
QUELQUES REMARQUES SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUADRATIQUES DANS $\mathbf{C}^n$

par

Michèle Audin

Dans cet article, je commence par rappeler quelques outils pour l'étude des systèmes quadratiques. Je présente une liste des exemples les plus classiques de systèmes quadratiques en dimension 3 et je reprends les outils dans chacun de ces cas. J'introduis aussi des exemples *ad hoc* (que je qualifie alors d'« académiques ») pour illustrer telle ou telle propriété.

1. Systèmes différentiels quadratiques dans $\mathbf{C}^n$

1.1. Notations. — Un système quadratique est un système de la forme

$$\dot{x} = F(x),$$

où $x \in \mathbf{C}^n$, $F(x) \in \mathbf{C}^n$ est homogène de degré 2 (en d'autres termes, ses composantes sont des formes quadratiques). On peut aussi écrire le système sous la forme développée

$$\dot{x}_i = \sum_{j,k} a_{j,k}^i x_j x_k \quad 1 \leq i \leq n, \text{ avec } a_{j,k}^i = a_{k,j}^i.$$

Dans cet article, on s'intéressera particulièrement au cas où $n = 3$.

Remarque 1.1.1. Étant donné un système différentiel $\dot{x} = f(x)$ où les coordonnées de f sont des polynômes de degré 2 (pas nécessairement homogènes), il est facile de le ramener à un système quadratique : on homogénéise les polynômes coordonnées de f grâce à une variable x_{n+1} et on ajoute au système l'équation (quadratique) $\dot{x}_{n+1} = 0$. La proposition 1.3.2 ci-dessous est une sorte de réciproque à cette remarque.

Remarque 1.1.2. D'autre part, il est bien classique (voir par exemple [13, Prop. 2.1]) que n'importe quelle équation différentielle polynomiale de la forme

$$y^{(n)} = P(y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

peut se mettre sous la forme d'un système différentiel quadratique dans $\mathbf{C}^m$ (avec un m plutôt grand) :

– on commence par la mettre sous forme d'un système en posant

$$x = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \text{ obtenant } \dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_n \\ \vdots \\ P(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

– puis on homogénéise en posant

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \\ x \end{pmatrix}, \text{ obtenant cette fois } \dot{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 x_2 \\ \vdots \\ \tilde{P}(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

où $\tilde{P}$ est homogène de degré $d = \deg P$.

- Enfin l'on rend quadratique en introduisant comme nouvelles variables $x_{n+1}, \dots, x_{n+N}$ les monômes de degré $d - 1$ en $x_0, \dots, x_n$.

On ne peut donc pas espérer beaucoup de résultats en grandes dimensions.

1.2. Notions d'intégrabilité. — Je vais m'intéresser dans cet article à quelques questions d'intégrabilité.

1.2.a. L'intégrabilité au sens de Liouville (cas de $\mathbf{C}^3$). — On demande qu'il existe une structure de Poisson sur $\mathbf{C}^3$ et une fonction $H : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}$ telles que le système soit hamiltonien de hamiltonien H , c'est-à-dire s'écrive

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} \quad 1 \leq i \leq n.$$

1.2.b. L'intégrabilité au sens de Kovalevskaya. — On demande que les solutions du système soient des fonctions méromorphes du temps.

1.2.c. Un critère de Liapounov. — Si les solutions sont méromorphes, les solutions du système linéarisé le long d'une quelconque de ses solutions sont univaluées. C'est une façon possible de tester l'intégrabilité au sens de Kovalevskaya (voir aussi [6]).

Pour une étude plus générale des conditions d'intégrabilité, voir par exemple [5, 1].

Je vais écrire, autant que possible, des énoncés dans $\mathbf{C}^n$. Parfois je mentionnerai le cas $n = 2$, qui est plus simple, mais c'est le cas $n = 3$ qui m'intéresse le plus.

1.3. Une notion d'équivalence. — Il est assez naturel de considérer comme équivalents deux systèmes quadratiques qui se déduisent l'un de l'autre par une transformation linéaire (constante) des variables dynamiques x_i . En formules, le système $\dot{x} = F(x)$ est équivalent au système $\dot{y} = G(y)$ si et seulement si il existe un isomorphisme linéaire φ de $\mathbf{C}^n$ tel que $G = \varphi \circ F \circ \varphi^{-1}$. Alors, $y = \varphi(x)$ est solution de $\dot{y} = G(y)$ si et seulement si x est solution de $\dot{x} = F(x)$. Il s'agit donc ici en particulier de classer simultanément n formes quadratiques en n variables. L'espace des seconds membres F est de dimension $n^2(n + 1)/2$, le groupe linéaire seulement de dimension n^2 , le quotient est donc assez gros. Même sur $\mathbf{C}$, ce n'est pas une question très facile !

Remarque 1.3.1. Il est clair que toutes les propriétés imaginables d'intégrabilité du système sont invariantes par cette équivalence.

On a aussi, clairement :

Proposition 1.3.2. Si un système différentiel quadratique admet une intégrale première linéaire, il est équivalent à un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = G_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = G_{n-1}(y_1, \dots, y_n) \\ \dot{y}_n = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $K = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ une intégrale première. Quitte à renuméroter les x_i , on peut supposer que $a_n \neq 0$. On utilise ensuite l'isomorphisme linéaire

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$$

qui met le système sous la forme désirée. □

1.3.a. Le cas où $n = 2$. — La classification des systèmes différentiels quadratiques sur $\mathbf{R}^2$ a été faite par Markus (voir [15, § 4]). Même en regroupant ceux de ses types qui sont isomorphes sur $\mathbf{C}$, il reste, pour la classification sur $\mathbf{C}^2$, une vingtaine de types...

1.3.b. Remarques sur le cas où $n = 3$. — La classification complexe pour $n \geq 3$ est elle aussi beaucoup plus compliquée que celle pour $n = 2$. Mais il est facile de voir que certains des systèmes que nous avons considérés sont équivalents.

Remarque 1.3.3. Cette notion d'équivalence a beau être naturelle, elle n'épuise sans doute pas les possibilités raisonnables d'équivalence de deux systèmes quadratiques, ne serait-ce que parce que nous n'avons pas envisagé ici de changement de temps. Par exemple, dans [9, tome 1, p. 331], Halphen montre que le système

$$\begin{cases} \dot{u}_1 + \dot{u}_2 = u_1 u_2 \\ \dot{u}_2 + \dot{u}_3 = u_2 u_3 \\ \dot{u}_3 + \dot{u}_1 = u_3 u_1, \end{cases}$$

qui est équivalent (par $u_i = -2x_i$) au système que l'on appelle « système de Halphen » (voir ici le § ??), se transforme en le système (presque) quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}y \\ \dot{y} = 2xy - 3z \\ \dot{z} = 3xz - \frac{1}{6}y^2 \end{cases} \quad (\text{Ha})$$

par la substitution (vraiment pas linéaire)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3), & y &= \frac{4}{3}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_1 u_2 - u_2 u_3 - u_3 u_1), \\ z &= \frac{4}{27}(2u_1 - u_2 - u_3)(2u_2 - u_3 - u_1)(2u_3 - u_1 - u_2). \end{aligned}$$

Dans [15], Markus définit aussi une notion d'équivalence géométrique.

1.4. Groupe des automorphismes d'un système quadratique. — Fixons un champ de vecteurs $F \in \mathbf{C}^n$. Les automorphismes de F , c'est-à-dire les éléments φ tels que

$$\varphi \circ F \circ \varphi^{-1} = F$$

forment un sous-groupe de $\text{GL}(n; \mathbf{C})$ noté $\text{Aut}(F)$. On a évidemment :

Proposition 1.4.1. *Deux champs de vecteurs F et G sont équivalents si et seulement si leurs groupes d'automorphismes sont des sous-groupes conjugués de $\text{GL}(n; \mathbf{C})$.* $\square$

Il n'est pas absolument évident que ce groupe donne des informations vraiment intéressantes sur le système. Voir le § ??.

2. Un peu de géométrie

Il est bien clair que la donnée de formes quadratiques sur $\mathbf{C}^n$ recèle des structures mathématiques riches.

2.1. Quadriques projectives. — Je considérerai naturellement les n quadriques de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ d'équations $F_1(x) = 0, \dots, F_n(x) = 0$ et leur intersection

$$\tilde{\mathcal{I}}_\infty = \{[x] \in \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \mid F(x) = 0\}.$$

Ajoutons une dimension, écrivant $(x, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, $[x, w] \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et considérons aussi les quadriques de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ d'équations $F_1(x) + wx_1 = 0, \dots, F_n(x) + wx_n = 0$ et leur intersection

$$\tilde{\mathcal{J}} = \{[x, w] \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \mid F(x) + wx = 0\}.$$

L'hyperplan à l'infini $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ d'équation $w = 0$ coupe $\tilde{\mathcal{J}}$ le long de $\tilde{\mathcal{I}}_\infty$. J'utiliserai aussi des versions affines ou vectorielles de ces ensembles,

$$\mathcal{I}_\infty = \{x \in \mathbf{C}^n - \{0\} \mid F(x) = 0\},$$

l'intersection des cônes isotropes des formes quadratiques $F_1, \dots, F_n$ et

$$\mathcal{J} = \{x \in \mathbf{C}^n - \{0\} \mid F(x) + x = 0\},$$

que j'appellerai l'ensemble indiciel du système (pour des raisons qui ne devraient pas tarder à être claires).

Bien évidemment, si deux systèmes quadratiques sont équivalents, on passe de l'ensemble indiciel de l'un à celui de l'autre par un isomorphisme linéaire de $\mathbf{C}^n$.

En général, n quadriques de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ se coupent en 2^n points et n quadriques de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ ne se coupent pas du tout. Ainsi, « en général », $\tilde{\mathcal{J}}_\infty$ et $\mathcal{J}_\infty$ doivent être vides, $\tilde{\mathcal{J}}$ constitué de 2^n points et $\mathcal{J}$ de $2^n - 1$ points.

On peut montrer (voir par exemple [17]) que les systèmes généraux en ce sens sont génériques, au sens où ils constituent un ouvert dense de l'ensemble des champs de vecteurs quadratiques. Nous allons voir que la plupart des systèmes que nous avons nommés (et donc particularisés) au début de ce papier sont loin d'être généraux en ce sens.

Remarque 2.1.1. Comme l'intersection homologique des n quadriques n'est pas nulle, alors ces quadriques doivent se couper, en particulier $\tilde{\mathcal{J}}$ n'est pas vide. Si $[x, w] \in \mathcal{J}$, alors soit $w = 0$ et $x \in \mathcal{J}_\infty$, soit $w \neq 0$ et $[x, w] = [x_0, 1]$ pour $x_0 \in \mathcal{J}$.

2.2. Le rang du système. — Le rang $r \leq n$ de la famille $F_1, \dots, F_n$ dans l'espace vectoriel des formes quadratiques est évidemment un invariant de la classe d'équivalence du système.

- Si $r = 1$, il y a une seule forme quadratique q , de sorte que le système s'écrit

$$\dot{x} = q(x)V \text{ où } V \text{ est un vecteur constant.}$$

Si L est une forme linéaire qui s'annule sur le vecteur V , alors elle est clairement une intégrale première du système différentiel, de sorte que ce système a $n - 1$ intégrales premières linéaires indépendantes. Il est très facile de résoudre explicitement un tel système (voir au besoin ci-dessous le § 4.1).

- Si $r \leq n - 1$, l'image de F est en tout cas contenue dans un hyperplan $\mathcal{H}$ et il s'agit en fait de considérer $n - 1$ (ou moins) formes quadratiques, ce qui rend les variantes de l'ensemble indiciel envisagées ci-dessus beaucoup plus grosses que génériquement. L'ensemble indiciel $\mathcal{J}$ est contenu dans $\mathcal{H}$. C'est ce qui se produit dans l'exemple de Kac-van Moerbeke (voir le § ??) où l'hyperplan $\mathcal{H}$ est celui d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

2.3. Le cas de la dimension 3. — Considérons le cas où $n = 3$. Le rang du système peut être 0, 1, 2 ou 3. Nous avons déjà écarté le cas du rang 0 et évoqué celui du rang 1.

Si le rang est 2, deux des formes quadratiques, disons F_1 et F_2 , sont indépendantes, et F_3 en est une combinaison linéaire. Le système possède une intégrale première linéaire (et essentiellement une seule). C'est le cas pour le système de Kac-van Moerbeke (§ ??, dont nous verrons qu'il est intégrable) et pour celui de Lotka-Volterra (§ ??, dont nous discuterons l'intégrabilité plus bas (au § 4.1)). Remarquons que les trois coniques d'équations $F_i = 0$ appartiennent ici au même pinceau.

Si le rang est 3, considérons le pinceau défini par les deux premières formes quadratiques et choisissons deux coniques distinctes de ce pinceau que nous considérons comme plus simples, par exemple deux coniques dégénérées. Le système est équivalent à celui obtenu en utilisant ces formes comme deuxième membre. Voir les exemples au § ??.

Remarque 2.3.1. Le cas d'un système quadratique générique dans $\mathbf{C}^3$ serait celui de deux coniques F_1 et F_2 en position générale, se coupant donc en quatre points, et d'une troisième conique F_3 indépendante des deux premières et donc ne passant pas par tous les points base du pinceau. L'exemple de Halphen (§ ??) est celui d'un système respectable dont les trois coniques sont indépendantes mais dont tous les points base du pinceau défini par les deux premières sont sur la troisième.

2.4. Les matrices de Kovalevskaya. — Considérons maintenant l'application bilinéaire Φ associée à F . Pour tout point fixé $x_0 \in \mathcal{J} \subset \mathbf{C}^n$, on appelle matrice de Kovalevskaya du système en x_0 la « matrice » $\mathcal{K}_{x_0}$ définie par

$$\mathcal{K}_{x_0}(Y) = 2\Phi(x_0, Y)$$

où Φ désigne la forme polaire de F . Il est clair que la forme polaire de F doit jouer un rôle dans la géométrie du système. Nous verrons (et c'est la raison pour laquelle elles sont nommées ainsi) les matrices de Kovalevskaya intervenir dans sa résolution et la discussion de son intégrabilité⁽¹⁾.

Proposition 2.4.1. *La matrice de Kovalevskaya $\mathcal{K}_{x_0}$ admet toujours la valeur propre -2 .*

En effet, $\mathcal{K}_{x_0}(x_0) = 2\Phi(x_0, x_0) = 2F(x_0) = -2x_0$. □

Remarquons aussi le lien des matrices de Kovalevskaya avec l'espace tangent de l'ensemble indiciel. Si $x_0 \in \mathcal{J}$, $[x_0, 1]$ est un point d'intersection des quadriques $F(x) + wx = 0$. L'espace projectif tangent à $\tilde{\mathcal{J}}$ en ce point est l'espace déterminé par les équations linéaires

$$2\Phi(x_0, X) + w_0X + Wx_0 = 0,$$

l'espace affine tangent est donné par $W = 1$, il est dirigé par

$$T_{x_0}\mathcal{J} = \{X \in \mathbf{C}^n \mid 2\Phi(x_0, X) + X = 0\},$$

le sous-espace propre de $\mathcal{K}_{x_0}$ pour la valeur propre -1 .

Proposition 2.4.2. *La matrice de Kovalevskaya $\mathcal{K}_{x_0}$ a la valeur propre -1 si et seulement si l'espace tangent à l'ensemble indiciel $\mathcal{J}$ en x_0 est de dimension ≥ 1 . La dimension du sous-espace propre correspondant est la dimension de $\mathcal{J}$ en x_0 .* □

2.5. L'algèbre de Markus. — Il est naturel, suivant Markus [15], de considérer la structure d'algèbre sur $\mathbf{C}^n$ définie par

$$x \cdot y = \Phi(x, y).$$

Cette algèbre est commutative, par définition, mais n'a aucune raison d'être associative. On a bien sûr $x \cdot x = F(x)$.

Une façon équivalente de définir l'algèbre de Markus est de considérer l'écriture en coordonnées du système avec les coefficients $a_{j,k}^i$ et de dire que ces $a_{j,k}^i$ sont les constantes structurelles d'une structure d'algèbre, celle pour laquelle les éléments u_i d'une base se multiplient selon la règle

$$u_j \cdot u_k = \sum_i a_{j,k}^i u_i.$$

Remarque 2.5.1. Un système qui possède une intégrale première linéaire ou, si l'on préfère, dont le second membre est à valeurs dans un hyperplan, donne une algèbre de Markus de la forme $\mathbf{C}^{n-1} \oplus \mathbf{C}$ avec $(x, t) \cdot (x', t') = (y, 0)$ pour tous $(x, t), (y', t') \in \mathbf{C}^n$.

On réinterprète en termes de cette algèbre les ensembles indiciels définis géométriquement ci-dessus :

- Les éléments de $\mathbf{C}^n$ de carré nul sont les zéros du vecteur F , les vecteurs isotropes simultanément pour les n formes quadratiques $F_1, \dots, F_n$, les points communs aux quadriques $F_i = 0$ dans $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$, c'est-à-dire les points de $\mathcal{J}_\infty$,
- les éléments idempotents sont les points de $-\mathcal{J}$.

De la remarque 2.1.1, on déduit :

Proposition 2.5.2. *L'algèbre de Markus contient toujours un idempotent ou un nilpotent d'indice 2.* □

Remarque 2.5.3. Ce résultat est vrai aussi sur $\mathbf{R}$ (voir XX).

Proposition 2.5.4. *Pour que $e \in \mathbf{C}^n$ soit élément neutre de l'algèbre de Markus, il faut et il suffit que $-e \in \mathcal{J}$ et que $\mathcal{K}_{-e} = -2\text{Id}$.*

⁽¹⁾Cette matrice diffère de celle appelée matrice de Kovalevskaya dans [1] qui est la nôtre plus l'identité. Dans le cas quadratique considéré ici, « notre » matrice est plus agréable puisque, d'une part l'application $x_0 \mapsto \mathcal{K}_{x_0}$ est linéaire et, d'autre part, $\mathcal{K}_{x_0}$ est essentiellement la matrice du système différentiel linéarisé (voir ci-dessous).

En effet, un élément neutre est idempotent, donc $-e \in \mathcal{J}$ et $e \cdot x = x$ pour tout x se lit aussi $\Phi(e, x) = x$ pour tout x , ou encore

$$\mathcal{K}_{-e}(x) = -2\Phi(e, x) = -2x,$$

et ceci doit être vrai pour tout $x \in \mathbf{C}^n$. $\square$

Plus généralement, pour $x_0 \in \mathcal{J}$, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre -2 pour la matrice $\mathcal{K}_{x_0}$ est la dimension de $\{x \in \mathbf{C}^n \mid -x_0 \cdot x = x\}$.

Remarque 2.5.5. Un élément neutre pour l'algèbre de Markus est toujours (à cause de la proposition 2.4.2) un point isolé de $\mathcal{J}$.

Propriétés de l'algèbre de Markus. — La première propriété de cette algèbre est la suivante :

Proposition 2.5.6 (Markus [15]). *Les algèbres associées à deux systèmes quadratiques sont isomorphes si et seulement si ces deux systèmes sont équivalents.*

Cette proposition permet de distinguer effectivement certains systèmes entre eux (voir les propositions ??XX).

On a bien sûr aussi :

Proposition 2.5.7. *Le groupe $\text{Aut}(F)$ des automorphismes du champ de vecteurs quadratique F est le groupe des automorphismes de son algèbre de Markus.* $\square$

Les éléments nilpotents d'ordre 2 dans l'algèbre de Markus, que nous avons envisagés d'un point de vue géométrique au § 2.1, d'un point de vue plus algébrique ici, ont aussi, bien sûr, une interprétation en termes du système différentiel proprement dit. Comme le second membre, F , est quadratique, l'origine est toujours un zéro du champ de vecteurs, une singularité du système. À cause de l'homogénéité du second membre, si le second membre s'annule ailleurs qu'en 0, c'est-à-dire si $F(x) = 0$ a une solution x non nulle, alors toute la droite complexe engendrée par x est constituée de points critiques. Choisissons un vecteur non nul v_1 de cette droite et complétons le en une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{C}^3$. Dans cette base, comme $F(v_1) = 0$, les coefficients $a_{1,1}^i$ apparaissant dans le système différentiel sont tous nuls. Donc le vecteur v_1 vérifie $v_1 \cdot v_1 = 0$. La réciproque de cette propriété est immédiate et l'ensemble forme un autre des résultats de Markus :

Proposition 2.5.8 (Markus [15]). *Le système quadratique a une singularité isolée en 0 si et seulement si l'algèbre associée n'a pas d'élément nilpotent d'ordre 2.* $\square$

Pour que la singularité en 0 soit isolée, il est donc nécessaire et suffisant que l'ensemble $\mathcal{J}_\infty$ soit vide (c'est une des raisons de considérer avec attention les solutions de $F(x) = 0$). Lorsque ce n'est pas le cas, le système différentiel possède, pour tout $x_0 \in \mathcal{J}_\infty$, les solutions constantes $t \mapsto Cx_0$ (pour $C \in \mathbf{C}$).

Proposition 2.5.9 (Markus [15]). *Le système quadratique a une solution non constante dont le support est contenu dans une droite engendrée par un vecteur v si et seulement si un multiple de ce vecteur v est un idempotent de l'algèbre associée.*

Démonstration. Supposons qu'une solution ait son support contenu dans la droite engendrée par un vecteur non nul v_1 et choisissons ce vecteur comme premier vecteur d'une base de $\mathbf{C}^3$. Le vecteur $(x_1(t), 0, 0)$ est solution du système différentiel, donc dans les lignes autres que la première, il n'y a pas de terme x_1^2 . On a donc $a_{1,1}^i = 0$ pour $i \geq 2$ et

$$v_1 \cdot v_1 = \lambda v_1 \text{ pour un } \lambda \neq 0.$$

Le vecteur $v = v_1/\lambda$ est alors un idempotent. $\square$

C'est dire que $-v \in \mathcal{J}$. il est bien clair que, pour $x_0 \in \mathcal{J}$, $t \mapsto t^{-1}x_0$ est solution du système. Si $x(t) = t^{-1}x_0$, on a $\dot{x}(t) = -t^{-2}x_0$ et $F(x(t)) = t^{-2}F(x_0)$, de sorte que $\dot{x} = F(x)$ si et seulement si $x_0 \in \mathcal{J}$.

Dit autrement, pour $x_0 \in \mathcal{J}$, le flot du champ de vecteurs F est

$$\varphi^t(x_0) = \frac{x_0}{1+t}$$

(une solution qui part à l'infini en temps fini) et plus généralement, en reparamétrisant pour les points de cette droite,

$$\varphi^t(\alpha x_0) = \frac{\alpha}{1 + \alpha t} x_0.$$

Nous allons voir les idempotents jouer un rôle important dans les questions d'intégrabilité.

2.6. Étude spécifique des algèbres de Markus ayant un élément neutre. —

2.6.a. *Le cas de la dimension 2.* — Supposons que l'algèbre de Markus ait un élément neutre e et soit de dimension 2. Soit v un vecteur indépendant de e . On a

$$e \cdot e = e, \quad e \cdot v = v, \quad \text{et } v \cdot v = ae + bv.$$

Si $b = 0$, en multipliant v par un scalaire convenable, on peut supposer que $v \cdot v = 0$ ou $v \cdot v = e$.

Sinon, posons $u = \alpha e + \beta v$, de sorte que

$$u^2 = (\alpha^2 + a\beta^2)e + \beta(\beta b + 2\alpha)v.$$

Si $b^2 + 4a = 0$, on peut choisir α et β de façon que $u \cdot u = 0$, sinon, on peut les choisir de façon que $u \cdot u = e$. On a démontré que les algèbres de Markus de dimension 2 possédant un élément neutre sont isomorphes à l'une des deux algèbres

$$\begin{cases} u_1 \cdot u_1 = u_1 \\ u_1 \cdot u_2 = u_2 \\ u_2 \cdot u_2 = u_1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 \cdot u_1 = u_1 \\ u_1 \cdot u_2 = u_2 \\ u_2 \cdot u_2 = 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas, en posant $v_1 = (u_1 + u_2)/2$, $v_2 = (u_1 - u_2)/2$, on voit que l'algèbre est somme directe de deux algèbres de dimension 1. Le système différentiel correspondant est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, le système est

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2. \end{cases} \quad (\text{Ac})_0^2$$

J'appelle ce système $(\text{Ac})_0^2$ (Ac pour académique, 2 pour la dimension et 0 parce qu'il y aura au § ?? un système $(\text{Ac})_a^2$ pour un paramètre a qui vaut ici 0).

Nous rencontrerons plus bas (proposition 4.2.7) une autre propriété des systèmes dont l'algèbre de Markus possède un élément neutre : ils n'ont pas d'intégrale première polynomiale et tout semble indiquer qu'ils ne sont pas intégrables. Pourtant ils possèdent une propriété d'invariance qui permet d'en construire des solutions. Pour l'essentiel, ce qui suit est inspiré de la note de Halphen [8].

Proposition 2.6.1. *Soit F un champ de vecteurs quadratique sur $\mathbf{C}^n$. On suppose que l'algèbre de Markus associée possède un élément neutre e . L'application*

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n &\longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \\ (t, y) &\longmapsto (u(t), \alpha(t)e + u'(t)y) \end{aligned}$$

transforme une solution $y(u)$ de $\frac{dy}{du} = F(y)$ en une solution $x(t)$ de $\frac{dx}{dt} = F(x)$ lorsque le couple (α, u') est solution du système $(\text{Ac})_0^2$.

Cette proposition permet de construire beaucoup de solutions du système à partir d'une solution donnée. Remarquons que, lorsque (α, u') satisfait à la condition de la proposition, les deux fonctions ont des pôles et ne sont donc pas définies partout. Les solutions sont en effet

$$\alpha(t) = \frac{1}{A-t}, \quad u'(t) = \frac{B}{(A-t)^2}, \quad u(t) = \frac{B}{A-t} + C.$$

Il y a bien sûr trois paramètres libres dans la solution $u(t)$ (remarquons aussi que $t \mapsto u(t)$ est une homographie). En particulier, si $n = 3$, on peut espérer obtenir ainsi « toutes les solutions » ou « la solution générale » à partir d'une solution bien choisie, si $x(t)$ est une solution,

$$\frac{1}{A-t}e + \frac{B}{(A-t)^2}x \left(\frac{B}{A-t} + C \right)$$

en est une aussi, pour tout choix de $(A, B, C) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$.

Ce qui ne donne pas forcément du nouveau. Par exemple la solution rationnelle $t \mapsto -t^{-1}e$ est un « mauvais » choix puisque la formule ci-dessus donne alors

$$t \longmapsto \frac{C}{B + C(A-t)}e = \frac{1}{D-t}e$$

(la même solution au choix de l'origine du temps près).

Démonstration. La démonstration de la proposition est une simple vérification. Posons

$$x(t) = \alpha(t)e + \beta(t)y$$

de sorte que

$$\frac{dx}{dt} = \dot{\alpha}(t)e + \dot{\beta}(t)y + \beta(t)\frac{dy}{du}F(y)$$

et que

$$F(x) = F(\alpha e + \beta y) = \alpha^2 e + 2\alpha\beta y + \beta^2 F(y)$$

puisque e est élément neutre. Si $\frac{dy}{du} = F(y)$, il est clair que

$$\dot{\alpha} = \alpha^2, \quad \dot{\beta} = 2\alpha\beta, \quad \dot{u} = \beta$$

donnent un x solution. □

3. Étude des conditions d'intégrabilité de Kovalevskaya et Liapounov

Étudions ici la condition d'intégrabilité de Kovalevskaya, c'est-à-dire le fait que le système ait des solutions méromorphes (c'est-à-dire, comme Kovalevskaya, aux développements de ces solutions en séries de Laurent, pas de Puiseux).

3.1. Des solutions méromorphes ? —

Remarque 3.1.1. La question d'avoir des solutions méromorphes peut sembler très artificielle. De très simples et respectables systèmes quadratiques se résolvent explicitement très facilement... sans pour autant avoir beaucoup de solutions méromorphes. Par exemple, le système (académique)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 \\ \dot{x}_3 = 0, \end{cases} \quad (\text{Ac})^3$$

variante homogène de l'équation du second ordre $\ddot{x}_1 = \dot{x}_1^2$, a pour solution générale

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-C \log(t - B) + A, -\frac{1}{t - B}, C \right).$$

Les solutions méromorphes sont celles pour lesquelles $C = 0$, il y en a assez peu (l'équation non homogène n'en a d'ailleurs aucune (ses solutions correspondent à $C = 1$). Pourtant cette question des solutions méromorphes est (et surtout a été) assez féconde pour engendrer la théorie des systèmes algébriquement complètement intégrables.

Remarquons que, comme les systèmes considérés sont autonomes, on peut ne s'intéresser qu'au cas de pôles en $t = 0$.

Si une solution x a un pôle d'ordre α en 0, c'est-à-dire si le vecteur x s'écrit

$$x = t^{-\alpha}(x_0 + ty(t)) \text{ où } x_0 \neq 0, y \text{ est holomorphe au voisinage de } 0 \text{ et } \alpha \geq 1,$$

alors $\dot{x} = F(x)$ s'écrit

$$-t^{-\alpha-1}(\alpha x_0 + t((\alpha-1)y + t\dot{y})) = t^{-2\alpha}F(x_0 + ty).$$

On a donc :

Proposition 3.1.2. *Si une solution est une fonction méromorphe du temps et s'écrit $x = t^{-\alpha}(x_0 + ty(t))$ (avec y holomorphe en 0), alors,*

- soit $x_0 \in \mathcal{J}_\infty$ est le pôle est au moins double,
- soit $x_0 \in \mathcal{J}$ est le pôle est simple.

□

Exemple 3.1.3. Reprenons l'exemple (académique) du système $(Ac)_0^2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2 \end{cases} \quad (Ac)_0^2$$

dont la solution générale est

$$x(t) = \left(-\frac{1}{t-A}, \frac{B}{(t-A)^2} \right)$$

(toutes les solutions sont méromorphes), et que l'on peut écrire, après avoir changé l'origine du temps,

$$x(t) = t^{-2}((0, B) + t(-1, 0)) = t^{-2}(x_0 + ty(t)) \text{ avec } x_0 = (0, B) \in \mathcal{J}_\infty.$$

Nous étudions surtout dans la suite des solutions qui ont un pôle simple en 0 (c'est-à-dire dont aucune des coordonnées n'a de pôle d'ordre supérieur ou égal à 2).

3.2. Le critère de Liapounov. —

Proposition 3.2.1. *Soit $x_0 \in \mathcal{C}^n$. Alors*

- (1) $x(t) = t^{-1}x_0$ est une solution du système si et seulement si x_0 est élément de $\mathcal{J}$.
- (2) Les solutions de l'équation linéarisée le long de cette solution sont des fonctions (univaluées) de t si et seulement si la matrice de Kovalevskaya associée à x_0 est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres entières.

Démonstration. La première assertion est rappelée ici dans un souci de complétude : nous avons déjà remarqué qu'elle est vraie. Pour montrer la deuxième, on remarque d'abord que l'équation linéarisée le long de cette solution est

$$\dot{X}(t) = 2\Phi(t^{-1}x_0, X(t)) = t^{-1}\mathcal{K}_{x_0}(X(t)).$$

On pose ensuite $t = e^s$. Le système devient $X'(s) = \mathcal{K}_{x_0}X(s)$, ce qui s'intègre sans mal (puisque la matrice est constante) en

$$X(s) = \exp(s\mathcal{K}_{x_0})X(0).$$

On écrit ensuite $\mathcal{K}_{x_0} = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. Alors

$$X(s) = \exp(sD)\exp(sN)X(0).$$

La matrice $\exp(sN)$ est un polynôme en $s = \log t$, il est donc nécessaire que ce polynôme soit constant, donc $N = 0$ et $\mathcal{K}_{x_0}$ est diagonalisable. Ensuite, dans une base où elle est diagonale, les composantes des vecteurs solutions s'écrivent $y_i(t) = t^{\lambda_i}y_i(0)$, il est donc nécessaire que les λ_i soient entiers. La réciproque est claire. □

C'est pour la raison qui apparaît dans cette démonstration que les valeurs propres des matrices de Kovalevskaya sont souvent appelées *exposants* de Kovalevskaya.

Remarques 3.2.2.

- (1) Le système linéarisé le long des solutions issues de $\mathcal{J}$ a une singularité régulière en 0.
- (2) Le vecteur $X(t) = -t^{-2}x_0$, vecteur tangent à la solution choisie, est, comme il se doit, solution de l'équation linéarisée. On a

$$\dot{X}(t) = 2t^{-3}x_0 = \mathcal{K}_{t^{-1}x_0}(-t^{-2}x_0) = -t^{-3}\mathcal{K}_{x_0}(x_0).$$

Nous l'avons dit (proposition 2.4.1), la matrice $\mathcal{K}_{x_0}$ a toujours (quand $x_0 \in \mathcal{J}$) la valeur propre -2 (pour le vecteur propre x_0).

3.3. Le critère de Kovalevskaya Les propriétés de la matrice de Kovalevskaya jouent donc un rôle important dans les questions d'intégrabilité qui nous intéressent. Il se trouve que les propriétés qui lui font satisfaire le critère de Kovalevskaya sont presque identiques à celles qui lui font satisfaire celui de Liapounov, comme le montre la comparaison entre la proposition suivante⁽²⁾ et la précédente.

Proposition 3.3.1. *Pour que toutes les solutions du système différentiel soient des fonctions méromorphes du temps avec un pôle simple, il est nécessaire que la matrice $\mathcal{K}_{x_0}$ soit diagonalisable à valeurs propres entières, toutes positives ou nulles sauf la valeur propre -2 , et que celle-ci ait multiplicité 1.*

Remarque 3.3.2. Il s'agit bien d'une condition nécessaire pour que les solutions soient méromorphes à pôles simples. Dans l'exemple académique $(Ac)_0^2$ considéré ci-dessus (exemple 3.1.3) dont nous avons vu que toutes les solutions sont méromorphes, la matrice de Kovalevskaya en $(-1, 0) \in \mathcal{J}$ est -2Id , qui ne satisfait absolument pas à la propriété requise (la matrice $\mathcal{K}_x$ en $x \in \mathcal{J}_\infty$ non plus).

Démonstration de la proposition. C'est la méthode utilisée par Kovalevskaya elle-même (dans la lettre citée) et c'est la raison pour laquelle on donne son nom à la matrice $\mathcal{K}_{x_0}$. On cherche les solutions du système sous la forme

$$x(t) = t^{-1} \sum_{k \geq 0} x_k t^k$$

où les vecteurs x_k sont à déterminer. Le système différentiel se traduit dans l'équation

$$-x_0 + \sum_{k \geq 1} (k-1)x_k t^k = F\left(\sum_{k \geq 0} x_k t^k\right)$$

que l'on résout de proche en proche. Le terme constant donne

$$-x_0 = F(x_0), \text{ soit } x_0 \in \mathcal{J},$$

le terme en t donne

$$0 = 2\Phi(x_0, x_1) = \mathcal{K}_{x_0}(x_1) \text{ donc } x_1 \in \text{Ker } \mathcal{K}_{x_0}.$$

Puis, en supposant $x_0, \dots, x_{k-1}$ connus, le terme en t^k donne

$$\begin{aligned} (k-1)x_k &= \Phi(x_0, x_k) + \Phi(x_1, x_{k-1}) + \dots + \Phi(x_k, x_0) \\ &= 2\Phi(x_0, x_k) - V_{k-1} \end{aligned}$$

où V_{k-1} est un vecteur qui ne dépend que de $x_0, \dots, x_{k-1}$. Le vecteur x_k est donc solution de l'équation

$$(\mathcal{K}_{x_0} - (k-1)\text{Id})x_k = V_{k-1}$$

qui a une solution unique si et seulement si $k-1$ n'est pas valeur propre de $\mathcal{K}_{x_0}$.

Pour que les solutions de l'équations soient toutes méromorphes, il est nécessaire que le résultat de tous ces calculs donne un espace de solutions de dimension $n-1$ (le système est d'ordre n mais il est autonome et il y a une constante d'intégration cachée dans le choix de l'origine du temps). Il est donc nécessaire que la somme des dimensions des espaces solutions de

$$(\mathcal{K}_{x_0} - (k-1)\text{Id})x_k = V_{k-1} \text{ pour } k \geq 1$$

soit égale à $n-1$. Ce qui, d'abord, ne laisse que multiplicité 1 à la valeur propre -2 . Chacun de ces sous-espaces affines est vide ou de dimension la dimension du sous-espace propre de $\mathcal{K}_{x_0}$ pour la valeur propre $k-1$. Il est donc nécessaire que la somme des dimensions de ces sous-espaces propres soit $n-1$. D'où la proposition. $\square$

Remarque 3.3.3. Les valeurs propres des matrices de Kovalevskaya satisfaisant à l'un des critères de Kovalevskaya ou de Liapounov sont donc constantes le long des composantes connexes de l'ensemble indicial $\mathcal{J}$.

Corollaire 3.3.4. *Pour qu'un système quadratique satisfasse à la condition d'intégrabilité de Kovalevskaya, il est nécessaire que son ensemble indicial $\mathcal{J}$ soit de dimension 0.*

Démonstration. Sinon, la proposition 2.4.2 nous dit que $\mathcal{K}_{x_0}$ a la valeur propre -1 . $\square$

⁽²⁾Les résultats contenus dans ce paragraphe et le précédent sont bien connus (on les trouvera par exemple, pour des systèmes homogènes plus généraux, dans [1, Chapitre 7]).

Proposition 3.3.5. *Les solutions de Laurent formelles obtenues par la méthode de Kovalevskaya sont convergentes.*

Démonstration. La démonstration que je donne ici est inspirée d'une démonstration plus générale de [1]. Fixons $x_0 \in \mathcal{I}$ et appelons ℓ le plus petit entier plus grand que la plus grande valeur propre λ de $\mathcal{K}_{x_0}$. Ainsi, pour $m \geq \ell$, $\mathcal{K}_{x_0} - m \text{Id}$ est inversible et l'on a

$$\|\mathcal{K}_{x_0} - m \text{Id}\| \geq \ell - \lambda = \frac{1}{A} > 0$$

et donc aussi, pour

$$x_{m+1} = (\mathcal{K}_{x_0} - m \text{Id})^{-1} (V_m), \quad \|x_{m+1}\| \leq A \|V_m\|.$$

Nous voulons montrer que la série $x_0 + \sum_{k \geq 1} t^k x_k$ est convergente (la solution de Laurent correspondante est $t^{-1}(x_0 + \sum_{k \geq 1} t^k x_k)$). Par définition de V_m ,

$$\|V_m\| \leq \|\Phi\| \sum_{\substack{a+b=m \\ a,b \geq 1}} \|x_a\| \|x_b\|.$$

Soient $B_1 = 1 + \sup \{\|x_a\| \mid a \leq \ell\}$, puis par récurrence

$$B_m = A \|\Phi\| \sum_{\substack{a+b=m \\ a,b \geq 1}} B_a B_b \text{ pour } m \geq 2,$$

et enfin

$$f(t) = \sum_{m \geq 1} B_m t^m.$$

L'idée est que les coefficients de la série entière f majorent les normes des x_k , et que la définition de ces coefficients par récurrence permet de calculer cette série f est de montrer qu'elle est convergente, on en déduit la convergence normale désirée de la série $\sum x_k t^k$ pour $|t|$ petit.

Montrons d'abord que $\|x_k\| \leq B_k$. Pour $k \leq \ell$, on a $\|x_k\| \leq B_1$ (par définition de B_1) et $B_1 \leq B_k$ (par définition de B_k). Pour $k > \ell$, c'est une récurrence :

$$\begin{aligned} \|x_k\| &\leq A \|V_{k-1}\| \\ &\leq A \|\Phi\| \sum_{\substack{a+b=k \\ a,b \geq 1}} \|x_a\| \|x_b\| \\ &\leq A \|\Phi\| \sum_{\substack{a+b=k \\ a,b \geq 1}} B_a B_b = B_k. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que f est solution d'une équation du second degré :

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - B_1 t}{A \|\Phi\|} &= \frac{1}{A \|\Phi\|} \sum_{k \geq 2} B_k t^k \\ &= \sum_{k \geq 2} t^k \left(\sum_{\substack{a+b=k \\ a,b \geq 1}} B_a B_b \right) \\ &= \left(\sum_{a \geq 1} B_a t^a \right) \left(\sum_{b \geq 1} B_b t^b \right) \\ &= f(t)^2, \end{aligned}$$

de sorte que

$$f(t) = \frac{1 - (1 - 4A \|\Phi\| B_1 t)^{1/2}}{2A \|\Phi\|}$$

est holomorphe au voisinage de 0 et donc que la série définissant f est bien convergente au voisinage de 0. C'est ce que nous voulions démontrer. $\square$

3.4. Retour aux automorphismes. — Le fait que le groupe d'automorphismes n'est pas très intéressant est confirmé par la proposition suivante.

Proposition 3.4.1. *Si l'ensemble indicial du système est fini et non vide, son groupe d'automorphismes est un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathcal{I}$ (et en particulier c'est un groupe fini).*

Démonstration. Soit N le cardinal de $\mathcal{I}$. Le groupe $\text{Aut}(F)$ opère sur $\mathcal{I}$, ce qui donne un homomorphisme de groupes

$$\text{Aut}(F) \longrightarrow \mathfrak{S}_N.$$

Il suffit pour démontrer la proposition, de montrer que le noyau K de ce morphisme est un groupe fini. Soit donc $\varphi \in \text{Aut}(F)$ un automorphisme qui fixe chaque élément de $\mathcal{I}$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. Considérons le système différentiel linéarisé le long de la solution particulière (rationnelle) $t \mapsto t^{-1}x_0$,

$$\dot{Y} = 2\Phi(t^{-1}x_0, Y) = 2t^{-1}\Phi(x_0, Y).$$

Remarquons que cette équation est à singularités régulières, d'une part, et de l'autre que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(Y) &= \varphi(\dot{Y}) = 2t^{-1}\varphi(\Phi(x_0, Y)) \\ &= 2t^{-1}\Phi(\varphi(x_0), \varphi(Y)) \\ &= 2t^{-1}\Phi(x_0, \varphi(Y)) \end{aligned}$$

puisque $\varphi(x_0) = x_0$, et donc φ transforme une solution en une solution. Ainsi le noyau K est un sous-groupe du groupe de Galois de cette équation linéaire. Comme l'équation est fuchsienne, ce groupe de Galois est l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie qui, comme la solution est rationnelle est trivial. Donc K est trivial et $\text{Aut}(F)$ fini (chacun de ses éléments étant déterminé par les images des éléments de $\mathcal{I}$). $\square$

4. L'intégrabilité au sens de Liouville

Comme nous sommes dans $\mathbf{C}^n$ ou, quand nous y serons forcés, dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$, utilisons la forme bilinéaire symétrique standard

$$\langle X, Y \rangle = \langle (\sum X_i e_i), (\sum Y_i e_i) \rangle = \sum X_i Y_i$$

et des notations vectorielles,

$$\text{grad}_x H = \sum \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) e_i.$$

Avec ces notations, si $H : U \rightarrow \mathbf{C}$ est une intégrale première du système sur un ouvert U de $\mathbf{C}^n$, on a pour tout $x \in U$,

$$(dH)_x(F(x)) = 0 \text{ ou } \langle \text{grad}_x H, F(x) \rangle = 0.$$

Si $n = 3$ j'utiliserai aussi, sans état d'âme, le « produit vectoriel »

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}, \text{ un vecteur orthogonal à } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et à } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

4.1. Structures de Poisson et systèmes hamiltoniens intégrables en dimensions 2 et 3. —

Dire que le système est hamiltonien, c'est dire qu'il existe une structure de Poisson sur $\mathbf{C}^n$, notée $\{ , \}$, et une fonction H telles que le système s'écrive

$$\dot{x}_i = \{x_i, H(x)\} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Lorsque c'est le cas, H est une intégrale première. Dire que le système est intégrable, c'est dire qu'il possède, en plus des fonctions K qui satisfont à $\{f, K\} = 0$ pour tout f (les « Casimir » de la structure de Poisson), « assez » d'intégrales premières qui commutent. Ici, « assez » veut dire $(n - p)/2$ si p est le nombre de Casimir.

Je vais m'intéresser ici spécifiquement aux cas des petites dimensions ($n = 3$, mais aussi $n = 2$ à titre d'introduction) et démontrer qu'un système en dimension 2 (resp. 3) qui possède une (resp. deux) intégrale(s) première(s) est un système hamiltonien.

En dimension 2. — Si $n = 2$ et si le système possède une intégrale première H sur un ouvert U de $\mathbf{C}^2$, de $\text{grad}_x H \cdot F(x) = 0$, on déduit que $F(x)$ doit être de la forme

$$F(x) = f(x) \left(-\frac{\partial H}{\partial x_2}, \frac{\partial H}{\partial x_1} \right)$$

et donc que le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -f(x) \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = f(x) \frac{\partial H}{\partial x_1}. \end{cases}$$

C'est donc un système hamiltonien pour la forme symplectique

$$\omega = \frac{1}{f} dx_1 \wedge dx_2$$

sur l'ouvert de $\mathbf{C}^2$ où la fonction f n'est pas nulle. Autrement dit, si le système possède une intégrale première sur ou ouvert, alors il existe une structure symplectique pour laquelle le système est hamiltonien. La fonction f (ou son inverse $1/f$) est le classique « facteur intégrant ».

Exemple 4.1.1. Il est clair que la fonction $H(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{x_1^2}$ est une intégrale première (rationnelle) pour le système $(\text{Ac})_0^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 \end{cases} \quad (\text{Ac})_0^2$$

Ce système admet le facteur intégrant $f(x_1, x_2) = x_1^4$, il est hamiltonien pour la forme symplectique $\frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1^4}$ avec le hamiltonien H .

Exemple 4.1.2. Considérons le cas d'un système dont le second membre consiste de deux formes proportionnelles,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \lambda F_1(x_1, x_2), \end{cases}$$

de sorte que $H = x_2 - \lambda x_1$ est une intégrale première (linéaire), que nous avons bien

$$F(x) = F_1(x) \left(-\frac{\partial H}{\partial x_2}, \frac{\partial H}{\partial x_1} \right),$$

et que le système est hamiltonien sur l'ouvert où F_1 n'est pas nulle (le complémentaire de son cône isotrope), pour la forme symplectique

$$\omega = -\frac{1}{F_1} dx_1 \wedge dx_2.$$

Notons qu'il est aisé d'« intégrer » explicitement ce système grâce à l'intégrale première H , qui donne

$$x_2 = C_1 + \lambda x_1 \text{ et } \dot{x}_1 = F_1(x_1, C_1 + \lambda x_1) = ax_1^2 + 2bx_1 + c,$$

qui se résout en

$$x_1 = \begin{cases} (ct + C_2)e^{2bt} & \text{si } a = 0 \\ \frac{-2(au + b)}{a - C_2 e^{-2(au+b)t}} - u & \text{si } a \neq 0 \text{ et } au + b \neq 0 \\ \frac{1}{C_2 - at} - \frac{b}{a} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } au + b = 0 \end{cases}$$

(où u est une racine, simple dans le premier cas, double dans le deuxième, de $au^2 + bu + c = 0$). Remarquons que ces solutions sont des fonctions méromorphes du temps (en général avec une singularité essentielle à l'infini).

Les solutions sont méromorphes rationnelles si $a = 0$ ou $au + b = 0$, définies sur $\mathbf{C}/T\mathbf{Z}$ (pour $T = i\pi/(au + b)$) et avec une singularité essentielle à l'infini sinon. Pour conclure sur cet exemple,

remarquons qu'ici, l'ensemble indiciel $\mathcal{I}$ est formé des points $x_0 = (x_1, \lambda x_1)$ tels que $-x_1 = F_1(x_1, x_1)$, en général une équation du second degré, la matrice de Kovalevskaya en ses points a la valeur propre -2 et la valeur propre 0 . Il n'est donc pas étonnant que les solutions soient méromorphes. Remarquons pour finir que le même calcul s'applique en dimension n à tous les systèmes quadratiques qui ont $n - 1$ intégrales premières linéaires.

Exemple 4.1.3. Considérons le classique exemple de Lotka-Volterra (LV) (même s'il n'est pas homogène), équivalent à

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(-c + x_1) \end{cases} \quad (\text{LV})$$

(l'utilisation de ce système pour modéliser l'influence de la pêche sur les populations de requins et de sardines en Méditerranée est trop classique pour que j'aie pu me permettre, même en travaillant sur $\mathbf{C}$, de ne pas garder les signes des coefficients). Tout aussi classique est ce qui suit (voir par exemple le beau et élémentaire livre [11]) où l'on écrit

$$\frac{-c + x_1}{x_1} dx_1 - \frac{a - x_2}{x_2} dx_2 = 0,$$

puis l'on utilise la séparation des variables pour en déduire que

$$H(x_1, x_2) = x_1^c x_2^a e^{-x_1 - x_2}$$

est une intégrale première (même pas méromorphe!). Le système est hamiltonien pour une forme symplectique comme ci-dessus, avec

$$f(x_1, x_2) = -x_1^{1-c} x_2^{1-a} e^{x_1 + x_2}$$

sur n'importe quel ouvert de la forme $U \times V$ où U et V sont des ouverts simplement connexes de $\mathbf{C} - \{0\}$. Bien entendu, dans le cas où a et c sont des entiers, il n'y a pas de problème avec les puissances (mais les fonctions obtenues, méromorphes et même parfois holomorphes, n'ont rien de polynomial ni d'homogène).

En dimension 3. — Un crochet de Poisson satisfait, pour toute fonction g ,

$$\{x_1, g\} = \frac{\partial g}{\partial x_2} \{x_1, x_2\} + \frac{\partial g}{\partial x_3} \{x_1, x_3\}, \text{ etc.}$$

Donc, si K est une fonction de Casimir pour ce crochet,

$$\frac{\partial K}{\partial x_2} \{x_1, x_2\} - \frac{\partial K}{\partial x_3} \{x_3, x_1\} = 0, \text{ etc.,}$$

de sorte que, si K n'est pas constante, les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \{x_2, x_3\} \\ \{x_3, x_1\} \\ \{x_1, x_2\} \end{pmatrix} \text{ et } \text{grad } K$$

sont colinéaires.

Proposition 4.1.4. Si K est une fonction de Casimir non constante pour un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ en dimension 3, il existe une fonction g telle que

$$\{x_i, x_j\} = g \frac{\partial K}{\partial x_k} \text{ si } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \text{ et la permutation } (i, j, k) \text{ est paire.} \quad \square$$

Un système hamiltonien pour une structure de Poisson en dimension 3 est un système possédant deux intégrales premières, l'une, disons K , étant un Casimir de la structure de Poisson et l'autre, disons H , le hamiltonien du système. On a alors

$$\text{grad}_x H \cdot F = \text{grad}_x K \cdot F = 0.$$

Il existe alors un ouvert U de $\mathbf{C}$ et une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ telle que

$$F(x) = f(x) \text{grad}_x H \wedge \text{grad}_x K.$$

Ici aussi, f peut être appelée un facteur intégrant. Si l'on définit

$$\{x_i, x_j\} = f \frac{\partial K}{\partial x_k} \text{ si } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \text{ et la permutation } (i, j, k) \text{ est paire,}$$

on a défini une structure de Poisson dont K est un Casimir et le système s'écrit $\dot{x}_i = \{x_i, H\} = F_i$, donc est hamiltonien de hamiltonien H .

Autrement dit, s'il existe deux intégrales premières fonctionnellement indépendantes, il existe une structure de Poisson pour laquelle l'une est un Casimir et l'autre le hamiltonien.

Exemple. Par exemple, avec $K = x_1^2 - x_2^2$, le crochet de Poisson est donné par

$$\{x_2, x_3\} = 2x_1, \quad \{x_3, x_1\} = -2x_2, \quad \{x_1, x_2\} = 0 \quad (\text{Eu})$$

et le système d'Euler est hamiltonien de hamiltonien $H = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2$.

Intégrales premières singulières. — Une intégrale première a tendance à présenter des singularités variées. En voici quelques exemples.

Exemple 4.1.5 (Structure de Poisson des requins et sardines). Considérons à nouveau le système de Lotka-Volterra, cette fois homogénéisé (et donc cette fois authentiquement quadratique),

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(ax_3 - x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(-cx_3 + x_1) \\ \dot{x}_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{LV})_h$$

La fonction $K(x_1, x_2, x_3) = x_3$ est une intégrale première et de même, à cause du calcul précédent,

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1^{cx_3} x_2^{ax_3} e^{-x_1 - x_2}.$$

Ici

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1(ax_3 - x_2) \\ x_2(-cx_3 + x_1) \\ 0 \end{pmatrix} = x_1^{1-cx_3} x_2^{1-ax_3} e^{x_1+x_2} \text{grad}_x H \wedge \text{grad}_x K.$$

Il y a donc une structure de Poisson sur l'ouvert de $\mathbf{C}^3$ où la fonction f est définie et non nulle pour laquelle le système est hamiltonien.

Exemple 4.1.6. Considérons le système (académique)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2^2 \end{cases} \quad (\text{Ac})^2$$

dont la solution générale est

$$x_1 = \left(\frac{1}{4} \log(t - B) + A \right) \frac{1}{t - B}, \quad x_2 = -\frac{2}{t - B}.$$

La fonction $H(x_1, x_2) = 2 \frac{x_1}{x_2} - \log x_2$ est une intégrale première (le système est hamiltonien pour le facteur intégrant $f(x_1, x_2) = x_2^3$) — le hamiltonien contient un logarithme.

Exemple 4.1.7. Le système considéré dans la remarque 3.1.1, dont les solutions possèdent elles aussi des logarithmes, possède une intégrale première linéaire ($K = x_3$) et une autre

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_2 \exp\left(-\frac{x_1}{x_3}\right), \quad (\text{Ac})^3$$

pas vraiment méromorphe non plus au voisinage de $x_3 = 0$, cette fois l'intégrale première a une singularité essentielle.

J'ai donné ces exemples élémentaires et bien connus pour montrer que la question des intégrales premières méromorphes est une question assez artificielle — a fortiori celle des intégrales premières polynomiales.

Remarque 4.1.8. Si H et K sont des intégrales premières rationnelles (par exemple polynomiales) du système quadratique, le facteur intégrant f est, lui aussi, une fonction rationnelle.

Toute artificielle soit cette hypothèse, nous allons demander désormais que l'éventuelle structure de Poisson pour laquelle notre système est (ou doit être, ou est espéré être) hamiltonien est homogène de degré disons ϖ (pour Poisson).

4.2. Intégrales premières polynomiales. — Commençons par étudier de façon très naïve l'existence d'intégrales premières polynomiales.

4.2.a. Existence d'intégrales premières polynomiales. — Si f est une intégrale première polynomiale⁽³⁾, comme le système est homogène, chacune des composantes homogènes de f est une intégrale première. Nous nous intéressons donc seulement ici aux intégrales premières homogènes. Le fait que le système possède telle ou telle intégrale première polynomiale est lié à la géométrie du champ de vecteurs $F(x)$. Par exemple, il possède une intégrale première linéaire si et seulement si les formes quadratiques coordonnées de F sont liées, ou, de façon équivalente, si l'image de F est contenue dans un hyperplan de $\mathbf{C}^n$ (ce qui est clairement le cas dans l'exemple de Kac-van Moerbeke où la somme des trois formes quadratiques est nulle). L'existence de telles intégrales est liée, elle aussi, à la matrice de Kovalevskaya.

Rappelons qu'une fonction holomorphe⁽⁴⁾ au voisinage d'un point x_0 possède une « forme initiale » en x_0 , le terme homogène de plus bas degré de son développement de Taylor en x_0 (voir [19] ou encore [2] pour les propriétés de ces formes initiales, notamment celle qui suit).

Proposition 4.2.1. *Soit f une intégrale première holomorphe d'un système différentiel sur $\mathbf{C}^n$. Soit $t \mapsto x(t)$ une solution non stationnaire du système et soit $x = x(t_0)$ un point de cette trajectoire. La forme initiale f° de f en x est constante le long des solutions de l'équation linéarisée le long de x . □*

Proposition 4.2.2. *Soit f un polynôme homogène de degré k qui est une intégrale première du système différentiel. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. La forme initiale de f en x_0 annule tous les vecteurs propres de $\mathcal{K}_{x_0}$ pour les valeurs propres autres que son degré $k - \ell$.*

On a $1 \leq \ell \leq k$, avec $\ell = 1$ si x_0 n'est pas un point critique de f .

Démonstration. On applique la proposition 4.2.1 à f° le long de la solution particulière $t \mapsto t^{-1}x_0$. Si $t \mapsto Y(t)$ est une solution de l'équation linéarisée, nous savons donc que

$$t \mapsto f_{t^{-1}x_0}^\circ(Y(t)) = t^{-(k-\ell)} f_{x_0}^\circ(Y(t)) \text{ ne dépend pas de } t.$$

Soit v un vecteur propre de $\mathcal{K}_{x_0}$ associé à une valeur propre λ et soit $Y(t)$ l'unique solution de l'équation linéarisée qui vaut v pour $t = 1$. On a donc

$$t^{-(k-\ell)} f_{x_0}^\circ(Y(t)) = f_{x_0}^\circ(v),$$

et, comme nous l'avons vu (dans la démonstration de la proposition 3.2.1), si $\lambda \neq k - \ell$, alors $Y(t)$ est un polynôme en $\log t$. De même $f_{x_0}^\circ(Y(t))$. Pour que $t^{-(k-\ell)} f_{x_0}^\circ(Y(t))$ soit constant, il est nécessaire que ce polynôme soit nul. On a donc nécessairement $f_{x_0}^\circ(v) = 0$. □

En particulier, donc, si f est une intégrale première polynomiale homogène de degré k qui s'annule à l'ordre ℓ en x_0 , alors $f_{x_0}^\circ(v) = 0$ pour tous les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes de $k - \ell$.

Remarque 4.2.3. Que les matrices de Kovalevskaya d'un système possédant une intégrale première linéaire aient la valeur propre 0 est une conséquence de la proposition 1.3.2.

Corollaire 4.2.4. *Si le système possède ℓ intégrales premières polynomiales homogènes de degré k dont les différentielles sont indépendantes en x_0 , alors $k - 1$ est une valeur propre de $\mathcal{K}_{x_0}$ de multiplicité au moins égale à ℓ .*

Voici quelques illustrations de ce corollaire.

- Les matrices de Kovalevskaya obtenues dans le cas d'Euler et dans celui de Kovalevskaya $(\text{Ko})_s$ ont 1 comme valeur propre double et nous avons vu que ces deux systèmes ont un espace d'intégrales quadratiques de dimension 2.

⁽³⁾Le même argument vaut pour les intégrales premières analytiques (ou formelles).

⁽⁴⁾Les fonctions méromorphes ont aussi des formes initiales, mais nous nous intéressons ici seulement aux polynômes.

- Le système de Kac-van Moerbeke possède une intégrale première de degré 1 et une de degré 3, ce qui est cohérent avec les valeurs propres 0 et 2 de ses matrices de Kovalevskaya.
- Le cas du système de Lotka-Volterra (LV) est amusant. La valeur propre 0 est double. Il n'est pas très étonnant que 0 soit valeur propre, puisque le système a une intégrale première linéaire, la fonction x_3 , que nous avons introduite de force en homogénéisant le système. Mais il n'en a pas d'autre ! Ce qui ne l'empêche pas d'être intégrable au sens de Liouville, comme nous l'avons vu dans l'exemple 4.1.5.
- Le système de Kasner possède, comme nous l'avons déjà remarqué au § ??, une intégrale première de degré 2, la fonction

$$\sigma_2(x) = x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2,$$

et l'on vérifie facilement qu'il n'en a pas d'autre. Sa matrice de Kovalevskaya a une unique valeur propre positive entière positive ou nulle, égale à 1.

Remarque 4.2.5. Si L est une intégrale première linéaire, alors $L(\dot{x}) = L(F(x)) = 0$, donc l'image de F est contenue dans l'hyperplan d'équation $L = 0$. En particulier, les formes quadratiques définissant F ne sont pas indépendantes. C'est ce qui se produit dans l'exemple de Kac-van Moerbeke considéré ici.

Remarque 4.2.6. Malgré l'évidence constituée par ces applications, le corollaire 4.2.4 ne permet *pas* de démontrer qu'un système n'a pas d'intégrale première polynomiale. Voir l'exemple de Hoyer spécial (système ABC) ci-dessous (§ 5.4.f).

Notons quand même :

Proposition 4.2.7. *Si l'algèbre de Markus d'un système différentiel quadratique possède un élément neutre, alors ce système ne possède aucune intégrale première polynomiale et aucune intégrale première homogène de degré $\neq -1$.*

Démonstration. Dans ce cas, il y a un élément x_0 de l'ensemble indiciel (l'opposé de l'élément neutre) pour lequel la matrice de Kovalevskaya $\mathcal{K}_{x_0} = -2\text{Id}$. La forme initiale d'une intégrale première s'annulerait donc sur tous les vecteurs propres associés à des valeurs propres qui ne sont pas dans $\mathbf{N}$, c'est-à-dire dans ce cas sur tous les vecteurs de $\mathbf{C}^n$... mais une forme initiale n'est pas nulle ! $\square$

Exemples 4.2.8.

- (1) C'est le cas par exemple du système de Halphen (on retrouve ainsi un résultat de [14]) et du système de Hoyer (Ho)_n mentionné au § 5.6.d, qui ne possèdent donc aucune intégrale première polynomiale⁽⁵⁾.
- (2) En dimension 2, reprenons les exemples d'algèbres de Markus avec élément neutre 2.6.a. Les solutions des deux systèmes sont respectivement

$$(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{t-A}, -\frac{1}{t-B} \right), \quad (x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{t-A}, \frac{B}{(t-A)^2} \right).$$

Dans le premier cas, $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ est une intégrale première (il s'agit du système $(\text{Ac})_0^2$), dans le deuxième, $\frac{x_2}{x_1^2}$ en est une (les facteurs intégrants correspondant sont respectivement $-x_1^2x_2^2$ et x_1^4). Toutes les deux sont homogènes de degré -1 . La proposition 4.2.7 n'interdit pas l'existence d'intégrales premières !

4.2.b. Les intégrales premières homogènes et l'ensemble indiciel $\mathcal{I}$

Proposition 4.2.9. *Si H est une fonction homogène de degré k et une intégrale première du système $\dot{x} = F(x)$ dans $\mathbf{C}^n$, alors, pour tout $x_0 \in \mathcal{I}$ on a $H(x_0) = 0$.*

Démonstration. C'est une remarque tout à fait immédiate : sur toute solution $x(t)$, $H(x(t))$ est constante. Pour $x_0 \in \mathcal{I}$, utilisons la solution $x(t) = t^{-1}x_0$. On a $H(t^{-1}x_0) = t^{-k}H(x_0)$, qui doit être constante, ce qui n'est possible que si $H(x_0) = 0$. $\square$

⁽⁵⁾Il n'a pas d'intégrale première rationnelle, toujours d'après [14], et pas non plus d'intégrale première formelle, d'après [18].

Il n'est donc pas étonnant que nous ayons trouvé les ensembles indiciaux $\mathcal{J}$ que nous avons trouvés dans les exemples intégrables. De même, dans le cas de Kasner, l'intégrale première $H = \sigma_2 = x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2$ est nulle sur toute la conique $\mathcal{J}$.

Ces remarques peuvent faciliter l'étude de l'existence d'intégrales premières polynomiales. Voir par exemple ici le § 5.4.f.

Proposition 4.2.10. *Si un système quadratique dans $\mathbf{C}^3$ admet deux intégrales premières polynomiales homogènes de degrés respectifs h et k , en position générale, alors l'ensemble indicial $\mathcal{J}$ du système est constitué de hk points.*

Exemples 4.2.11. Dans le cas du système de Kac-van Moerbeke, nous avons vu que l'ensemble $\mathcal{J}$ est constitué des trois points $(0, 1, -1)$, etc. En effet, nous avons vu qu'il y a deux intégrales premières polynomiales de degrés respectifs 1 et 3.

De même le cas d'Euler, qui a deux intégrales quadratiques, a un ensemble indicial formé de quatre points.

Démonstration. Je dirai que les intégrales premières H et K sont « en position générale » si les courbes $H^{-1}(0)$ et $K^{-1}(0)$ sont lisses et en position générale dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. On peut alors leur appliquer le théorème de Bézout et elles se coupent en hk points. Montrons que chacun de ces points détermine un point de $\mathcal{J}$. Soit donc $y \in \mathbf{C}^3$ un vecteur non nul dont l'image dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est un des points d'intersection. C'est dire que les plans tangents en y aux cônes $H^{-1}(0)$ et $K^{-1}(0)$ dans $\mathbf{C}^3$ se coupent transversalement le long de la droite engendrée par y . Soit $y(t)$ la solution du système telle que $y(0) = 0$. Pour $|t|$ assez petit, on a

$$H(y(t)) \equiv H(y) = 0$$

puisque H est une intégrale première, donc

$$0 = (dH)_{y(t)}(\dot{y}(t)) = (dH)_{y(t)}(F(y(t)))$$

et de même pour K , donc

$$F(y) \in T_y H^{-1}(0) \cap T_y K^{-1}(0),$$

et $F(y)$ doit donc être colinéaire à y . Si $F(y) \neq 0$, alors $F(y) = ay$ avec $a \neq 0$, alors $x_0 = -\frac{1}{a}y$ est un (l'unique) vecteur de cette droite qui se trouve dans $\mathcal{J}$. $\square$

Remarque 4.2.12. Considérons à nouveau le cas où H et K sont des formes quadratiques. La condition imposée ici est que les coniques projectives qu'elles définissent soient en position générale, ce qui implique que, pour h et k proches de 0, les quadriques affines $H^{-1}(h)$ et $K^{-1}(k)$ se coupent transversalement... le long d'une courbe elliptique lisse (moins, ici, quatre points à l'infini).

Remarque 4.2.13. Ici on apprécie la différence entre les deux systèmes que nous avons rencontrés et dont les solutions paramétrisent des courbes elliptiques :

- l'intersection de deux quadriques affines est une courbe elliptique à laquelle manquent quatre points à l'infini,
- l'intersection d'un hyperplan et d'une surface cubique est une courbe elliptique à laquelle manquent trois points à l'infini.

Exemple 4.2.14. La recherche des formes quadratiques dont les points de $\mathcal{J}$ sont des vecteurs isotropes donne

- dans le cas d'Euler, les formes $A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2$ avec $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ comme on pouvait s'y attendre (voir le § ??),
- et de même, dans le cas de Kovalevskaya, les formes $A_1x_2x_3 + A_2x_3x_1 + A_3x_1x_2$ avec $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ (voir le § 5.3.b).

Remarque 4.2.15. Dans le cas du système de Hoyer spécial étudié ci-dessus, l'ensemble indicial est bien constitué de quatre points, alors qu'il n'y a en général aucune (et dans le meilleur des cas pas plus d'une) intégrale première polynomiale.

Remarque 4.2.16. Le fait que les valeurs propres des matrices $\mathcal{K}_{x_0}$ ne dépendent pas de x_0 , dans les exemples d'Euler et de Kac-van Moerbeke, est une conséquence du fait que ces systèmes possèdent globalement des intégrales premières polynomiales.

Corollaire 4.2.17. *Un système quadratique générique dans $\mathbf{C}^3$ n'est pas intégrable par des intégrales premières polynomiales.*

Démonstration. Si le système est générique (au sens de la remarque 2.3.1), son ensemble indicial $\mathcal{I}$ est formé de $2^3 - 1 = 7$ points, quant à $\mathcal{I}_\infty$, il est vide. Le produit des degrés des intégrales premières devrait être égal à 7, mais la généricité interdit le degré 1 (sinon, $\mathcal{I}_\infty$ ne serait pas vide). $\square$

5. Des exemples

5.1. Exemples académiques en dimension 2. — Considérons l'exemple du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + 2ax_1x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2 \end{cases} \quad a \in \mathbf{C}. \quad (\text{Ac})_a^2$$

Dans l'algèbre de Markus, on a

$$u_1 \cdot u_1 = u_1, \quad u_2 \cdot u_2 = u_2, \quad u_1 \cdot u_2 = au_1 + u_2,$$

il n'y a pas d'élément neutre (sauf si $a = 0$). Au vecteur $x_0 = -u \in \mathcal{I}$ correspond la matrice de Kovalevskaya

$$\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} -2 & -2a \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Supposons $a \neq 0$. Alors le sous-espace propre associé à -2 est de dimension 1 (correspondant au sous-espace $\langle u_1 \rangle$ sur lequel u_1 est élément neutre). Remarquons que, contrairement à ce qui se passait dans tous les exemples célèbres que nous avons considérés, la matrice de Kovalevskaya n'est pas diagonalisable.

5.2. Une remarque générale sur la dimension 3. — Je vais présenter maintenant les exemples les plus classiques en dimension 3. Ils sont apparus dans la littérature mathématique de façon assez désordonnée au cours des XVII^e et XIX^e siècles : la notion d'équivalence n'était évidemment pas au point.

Par exemple, les systèmes « sans carrés » de la forme générale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_2x_3 + b_1x_3x_1 + c_1x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2x_2x_3 + b_2x_3x_1 + c_2x_1x_2 \\ \dot{x}_3 = a_3x_2x_3 + b_3x_3x_1 + c_3x_1x_2, \end{cases} \quad (\text{Ho})$$

sont parfois nommés « systèmes de Hoyer » (parce qu'ils ont été étudiés dans [10]). Cette forme n'est évidemment pas invariante par équivalence, ce qui fait que la pertinence d'une étude générale de ces systèmes n'est pas claire. La même remarque vaut pour les systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1L_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2L_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = x_3L_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (\text{Ko})$$

où les L_i sont des formes linéaires, que j'écrirai aussi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\alpha_1x_1 - \beta_1x_2 - \gamma_1x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(-\alpha_2x_1 + \beta_2x_2 - \gamma_2x_3) \\ \dot{x}_3 = x_3(-\alpha_3x_1 - \beta_3x_2 + \gamma_3x_3). \end{cases} \quad (\text{Ko})$$

Ces systèmes sont mentionnés comme une classe particulière « intéressante » de systèmes quadratiques par Kovalevskaya dans une lettre à Mittag-Leffler⁽⁶⁾ [3, chap. VI], je les appellerai donc « systèmes de Kovalevskaya ».

Ces réserves ayant été faites, il n'en reste pas moins que certains cas particuliers de ces systèmes sont des exemples intéressants, ce pour quoi nous les avons nommés ici.

Remarquons d'ores et déjà que les constantes « diagonales » α_1, β_2 et γ_3 des systèmes de Kovalevskaya, si elles sont toutes non nulles, peuvent être remplacées par des 1, puisque la transformation

$$y_1 = -x_1/\alpha_1, \quad y_2 = -x_2/\beta_2, \quad y_3 = -x_3/\gamma_3$$

transforme le système de Kovalevskaya en

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(y_1 - b_1 y_2 - c_1 y_3) \\ \dot{y}_2 = y_2(-a_2 y_1 + y_2 - c_2 y_3) \\ \dot{y}_3 = y_3(-a_3 y_1 - b_3 y_2 + y_3) \end{cases} \quad (\text{Ko})_d$$

(les constantes ont changé).

5.3. Le système d'Euler. — Le plus célèbre de tous les systèmes quadratiques en dimension 3 est le système d'Euler (et il appartient à la liste des systèmes de Hoyer). Il s'agit du système décrivant le mouvement d'un solide « libre » autour de son centre de gravité. Les variables dynamiques sont les composantes du moment cinétique du solide et le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_3 x_1 \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_1 x_2 \end{cases} \quad (\text{Eu})$$

où les λ_i sont des constantes liées à la matrice d'inertie du solide⁽⁷⁾, non nulles si on a supposé les moments d'inertie distincts, ce que je fais dans cet article.

5.3.a. Équivalence. — Par exemple, il est bien clair que tous les systèmes d'Euler sont équivalents entre eux, puisque la transformation $y_i = \alpha_i x_i$, avec $\alpha_i^2 = \lambda_j \lambda_k / 4$ et $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, transforme (dans le cas réel, seulement si tous les λ_i ont le même signe⁽⁸⁾) le système d'Euler en

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 y_3 \\ \dot{y}_2 = 2y_3 y_1 \\ \dot{y}_3 = 2y_1 y_2. \end{cases} \quad (\text{Eu})$$

5.3.b. Équivalence (suite). Système de Kovalevskaya spécial. — Il s'agit du cas particulier de système de Kovalevskaya que celle-ci étudie en détail dans la lettre mentionnée au § 5.2, le système suivant, dit « Kovalevskaya spécial »

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\alpha x_1 - \beta x_2 - \gamma x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(-\alpha x_1 + \beta x_2 - \gamma x_3) \\ \dot{x}_3 = x_3(-\alpha x_1 - \beta x_2 + \gamma x_3). \end{cases} \quad (\text{Ko})_s$$

Dans la lettre citée, elle explique à son correspondant que les solutions de ce système sont des fonctions elliptiques et elle démontre que ce système vérifie la propriété d'intégrabilité que j'ai appelée ci-dessus

⁽⁶⁾En 1884, au moment où elle met au point la méthode et les outils qui portent son nom et qu'elle utilisera plus tard avec succès dans le problème du solide.

⁽⁷⁾Pour un authentique solide, on a $\lambda_1 = (B - C)/A$, $\lambda_2 = (C - A)/B$ et $\lambda_3 = (A - B)/C$ avec A, B et C réels et $0 < A < B < C$ pour fixer les idées.

⁽⁸⁾Dans le cas de la mécanique (voir la note 7), deux des coefficients sont négatifs et le troisième positif, le système est équivalent, sur $\mathbf{R}$, à

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 y_3 \\ \dot{y}_2 = -2y_3 y_1 \\ \dot{y}_3 = -2y_1 y_2. \end{cases} \quad (\text{Eu})$$

« intégrabilité au sens de Kovalevskaya ». Ce système est intégrable au sens de Liouville. Toutes les fonctions

$$A_1x_2x_3 + A_2x_3x_1 + A_3x_1x_2 \quad \text{avec } A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma = 0$$

sont des intégrales premières. Comme dans le cas d'Euler, les niveaux communs de deux de ces fonctions, intersections de deux quadriques, sont des courbes elliptiques que paramétrisent les solutions du système.

Ce n'est pas très étonnant. Ce cas particulier de système de Kovalevskaya est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(y_1 - y_2 - y_3) \\ \dot{y}_2 = y_2(-y_1 + y_2 - y_3) \\ \dot{y}_3 = y_3(-y_1 - y_2 + y_3), \end{cases} \quad (\text{Ko})_s$$

une écriture sous laquelle on voit facilement qu'il est aussi équivalent au système d'Euler, puisque, avec

$$y_1 = -x_2 - x_3, \quad y_2 = -x_3 - x_1, \quad y_3 = -x_1 - x_2, \quad \text{et } 2x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \quad \text{etc.}$$

transforme le système d'Euler ($\dot{x}_1 = 2x_2x_3$, etc.) en le système de Kovalevskaya ($\dot{y}_1 = y_1(y_1 - y_2 - y_3)$, etc.).

5.3.c. *L'ensemble indiciel.* — Les équations

$$\begin{cases} -x_1 = 2x_2x_3 \\ -x_2 = 2x_3x_1 \\ -x_3 = 2x_1x_2 \end{cases} \quad (\text{Eu})$$

donnent un ensemble $\mathcal{J}$ à quatre éléments :

$$\mathcal{J} = \left\{ \frac{1}{2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \mid \varepsilon_i = \pm 1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1 \right\}.$$

Dans le cas d'Euler, les trois quadriques de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ se coupent bien en $4 + 3 = 7$ points. Ce système n'est pas générique pour autant puisque trois des sept points sont à l'infini.

5.3.d. *Les matrices de Kovalevskaya.* — Choisissons $x_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathcal{J}$. La matrice de Kovalevskaya correspondante est

$$\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Eu})$$

Dans le cas (équivalent) considéré par Kovalevskaya,

$$\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } x_0 = (-1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } x_0 = (1, 1, 1),$$

les autres s'en déduisant par permutation circulaire.

5.3.e. *L'algèbre de Markus.* — L'algèbre a une base (u_1, u_2, u_3) dont les produits des éléments sont

$$u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_3 = 0,$$

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{\lambda_3}{2}u_3, \quad u_2 \cdot u_3 = \frac{\lambda_1}{2}u_1, \quad u_3 \cdot u_1 = \frac{\lambda_2}{2}u_2. \quad (\text{Eu})$$

Supposons (comme la remarque faite au § 1.3.b nous y autorise) que $\lambda_i = 2$. Dans cette algèbre,

- les éléments de carré nul sont les multiples scalaires des vecteurs de base,
- les idempotents sont les

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1u_1 + \varepsilon_2u_2 + \varepsilon_3u_3) \quad \text{avec } \varepsilon_i^2 = 1 \quad \text{et } \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1.$$

On notera que cette algèbre n'a pas d'élément neutre.

5.3.f. *Les critères de Kovalevskaya et de Liapounov.* —

5.3.g. Intégrabilité. — Le système d'Euler est intégrable au sens de Liouville, disons pour l'instant que toutes les fonctions (formes quadratiques)

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 \quad \text{avec } A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + A_3\lambda_3 = 0$$

sont des intégrales premières. Les niveaux communs de deux de ces formes, choisies indépendantes, sont en général des courbes elliptiques (intersections de deux quadriques affines), les solutions du système sont des fonctions elliptiques paramétrant les courbes en question.

5.3.h. Le groupe d'automorphismes. — Les nilpotents d'indice 2 de l'algèbre de Markus sont les multiples scalaires des vecteurs u_1 , u_2 et u_3 de la base canonique de $\mathbf{C}^3$. Tout automorphisme transforme un nilpotent d'indice 2 en un nilpotent d'indice 2. Donc, si $\varphi \in \text{Aut}(F)$, on a

$$\varphi(u_i) = \alpha_i u_{\sigma(i)} \text{ pour } \alpha_i \neq 0 \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_3.$$

Mais φ doit aussi préserver l'ensemble des idempotents. Donc

$$\varphi(\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3) = \varepsilon_1 \alpha_1 u_{\sigma(1)} + \varepsilon_2 \alpha_2 u_{\sigma(2)} + \varepsilon_3 \alpha_3 u_{\sigma(3)}$$

impose $\alpha_i^2 = 1$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$. Finalement, $\text{Aut}(F)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ des isomorphismes qui préservent le tétraèdre défini par les idempotents, présenté ici comme l'extension

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \text{Aut}(F) \equiv \mathfrak{S}_4 \xrightarrow{\varphi \mapsto \sigma} \mathfrak{S}_3 \longmapsto 1.$$

5.4. Systèmes de Lotka-Volterra et Hoyer spécial. — L'homogénéisation des systèmes proie-prédateur de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases} \quad \text{avec } b, c \neq 0 \quad (\text{LV})$$

donne un système de Kovalevskaya

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(-\beta_1 x_2 - \gamma_1 x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(-\alpha_2 x_1 - \gamma_2 x_3) \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \beta_1, \alpha_2 \neq 0. \quad (\text{LV})_h$$

J'appellerai « système de Hoyer spécial » le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - \gamma_1 x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_3 - \alpha_2 x_1) \\ \dot{x}_3 = x_3(x_1 - \beta_3 x_2) \end{cases} \quad (\text{Ho})_s$$

(les indices sont là pour la cohérence avec les systèmes de Kovalevskaya (Ko) ci-dessous, je les fais disparaître dans la suite). Ce système est aussi appelé « système ABC » (voir [16]).

Un cas particulier classique est le « système de Kac-van Moerbeke »,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_3 - x_1) \\ \dot{x}_3 = x_3(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (\text{KvM})$$

Ce système et ses généralisations en dimensions plus grandes sont étudiés dans [1, chap. 7]. Ce système est intégrable au sens de Liouville. Les deux fonctions

$$H(x) = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{et} \quad K(x) = x_1 x_2 x_3$$

sont des intégrales premières. Leurs niveaux communs sont, comme dans le cas d'Euler, des courbes elliptiques et le système se résout en termes de fonctions elliptiques associées à ces courbes.

5.4.a. Équivalence. — On vérifie sans mal que le système de Lotka-Volterra $(LV)_h$ est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - \gamma_1 x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_1 - \gamma_2 x_3) \\ \dot{x}_3 = 0. \end{cases} \quad (LV)_h$$

Proposition 5.4.1. *Pour qu'un système de Hoyer (Ho) soit équivalent au système de Kac-van Moerbeke (KvM) , il faut et il suffit qu'il soit de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(c_1 x_2 + b_1 x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(-b_1 x_3 + c_2 x_1) \\ \dot{x}_3 = x_3(-c_2 x_1 - c_1 x_2). \end{cases}$$

Pour qu'un système de Hoyer (Ho) soit équivalent au système d'Euler (Eu) , il faut et il suffit qu'il soit diagonal. $\square$

En particulier le système $(Ho)_s$ n'est équivalent au système (KvM) que si $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Remarquons que le cas équivalent à (KvM) est un cas où les formes quadratiques deuxième membre de (Ho) sont liées : $c_2 \dot{x}_1 - c_1 \dot{x}_2 + b_1 \dot{x}_3 = 0$.

5.4.b. L'ensemble indiciel. — L'ensemble indiciel du système $(LV)_h$ est réduit à un point,

$$\mathcal{I} = \{(-1, -1, 0)\}.$$

L'ensemble indiciel du système de Hoyer spécial possède trois éléments,

$$\mathcal{I} = \left\{ \left(0, \frac{1}{\beta}, -1\right), \left(-1, 0, \frac{1}{\gamma}\right), \left(\frac{1}{\alpha}, -1, 0\right) \right\}$$

(si $\alpha\beta\gamma = 1$), ou quatre

$$\mathcal{I} = \left\{ \left(0, \frac{1}{\beta}, -1\right), \left(-1, 0, \frac{1}{\gamma}\right), \left(\frac{1}{\alpha}, -1, 0\right), \left(\frac{1+\beta+\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma-1}, \frac{1+\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma-1}, \frac{1+\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma-1}\right) \right\} \quad (Ho)_s$$

(si $\alpha\beta\gamma \neq 1$).

5.4.c. Les matrices de Kovalevskaya. — Pour le système $(LV)_h$, la matrice $\mathcal{K}_{x_0}$ en l'unique point $x_0 = (-1, -1, 0)$ de $\mathcal{I}$ est

$$\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \gamma_1 \\ -1 & -1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (LV)_h$$

5.4.d. L'algèbre de Markus. — $(LV)_h$. Pour le système de Lotka-Volterra $(LV)_h$, la structure de l'algèbre de Markus est donnée par

$$u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_3 = 0, \quad u_1 \cdot u_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad u_2 \cdot u_3 = -\frac{\gamma_2}{2}u_2, \quad u_3 \cdot u_1 = -\frac{\gamma}{2}u_1. \quad (LV)_h$$

— Les nilpotents d'ordre 2 sont les multiples de u_1, u_2, u_3 et de $-\gamma_2 u_1 + \gamma_1 u_2 + u_3$.

— Le seul idempotent est $-u_1 - u_2$ et il n'y a pas d'élément neutre.

Pour XXL l'algèbre a une base (u_1, u_2, u_3) dont les produits des éléments sont

$$u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_3 = 0,$$

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{2}(u_1 - \alpha u_2), \quad u_2 \cdot u_3 = \frac{1}{2}(u_2 - \beta u_3), \quad u_3 \cdot u_1 = \frac{1}{2}(u_3 - \gamma u_1) \quad (Ho)_s$$

avec $\alpha = \beta = \gamma = 1$ pour (KvM) . Ici

— les éléments de carré nul sont les multiples scalaires de u_1, u_2, u_3 et, si $\alpha\beta\gamma = 1$, $\beta\gamma u_1 + \gamma u_2 + u_3$,

— les idempotents sont les vecteurs $u_2 - \frac{1}{\alpha}u_1, u_3 - \frac{1}{\beta}u_2$ et $u_1 - \frac{1}{\gamma}u_3$, ainsi, si $\alpha\beta\gamma \neq 1$, que

$$\frac{1}{1 - \alpha\beta\gamma}((1 + \beta + \beta\gamma)u_1 + (1 + \gamma + \gamma\alpha)u_2 + (1 + \alpha + \alpha\beta)u_3).$$

Pas plus que celle associée au système d'Euler, cette algèbre n'a d'élément neutre.

5.4.e. Critères de Kovalevskaya et Liapounov. — Les valeurs propres de la matrice de Kovalevskaya en $\left(\frac{1}{\alpha}, -1, 0\right)$ sont -2 , 0 et $\frac{1}{\alpha} + \beta$, ce qui fait, dans le cas (KvM), -2 , 0 et 2 en chacun des points de $\mathcal{J}$: le système (KvM) satisfait donc à la condition de Kovalevskaya comme à celle de Liapounov. Pour que ce soit le cas de $(\text{Ho})_s$, il est nécessaire que

$$\frac{1}{\alpha} + \beta \text{ et de même } \frac{1}{\beta} + \gamma \text{ et } \frac{1}{\gamma} + \alpha$$

soient des entiers (naturels ou relatifs).

5.4.f. Intégrabilité. — Montrons ici comment les remarques faites au § ?? peuvent faciliter l'étude de l'existence d'intégrales premières polynomiales en traitant le cas du système de Hoyer spécial

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - \gamma x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_3 - \alpha x_1) \\ \dot{x}_3 = x_3(x_1 - \beta x_2). \end{cases} \quad (\text{Ho})_s$$

Supposons que les trois formes quadratiques qui forment le second membre soient indépendantes, de sorte qu'il n'y a pas d'intégrale première linéaire. Cette propriété est équivalente au fait que $\alpha\beta\gamma \neq 1$ (ce que je suppose donc ici). Je supposerai aussi que ni α ni β ni γ n'est nul. L'ensemble indiciel $\mathcal{J}$ est alors formé des quatre points

$$\mathcal{J} = \left\{ \left(0, \frac{1}{\beta}, -1\right), \left(-1, 0, \frac{1}{\gamma}\right), \left(\frac{1}{\alpha}, -1, 0\right), \left(\frac{1+\beta+\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma-1}, \frac{1+\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma-1}, \frac{1+\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma-1}\right) \right\}.$$

Pour $x_0 = \left(0, \frac{1}{\beta}, -1\right)$,

$$\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} + \gamma & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\beta} & -1 & \frac{1}{\beta} \\ -1 & \beta & -1 \end{pmatrix},$$

une matrice dont les valeurs propres sont -2 (naturellement), 0 (bien qu'il n'y ait pas d'intégrales première linéaire) et $\frac{1}{\beta} + \gamma$. Pour qu'il y ait une intégrale homogène de degré $n+1$ (dont la différentielle ne s'annule pas en x_0), il est nécessaire que $\frac{1}{\beta} + \gamma$ soit égal à n et de même en considérant les deux points de $\mathcal{J}$ suivants, que

$$\frac{1}{\beta} + \gamma = \frac{1}{\gamma} + \alpha = \frac{1}{\alpha} + \beta = n \in \mathbf{N},$$

système dont les solutions sont

- pour $n = 1$, β quelconque, $\alpha = \frac{1}{1-\beta}$ et $\gamma = 1 - \frac{1}{\beta}$ (ce qui donne $\alpha\beta\gamma = -1 \neq 1$),
- pour $n \geq 2$, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{n + \varepsilon\sqrt{n^2-4}}{2}$ (avec $\varepsilon = \pm 1$).

Et il nous reste à utiliser le quatrième point.

- Considérons d'abord le cas où $n \geq 2$. Alors $\alpha = \beta = \gamma$ et, pour $x_0 = \frac{1}{\alpha-1}(1, 1, 1)$ (on a supposé $\alpha^3 \neq 1$ donc $\alpha \neq 1$),

$$\mathcal{K}_{x_0} = \frac{1}{\alpha-1} \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1-\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

une matrice dont les valeurs propres sont les racines de

$$(1-\alpha)^2\lambda^2 + (1-\alpha)^2\lambda + 1 + \alpha + \alpha^2.$$

Ces racines ne sont réelles que si $\alpha = -1$, mais dans ce cas elles valent $-1/2$ et ne sont en tout cas pas dans $\mathbf{N}$.

- Considérons le cas où $n = 1$ (celui des intégrales premières quadratiques). Dans ce cas, le quatrième point de $\mathcal{J}$ est

$$x_0 = \left(-\beta, \frac{1-\beta}{\beta}, \frac{1}{\beta-1} \right)$$

et la matrice de Kovalevskaya

$$\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & \beta-1 \\ -\frac{1}{\beta} & -1 & \frac{1-\beta}{\beta} \\ \frac{1}{\beta-1} & -\frac{\beta}{\beta-1} & -1 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont -2 (double) et 1 (simple), n'interdisant donc pas l'existence d'une intégrale première quadratique. Et en effet, on vérifie sans mal qu'il en existe une.

Résumons ces quelques calculs en un énoncé.

Proposition 5.4.2. *Le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - \gamma x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_3 - \alpha x_1) \\ \dot{x}_3 = x_3(x_1 - \beta x_2) \end{cases}$$

(avec α, β et γ trois constantes non nulles satisfaisant à $\alpha\beta\gamma \neq 1$) ne possède aucune intégrale première linéaire ni polynomiale de degré ≥ 3 dont la différentielle ne s'annule pas en les points de l'ensemble indiciel $\mathcal{J}$. Pour qu'il possède une intégrale première quadratique, il faut et il suffit que $\alpha = \frac{1}{1-\beta}$ et $\gamma = 1 - \frac{1}{\beta}$ (alors $\alpha\beta\gamma = -1$). Cette intégrale première est alors

$$H(x) = \beta^2 x_1^2 + \beta^2(\beta-1)^2 x_2^2 + (\beta-1)^2 x_3^2 + 2[\beta(\beta-1)^2 x_2 x_3 + \beta(\beta-1)x_3 x_1 + \beta^2(1-\beta)x_1 x_2].$$

Il est pourtant bien connu que ce système possède, dans quelques autres cas, une intégrale première polynomiale (voir [16]).

5.5. Systèmes de Kovalevskaya. —

5.5.a. L'ensemble indiciel. — Le système « général » de Kovalevskaya est générique. La figure 1 montre les trois coniques, à gauche dans le cas général, la troisième ne passant par aucun des points base du pinceau défini par les deux premières, à droite dans le cas spécial où la troisième conique passe par trois des points base. Il s'agit bien ici d'un exemple générique au sens où $\mathcal{J}$ contient sept points et $\mathcal{J}_\infty$ aucun.

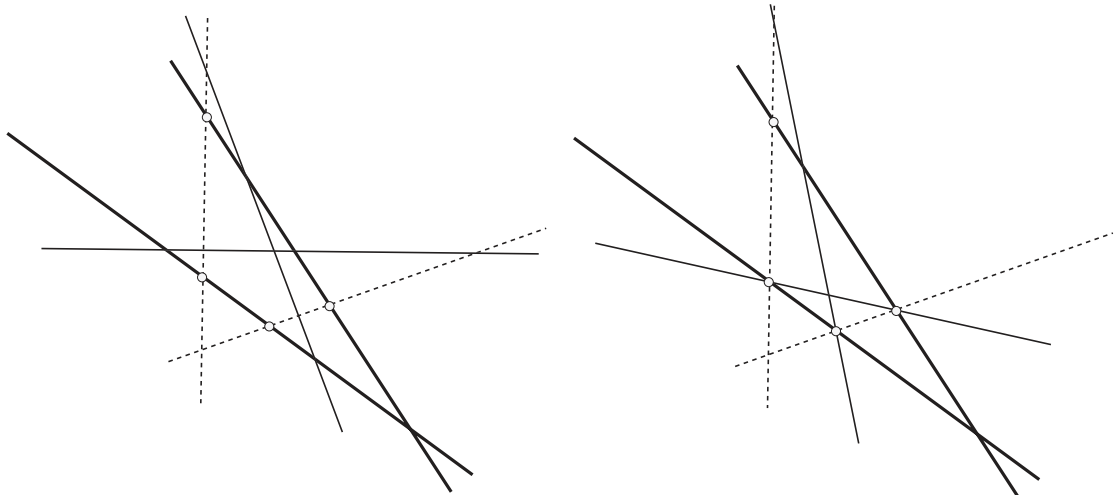


FIGURE 1. Le pinceau de Kovalevskaya (cas général, cas spécial)

Comme nous le savons, le cas spécial est équivalent au cas d'Euler, pour lequel, clairement, les trois coniques ont trois points en commun... mais pour lequel les pincesaux sont dégénérés : les points communs ont une signification intrinsèque, les pincesaux dépendent des choix de coordonnées faits.

Le système $(Ko)_s$ est

$$\begin{cases} -x_1 = x_1(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2 - \gamma_1 x_3) \\ -x_2 = x_2(-\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 - \gamma_2 x_3) \\ -x_3 = x_3(-\alpha_3 x_1 - \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3) \end{cases} \quad (Ko)_s$$

et son ensemble de solutions est

$$\mathcal{J} = \{(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1), (1, 1, 1)\}.$$

Dans le cas d'un système de Kovalevskaya $(Ko)_d$ à coefficients diagonaux non nuls, mis sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1 - b_1 x_2 - c_1 x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(-a_2 x_1 + x_2 - c_3 x_3) \\ \dot{x}_3 = x_3(-a_3 x_3 - b_3 x_3 + x_3), \end{cases} \quad (Ko)_d$$

les points $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ et $(0, 0, -1)$ sont dans $\mathcal{J}$.

5.5.b. *Les matrices de Kovalevskaya.* — Considérons le cas d'un système de Kovalevskaya à coefficients diagonaux non nuls $(Ko)_d$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1 - b_1 x_2 - c_1 x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(-a_2 x_1 + x_2 - c_2 x_3) \\ \dot{x}_3 = x_3(-a_3 x_1 - b_3 x_2 + x_3). \end{cases} \quad (Ko)_d$$

Au point $x_0 = (-1, 0, 0)$, la matrice de Kovalevskaya est

$$\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} -2 & -b_1 & -c_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (Ko)_d$$

5.5.c. *L'algèbre de Markus.* — L'algèbre a une base (u_1, u_2, u_3) dont les produits des éléments sont

$$u_1 \cdot u_1 = \alpha_1 u_1, \quad u_2 \cdot u_2 = \beta_2 u_2, \quad u_3 \cdot u_3 = \gamma_3 u_3,$$

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{2}(-\beta_1 u_1 - \alpha_2 u_2), \quad u_2 \cdot u_3 = \frac{1}{2}(-\gamma_2 u_2 - \beta_3 u_3), \quad u_3 \cdot u_1 = \frac{1}{2}(-\alpha_3 u_3 - \gamma_1 u_1).$$

— Le cas diagonal $(Ko)_d$. Supposons $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$, un cas auquel nous avons vu qu'on peut se ramener quand les termes diagonaux ne sont pas nuls (le cas $(Ko)_d$). Si l'on suppose de plus que les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & -b_1 \\ -a_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -c_2 \\ -b_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -a_3 \\ -c_1 & 1 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & 1 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

sont non nuls, dans cette algèbre de Markus,

- aucun élément non nul n'est de carré nul (c'est le cas dit « générique » représenté à gauche de la figure 1),
- les idempotents sont u_1, u_2, u_3 et quatre autres vecteurs à coordonnées non nulles.

5.5.d. *Les critères de Liapounov et Kovalevskaya.* — La condition de Liapounov le long de la solution particulière $t^{-1}x_0$ du système $(Ko)_d$ est donc que a_2 et a_3 soient des entiers. En considérant les points $(0, -1, 0)$ et $(0, 0, -1)$, on voit de même que b_1, b_3, c_1 et c_2 doivent aussi être des entiers.

Le polynôme caractéristique de chacune des matrices de Kovalevskaya pour le système $(Ko)_s$ est

$$-(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2, \quad (Ko)_s$$

la valeur propre double $\lambda = 1$ possède un sous-espace propre de dimension 2, donc le système satisfait à la condition de Liapounov comme à celle de Kovalevskaya.

De même dans le cas $(LV)_h$ où les valeurs propres sont -2 et 0 (double).

5.6. Les systèmes de Halphen. — Il s'agit du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2x_3 - x_1(x_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 = x_3x_1 - x_2(x_3 + x_1) \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - x_3(x_1 + x_2), \end{cases} \quad (\text{Ha})$$

et plus généralement de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1^2 - (\lambda - a_1)(x_2x_3 - x_1(x_2 + x_3)) \\ \dot{x}_2 = a_2x_2^2 - (\lambda - a_2)(x_3x_1 - x_2(x_3 + x_1)) \\ \dot{x}_3 = a_3x_3^2 - (\lambda - a_3)(x_1x_2 - x_3(x_1 + x_2)), \end{cases} \quad (\text{Ha})_g$$

Ces systèmes sont apparus pour la première fois sans doute dans un article de Darboux [4], il ont été immédiatement étudiés par Halphen [7, 8] dès 1881. Ils jouent un rôle dans certains problèmes de physique et notamment dans les équations dites Bianchi IX (gravitation quantique).

5.6.a. L'ensemble indiciel. — Dans ce cas, on trouve

$$\tilde{\mathcal{I}} = \{[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [1, 1, 1, 1]\}$$

de sorte que $\mathcal{I} = \{(1, 1, 1)\}$ est constitué d'un seul point.

Les coniques dégénérées du pinceau engendré par $F_1 = x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3$ et $F_2 = x_3x_1 - x_2x_3 - x_2x_1$ sont

$$G_1 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = -x_1x_2 \text{ et } G_2 = \frac{1}{2}(F_1 - F_2) = x_3(x_2 - x_1).$$

Avec

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \text{ et } y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2),$$

le système de Halphen est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_2 = -y_2y_3 \\ \dot{y}_3 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - 2y_3y_1. \end{cases} \quad (\text{Ha})$$

Illustrons cet exemple par une figure (la figure 2) qui représente, à gauche les coniques définies par les deux premières équations (deux fois deux droites, une fois en gras, une fois en pointillés, seulement trois points d'intersection) et une conique propre du faisceau engendré, à droite les deux mêmes coniques dégénérées avec celle définie par la troisième équation, elle ne fait pas partie du pinceau (elle n'est pas tangente à la droite grasse, la troisième équation est indépendante des deux premières) mais elle passe par les trois points base du pinceau.

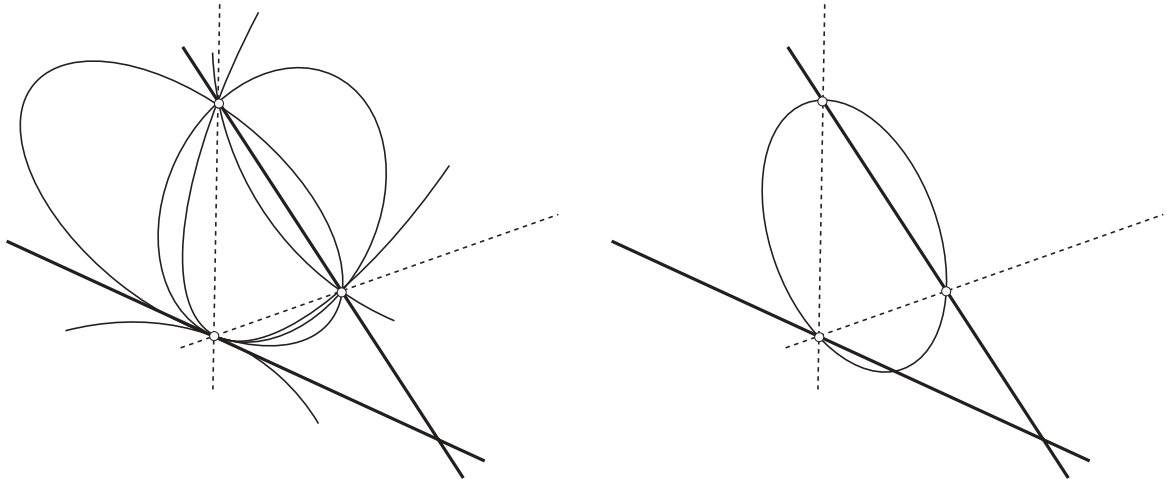


FIGURE 2. Le pinceau de Halphen

5.6.b. *Les matrices de Kovalevskaya.* — La matrice de Kovalevskaya pour le système de Halphen est (en l'unique point $(1, 1, 1)$ de $\mathcal{J}$), $\mathcal{K}_{x_0} = -2 \text{Id}$.

5.6.c. *L'algèbre de Markus.* — L'algèbre a une base (u_1, u_2, u_3) dont les produits des éléments sont

$$u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_3 = 0,$$

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{2}(-u_1 - u_2 + u_3), \quad u_2 \cdot u_3 = \frac{1}{2}(-u_2 - u_3 + u_1), \quad u_3 \cdot u_1 = \frac{1}{2}(-u_3 - u_1 + u_2). \quad (\text{Ha})$$

Cette fois,

- les éléments de carré nul sont les multiples scalaires des vecteurs de base (il s'agit des trois points de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ détectés sur la figure 2),
- il y a un unique idempotent, le vecteur $-u_1 - u_2 - u_3$, dont nous avons vu qu'il est élément neutre de cette algèbre.

Plus généralement, dans l'algèbre de Markus associée au système $(\text{Ha})_g$, $\frac{1}{\lambda}(u_1 + u_2 + u_3)$ est élément neutre.

De la proposition 2.5.6 se déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 5.6.1. *Le système de Halphen n'est pas équivalent à un système de Kovalevskaya à termes diagonaux non nuls, ni au système de Kac-van Moerbeke.*

Démonstration. L'algèbre de Markus du système de Halphen possède un élément neutre. □

5.6.d. *L'algèbre de Markus (suite). Le cas général de Hoyer.* — L'algèbre a une base (u_1, u_2, u_3) dont les produits des éléments sont

$$u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_3 = 0,$$

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{2}(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3), \quad u_2 \cdot u_3 = \frac{1}{2}(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3), \quad u_3 \cdot u_1 = \frac{1}{2}(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3).$$

- Si les trois formes quadratiques qui forment le second membre du système sont indépendantes, les éléments de carré nul sont les multiples scalaires des vecteurs de base.
- Pour que l'algèbre possède un élément neutre, il faut et il suffit que le système s'écrive

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 \left(x_2 x_3 + \gamma x_3 x_1 + \frac{1}{\beta} x_1 x_2 \right) \\ \dot{x}_2 = b_2 \left(\frac{1}{\gamma} x_2 x_3 + x_3 x_1 + \alpha x_1 x_2 \right) \\ \dot{x}_3 = c_3 \left(\beta x_2 x_3 + \frac{1}{\alpha} x_3 x_1 + x_1 x_2 \right) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha\beta\gamma \neq 1. \quad (\text{Ho})_n$$

L'élément neutre est alors

$$e = \frac{2}{1 - \alpha\beta\gamma} \left(\frac{1}{c_3} u_1 + \frac{1}{a_1} u_2 + \frac{1}{b_2} u_3 \right).$$

Le cas de Halphen considéré ci-dessus correspond à $a_1 = b_2 = c_3 = 1$ et $\alpha = \beta = \gamma = -1$.

On a sans mal, comme corollaire de la proposition 2.5.6, qu'un système de Hoyer (Ho) est équivalent au système de Halphen si et seulement si il est de la forme $(\text{Ho})_n$:

Proposition 5.6.2. *Pour qu'un système de Hoyer (Ho) soit équivalent à un système de Halphen (Ha) , il faut et il suffit que*

$$a_2 = \gamma a_1, \quad a_3 = a_1/\beta, \quad b_1 = b_2/\gamma, \quad b_3 = \alpha b_2, \quad c_1 = \beta c_3, \quad c_2 = c_3/\alpha \text{ avec } \alpha\beta\gamma = -1. \quad \square$$

5.6.e. Les critères de Kovalevskaya et Liapounov. — XX Dans l'exemple du système de Halphen, $t^{-1}(1, 1, 1)$ est ainsi une solution rationnelle — qui n'apparaît pas dans « la » solution générale donnée dans [7].

C'est ce qui se produit XX dans l'exemple du système de Halphen : nous avons vu que la matrice de Kovalevskaya en l'unique point de $\mathcal{J}$ est -2Id , et en effet ce point détermine un élément neutre pour l'algèbre de Markus.

Dans le cas de Halphen, les solutions de l'équation linéarisée le long de la solution $t^{-1}x_0$ sont toutes univaluées. Le système différentiel linéaire est en effet

$$\dot{X} = -2t^{-1}X$$

et ses solutions

$$X(t) = t^{-2}X(0), \text{ un espace de dimension 3.}$$

Pourtant le critère de Kovalevskaya donne, lui, $x_0 = (1, 1, 1)$, puis $x_1 = 0$, puis, de proche en proche

$$(\mathcal{K}_{x_0} - (k-1)\text{Id})x_k = 0$$

qui donne $x_k = 0$ puisque la seule valeur propre de $\mathcal{K}_{x_0}$ est -2 . La seule et unique solution méromorphe du système de Halphen est bien $t^{-1}(1, 1, 1)$.

5.6.f. Intégrabilité. — Il existe différentes façons de montrer des énoncés impliquant plus ou moins que ce système n'est pas intégrable au sens de Liouville (voir [14, 18] et ici la proposition 4.2.7). À noter toutefois que ces systèmes sont apparus « tout intégrés » dans la littérature : ce que contient la note [7] de Halphen, c'est la solution générale de « son » système, le système (Ha). Les fonctions x_1, x_2 et x_3 solutions sont des fonctions ϑ — un autre aspect du monde des courbes elliptiques, la variable temps est cette fois un module. On peut aussi dire que les solutions sont des fonctions hypergéométriques. La remarque essentielle grâce à laquelle Halphen a pu intégrer son système, c'est qu'il a un gros groupe de symétries, le groupe $\text{PSL}(2; \mathbf{C})$.

5.6.g. Le groupe des automorphismes. — Comme dans le cas d'Euler (§5.3.h), les nilpotents d'indice 2 de l'algèbre de Markus sont les multiples scalaires des vecteurs de la base canonique. Un automorphisme $\varphi \in \text{GL}(3; \mathbf{C})$ satisfait à $\varphi(u_i) = \alpha_i u_{\sigma(i)}$. Il doit aussi préserver l'unique idempotent, donc

$$\varphi(u_1 + u_2 + u_3) = u_1 + u_2 + u_3, \text{ donc } \alpha_i = 1$$

et φ est une permutation : le groupe des automorphismes du système de Halphen est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ (plongé dans $\text{GL}(3; \mathbf{C})$ par la représentation régulière).

5.7. Le système de Kasner. — Il s'agit du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_3 x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - x_3^2 \end{cases} \quad (\text{Ka})$$

Il est introduit dans [12] pour résoudre, dans certains cas, les équations d'Einstein.

5.7.a. L'ensemble indicial. — C'est un exemple très peu générique, les ensembles indiciaux sont très gros, $\tilde{\mathcal{J}}$ est infini. Les points d'intersection des quadriques obtenus en résolvant le système $F(x) + wx = 0$ sont les points $[1, 1, 1, 0]$, $[0, 0, 0, 1]$ et la courbe $\mathcal{C}$ image de

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) &\longrightarrow \mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \\ [u, t] &\longmapsto [u(u+t), t(u+t), -tu, u^2 + ut + t^2]. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une conique plane (l'intersection du plan $x_1 + x_2 + x_3 + w = 0$ et de la quadrique $x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0$),

$$\tilde{\mathcal{J}} = \{[1, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 1]\} \cup \mathcal{C}. \quad (\text{Ka})$$

Les points à l'infini de $\mathcal{C}$ sont les points $[1, j, j^2, 0]$ et $[1, j^2, j, 0]$ (j désigne une racine cubique primitive de 1), de sorte que

$$\mathcal{J}_\infty = \{[1, 1, 1, 0], [1, j, j^2, 0], [1, j^2, j, 0]\}. \quad (\text{Ka})$$

Quant à $\mathcal{J}$, c'est la partie affine de la conique $\mathcal{C}$.

Les points bases du pinceau engendré par les deux coniques $x_2x_3 - x_1^2 = 0$ et $x_3x_1 - x_2^2 = 0$ sont les points $[1, 1, 1]$, $[1, j, j^2]$, $[1, j^2, j]$, ainsi que le point $[0, 0, 1]$. Les trois coniques à l'infini passent par les trois premiers de ces points (figure 3).

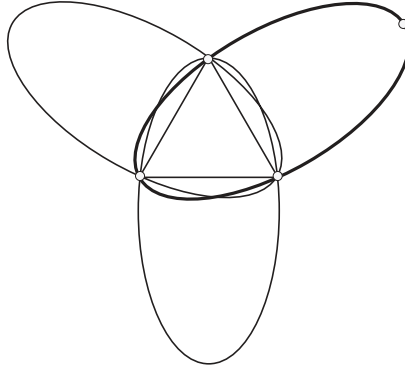


FIGURE 3. Les coniques à l'infini de Kasner

5.7.b. *Les matrices de Kovalevskaya.* — La matrice de Kovalevskaya en $x_0 \in \mathcal{J}$ est

$$\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} -2x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & -2x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \end{pmatrix} \text{ pour } x_0 = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1+u}{1+u+u^2}, \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}, \frac{-u}{1+u+u^2} \right), \quad (\text{Ka})$$

elle dépend du point de $\mathcal{J}$ considéré, mais son polynôme caractéristique est $-(\lambda+2)(\lambda^2-1)$ pour tout $x_0 \in \mathcal{J}$. Elle a donc la valeur propre -1 avec multiplicité 1, conformément au fait que la dimension de $\mathcal{J}$ est 1.

5.7.c. *L'algèbre de Markus.* — L'algèbre a une base (u_1, u_2, u_3) dont les produits des éléments sont

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_1 &= -u_1, & u_2 \cdot u_2 &= -u_2, & u_3 \cdot u_3 &= -u_3, \\ u_1 \cdot u_2 &= \frac{1}{2}u_3, & u_2 \cdot u_3 &= \frac{1}{2}u_1, & u_3 \cdot u_1 &= \frac{1}{2}u_2. \end{aligned} \quad (\text{Ka})$$

Dans cette algèbre,

– les éléments de carré nul sont les⁽⁹⁾ multiples scalaires de

$$u_1 + \zeta u_2 + \zeta^2 u_3 \text{ avec } \zeta^3 = 1,$$

– il y a une infinité d'idempotents (nous avons vu que $\mathcal{J}$ est une conique).

5.7.d. *Critères de Kovalevskaya et Liapounov.* — Le polynôme caractéristique de chacune des matrices de Kovalevskaya obtenues est

$$-(\lambda+2)(\lambda^2-1), \quad (\text{Ka})$$

les solutions des systèmes linéarisés sont univaluées mais le système différentiel ne satisfait pas à la condition de Kovalevskaya puisqu'il y a une valeur propre entière négative autre que -2 (due à une excessive dimension de $\mathcal{J}$ comme nous le savons, § 2.3). Pourtant, toutes les solutions de ce système sont des fonctions méromorphes du temps. On connaît ces solutions (voir l'article original de Kasner [12]), que l'on obtient en remarquant qu'il est invariant par permutation des coordonnées, ce qui donne l'idée d'utiliser comme inconnues les fonctions symétriques élémentaires des x_i , dans lesquelles il s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = -\sigma_1^2 + 3\sigma_2 \\ \dot{\sigma}_2 = 0 \\ \dot{\sigma}_3 = \sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_2. \end{cases} \quad (\text{Ka})$$

Ainsi la forme quadratique $\sigma_2 = x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2$ est une intégrale première. En fixant la constante d'intégration $\sigma_2 = -k^2/3$, on obtient les solutions

$$\text{– pour } k = 0, x = \frac{1}{t-A}x_0 \text{ (où } x_0 \in \mathcal{J}),$$

⁽⁹⁾Une seule droite, correspondant à $\zeta = 1$, si l'on se restreint au cas réel comme dans [15, p. 190].

– pour $k \neq 0$ et σ_1 non constante,

$$x = \frac{1}{3}k \tan(A - kt)(1, 1, 1) + \frac{k}{\cos(A - kt)}(a_1, a_2, a_3)$$

où les a_i sont les trois racines de $X^3 - \frac{1}{3}X - C = 0$, pour C une constante arbitraire,

– pour $k \neq 0$ et σ_1 constante,

$$x = \frac{ik}{3}(1, 1, 1) + Ae^{-ikt}x_0, \text{ avec } x_0 = (1, j, j^2) \text{ ou } (1, j^2, j).$$

5.7.e. Le groupe des automorphismes. — Les trois vecteurs $v_1 = u_1 + u_2 + u_3$, $v_2 = u_1 + ju_2 + j^2u_3$, $v_3 = u_1 + j^2u_2 + ju_3$ forment une base de nilpotents d'indice 2 dans $\mathbf{C}^3$. Un automorphisme φ doit satisfaire à $\varphi(v_i) = \alpha_i v_{\sigma(i)}$. Ces automorphismes doivent aussi laisser la conique J globalement invariante. Dans les coordonnées associées à la base (v_1, v_2, v_3) , celle-ci a pour équations

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{3} \\ y_2 y_3 = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Seuls les isomorphismes φ avec $\sigma(1) = 1$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \alpha_3 = 1$ sont acceptables. On vérifie sans mal que le groupe des automorphismes est dans ce cas

$$\text{Aut}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}^* \right\},$$

un groupe de Lie de dimension 2, engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Références

- [1] M. ADLER, P. VAN MOERBEKE & P. VANHAECKE – *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [2] M. AUDIN – *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, vol. 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.
- [3] ———, *Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya*, Orizzonti, Calvage & Mounet, 2008.
- [4] G. DARBOUX – « Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)* **7** (1878), p. 101–150.
- [5] A. GORIELY – *Integrability and nonintegrability of dynamical systems*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 19, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.
- [6] L. HAINE – « The algebraic complete integrability of geodesic flow on $\text{SO}(n)$ », *Comm. Math. Phys.* **94** (1984), p. 271–287.
- [7] G. HALPHEN – « Sur un système d'équations différentielles », *C. R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), p. 1101–1103.
- [8] ———, « Sur certains systèmes d'équations différentielles », *C. R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), p. 1404–1406.
- [9] ———, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1886.
- [10] P. HOYER – « Ueber die Integration eines Differentialgleichungssystems durch elliptische Funktionen », Dissertation, Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin, 1879.
- [11] J. HUBBARD & B. WEST – *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, Paris, 2000, traduit de l'anglais par Véronique Gautheron.
- [12] E. KASNER – « Solutions of the Einstein equations involving functions of only one variable », *Trans. Amer. Math. Soc.* **27** (1925), no. 2, p. 155–162.
- [13] M. KINYON & A. SAGLE – « Quadratic dynamical systems and algebras », *J. Differential Equations* **117** (1995), p. 67–126.

- [14] A. J. MACIEJEWSKI & J.-M. STRELCYN – « On the algebraic non-integrability of the Halphen system », *Phys. Lett. A* **201** (1995), no. 2-3, p. 161–166.
- [15] L. MARKUS – « Quadratic differential equations and non-associative algebras », in *Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol. V*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960, p. 185–213.
- [16] J. MOULIN-OLLAGNIER – « Polynomial first integrals of the Lottka-Volterra system », *Bull. Sci. math.* (1997), p. 463–476.
- [17] M. PRZYBYLSKA – « Finiteness of integrable n -dimensional homogeneous polynomial potentials », *Physics Letters A* **XX** (2007), p. XX.
- [18] C. VALLS – « Analytic first integrals of the Halphen system », *J. Geom. Phys.* **56** (2006), no. 7, p. 1192–1197.
- [19] S. L. ZIGLIN – « Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I », *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982), p. 181–189.