
INTÉGRABILITÉ ET NON-INTÉGRABILITÉ DE SYSTÈMES HAMILTONIENS

par

Michèle Audin

Ce texte est celui des cours que j'ai donnés à Tipaza à l'automne 2007, devant un public enthousiaste et sympathique. Il ne contient aucun résultat original, et peut-être même rien d'original par rapport à ce que j'ai déjà écrit moi-même, étant fondé sur différents textes (et, je l'avoue, fichiers $\text{\TeX}$) déjà publiés, tels que [3] (sur les toupies), [4, 5] pour le théorème de Morales et Ramis [17, 18] et ses premières applications, [6] pour l'application au problème du satellite et [7] pour un panorama « grand public » sur les systèmes intégrables.

1. Systèmes hamiltoniens sur les variétés symplectiques

Un système hamiltonien est un système différentiel sur une variété symplectique ou de Poisson. Je me contente ici du cas symplectique, renvoyant au cours de Mohammed Boucetta pour le cas plus général des variétés de Poisson.

1.1. Variétés symplectiques. Une variété W est dite symplectique si elle est munie d'une 2-forme différentielle ω qui est non dégénérée et fermée.

Une 2-forme, c'est à dire, pour chaque x , une forme bilinéaire alternée ω_x sur $T_x W$. Chaque ω_x doit être non dégénérée, ce qu'on peut écrire, si la dimension, nécessairement paire, de W est $2n$,

$$\wedge^n \omega_x \neq 0 \in \bigwedge^{2n} T_x^* W$$

pour tout x . Autrement dit, on demande que la $2n$ -forme $\omega^{\wedge n}$ soit une forme volume sur W . Notons qu'en particulier, la variété W doit posséder une forme volume et donc être orientable.

On demande aussi que ω soit fermée. On veut que le calcul différentiel que ω permet de faire sur W soit localement le même que celui qu'on sait faire sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme « constante »

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

Si les vecteurs de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ sont notés $X = (q, p)$, $X' = (q', p')$, on a

$$\omega(X, X') = p \cdot q' - p' \cdot q.$$

On a $\omega = d(\sum_{i=1}^n p_i dq_i)$, en particulier, ω est une forme *exacte*. On pourrait demander à une forme symplectique d'être une forme exacte... malheureusement, ceci interdirait d'utiliser des variétés compactes. On a en effet :

Proposition 1.1. *Sur une variété compacte, il n'existe aucune 2-forme qui soit à la fois non dégénérée et exacte.*

Démonstration. On a dit que ω est non dégénérée si et seulement si $\omega^{\wedge n}$ est une forme volume. Si ω était exacte, on aurait $\omega = d\alpha$, mais alors la forme volume $\omega^{\wedge n}$ serait exacte : $\omega^{\wedge n} = d(\alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)})$. On aurait :

$$0 < \int_W \omega^n = \int_W d(\alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)}) = \int_{\partial W} \alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = 0$$

(grâce à la formule de Stokes), une contradiction. $\square$

En réalité, si on veut calculer *localement* comme dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, ce qu'il faut utiliser, c'est une condition d'« exactitude locale »... c'est-à-dire de fermeture. D'où la définition utilisée ci-dessus.

Bien entendu, on commettra souvent l'abus d'appeler W une variété symplectique, sans mentionner la forme ω quand il n'y aura pas d'ambiguïté à redouter.

1.2. Exemples de variétés symplectiques. Évidemment, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme constante $\sum dp_i \wedge dq_i$, est une variété symplectique.

Les cotangents. Si V est une variété, on considère l'espace total de son fibré cotangent, avec la projection :

$$\pi : T^*V \longrightarrow V.$$

Sur T^*V , il y a une 1-forme différentielle α , dite *forme de Liouville*, définie par :

$$\alpha_{(x,\varphi)}(X) = \varphi(T_{(x,\varphi)}\pi(X))$$

où $x \in V$, $\varphi \in T_x^*V$ et $X \in T_{(x,\varphi)}(T^*V)$. On vérifie aisément que $\omega = d\alpha$ est non dégénérée (et encore plus aisément qu'elle est fermée!). Si $(q_1, \dots, q_n)$ sont

des coordonnées locales sur V et si $(p_1, \dots, p_n)$ sont les coordonnées « duales », alors $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ est un système de coordonnées locales dans lequel $\alpha = \sum p_i dq_i$ et $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. On dit souvent que ω est la « forme symplectique canonique » sur le cotangent. C'est un exemple de forme symplectique exacte, bien sûr sur une variété non compacte. L'exemple de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ci-dessus peut être considéré comme le cas où $V = \mathbf{R}^n$.

La sphère. On considère la sphère unité S^2 de $\mathbf{R}^3$, dont l'espace tangent en un point v est le plan orthogonal au vecteur unitaire v . On pose

$$\omega_v(X, Y) = v \cdot (X \wedge Y).$$

C'est une 2-forme non dégénérée (vérification immédiate) et donc une forme symplectique.

On peut démontrer (c'est le célèbre « théorème de Darboux ») que toutes les variétés symplectiques sont *localement* isomorphes à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ avec la forme $\sum dp_i \wedge dq_i$.

1.3. Systèmes hamiltoniens. Si $H : W \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction, la forme symplectique permet de lui associer un champ de vecteurs, une sorte de gradient, le *champ hamiltonien* X_H (parfois appelé le « gradient symplectique » de H). C'est le champ de vecteurs défini par la relation

$$\omega_x(Y, X_H(x)) = (dH)_x(Y) \text{ pour tout } Y \in T_x W$$

(ou par $i_{X_H} \omega = -dH$).

Comme tout champ de vecteurs, un champ hamiltonien peut être considéré comme une équation différentielle, ici

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)).$$

Par exemple, si H est une fonction sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, le système hamiltonien associé est le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

en notations abrégées où $q = (q_1, \dots, q_n)$ et $p = (p_1, \dots, p_n)$.

On remarque que le champ X_H s'annule en x si et seulement si x est un point critique de la fonction H :

$$X_H(x) = 0 \iff (dH)_x = 0.$$

En particulier, les singularités (ou zéros) d'un champ de vecteurs hamiltonien sont les points critiques d'une fonction.

On remarque aussi que la fonction H est constante sur les trajectoires ou courbes intégrales du champ X_H : comme ω_x est alternée, on a $(dH)(X_H) = 0$ ou $X_H \cdot H = 0$.

1.4. Exemples.

1.4.a. L'oscillateur harmonique. On appelle ainsi le système différentiel qui décrit, par exemple, l'allongement d'un ressort (sans amortissement) ou un circuit « RLC » sans résistance ($R = 0$). L'équation différentielle est $\ddot{q} = -aq$ pour un certain réel $a > 0$.

La variété symplectique est $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On suppose ici que $a = 1$. Le hamiltonien est alors

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

et le système différentiel est simplement

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -q.$$

Il est bien entendu équivalent à l'équation différentielle $\ddot{q} = -q$. Ses solutions sont données par $q = A \cos(t - t_0)$, $\dot{q} = -A \sin(t - t_0)$. Les trajectoires ont pour supports les niveaux de H , c'est-à-dire les cercles centrés à l'origine.

1.4.b. Les rotations sur la sphère. La sphère unité S^2 de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ est munie, comme on l'a vu ci-dessus, de la forme ω définie par

$$\omega_v(X, Y) = v \cdot (X \wedge Y).$$

On considère le hamiltonien $H(x, y, z) = z$. Appelons e_3 le « troisième » vecteur de base, de sorte que $H(v) = v \cdot e_3$. Le champ hamiltonien est le champ X tangent à S^2 et vérifiant, pour tout $Y \in T_v S^2 = v^\perp$,

$$v \cdot (X \wedge Y) = -(dH)_v(Y) = -Y \cdot e_3,$$

c'est-à-dire, pour tout $Y \in v^\perp$,

$$Y \cdot (v \wedge X - e_3) = 0.$$

La condition est donc équivalente au fait que $v \wedge X - e_3$ soit colinéaire à v , ce qui donne $X_H(v) = v \wedge e_3$. Les trajectoires de X_H sont les cercles intersections des plans horizontaux avec la sphère.

1.4.c. Le pendule simple. Le pendule simple est le système mécanique constitué par une bille (pesante) attachée à une corde (supposée, bien sûr, non pesante et non élastique) dont l'autre extrémité est fixe, dans un champ de pesanteur constant.

On considère ici que la bille se meut dans un plan vertical. Désignons par θ l'angle fait par la corde du pendule avec la verticale (direction de la pesanteur). L'équation différentielle décrivant le mouvement de la bille est $\ddot{\theta} = -\sin \theta$.

L'espace de phases est $S^1 \times \mathbf{R}$. Utilisons une variable réelle q dont θ est la réduction modulo 2π et la variable duale $p = \dot{q}$. L'équation différentielle est équivalente au système

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\sin q,$$

qui est le système hamiltonien associé à la fonction $H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q = \frac{1}{2}p^2 - \cos \theta$, l'énergie totale du pendule simple.

Passons maintenant à des exemples « à deux degrés de liberté », c'est-à-dire sur des variétés symplectiques de dimension 4.

1.4.d. Le système de Hénon-Heiles. La variété symplectique est $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ et le hamiltonien la fonction

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1) - \frac{\lambda}{3}q_1^3.$$

Le champ de vecteurs X_H est

$$X_H(q_1, q_2, p_1, p_2) = (p_1, p_2, q_2^2 + \lambda q_1^2, 2q_2(A + q_1)).$$

Appelons E le sous-espace (symplectique) d'équations $q_2 = p_2 = 0$. Si $x = (q_1, 0, p_1, 0)$ est un point de E , on a

$$X_H(x) = (p_1, 0, \lambda q_1^2, 0).$$

Le champ hamiltonien X_H est donc *tangent* au sous-espace E . Il y a donc des solutions du système hamiltonien qui sont *contenues* dans E . Si $\lambda = 0$, ce sont les droites $(p_1 t + q_1^0, 0, p_1, 0)$.

1.4.e. Le pendule sphérique. On attache une barre à un point fixe O et on l'abandonne à l'action de la pesanteur. Comme la barre est rigide, son extrémité se meut sur une sphère (et plus dans un plan, comme dans le pendule simple). L'état du système à chaque instant est caractérisé par la position q et la vitesse p de l'extrémité de la barre. On appelle donc « pendule sphérique » le système décrit sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ par le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \Gamma \cdot q$$

où p et q désignent des vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et Γ le champ de pesanteur constant « vertical ». Voir ci-dessous la figure 3.

L'espace de phases est

$$TS^2 = \left\{ (q, p) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|q\|^2 = 1 \text{ et } q \cdot p = 0 \right\},$$

(c'est bien le fibré tangent à la sphère S^2) muni de la restriction de la forme symplectique de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, qui est encore une forme symplectique.

Le champ hamiltonien est l'unique champ (Y, X) tangent à TS^2 et vérifiant

$$(dH)_{(q,p)}(\eta, \xi) = \omega((\eta, \xi), (Y, X)) = \xi \cdot Y - \eta \cdot X$$

pour tout vecteur (η, ξ) tangent à TS^2 . Maintenant,

$$(dH)_{(q,p)}(\eta, \xi) = p \cdot \xi - \Gamma \cdot \eta$$

et le fait que (Y, X) est tangent à TS^2 en (q, p) s'exprime par les conditions $Y \cdot q = 0$ et $Y \cdot p + q \cdot X = 0$. L'unique solution est $Y = p$ et $X = \Gamma - (q \cdot \Gamma + \|p\|^2)q$ et le système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \Gamma - (q \cdot \Gamma + \|p\|^2)q. \end{cases}$$

1.4.f. Le solide avec un point fixe. Il s'agit d'un solide de centre de gravité G , avec un point O fixé, dans un champ de pesanteur constant.

Il est pratique, pour écrire les équations du mouvement, d'utiliser un repère lié au solide. Le champ de pesanteur constant est un vecteur Γ dépendant du temps (dans le repère mobile). Le moment angulaire est appelé M . Il est lié à la rotation instantanée Ω du solide par la relation $M = \mathcal{J}(\Omega)$ pour un certain endomorphisme symétrique constant $\mathcal{J}$, l'inertie (voir par exemple [3]).

L'énergie totale du solide est alors

$$H(\Gamma, M) = \underbrace{\frac{1}{2}M \cdot \Omega}_{\text{cinétique}} + \underbrace{\Gamma \cdot L}_{\text{potentielle}}$$

où L désigne le vecteur $\overrightarrow{GO}$.

En application des lois de la mécanique, on montre que le système différentiel décrivant le mouvement du solide est

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L \end{cases}$$

Le vecteur Γ n'est, certes, plus constant, mais il reste unitaire⁽¹⁾. On sait aussi que la quantité $\Gamma \cdot M$, moment du solide par rapport à la verticale⁽²⁾, est conservée. Les vecteurs Γ et M sont donc contraints à rester sur la sous-variété

$$W_a = \left\{ (\Gamma, M) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ et } \Gamma \cdot M = a \right\}.$$

Cette sous-variété est difféomorphe au fibré tangent de la sphère S^2 , par l'application

$$(\Gamma, M) \mapsto (\Gamma, M - a\Gamma).$$

On peut la munir d'une forme symplectique ω pour laquelle le système différentiel est le système hamiltonien associé à l'énergie H . Attention, ω n'est

⁽¹⁾Les unités étant convenablement choisies...

⁽²⁾Par définition, la « verticale » est la direction du champ de pesanteur.

pas la structure symplectique canonique du fibré tangent à S^2 . C'est ici⁽³⁾ la forme

$$\omega_{(\Gamma, M)}((\xi, \eta), (\xi', \eta')) = (\xi \wedge M + \Gamma \wedge \eta) \cdot \xi' + (\Gamma \wedge \xi) \cdot \eta'.$$

1.5. Crochet de Poisson. Supposons maintenant que f et g soient deux fonctions sur W . On définit leur « crochet de Poisson » $\{f, g\}$ par la formule

$$\{f, g\} = X_f \cdot g = dg(X_f).$$

On remarque immédiatement qu'on a

$$\{f, g\} = dg(X_f) = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -df(X_g) = -X_g \cdot f = -\{g, f\}.$$

Cette suite d'égalités montre que le crochet est anti-symétrique en f et g . Par définition aussi, c'est une dérivation (en chacune de ses variables), c'est-à-dire qu'il vérifie l'identité de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

En utilisant la formule générale

$$\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X, Y]}$$

et la formule de Cartan

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d,$$

on obtient

$$\begin{aligned} i_{[X_f, X_g]} \omega &= \mathcal{L}_{X_f} i_{X_g} \omega - i_{X_g} \mathcal{L}_{X_f} \omega \\ &= di_{X_f} i_{X_g} \omega + i_{X_f} di_{X_g} \omega - i_{X_g} di_{X_f} \omega - i_{X_g} i_{X_f} d\omega \\ &= di_{X_f} i_{X_g} \omega = d(\omega(X_g, X_f)) = d\{f, g\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire le fait que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

On a donc aussi

$$[X_f, X_g] \cdot h = \{\{f, g\}, h\}.$$

D'où l'on peut déduire que le crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi. Je renvoie au cours de Mohammed Boucetta pour des détails sur les variétés de Poisson.

⁽³⁾La variété W_a est une « orbite adjointe », c'est de là que vient la forme en question. Voir par exemple [3].

2. Systèmes intégrables

Je vais utiliser la notion d'intégrabilité au sens de Liouville. Le hamiltonien H est constant le long des trajectoires du système hamiltonien qu'il définit. Ceci s'écrit

$$X_H \cdot H = 0 \text{ ou } dH(X_H) = 0.$$

On dit que H est une intégrale première du système. Plus généralement, une fonction $f : W \rightarrow \mathbf{R}$ qui est constante sur les trajectoires d'un champ de vecteurs X est appelée une *intégrale première*. Dans le cas d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H , l'égalité $X_H \cdot f = 0$ équivaut à $\{f, H\} = 0$.

On dit qu'un système hamiltonien est complètement intégrable s'il a « autant d'intégrales premières en involution que possible ».

Voici une explication de texte, pour rendre cette définition plus formelle :

- Soient $f_1, \dots, f_k$ des intégrales premières du système X_H . Dire qu'elles sont « en involution », c'est dire qu'on a $\{f_i, f_j\} = 0$ pour tous i et j . Chacune est constante sur les trajectoires du champ hamiltonien défini par chacune.
- On aurait pu parler plutôt⁽⁴⁾ d'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}^\infty(W)$, contenant H et abélienne au sens où

$$f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow \{f, g\} = 0.$$

- Venons-en au « autant que possible » : en chaque point x de W , le sous-espace de $T_x W$ engendré par les champs hamiltoniens des fonctions de $\mathcal{A}$ est isotrope :

$$\omega(X_f, X_g) = \pm \{f, g\} = 0.$$

Sa dimension est donc au plus $n = \frac{1}{2} \dim W$. On demande donc que, au moins pour x dans un ouvert dense de W , ce sous-espace soit de dimension maximale n .

- Remarquons enfin que les vecteurs X_{f_i} sont indépendants en x si et seulement si les formes linéaires $(df_i)_x$ sont indépendantes.

Définition 2.1. Le champ hamiltonien X_H sur la variété symplectique W de dimension $2n$ est dit *complètement intégrable* s'il possède n intégrales premières indépendantes (au sens où leurs différentielles sont indépendantes sur un ouvert dense) en involution.

Tout système hamiltonien sur une surface est complètement intégrable. De même, un système hamiltonien sur une variété symplectique de dimension 4 est intégrable si et seulement si il possède une « deuxième intégrale première » indépendante (au sens ci-dessus) du hamiltonien.

⁽⁴⁾Voir [19].

2.1. Exemples.

2.1.a. L'oscillateur harmonique et le pendule simple. Ce sont des systèmes hamiltoniens sur des variétés de dimension 2, ils sont donc (automatiquement) complètement intégrables.

2.1.b. Le système de Hénon-Heiles. On connaît une deuxième intégrale première de ce système (introduit au § 1.4.d) pour certaines valeurs des paramètres A et λ . C'est le cas notamment pour $\lambda = 6$, où la fonction K définie sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ par

$$K = q_2^4 + 4q_1^2 q_2^2 + 4p_2(p_2 q_1 - p_1 q_2) + 8A(q_2^2 q_1 - p_2^2 + 2Aq_2^2)$$

est une intégrale première.

2.1.c. Le pendule sphérique. On reprend ici les notations du § 1.4.e. Le système est invariant par les rotations autour de l'axe vertical, ce qui permet de trouver facilement une deuxième intégrale première, le moment par rapport à cet axe :

$$K(q, p) = (q \wedge p) \cdot \Gamma.$$

On peut montrer directement que $\{H, K\} = 0$. Il est plus intéressant de donner une démonstration géométrique : le champ hamiltonien associé à K est

$$X_K(q, p) = (-q \wedge \Gamma, -p \wedge \Gamma)$$

dont le flot est celui des rotations par rapport à l'axe vertical

$$\varphi_t(q, p) = (R_t q, R_t p)$$

(c'est bien ce que veut dire le fait que K est le moment par rapport à cet axe). Ce flot préserve la sous-variété TS^2 :

$$\|R_t q\|^2 = \|q\|^2 = 1 \text{ et } R_t p \cdot R_t p = q \cdot p = 0$$

et de même il préserve H puisqu'il laisse le vecteur vertical Γ invariant. En dérivant en $t = 0$ la relation $H(\varphi_t(x)) = H(x)$, on obtient la nullité du crochet de Poisson de H et K . Le pendule sphérique est donc un système complètement intégrable. Voir la figure 3.

2.1.d. Le solide, cas d'Euler-Poinsot. C'est un solide comme décrit au § 1.4.f, dans le cas où le centre de gravité est le point fixe ($G = O$, $L = 0$). On vérifie aisément que $K(M) = \|M\|^2$ est alors une intégrale première du système.

Remarque 2.2. Dans ce cas, la résolution du système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \\ \dot{M} = M \wedge \Omega. \end{cases}$$

se réduit à celle de l'équation $\dot{M} = M \wedge \Omega$ (avec $M = \mathcal{J}(\Omega)$). Ce dernier système décrit le mouvement d'un solide « libre » (cas sans gravité).

2.1.e. La toupie. On considère toujours un solide, mais on suppose cette fois qu'il a un axe de révolution, l'axe OG . C'est dire qu'il existe un repère ortho-normé dont le dernier vecteur est $L = \overrightarrow{GO}$ et dans lequel la matrice d'inertie est la diagonale (ℓ, ℓ, m) . On choisit bien sûr que les unités de façon que $\ell = 1$. La condition est donc que $M - \Omega$ soit colinéaire à L . Voir la figure 2 ci-dessous.

Ce cas, étudié par Lagrange en 1788, est dit « toupie ». Les toupies avec lesquelles on joue n'ont pas de point fixe mais sont contraintes à avoir une extrémité O de leur axe de révolution dans un plan horizontal. Nous considérerons ici que la « toupie de Lagrange » est une approximation raisonnable du jouet toupie.

Dans ce cas, il est clair que le moment par rapport à l'axe de révolution doit être une intégrale première.

2.1.f. La toupie de Kowalevski. C'est (toujours...) un solide avec un point fixe, cette fois dans le cas où la matrice d'inertie $\mathcal{J}$ est la diagonale $\mathcal{J} = (2, 2, 1)$ dans un repère lié au solide dans lequel le *premier* vecteur est colinéaire à L : comme dans le cas de Lagrange, il y a un plan équatorial, mais ici il contient l'axe $\overrightarrow{OG}$. Dans la même base, écrivons

$$M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2.$$

est une intégrale première, « l'intégrale de Kowalevski », comme on le vérifie sans mal... Mais comme il n'était pas évident de le découvrir (voir [15]).

Remarque 2.3. Les trois cas explicités ci-dessus sont les seuls cas intégrables de solides avec un point fixe. Plus précisément : dans les autres cas, il n'y a pas d'intégrale supplémentaire qui soit méromorphe (le résultat « polynomial » analogue est dû à Husson [13], le cas méromorphe est dû à Ziglin [20, 21] mais peut se traiter à l'aide du théorème de Morales & Ramis [17], comme nous allons le voir.

3. Autour du théorème d'Arnold-Liouville

Dans cette partie, je vais expliquer brièvement pourquoi on aime qu'un système soit intégrable. Le théorème d'Arnold-Liouville décrit un système intégrable sur une variété symplectique, au voisinage d'une composante connexe compacte d'un niveau régulier d'un système intégrable. Avant d'expliquer ça, remarquons que c'est donc un énoncé semi-local ou semi-global si l'on préfère.

On considère n fonctions $f_1, \dots, f_n$ en involution sur une variété symplectique W de dimension $2n$ comme (les coordonnées d') une application

$$F : W \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

$c \in \mathbf{R}^n$ une valeur régulière de F et une composante connexe de la sous-variété $F^{-1}(c) \subset W$.

3.1. Action locale de $\mathbf{R}^n$. La variété W est munie d'une opération locale, localement libre en les points réguliers, de $\mathbf{R}^n$. Appelons $X_1, \dots, X_n$ les champs de vecteurs hamiltoniens associés aux f_i . Ces champs commutent :

$$[X_i, X_j] = X_{\{f_i, f_j\}} = 0.$$

On obtient l'opération de $\mathbf{R}^n$ en les intégrant :

$$t \cdot x = \varphi_n^{t_n} \circ \varphi_{n-1}^{t_{n-1}} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1}(x)$$

où φ_i désigne le flot de X_i et $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ est proche de 0 (pour que $\varphi_i^{t_i}$ soit défini). On a utilisé la commutation des fonctions : le résultat de $t \cdot x$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit les flots.

Cette opération locale est localement libre⁽⁵⁾ sur l'ouvert des points réguliers dans W parce que les champs X_i sont indépendants en ces points.

Si les champs sont complets. Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire que les champs X_i sont complets, c'est-à-dire que les flots $\varphi_i^{t_i}$ sont définis pour toutes les valeurs de t . On a alors une opération localement libre de $\mathbf{R}^n$ sur l'ouvert des points réguliers dans W . Comme les champs X_i sont tangents aux niveaux communs des f_i , cette opération préserve ces niveaux.

Les composantes connexes des niveaux réguliers de f sont des espaces homogènes de $\mathbf{R}^n$ par des sous-groupes discrets. Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$ sont les réseaux $\mathbf{Z}^k$ des sous-espaces vectoriels de dimension k . Les composantes connexes des niveaux réguliers sont donc des $\mathbf{R}^{n-k} \times \mathbf{T}^k$ pour un k vérifiant $0 \leq k \leq n$.

Tores de Liouville. Les composantes connexes compactes des niveaux réguliers sont donc des tores $\mathbf{T}^n$ et ces tores sont lagrangiens.

Remarque. On n'a d'ailleurs pas besoin de demander que les flots soient complets pour avoir ce résultat : sur une composante compacte, le flot *est* complet.

3.2. Exemples.

⁽⁵⁾Rappelons que l'opération locale du groupe de Lie G sur la variété W est *localement libre* s'il y a au moins un point de W où les champs fondamentaux sont indépendants.

3.2.a. L'oscillateur harmonique. Toutes les valeurs de $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ sauf 0 sont régulières. Les tores de Liouville sont les cercles centrés à l'origine, la variable « angle » est l'angle θ des coordonnées polaires et la variable d'action est $\frac{1}{2}r^2$ (c'est-à-dire H).

3.2.b. Le pendule simple. La figure 1 représente les niveaux du hamiltonien H , supports des solutions du système différentiel associé pour

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q.$$

Les ovales tels que celui représenté sur la figure 1 correspondent aux petits mouvements (mouvements presque périodiques) du pendule.

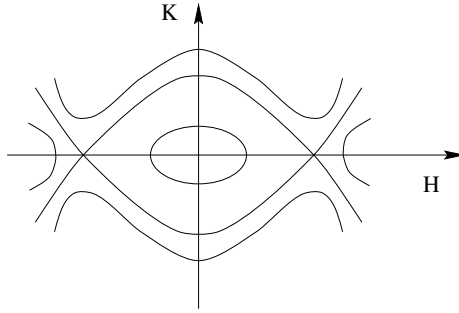


FIGURE 1. Pendule simple

Dans cet exemple de dimension 2, tout est très simple. Les valeurs critiques de H sont ± 1 , qui correspondent aux niveaux critiques formés, soit d'un point, soit d'une courbe avec un point double. Les niveaux réguliers entre -1 et 1 sont connexes (un « tore » de Liouville, qui est un ovale, un cercle), les autres sont formés de deux « tores » de Liouville.

3.3. Le champ hamiltonien, sur un tore de Liouville, et à côté.

Comme l'affirme le théorème dit d'Arnold-Liouville, il existe des coordonnées, dites « action-angle », dans lesquelles le système hamiltonien a une forme particulièrement simple. Ce sont des coordonnées symplectiques, elles arrivent en deux groupes, les « actions » $J_1, \dots, J_n$ et les angles $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Les actions sont constantes sur les tores de Liouville (et les angles sont les coordonnées sur ces tores).

Le hamiltonien H est dans l'algèbre engendrée par les intégrales premières et donc, c'est une fonction de $J_1, \dots, J_n$ seuls, notons-la

$$H(x) = h(J_1, \dots, J_n).$$

Ensuite, les coordonnées $(J_1, \dots, J_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sont symplectiques, donc le système hamiltonien s'écrit, dans ces coordonnées

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial h}{\partial \varphi_i} = 0 \text{ et } \dot{\varphi}_i = \frac{\partial h}{\partial J_i} = a_i(J_1, \dots, J_n).$$

Sous cette forme, on vérifie sans mal que les solutions sont bien des angles φ_i dépendant linéairement du temps sur les niveaux de J . Il est clair qu'un tel système s'intègre par quadratures, d'où la terminologie « système intégrable ».

3.4. Illustrations, en dimension 4. La figure représentant les géodésiques d'une surface de révolution et qui orne la couverture de [11] (voir ci-dessous la figure 4), ressemble beaucoup aux figures

- 2 représentant le mouvement de l'extrémité de l'axe d'une toupie (voir [1] ou [3], par exemple), 2 représentant le mouvement de l'extrémité de l'axe d'une toupie (voir [1] ou [3], par exemple),
- 3 décrivant le mouvement de la bille d'un pendule sphérique,
- 4 montrant les géodésiques d'un ellipsoïde (voir [12] ou [2]).

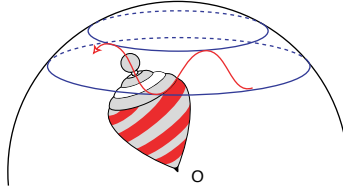


FIGURE 2. Toupie

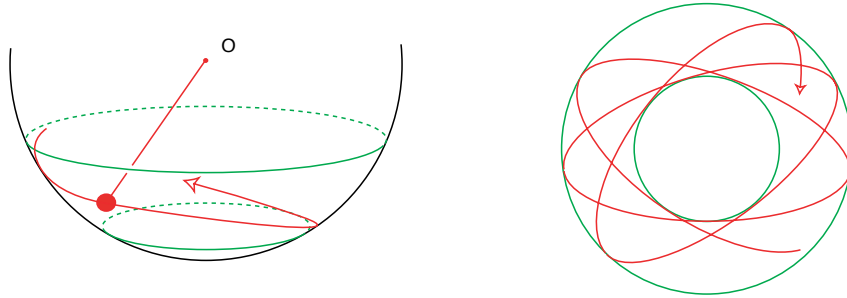


FIGURE 3. Pendule sphérique, avec une trajectoire vue de dessus

Dans chacun de ces cas, on voit une solution d'un système intégrable dans un espace de configuration : la géodésique sur la surface, le mouvement d'un point sur une sphère. On remarque que, dans chacun de ces cas, on voit un

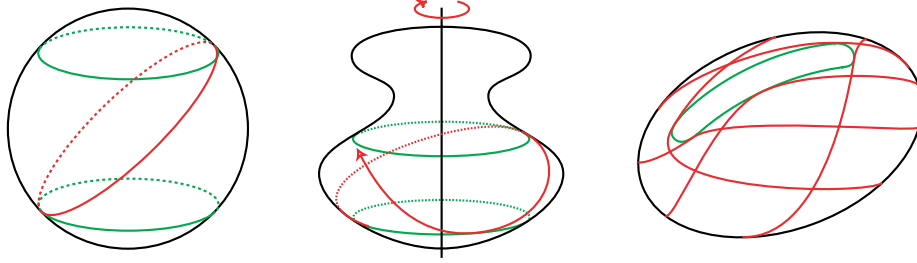


FIGURE 4. Géodésiques d'une sphère, d'une surface de révolution, d'un ellipsoïde

anneau (topologiquement, un cylindre) et que la solution considérée oscille entre les deux « cercles » limitant cet anneau.

Ce que chacune de ces figures représente, c'est un tore de Liouville (qui vit dans un espace de phases de dimension 4), vu en projection sur l'espace de dimension 2.

La figure 5 indique ce qu'est un mouvement linéaire sur ce tore.

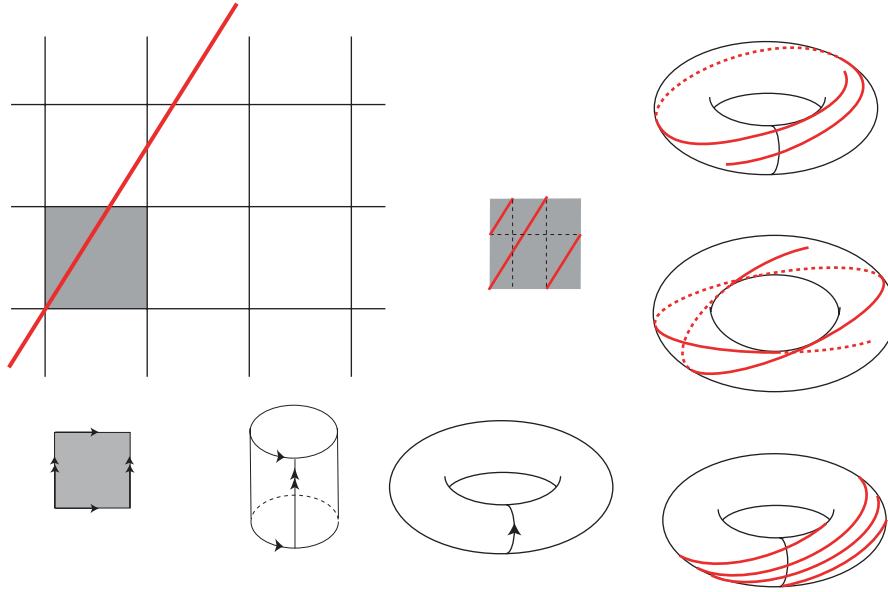


FIGURE 5. Tore et mouvement linéaire

Le tore T^2 est le quotient de $\mathbf{R}^2$ par le groupe $\mathbf{Z}^2$ des translations entières : $T^2 = \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$. La figure 5 montre un domaine fondamental (le carré grisé). Pour obtenir le quotient, il suffit d'identifier les points du bord comme indiqué sur la figure. L'image d'une droite de $\mathbf{R}^2$ dans le tore est une courbe dessinée

sur le tore, que l'on qualifie de linéaire. On peut remplacer 2 par n dans ce qui précède pour obtenir la définition d'une trajectoire « linéaire » sur un tore de dimension n .

Le théorème de Liouville affirme que les sous-variétés de niveau d'un système intégrable sont des tores, la variété W est une sorte de « pâte feuilletée » remplie de tores de dimension n (qui sont les feuilles) et que les solutions du système hamiltonien sont linéaires sur ces tores.

Ces trajectoires « linéaires » ont des comportements variés, comme l'évoque la partie droite de la figure 5. Selon que la pente de la droite est ou n'est pas rationnelle, elles sont fermées ou au contraire denses dans le tore. On qualifie ces mouvements de quasi-périodiques.

Sur la figure représentant le pendule sphérique (figure 3), on voit que les trajectoires restent dans un anneau : mais il ne faut pas oublier ici que la sphère est plongée dans un espace W de dimension 4 (qui est l'espace dans lequel on travaille réellement), dans lequel la vitesse du mobile est prise en compte. C'est la différence entre ce que les physiciens appellent *l'espace des phases* (de dimension $2n$), notre variété symplectique, et *l'espace de configuration* (de dimension n). Les tores de Liouville vivent dans l'espace des phases. L'anneau que je viens d'évoquer (celui de la figure 3) est une projection d'un tore de Liouville sur l'espace de configuration, comme le sont les tores que j'ai représentés à droite de la figure 5... si l'on veut bien se souvenir que la feuille de papier sur laquelle ils sont dessinés est plane.

Il existe relativement peu de systèmes hamiltoniens intégrables, mais le théorème de Liouville est quand même important, notamment pour la raison suivante. Quand on perturbe un petit peu un système intégrable, on obtient en général un système qui n'est plus intégrable, *mais il va quand même rester des tores* invariants comme ci-dessus dans ce système perturbé : c'est ce que l'on appelle le théorème KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) ; mais je n'en dirai pas plus ici.

4. Le théorème de Morales et Ramis

Il existe pourtant de nombreux et respectables systèmes qui ne sont pas intégrables, tels le problème à n corps, pour $n \geq 3$. La question de savoir comment on montre qu'un système n'est pas intégrable est encore très largement ouverte. Le théorème de Morales et Ramis est une avancée significative dans le cadre analytique.

4.1. L'énoncé.

Théorème 4.1 (de Morales-Ramis). *Soit W une variété symplectique analytique complexe et soit $H : W \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique complexe. Si le*

système hamiltonien associé à H est intégrable (avec des intégrales premières méromorphes), alors le groupe de Galois différentiel du système linéarisé le long d'une solution non constante est virtuellement abélien.

Ce théorème est, disons, difficile à énoncer, pas trop difficile à démontrer, et pas très facile à appliquer. Commençons donc par expliquer ce dont il s'agit.

- Ne pas prendre le mot « complexe » trop au sérieux. Dans les exemples réels, les systèmes sont le plus souvent polynomiaux sur des variétés qui sont des sous-variétés d'un espace $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ elles aussi définies par des équations polynomiales, donc pas trop difficiles à complexifier.
- Prendre le mot « analytique » très au sérieux. Il n'y a aucun résultat $\mathcal{C}^\infty$ de cette nature. Il y a même des contre-exemples. Nous allons le voir, le point est que l'anneau des fonctions analytiques est intègre et pas celui des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
- Une solution non constante du système est une courbe $t \mapsto x(t)$, que nous considérerons donc comme une courbe complexe, une surface de Riemann.
- Linéariser un système différentiel n'est pas une affaire bien compliquée. On obtient, le long de chaque solution, un système différentiel linéaire.
- Un système différentiel linéaire possède un groupe de Galois différentiel (voir les explications ci-dessous), qui est un sous-groupe algébrique d'un $\mathrm{GL}(N; \mathbf{C})$, en particulier un groupe de Lie.
- Un groupe de Lie est virtuellement abélien lorsque sa composante neutre est un groupe abélien ou ce qui revient au même lorsque son algèbre de Lie est abélienne.

La dernière propriété exprimée est celle qui rend le théorème « facile » à démontrer : on peut utiliser l'algèbre de Lie et le calcul infinitésimal... et difficile à appliquer : il ne suffit pas de trouver deux éléments du groupe de Galois qui ne commutent pas pour conclure à la non abélianité de sa composante neutre.

4.2. Exemple, le système de Hénon-Heiles. Le système hamiltonien associé au hamiltonien de Hénon-Heiles est, on l'a vu :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 \\ \dot{q}_2 = p_2 \\ \dot{p}_1 = q_2^2 + \lambda q_1^2 \\ \dot{p}_2 = 2(A + q_1)q_2. \end{cases}$$

On a vu aussi vu que ce système a des solutions dans le plan $q_2 = p_2 = 0$. On va considérer celles-ci.

- Dans le cas où $\lambda \neq 0$, on considérera

$$q_1(t) = \frac{6}{\lambda t^2}$$

(la solution supportée par la courbe où $H = 0$).

– Dans le cas où $\lambda = 0$, on prendra

$$q_1(t) = \frac{1}{2}t - A.$$

Le long d'une solution $(q_1(t), 0, p_1(t), 0)$, l'équation linéarisée est le système

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = P_1 \\ \dot{Q}_2 = P_2 \\ \dot{P}_1 = 2\lambda q_1 Q_1 \\ \dot{P}_2 = 2A Q_2 + 2q_1 Q_2 \end{cases}$$

où $q_1 = q_1(t)$ est donnée par celle des solutions que nous avons choisie.

5. La théorie de Galois différentielle en moins de trois pages

La théorie de Galois différentielle est l'analogue la théorie de Galois lorsque l'on veut étudier les équations différentielles linéaires plutôt que les équations algébriques. Je vais présenter, dans la colonne de gauche, ce que nous savons de la théorie de Galois classique, la théorie de Galois algébrique, et, par analogie, dans celle de droite, la théorie différentielle.

Objets de base.

Un corps K .

Un corps différentiel, c'est-à-dire, un corps K muni d'une dérivation $'$, satisfaisant $(a + b)' = a' + b'$ et $(ab)' = a'b + ab'$.

Les constantes, c'est-à-dire les $a \in K$ tels que $a' = 0$, forment un corps, dont on suppose ici qu'il est isomorphe à $\mathbf{C}$.

Exemples fondamentaux.

$K = \mathbf{Q}$.

$K = \mathbf{C}(t)$, avec $'$ la dérivation par rapport à t .

Équations.

algébriques, $P(x) = 0$,
 $P \in K[X]$, de degré m .

différentielles linéaires, $Y' = A(t)Y$, A une matrice $m \times m$ à coefficients dans K .

Exemples.

$K = \mathbf{Q}$, $P(X) = X^2 - 2$,
 $P(X) = X^5 - X + 5$.

$K = \mathbf{C}(t)$, $y' = y$, d'ordre 1,
 $y'' - \frac{a}{t^2}y$, équation de Cauchy, d'ordre 2,
 $y'' + ty = 0$, équation d'Airy, d'ordre 2.

Équations sans solutions.

Ces équations n'ont pas de solution dans le corps de base.

$y' = y$ n'a pas de solution dans $\mathbf{C}(t)$, de même que l'équation d'Airy.

Extensions.

On construit L/K , extension de décomposition, le plus petit corps (unique) contenant K dans lequel l'équation a m racines.

On construit l'extension de Picard-Vessiot L/K , où L est le plus petit corps différentiel contenant K dans lequel l'équation considérée a un espace vectoriel de solutions de dimension m .

Exemples.

Pour $P(X) = X^2 - 2$, $L = \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, pour $P(X) = X^5 - X + 5$, c'est (*a priori*) une extension de degré un multiple de 5 qui divise 5!.

Pour $y' = y$, penser que L est le plus petit corps qui contient les fractions rationnelles et la fonction exponentielle.

Groupe de Galois.

$\text{Gal}(L/K)$ est le groupe des automorphismes de corps de L qui induisent l'identité sur K .

$\text{Gal}(L/K)$ est le groupe des automorphismes différentiels, c'est-à-dire commutant à $'$, qui induisent l'identité sur K .

Exemples.

Pour $P(X) = X^2 - 2$. Si $\varphi \in \text{Gal}$, $(\varphi(\sqrt{2}))^2 = \varphi(\sqrt{2}^2) = \varphi(2) = 2$ puisque $2 \in \mathbf{Q}$. Donc $\varphi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ et $\text{Gal} \cong \mathfrak{S}_2$.

Pour $y' = y$. Si $\varphi \in \text{Gal}$, $(\varphi(e^t))' = \varphi((e^t)') = \varphi(e^t)$, donc $\varphi(e^t)$ est solution de $y' = y$, donc $\varphi(e^t) = \lambda e^t$, pour un $\lambda \in \mathbf{C}^\star$, et $\text{Gal} \cong \mathbf{C}^\star$.
Pour $y'' = \frac{a}{t^2}y$, on peut montrer que Gal est un sous-groupe du groupe des matrices 2×2 diagonales.

Pour $P(X) = X^5 - X + 5$, on peut montrer que $\text{Gal} \cong \mathfrak{S}_5$.

Pour l'équation d'Airy $y'' + ty = 0$, on peut montrer que $\text{Gal} \cong \text{SL}(2; \mathbf{C})$.

Représentation du groupe de Galois.

Le groupe de Galois opère sur l'espace vectoriel des solutions, ce qui le représente comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(m; \mathbf{C})$, puisqu'une solution est déterminée par sa condition initiale, un vecteur de $\mathbf{C}^m$.

Remarques (et démonstrations)

- On passe d'une équation différentielle d'ordre 2 (resp. m) à un système d'ordre 2 (resp. m) par la méthode habituelle

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

- Si $y = P/Q$, avec P et Q des polynômes en t , alors $y' = (P'Q - PQ')/Q^2$ de sorte que $y' = y \Leftrightarrow P'Q - PQ' = PQ$, ce qui est impossible pour des raisons de degrés. Donc $y' = y$ n'a pas de solution dans $\mathbf{C}(t)$. De même, les solutions de l'équation d'Airy sont toutes des fonctions entières, donc les rationnelles doivent être des polynômes, et c'est aussi impossible pour des raisons de degré.
- Il est difficile de calculer un groupe de Galois. S'il est vrai que le groupe de Galois de l'équation « générale » de degré 5 est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$, il n'est pas pour autant facile de trouver des polynômes de degré 5 dont le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ est bien $\mathfrak{S}_5$. Celui donné ici a la propriété d'avoir trois racines réelles et deux imaginaires conjuguées, ce qui fait marcher l'affaire.
- Pour le groupe de Galois de l'équation d'Airy, voir [14].
- Le groupe de Galois différentiel est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(m; \mathbf{C})$, c'est un théorème de Kolchin.

6. Retour à Morales-Ramis

Pour nous, Γ désigne la courbe (surface de Riemann) solution particulière que nous avons choisie. Comme elle arrive dans notre histoire comme solution d'une équation différentielle, elle est paramétrée (par le temps t) et donc le corps K des fonctions méromorphes sur Γ est muni d'une dérivation, celle par rapport à t .

Par exemple, si $\Gamma = \mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, alors $K = \mathbf{C}(t)$.

6.1. La monodromie. La représentation de Gal dans $\mathrm{GL}(m; \mathbf{C})$ rappelle la représentation de monodromie, un homomorphisme

$$\pi_1(\Gamma, t_0) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(m; \mathbf{C}),$$

et le groupe de monodromie, image de ρ , que je décris brièvement ici. Une qualité de ce groupe, c'est que c'est un sous-groupe du groupe de Galois différentiel que l'on peut décrire géométriquement, ce qui le rend accessible (il n'est pas très facile de décrire tout ce que contient le groupe de Galois).

Pour un système différentiel dans $\mathbf{C}^m$, on en fixe une solution Γ : c'est une courbe complexe, donc une surface de Riemann, en général non compacte. On linéarise le système le long de cette solution : soit $(Y_1(t), \dots, Y_m(t))$ une

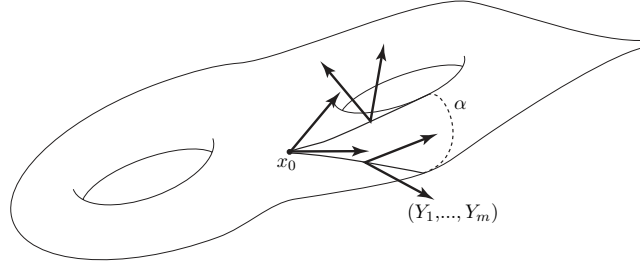


FIGURE 6. La monodromie le long d'un lacet

base de solutions. Promenons-nous maintenant sur la surface. Partons d'un point x_0 , à l'instant t_0 , faisons un petit tour le long d'un lacet α en suivant les $Y_i(t)$ par prolongement analytique, et revenons à notre point de départ à l'instant t_1 . Si nous sommes partis assez loin, il est bien possible que les vecteurs $(Y_1(t_1), \dots, Y_m(t_1))$ soient différents des vecteurs $(Y_1(t_0), \dots, Y_m(t_0))$. Ils forment une nouvelle base de $\mathbf{C}^m$. Nous pouvons définir un morphisme ρ de groupes du groupe fondamental de Γ dans le groupe linéaire

$$\begin{aligned} \pi_1(\Gamma, x_0) &\longrightarrow GL(m, \mathbf{C}) \\ \alpha &\longmapsto \rho(\alpha) \end{aligned}$$

où $\rho(\alpha)$ est la matrice de passage de la base de départ $(Y_1(t_0), \dots, Y_m(t_0))$ à la base d'arrivée $(Y_1(t_1), \dots, Y_m(t_1))$ obtenue après avoir parcouru le chemin α . Le résultat ne dépend que de la classe d'homotopie de α . Si le lacet α est homotope au lacet constant (si l'on reste sur place en x_0) la base ne change pas et l'image de α est l'identité. On appelle cette application la *représentation de monodromie* du groupe fondamental de Γ .

Bien sûr, l'image du groupe fondamental par ρ est un sous-groupe du groupe de Galois différentiel du système, celui que l'on appelle le *groupe de monodromie*. C'est un sous-groupe discret du groupe algébrique Gal . On considère souvent plutôt le plus petit sous-groupe algébrique de Gal qui contient ce groupe discret, qui a l'avantage d'être, comme le groupe de Galois, un groupe de Lie. D'ailleurs, si le système n'a que des singularités « régulières » (je ne vais pas définir cette notion ici), ce sous-groupe est le groupe de Galois tout entier. Ce

n'est pas toujours le cas. Par exemple, pour l'équation d'Airy $y'' + ty = 0$, sur le corps $\mathbf{C}(t)$ des fonctions sur la sphère de Riemann, il est clair que le groupe de monodromie est trivial (parce que la sphère est simplement connexe) mais nous avons dit que le groupe de Galois est $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$.

Je renvoie aux articles [20, 21] de Ziglin pour une préhistoire du théorème de Morales-Ramis via la monodromie.

6.2. Réduction. Replaçons nous maintenant dans le cas d'une équation linéarisée d'un système hamiltonien sur une variété symplectique de dimension $2n$. L'équation différentielle linéarisée est d'ordre $2n$ comme le système initial. Même dans le cas de dimension 4, où l'on recherche l'existence (ou la non-existence) d'une intégrale première supplémentaire, le groupe de Galois va être un sous-groupe de $\mathrm{GL}(4; \mathbf{C})$, ce qui est beaucoup trop gros pour être calculable.

Notons d'abord que, comme le champ de vecteurs était hamiltonien, le groupe de Galois est un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(4) \subset \mathrm{GL}(4)$ (voir, par exemple, [4, p. 65]). Notons surtout que le champ de vecteurs X_H est lui-même solution de l'équation linéarisée. Par exemple, si notre variété symplectique est dans un grand $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, on a, pour $y(t) = X_H(x(t))$,

$$\dot{y}(t) = (dX_H)_{x(t)} \cdot \dot{x}(t) = (dX_H)_{x(t)} \cdot X_H(x(t)) = (dX_H)_{x(t)} \cdot y(t).$$

Ce qui est vrai pour toute équation linéarisée et fait en général baisser l'ordre de 1... et fait baisser l'ordre de 2 dans le cas symplectique. On s'intéressera donc à des groupes de Galois qui vont être des groupes de matrices $(2n-2) \times (2n-2)$. Pour des résultats plus précis sur cette réduction symplectique et les relations entre groupes de Galois réduit et non réduit, voir par exemple [4, p. 77].

6.3. Application à Hénon-Heiles. Revenons à Hénon-Heiles le long d'une solution $(q_1(t), 0, p_1(t), 0)$, avec l'équation linéarisée

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = P_1 \\ \dot{Q}_2 = P_2 \\ \dot{P}_1 = 2\lambda q_1 Q_1 \\ \dot{P}_2 = 2A Q_2 + 2q_1 Q_2. \end{cases}$$

La réduction nous fait conserver un sous-espace symplectique orthogonal au plan $q_2 = p_2 = 0$ de nos solutions particulières, c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} \dot{Q}_2 = P_2 \\ \dot{P}_2 = 2A Q_2 + 2q_1 Q_2 \end{cases}$$

ou encore, après avoir supprimé un indice inutile, l'équation différentielle

$$\ddot{Q} - 2(A + q_1)Q = 0.$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, q_1 est linéaire en t , on peut choisir

$$q_1(t) = -\frac{1}{2}t - A.$$

L'équation linéaire est alors

$$\ddot{Q} + tQ = 0,$$

une équation d'Airy, et son groupe de Galois sur $\mathbf{C}(t)$ est $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$, un groupe connexe et non abélien. Ce qui permet de conclure que le système de Hénon-Heiles pour $\lambda = 0$ n'est pas intégrable (avec des intégrales premières rationnelles, puisque nous nous sommes placés sur $\mathbf{C}(t)$). Voir plus généralement les travaux de Morales et Ramis [17, 18] et [4].

6.4. Application au problème du satellite. On considère un satellite tournant autour de la Terre sur une orbite circulaire (voir [8]). On appelle N un vecteur unitaire orthogonal au plan de l'orbite, O le centre de cette orbite (c'est le centre de la Terre), G le centre de gravité du satellite, Γ le vecteur radial $\Gamma = \overrightarrow{GO}$, M le moment angulaire, lié à la vitesse angulaire Ω par la relation $M = \mathcal{J}\Omega$ où $\mathcal{J}$, la matrice d'inertie, est une matrice symétrique définie positive, sur laquelle je ne suppose rien pour le moment.

Écrites dans un repère lié au satellite dans lequel la matrice $\mathcal{J}$ est diagonale, les équations du mouvement sont (voir par exemple [6]) :

$$\begin{cases} \dot{N} = N \wedge \Omega \\ \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge (\Omega - N) \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + 3\Gamma \wedge \mathcal{J}\Gamma. \end{cases}$$

L'énergie totale est

$$H(N, \Gamma, M) = \frac{1}{2}\langle M, \mathcal{J}^{-1}M \rangle - \langle M, N \rangle + \frac{3}{2}\langle \Gamma, \mathcal{J}\Gamma \rangle.$$

Ce système est un système hamiltonien, celui associé à H , pour une certaine structure de Poisson sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ (voir [6]). Ici nous allons nous placer sur la sous-variété

$$W = \left\{ (N, \Gamma, M) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|N\|^2 = 1, \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ et } N \cdot \Gamma = 0 \right\},$$

qui en est une sous-variété symplectique de dimension 6, difféomorphe à $\mathrm{SO}(3) \times \mathbf{R}^3$. Notre système est donc un système hamiltonien à trois degrés de liberté.

On choisit maintenant une sous-variété invariante de W en fixant, comme dans [16] et [10], $N = e_3$ et en imposant à M de rester dans la direction de N . Ce n'est pas seulement fixer N , le vecteur e_3 est un vecteur propre de $\mathcal{J}$, qui doit donc rester orthogonal au plan de l'orbite, le satellite étant seulement animé, en plus de son mouvement de rotation sur l'orbite circulaire,

d'un mouvement d'oscillations autour de cette direction. On considère donc le cylindre

$$V = \{(e_3, (x, y, 0), \lambda e_3) \in W\}.$$

C'est une sous-variété symplectique de W dont on vérifie qu'elle est invariante par X_H :

$$X_H(e_3, \Gamma, \lambda e_3) = \left(0, \underbrace{\left(\frac{\lambda}{c} - 1 \right) \Gamma \wedge e_3}_{\text{horizontal}}, \underbrace{3\Gamma \wedge \mathcal{J}\Gamma}_{\text{vertical}} \right) \in T_{(e_3, \Gamma, \lambda e_3)} V.$$

Les trajectoires de X_H sur le cylindre V sont supportées par les intersections

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{c} - \lambda + \frac{3}{2} (ax^2 + by^2) = h. \end{cases}$$

Comme intersections de deux quadriques (de l'espace $\mathbf{R}^3$, ou $\mathbf{C}^3$, des (x, y, λ)), ce sont en général des courbes elliptiques, auxquelles manquent quatre points (imaginaires) à l'infini. La trajectoire qui a pour équations

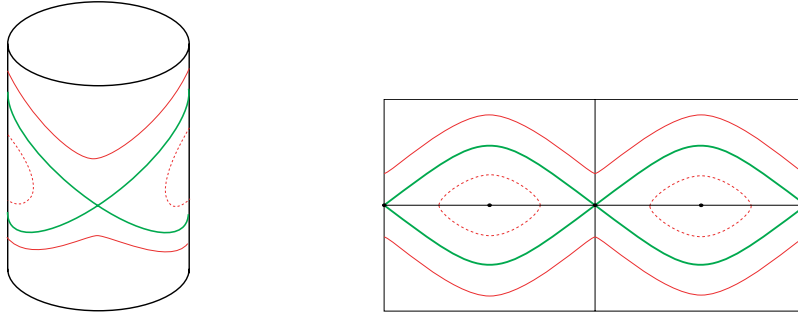


FIGURE 7. Niveaux de H sur V

$$x^2 + y^2 = 1 \quad cz^2 - 3(b-a)x^2 = 0,$$

est la réunion des deux ellipses

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = \pm \sqrt{3 \frac{b-a}{c}} x$$

se coupant aux points singuliers $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$ et à chacune desquelles manquent deux points (imaginaires) à l'infini. On utilise une des deux composantes γ , qui est, comme toutes les coniques complexes, une sphère, à laquelle manquent deux points à l'infini. Il y a également deux points singuliers sur cette courbe complexe, qui se présente donc comme sur la figure 8, où la courbe

équatoriale est l'ellipse réelle. Cette trajectoire est utilisée dans [16] et [10]. Elle possède une grande qualité : son groupe fondamental est un groupe libre à trois générateurs, non abélien.

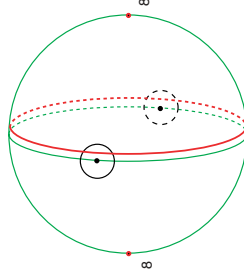


FIGURE 8. La conique complexe

Le système linéarisé, même après réduction symplectique, est d'ordre 4. Pour en réduire encore l'ordre, supposons que le satellite est symétrique, qu'il ait un axe de révolution, en d'autres termes que la matrice $\mathcal{J}$ soit de la forme

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire que } a = 1 \text{ et } b = c.$$

Alors le moment par rapport à l'axe de révolution (l'axe des e_1) est une intégrale première. Son champ hamiltonien est solution du système linéaire, le groupe de Galois se réduira à un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$.

Concrètement, on se ramène au système linéaire (voir [6] pour les détails) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ 3(c-1)x^2 + \frac{\lambda^2}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à l'équation du second ordre

$$\ddot{u} = -\frac{1}{c} \left(3(c-1)x^2 + \frac{\lambda^2}{c} \right) u,$$

expression dans laquelle x et λ sont des fonctions de t solutions du système hamiltonien.

On peut démontrer (voir [6]) que les lacets qui tournent autour des points singuliers finis (sur la figure 8) engendrent un groupe de monodromie infini formé de matrices diagonalisables de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, donc équivalentes à des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbf{C}^*$$

tandis que les lacets qui tournent autour des points à l'infini engendrent un groupe de monodromie contenant des matrices de $SL(2, \mathbf{C})$ non diagonalisables, c'est-à-dire équivalentes à des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \in \mathbf{C}.$$

On connaît explicitement tous les sous-groupes algébriques de $SL(2, \mathbf{C})$ (voir par exemple [18, p. 9-10]). Il n'y en a que deux (à conjugaison près) qui contiennent à la fois un sous-groupe diagonalisable infini et des matrices non diagonalisables, comme ci-dessus, ce sont

- le groupe $SL(2, \mathbf{C})$ lui-même,
- le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbf{C}^* \text{ et } \beta \in \mathbf{C}.$$

Ces deux groupes sont connexes et aucun d'eux n'est abélien, ce qui achève de montrer que l'attitude d'un satellite symétrique ($b = c$) est un système hamiltonien non intégrable !

Ce même résultat a été démontré par Delphine Boucher par une méthode complètement différente (calcul formel). Elle a pu ensuite étendre la méthode et le résultat au cas d'un satellite pas supposé symétrique [9].

Que l'on se rassure, le mouvement des vrais satellites est contrôlé...

6.5. Idées de la démonstration du théorème de Morales et Ramis.

Pour la démonstration, je renvoie à [5, 4]. Voici les idées principales. On suppose que le système hamiltonien (sur une variété de dimension $2n$) a n intégrales premières indépendantes en involution.

- (1) Il existe n fonctions indépendantes et constantes le long de la solution considérée : on part des premiers termes non nuls dans les séries de Taylor des intégrales premières. Il y a un point technique, le lemme de Ziglin [20], pour montrer qu'on peut supposer que ces termes restent fonctionnellement indépendants.
- (2) Elles sont invariantes par le groupe de Galois (parce que celui-ci préserve les constantes).
- (3) Elles commutent (parce que les intégrales premières commutent).
- (4) Il reste un lemme de géométrie symplectique pure, que j'énonce ci-dessous.

Lemme 6.1 ([17]). *Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ et soient $F_1, \dots, F_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de E , fonctionnellement indépendantes et en involution. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sp}(E)$ qui préserve les F_i . Alors $\mathfrak{g}$ est abélienne.*

Démonstration. Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(E)$ s'identifie à celle des formes quadratiques sur E (avec le crochet de Poisson). Un élément Z de $\mathfrak{sp}(E)$ peut être considéré comme un endomorphisme de E ou comme un champ de vecteurs linéaire sur E . Dire que Z préserve la forme symplectique ($\mathcal{L}_Z\omega = d_Z\omega = 0$), c'est dire que Z est un champ hamiltonien, ici celui d'une forme quadratique g sur E .

Dire que Z préserve les F_i , c'est dire que $Z \cdot F_i = 0$, c'est-à-dire que la forme quadratique g commute avec les F_i puisque $Z \cdot F_i = \{F_i, g\}$, donc qu'elle est constante sur les composantes connexes des niveaux communs des F_i .

Si x est un point de l'ouvert U de E sur lequel les F_i sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} Z(x) &\in \cap_{i=1}^n \text{Ker}(dF_i)_x = \cap_{i=1}^n X_i(x)^\circ \\ &= \langle X_1(x), \dots, X_n(x) \rangle^\circ \\ &= \langle X_1(x), \dots, X_n(x) \rangle \end{aligned}$$

(en appelant X_i le champ hamiltonien X_{F_i} et en notant $^\circ$ l'orthogonalité pour la forme ω). Ainsi Z s'écrit $Z = \sum \lambda_j X_j$ pour certaines fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ localement constantes sur les niveaux communs des F_i .

Si Z et Z' sont deux éléments de $\mathfrak{g}$, écrits

$$Z = \sum \lambda_j X_j, \quad Z' = \sum \lambda'_j X_j,$$

on a, toujours pour x dans U ,

$$[Z, Z'](x) = \left[X_g, \sum \lambda'_j X_j \right](x) = \sum (X_g(x) \cdot \lambda'_j(V)) X_j(x) + \sum \lambda'_j(x) [Z, X_j](x).$$

Le champ $[Z, X_j]$ est le champ hamiltonien de $\{g, F_j\}$, il est donc nul. On a de plus $X_g(x) \cdot \lambda'_j = 0$ puisque λ'_j est constante sur le niveau de x , auquel X_g est tangent. On en déduit que le crochet $[Z, Z']$ est nul sur U , donc aussi sur E . Le crochet des endomorphismes Z et Z' est donc nul lui aussi. $\square$

Références

- [1] V. I. ARNOLD – *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.
- [2] M. AUDIN – « Courbes algébriques et systèmes intégrables : géodésiques des quadriques », *Expositiones Math.* **12** (1994), p. 193–226.
- [3] ———, *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999, traduction en japonais, Kyoritsu, 2000.
- [4] ———, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, vol. 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.

- [5] ———, « Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...] », *Séminaire Bourbaki, 2000-2001, Astérisque* **282** (2002), p. 113–135.
- [6] ———, « La réduction symplectique appliquée à la non-intégrabilité du problème du satellite », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **12** (2003), p. 25–46.
- [7] ———, « Systèmes hamiltoniens intégrables », in *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui* (Éric Charpentier, éd.), Cassini, 2007.
- [8] O. I. BOGOYAVLENSKII – « Euler equations on finite-dimensional Lie coalgebras arising in problems of mathematical physics », *Russian Math. Surveys* **47** (1992), p. 117–189.
- [9] D. BOUCHER – « Non-complete integrability of a satellite in circular orbit. », *Port. Math.* **63** (2006), no. 1, p. 69–89.
- [10] D. BOUCHER & J.-A. WEIL – « On the applicability of the Morales-Ramis criteria for testing the non-integrability of Hamiltonian systems », *preprint* (2002).
- [11] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, Universitext, Springer, 1987.
- [12] D. HILBERT & S. COHN-VOSSEN – *Anschaulige geometrie*, Springer, 1932.
- [13] É. HUSSON – « Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** (1906), p. 73–152.
- [14] I. KAPLANSKY – *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1976, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1251, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. V.
- [15] S. KOWALEVSKI – « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177–232.
- [16] A. MACIEJEWSKI – « Non integrability of rotational motion of symmetric satellite in circular orbit », *preprint* (2001).
- [17] J. MORALES-RUIZ & J.-P. RAMIS – « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001).
- [18] J. MORALES-RUIZ – *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.
- [19] P. VANHAECKE – *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, Lecture Notes in Math., vol. 1638, Springer, 1996.
- [20] S. L. ZIGLIN – « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I », *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982), p. 181–189.
- [21] ———, « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II », *Funct. Anal. Appl.* **17** (1983), p. 6–17.

23 mars 2008

MICHÈLE AUDIN, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr
Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>