Enseignement Math.* 37 (1991) 175–190.
- [3] M. Audin, J. Lafontaine (eds), "Holomorphic curves in symplectic geometry", *Progress in Math* 117, Birkhäuser, 1994.
- [4] D. Bennequin, "Aperçu du travail mathématique de E. Witten", *Gazette des Mathématiciens* 47 (1991) 19–23,
"En marge de l'apologie de Witten", *Gazette des Mathématiciens* 50 (1991), 71–93.
- [5] D. Bennequin, "L'instanton gordien (d'après Kronheimer et Mrowka)", *Séminaire Bourbaki*, Astérisque 216 (1993) 223–277.
- [6] S. Donaldson, "An application of gauge theory to four dimensional topology", *Journal of Differential Geometry* 18 (1983), 279–315.
- [7] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, "The geometry of 4-manifolds", Oxford University Press, 1990.
- [8] N. Elkies, "A characterization of the $\mathbb{Z}^n$ lattice", preprint, 1995.
- [9] R. Friedman and J. Morgan, "Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants", preprint, 1995.
- [10] R. Gompf, "A new construction of symplectic manifolds", 1994, à paraître dans *Annals of Math.*
- [11] M. Gromov, "Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds", *Invent. Math.* 82 (1985), 307–347.
- [12] L. Guillou, A. Marin (eds), "A la recherche de la topologie perdue", *Progress in Math.* 62, Birkhäuser, 1986.
- [13] Gunning, "Lectures on modular forms", Princeton University Press 1962.
- [14] N.H. Hitchin, "Harmonic spinors", *Advances in Math.* 14 (1974), 1–55.
- [15] D. Kotschick, "Gauge theory is dead! – Long live gauge theory", *Notices of the AMS* (42) 1995, 335–338.
- [16] D. Kotschick, J. W. Morgan and C. H. Taubes, "Four-manifolds without symplectic structures but with non-trivial Seiberg-Witten invariants", à paraître dans *Math. Res. Letters*, 1995.
- [17] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "The genus of embedded surfaces in the projective plane", *Math. Res. Letters* 1 (1995), 797–808.
- [18] D. McDuff and D. Salamon, "*J*-holomorphic curves and quantum cohomology", Amer. Math. Soc. 1994.
- [19] N. Seiberg and E. Witten, "Electromagnetic duality, monopole condensation and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory", *Nucl. Phys.* B426 (1994), 19–52.

- [20] J.-P. Serre, "Cours d'arithmétique", PUF, Paris, 1970.
- [21] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms" *Math. Res. Letters* 1 (1994), 809-822,
 "More constraints on symplectic manifolds from Seiberg-Witten equations", *Math. Res. Letters* 2 (1995), 9-14,
 "The Seiberg-Witten and the Gromov Invariants", preprint, 1995.

NOUVEAUTÉS

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES POUR L'AGRÉGATION

ALGÈBRE 3
J.-F. RUAUD - A. WARUSFEL

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES POUR L'AGRÉGATION Algèbre 3

J.-F. RUAUD,
A. WARUSFEL,
Pr. de Mathématiques
spéciales

Série Agrégation - 1995, 232 pages, 150 F*

Après les premiers titres de cette série devenus des références (Tauvel, Vauthier, Avez, Francinou), voici le 3^e recueil d'exercices d'algèbre permettant à l'agrégatif de se préparer au programme de l'écrit et de s'inspirer de développements originaux pour l'oral. Trois types d'exercices sont présentés :

- des exercices généraux visant à une bonne assimilation des connaissances,
- des études d'exemples précis d'objets mathématiques présentant des propriétés remarquables,
- des exercices plus théoriques impliquant des démonstrations de théorèmes fondamentaux.

Des rappels théoriques et historiques figurent au début de chaque chapitre. Certaines notions à la limite du programme sont développées en annexe.

CONTENU : Modules - Géométrie euclidienne : angles et quaternions - Géométrie hermitienne : endomorphismes auto-adjoints et groupe unitaire - Espaces affines - Espaces affines euclidiens - Ensembles convexes - Fonctions convexes.

— Dans la même série —

Mathématiques générales pour l'agrégation

P. Tauvel, 1995, 3^e tir. corr., 416 p., 255 F*

Exercices de mathématiques pour l'agrégation

Algèbre 1

S. Francinou et H. Gianella, 1995, 2^e tir., 272 p., 148 F*

Exercices de mathématiques pour l'agrégation

Algèbre 2

P. Tauvel, 1994, 288 p., 255 F*

La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation

A. Avez, 1993, 2^e tir., 180 p., 169 F*

Cours d'analyse mathématique de l'agrégation

F. Vauthier et J.-J. Prat, 1993, 2^e édit. rev. et corr., 216 p., 151 F*

Exercices de mathématiques pour l'agrégation

Analyse 1

A. Chambert-Loir, S. Fernigier et V. Maillot
1995, 248 p., 148 F*

Outrages disponibles en librairie ou à la M.A.S. - BP 36 - 41354 VINEUIL

MASSON 