

L'espaces des modules des connexions plates et sa structure de Poisson

Michèle Audin

Soit S une surface orientée, compacte, de bord ∂S . Soit G un groupe de Lie simplement connexe muni d'une forme non dégénérée invariante. On considère l'espace $\mathcal{A}$ de toutes les connexions sur le G -fibré principal $G \times S$. Il est muni d'une opération du groupe de jauge $\mathcal{G}$ et d'une forme symplectique préservée par cette opération, comme l'ont remarqué Atiyah et Bott dans [1], de telle sorte que, au moins si S est fermée, la courbure est une application moment pour cette opération. Ainsi l'espace des connexions plates apparaît comme une réduction symplectique.

Je vais expliquer ici comment cette construction peut être modifiée quand la surface a un bord pour donner une structure de Poisson sur l'espace des connexions plates, dont les feuilles symplectiques sont obtenues en fixant la classe de conjugaison de l'holonomie le long de chacune des composantes du bord. Le résultat est “folklorique”, quant à la construction, je l'ai apprise dans un article de Rosly et Fock [2] (et au cours de discussions avec V. Fock). Je donnerai aussi quelques applications à des systèmes intégrables sur ces espaces de modules.

1. Les connexions et le groupe de jauge

Comme le groupe de Lie G est simplement connexe, les fibrés principaux sur S sont trivialisables¹. Pour simplifier l'écriture, je considérerai ici un fibré *trivialisé*, $G \times S \rightarrow S$.

Les sections. — Les sections ne sont autres que les applications $S \rightarrow G$.

Les connexions comme distributions horizontales. — Il y a une connexion privilégiée (“triviale”), celle dont l'espace horizontal en (g, x) est

$$\{0\} \times T_x S \subset T_g G \times T_x S = T_{(g,x)}(G \times S),$$

ce qui explique que l'espace $\mathcal{A}$ des connexions va être ici un espace vectoriel (il n'a canoniquement qu'une structure d'espace affine si aucune connexion n'est fixée) :

¹Ils sont classifiés par les classes d'homotopie d'applications $S \rightarrow BG$. Si $\pi_1(G)$ est trivial, comme le π_2 d'un groupe est toujours trivial, G est 2-connexe et BG est 3-connexe. Pour une surface S , toute application $S \rightarrow BG$ sera donc homotope à une constante et tout G -fibré principal trivial. Voir par exemple [?].

l'espace horizontal $\mathcal{H}_{(g,x)}$ d'une connexion va être le graphe d'une application linéaire $T_x S \rightarrow T_g G$, la propriété d'invariance par l'opération du groupe nous ramène aux applications linéaires $T_x S \rightarrow \mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie de G , de sorte que $\mathcal{A}$ s'identifie aux 1-formes à valeurs dans $\mathfrak{g}$, en d'autres termes

$$\mathcal{A} = \Omega^1(S, \mathfrak{g}).$$

Les connexions comme dérivations. — Pour $A \in \mathcal{A}$, on définit

$$d_A : \Omega^0(S, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^1(S, \mathfrak{g})$$

par

$$d_A \alpha = d\alpha + [A, \alpha]$$

où $[A, \alpha]$ est la 1-forme définie sur les vecteurs tangents à S par

$$X \longmapsto [A(X), \alpha].$$

On définit de même

$$d_A : \Omega^1(S, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^2(S, \mathfrak{g})$$

par

$$d_A \varphi = d\varphi + [A, \varphi]$$

où $[A, \varphi]$ est la 2-forme définie sur les couples de vecteurs tangents à S par

$$[A, \varphi](X, Y) = [A(X), \varphi(Y)] - [A(Y), \varphi(X)].$$

Ainsi d_A est une dérivation pour le crochet des formes :

$$d_A[\varphi, \psi] = [d_A \varphi, \psi] \pm [\varphi, d_A \psi].$$

La courbure. — Ainsi, pour $\alpha \in \Omega^0(S, \mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned} d_A \circ d_A(\alpha) &= d_A(d\alpha + [A, \alpha]) \\ &= d_A(d\alpha) + d_A[A, \alpha] \\ &= [A, d\alpha] + [d_A A, \alpha] - [A, d_A \alpha] \\ &= [d_A A, \alpha] \end{aligned}$$

de sorte que

$$d_A \circ d_A : \Omega^0(S, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^2(S, \mathfrak{g})$$

n'est autre que l'action de la 2-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$, $F(A) = d_A A$, la courbure.

Il opère sur $\mathcal{A}$, à droite, conformément aux traditions, par

où “ $g^{-1}dg$ ” désigne symboliquement la 1-forme sur S , à valeurs dans $\mathfrak{g}$ définie par

Les champs fondamentaux. — En dérivant, on constate que le champ fondamental $\tilde{\alpha}$ associé à un élément $\alpha \in \mathfrak{g}$ n'est autre que le champ de vecteurs sur $\mathcal{A}$ défini par

2. La forme symplectique et l'application moment

$$B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbf{C},$$

Alors, comme le proposent Atiyah et Bott, on peut définir une forme bilinéaire alternée sur $\mathcal{A}$ qu'on peut écrire comme une 2-forme différentielle constante (donc fermée³)

Dans cette formule, on considère le produit des formes

et $B_\star$ comme une application

Il est clair aussi que ω est non dégénérée (parce qu'elle est définie avec deux objets non dégénérés, la forme B et l'appariement des 1-formes sur la surface). Ainsi $\mathcal{A}$ est-il un espace (affine ou vectoriel) symplectique.

³C'est ce qu'on gagne à définir les structures symplectiques sur les espaces de modules à partir d'espaces de dimension infinie. Dans les descriptions directes en dimension finie, il est toujours difficile de montrer que les formes obtenues sont fermées. Voir notamment [?] et [?].

L'opération du groupe de jauge préserve la forme symplectique parce que celle-ci est définie par une forme invariante :

$$\begin{aligned}
(g^*\omega)_A(\varphi, \psi) &= \omega_{g^*A}(T_A g(\varphi), T_A g(\psi)) \\
&= \omega_A(g^{-1}\varphi g, g^{-1}\psi g) \text{ car l'opération de } \mathcal{G} \text{ sur } \mathcal{A} \text{ est affine} \\
&= \int_S B_*(g^{-1}(\varphi g) \wedge (g^{-1}\psi g)) \\
&= \omega_A(\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

Maintenant, on aimerait écrire que cette opération est hamiltonienne et identifier son application moment. C'est ici que le bord de S va produire une difficulté. Ce qu'on aimerait :

ESPOIR. — *Trouver, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{g}$, une fonction H_α de façon que*

1. *Le champ hamiltonien (gradient symplectique de H_α) soit le champ fondamental $\tilde{\alpha}$,*
2. *l'application*

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}) \\
\alpha & \longmapsto & H_\alpha
\end{array}$$

soit un morphisme d'algèbres de Lie (la structure d'algèbre de Lie à droite étant donnée par le crochet de Poisson associé à ω).

Ce qu'on trouve est plus compliqué :

PROPOSITION 1. — *Pour $\alpha \in \mathfrak{g} = \Omega^0(S, \mathfrak{g})$ et $A \in \mathcal{A}$, soit*

$$H_\alpha(A) = \int_S B_*(F(A) \wedge \alpha) + \int_{\partial S} B_*(\alpha \wedge A).$$

1. *Le champ hamiltonien (gradient symplectique de H_α) est le champ fondamental $\tilde{\alpha}$,*
- 2.

$$\{H_\alpha, H_\beta\}(A) = H_{[\alpha, \beta]}(A) + \int_{\partial S} B_*(\alpha \wedge d\beta).$$

Démonstration. — $\square$

L'extension centrale. — La formule de la proposition précédente montre que $\alpha \mapsto H_\alpha$ n'est pas tout à fait un morphisme d'algèbres de Lie. Si $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}$, posons

$$c(\alpha, \beta) = \int_{\partial S} B_*(\alpha d\beta).$$

C'est une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$. Elle vérifie en plus la *propriété de cocycle* :

$$c([\alpha, \beta], \gamma) + c([\beta, \gamma], \alpha) + c([\gamma, \alpha], \beta),$$

et c'est exactement ce qu'il faut pour que $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}$, munie du crochet

$$[(\alpha, t), (\beta, u)] = ([\alpha, \beta], c(\alpha, \beta))$$

soit une algèbre de Lie, une extension centrale de $\mathfrak{g}$.

Si l'on définit $H_{(\alpha, t)}(A) = H_\alpha(A) + t$, on obtient :

COROLLAIRE 2. — *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}) \\ (\alpha, t) & \longmapsto & H_{(\alpha, t)} \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie. De plus, le champ de vecteurs hamiltonien de $H_{(\alpha, t)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{C}$ est le champ de vecteurs $\tilde{\alpha}$. $\square$

La dernière assertion nous dit que $\hat{\mathfrak{g}}$ opère infinitésimalement sur $\mathcal{A}$ via l'opération infinitésimale de son quotient $\mathfrak{g}$ que nous connaissons déjà. On peut intégrer ces remarques et définir une extension centrale $\hat{\mathfrak{g}}$ du groupe de jauge, opérant sur $\mathcal{A}$ via l'opération de $\mathcal{G}$ par transformations de jauge.

Pour décrire maintenant une application moment, il nous faut des renseignements sur le dual de l'algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$.

PROPOSITION 3. — *L'appariement*

$$\begin{array}{ccc} (\Omega^2(S, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^1(\partial S, \mathfrak{g}) \oplus \mathbf{C}) & \otimes & \hat{\mathfrak{g}} \\ (R, \varphi, z) & \otimes & (\alpha, t) \end{array} \begin{array}{ccc} \longrightarrow & & \mathbf{C} \\ \longmapsto & & \int_S B_\star(R \wedge \alpha) + \int_{\partial S} B_\star(\alpha \wedge \varphi) + zt \end{array}$$

est non dégénéré. $\square$

Ainsi $\Omega^2(S, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^1(\partial S, \mathfrak{g}) \oplus \mathbf{C}$ s'injecte dans $\hat{\mathfrak{g}}^\star$ et on peut résumer l'étude qui précède en :

COROLLAIRE 4. — *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mu : \mathcal{A} & \longrightarrow & \hat{\mathfrak{g}}^\star \\ A & \longmapsto & (F(A), A|_{\partial S}, 1) \end{array}$$

est une application moment ($\mathcal{G}$ -équivariante) pour l'opération du groupe de jauge. $\square$

Remarque. — La partie centrale de $\hat{\mathcal{G}}$ n'opère pas non plus sur $\hat{\mathfrak{g}}^\star$, l'énoncé est cohérent.

3. La structure de Poisson sur l'espace des connexions plates

Quand S est fermée, l'application μ ci-dessus se réduit à la courbure, ce qui fait que les connexions plates modulo le groupe de jauge forment un niveau réduit, donc symplectique⁴. Ce qui nous intéresse ici, c'est toujours les connexions plates modulo le groupe de jauge, et une telle interprétation n'est plus possible. Par contre, la courbure est bien l'application moment, mais pour un groupe plus petit.

PROPOSITION 5. — Soit $\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G} \mid g|_{\partial S} = \text{Id}\}$. C'est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$. Il opère sur $\mathcal{A}$ avec application moment $A \mapsto F(A)$. Ainsi l'espace $\mathcal{M}_0$ des connexions plates modulo l'opération de $\mathcal{G}_0$ est symplectique.

En effet, $\mathfrak{g}_0 = \{\alpha \in \mathfrak{g} \mid \alpha|_{\partial S} = 0\}$, de sorte que l'on peut considérer que

$$\Omega^2(S, \mathfrak{g}) \oplus \mathbf{C} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}_0}^*$$

et que l'application moment pour l'opération de $\mathcal{G}_0$ est la composition $p \circ \mu$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \widehat{BG}^* & \xrightarrow{p} & \widehat{\mathfrak{g}_0}^* \\ A \longmapsto & (F(A), A|_{\partial S}, 1) & \longmapsto & (F(A), 1) & \end{array}$$

et que $\mathcal{M}_0 = (p \circ \mu)^{-1}(0, 1)/\mathcal{G}_0$ apparaît comme un espace symplectique réduit. $\square$

COROLLAIRE 6. — L'espace $\mathcal{M}$ des connexions plates modulo l'opération du groupe de jauge possède une structure de Poisson naturelle (c'est à dire définie à partir de la forme ω sur $\mathcal{A}$).

En effet, on peut écrire $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0/\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ continue à opérer sur $\mathcal{M}_0$ en préservant la structure symplectique puisque $\mathcal{G}_0$ est distingué), ce qui définit le crochet de Poisson : pour deux fonctions $H, K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{C}$, on demande que

$$\{H, K\} \circ \pi = \{H \circ \pi, K \circ \pi\}$$

(π désigne bien sûr la projection $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}$). $\square$

Maintenant je vais décrire les feuilles symplectiques de cette structure de Poisson. Elles s'expriment simplement, grâce à la classique proposition suivante.

PROPOSITION 7. — Soit H un groupe de Lie opérant sur une variété symplectique W avec application moment

$$\mu : W \rightarrow \mathfrak{h}^*.$$

Alors le crochet de Poisson de W définit une structure de Poisson sur W/H dont les feuilles symplectiques sont en bijection (via μ) avec les orbites coadjointes de H dans $\mathfrak{h}^*$.

⁴Je ne discute pas les singularités ici.

Démonstration. — Soit $\xi \in \mathfrak{h}^*$ et $\mathcal{O}_\xi$ son orbite. Considérons H opérant sur $W \times \mathcal{O}_\xi$ par l'application “diagonale” de sorte que

$$\begin{aligned} J : W \times \mathcal{O}_\xi &\longrightarrow \mathfrak{h}^* \\ (x, \eta) &\longmapsto \mu(x) - \eta \end{aligned}$$

est l'application moment pour cette opération. Réduisons $W \times \mathcal{O}_\xi$ au niveau 0 de J :

$$J^{-1}(0)/H = \{(x, \eta) \in W \times \mathcal{O}_\xi \mid \mu(x) = \eta\} / H \rightarrow \mu^{-1}(\mathcal{O}_\xi)/H$$

est un isomorphisme, ce qui met une structure symplectique sur ce dernier espace. $\square$ (Merci à Elisa Prato pour cet argument élégant.)

On applique cette proposition à $W = \mathcal{M}_0$ et $H = \mathcal{G}/\mathcal{G}_0$. On remarque qu'il y a une suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Omega^0(\partial S, G) \rightarrow 1$$

(toute application $\mathcal{C}^\infty$ de ∂S dans G se prolonge bien en une application $\mathcal{C}^\infty$ de S dans G), ce qui fait que

$$\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 \cong \prod_{C_i \in \pi_0(\partial S)} \Omega^0(C_i, G).$$

Bibliographie

- [1] M. F. ATIYAH & R. BOTT, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **308** (1982), 523–615.
- [2] V. FOCK & A. ROSLYI, *Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and r -matrices*, preprint (1992).

Institut de Recherche Mathématique Avancée
 Université Louis Pasteur et CNRS
 7 rue René-Descartes
 F-67084 Strasbourg Cedex
 maudin@math.u-strasbg.fr