

Les cent trois pages (numérotées en bas à droite en rouge) qui suivent sont les notes d'un cours de

## **Topologie différentielle**

donné par

**François Latour**

à Orsay en 1977-78.

Après les définitions des espaces de jets, de la topologie de Whitney et de quelques notions de base, on y trouvera, avec de nombreuses très éclairantes figures, les démonstrations des théorèmes du  $h$ -cobordisme et du  $s$ -cobordisme.

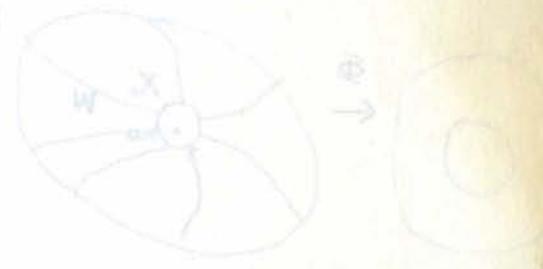
Ces notes manuscrites ont été prises par Michèle Audin et Claude Sabbah, qui suivaient ce cours.

Theorems:

hypothese homotopiques }  $\Rightarrow$  conclusions geometriques  
homologiques }

ça marche pour ds dimensions assz grands ( $\geq 6$ )

ça marche bien pour ds varietes simpl<sup>k</sup> connexes.



exemple

Theoreme du h-cobordisme

Soit  $W^n$  diff compacte connexe à bord.  $\partial W = V_0 \cup V_1$   
on suppose que  $W, V_0, V_1$  sont simpl<sup>k</sup> connexes  
et  $n \geq 6$

Alors il ya equivalence entre:

- 1  $H_*(W, V_0) = 0$
- 2  $\exists$  1 diff.  $(V_0 \times I \xrightarrow{\cong} V_0 \times 0, V_0 \times 1) \rightarrow (W, V_0, V_1)$   
et etendant l'identite sur  $V_0$ .

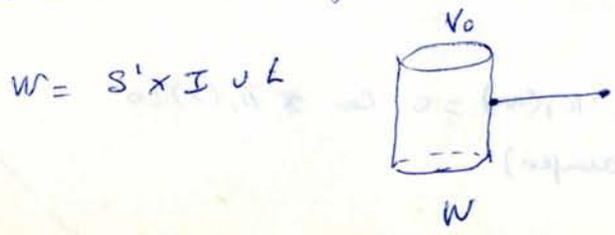
Rem: on peut mettre 1':  $V_0 \hookrightarrow W$  est 1 equivalence d'homotopie.

et dem du th:  $1' \Rightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1'$   
la partie importante est  $1 \Leftrightarrow 2$

Rem:  $1 \Leftrightarrow 1'$  sans le h-cobordisme

en fait aut theoreme:  $\pi_*(W, V_0) = 0$   
 $\Rightarrow i: \pi_i(V_0) \xrightarrow{\cong} \pi_i(W)$   
et Whitehead  $\rightarrow i$  est eq. d'homotopie

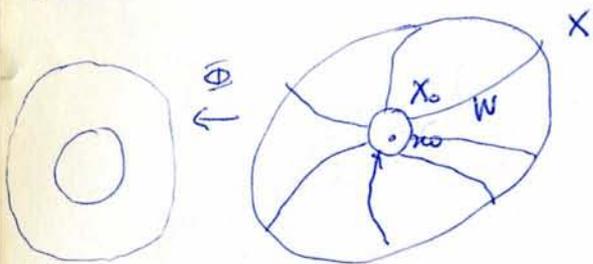
le th du h-cobordisme faux pour ds spaces top.



Applications :

1) Théorème :  $\left[ \begin{array}{l} \text{soit } X^n \text{ variété diff. Compacte} \\ \partial X \text{ 1-connexe} \\ X \text{ contractile (} X \text{ est 1-connexe et acyclique)} \\ \text{si } n \geq 6 \Rightarrow X \text{ est difféomorphe à } D^n \end{array} \right.$

deux



$X_0$  diff à  $D^n$  (carte)

$W = X - \text{int } X_0$

$W$  1-connexe  $\partial W = \partial X \cup \partial X_0$

Donc  $\exists \theta : \partial X_0 \times I \xrightarrow{\sim} W$

en choisissant  $X_0$  au difféomorphisme

$H_* (W, \partial X_0) = H_* (X, X_0)$  excision  
 $= 0.$

Rem :  $\exists$  des variétés  $X$  contractiles dont le bord n'est pas simplement connexe.

2) Conjecture de Poincaré en gde dimension

$\left[ \begin{array}{l} \text{Soit } X^n \text{ une variété diff. Compacte ayant le m\u00eame type d'homotopie que } S^n \\ \text{Alors si } n \geq 5, X \text{ est hom\u00e9omorphe \u00e0 } S^n \end{array} \right.$

deux : 1)  $n \geq 6$

Soit  $X$   $x \in X$   $X_0$  1-carte  
 disque autour de  $x$

$W = X - \text{int } X_0$

$W$  est difféomorphe à  $D^n$

en effet  $\partial W = \partial X_0 = S^{n-1}$

$W$  est 1-connexe

$X = W \cup X_0$   
 $\partial X_0$

et  $\pi_1(X) = \pi_1(W) = 0$  car  $\pi_1(X) = 0$   
 (Van Kampen)

$$H_* (W) = H_* (S^n - x) = 0.$$

Donc  $X = D^n \cup_{\text{bord.}} D^n \Rightarrow X$  est homéomorphe à  $S^n$ :

en effet  $X = W \cup X_0$

$$W \xrightarrow{\varphi} D^n$$

$$X_0 \xrightarrow{\psi} D^n$$

$$X \cong D^n \cup_{\theta} D^n$$

$$\theta: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

$$\theta = \varphi \bar{\psi}^{-1}$$

$$S^n = D^n \cup_{\text{id.}} D^n$$

pb: peut-on mélanger  $\theta: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  en  $D^n \rightarrow D^n$ ?

on mélange radial  $\theta$  et

$$\textcircled{H}: D^n \rightarrow D^n$$

$$\textcircled{H}(x) = \begin{cases} x \neq 0 & \theta\left(\frac{x}{|x|}\right) |x| \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$\textcircled{H}$  est l'homéomorphe de  $D^n$

et  $\textcircled{H}$  n'est dérivable que si  $\theta$  est la restriction d'une app. linéaire

donc

$$X = D^n \cup_{\theta} D^n$$

$$\downarrow \quad \text{id} \downarrow \quad \downarrow \textcircled{H}^{-1} \quad \underline{\text{homéom.}}$$

$$S^n = D^n \cup_{\text{id.}} D^n$$

Rem:  $\exists$  (si  $n=7$ ) des sphères d'homotopie non difféomorphes à  $S^7$  (Kilnøz)

Cas où  $n=5,6$

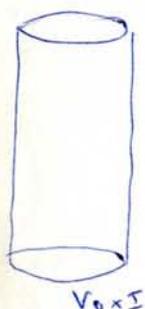
si  $n=5,6$  toute sphère d'homotopie est le bord d'une variété  $W^{n+1}$  contractible (Kervaire - Milnor) et on applique 1)

ici  $X$  est difféomorphe à  $S^n$  ( $n=5,6$ )

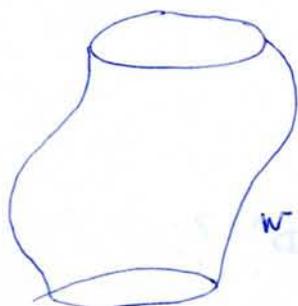
Méthode par trouer l'difféom

$$(V_0 \times I, V_0, V_1) \rightarrow (W, V_0, V_1)$$

Prop:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } W^n \text{ variété diff compacte connexe } \partial W = V_0 \cup V_1 \\ \text{et } f: (W, V_0, V_1) \rightarrow (I, 0, 1) \text{ sans singularité: } (df(x) \neq 0 \forall x \in W) \\ \text{Alors } \exists \text{ 1 diff } V_0 \times I \rightarrow W \end{array} \right.$



$V_0 \times I$



$W$

$g$   $\perp$  métrique sur  $W$ .

Alors on a  $\text{grad } f$  chp de vecteur sur  $W$ .

$$\forall x \in W, \forall v \in T_x W, \quad g(v, \text{grad } f_x) = df_x(v)$$

$X$  chp de vecteur  $\text{grad } f$

$$\|\text{grad } f\|^2 \leftarrow f \text{ sans singularité}$$

Soit  $\varphi(t, x)$  l'grc à 1 paramètre associé.

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, x) = t$$

Pour montrer le th de la cobordisme, il faut trouver  $f: (W, V_0, V_1) \rightarrow (I, 0, 1)$

on prend  $f$  qc.

on se limite à des singularités "raisonnables": fct de Morse.

on élimine les pts où  $df_x = 0$  (ici intérieurement l'hypothèse sur  $W$ )

on remplace  $(1, 0, 1)$  par  $(0, \infty, 0)$

Théorème: (Stallings)

Soit  $W^n$  variété diff sans bord non compacte contractile  
et 1-connexe à l'infini,  $n \geq 6$   
Alors  $W$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$

1-connexe à l'infini :  $\forall C$  compact  $\subset W$   
 $\exists K$  compact  $\supset C$  tq  $W-K$  soit simplement connexe

si  $W = \text{Intérieur de } X$  compacte à bord  
 $W$  1-connexe à l'infini  $\Leftrightarrow \partial X$  est 1-connexe.

Proposition: si  $W$  est variété diff non compacte de bord  $V \neq \emptyset$  compact  
et  $f: (W, V) \rightarrow (0, \infty, 0)$  sans singularité, et propre  
Alors  $W$  est difféom. à  $V \times [0, +\infty[$

dém:



on prend le champ  $\text{grad} f$  et son flot.  
 $\|\text{grad} f\|^2$

on utilise le fait que  $f$  est propre: si  $\varphi_t(x)$  n'est défini que pour  $t \leq \alpha$   
 $\Rightarrow$  la trajectoire est dans  $V$  compact et on peut la prolonger.

dém du th:

Soit  $x_0 \in W$  et  $X_0$  1-disque au vois de  $x_0$ .

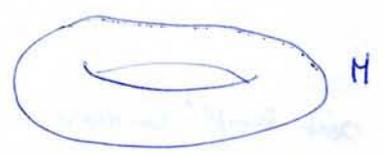
$$W - \text{Int } X_0 = W_0 \quad \partial W_0 = \partial X_0$$

$W_0$  est 1-connexe à l'infini et  $H_x(W_0, \partial W_0) = 0$

on montre alors qu'il  $\exists f: (W, \partial W) \rightarrow (\mathbb{R}_+, 0)$  propre et sans singularité.

- on remplace  $I$  par  $S^1$

Proposition :  $f : M \rightarrow S^1$  une application sans singularité.  
 $M$  variété diff compacte sans bord  
 Alors  $f$  est (fibration locale triviale



$\downarrow f$



$X = \lambda \text{ grad } f$  de sorte que  
 $T_x f(X_x) = \lambda \dot{f}_x$

$F = \bar{f}^{-1}(1)$  compacte.

$\psi(t, x)$  le gte à 1 paramètre de  $X$

$f(\psi(t, x)) = e^{i(\theta+t)}$

et on a la fibration

# Ch 1: Espace de jets et topologie de Whitney

$X$  et  $Y$  2 varietés

$x \in X$   $f$  et  $g$  def au voisin de  $x \in X$

$f$  et  $g$  ont 1 contact d'ordre 0 en  $x \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

— 1 —  $\Leftrightarrow df$  et  $dg$  ont 1 contact à l'ordre 0

$J_x^k(x, Y)$  dans d'eq

$$J^k(x, Y) = \bigcup_{x \in X} J_x^k(x, Y)$$

Structure de Variété sur  $J^k(x, Y)$

$U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$

$J^k(U, V)$

$V \subset \mathbb{R}^p$

Lemme:  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$J^k f(0) = J^k g(0) \Leftrightarrow \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0) = \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha}(0) \quad \forall |\alpha| \leq k$$

$$J^k(U, V) \longrightarrow U \times V \times \mathbb{P}(n, p, k)$$

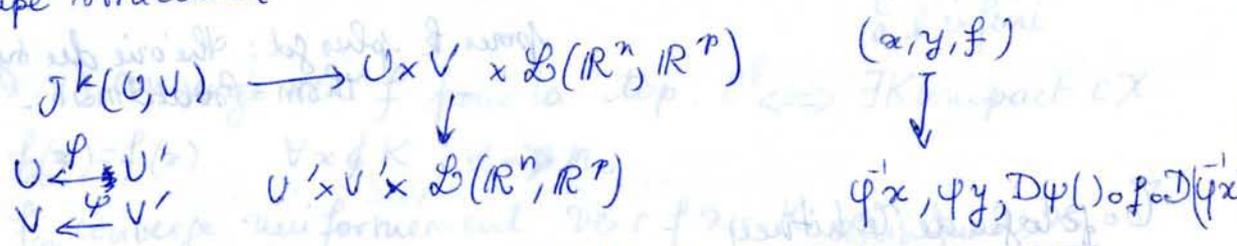
$J^k(x, Y) \xrightarrow{U \times V} X \times Y$  est 1 fibration locale triviale de fibre  $\beta^{-1}(0)$  de  $J_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

Rem: Ce n'est pas 1 fibre vectoriel

Exemples de sous variétés de  $J^k(x, y)$

$k=1$   $J^1(x, y) \rightarrow X \times Y$  fibration localement triviale  
 fibre : pol. à n var. de  $\mathbb{R}^p$ , degré  $\leq k$ , nulle à l'origine

donc si  $k=1$  la fibre est  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$   
 groupe structural:



donc le groupe structural est  $GL(\mathbb{R}^n) \times GL(\mathbb{R}^p)$  agissant sur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  par composition à droite et à gauche.

Donc dans ce cas ( $k=1$ ) on a presque un fibre vectoriel.

Soit  $F$  sous variété de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  invariante par l'action de  $GL(\mathbb{R}^n) \times GL(\mathbb{R}^p)$ .

On peut former un sous ensemble de  $J^k(x, y)$  en recollant les modèles locaux  $U \times V \times F \subset J^k(U, V)$  - ça marche et ça donne bien une sous variété (local!)  $Z$  on a  $Z \rightarrow X \times Y$  fibration loc. triviale de fibre  $F$

exemple:

$$F_r = \{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), \text{rang } A = r \}$$

clairement  $F_r$  invariante par  $GL(\mathbb{R}^n) \times GL(\mathbb{R}^p)$

Lemme:  $F_r$  est une sous variété de codimension  $(n-r)(p-r)$

dém: # matrice de rang  $r$ , on la ramène à  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \text{ proche de } \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en particulier } A \text{ est inversible.}$$

$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \left( \text{rang} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r \Leftrightarrow D - CA^{-1}B = 0 \right)$   
 (après on aura donc bien une sous variété -)  
 il faut donc montrer ça:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1}I & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (n-r) \end{matrix}$$

pour le plus gd: th'orie du symbole de Thom-Boardman.

## Topologie de Whitney

$$J^k(x, Y) \xleftarrow{j^k} \mathcal{C}^k(x, Y)$$

$$f \in C^\infty(x, Y) \quad j^k f: x \rightarrow J^k(x, Y)$$

def: si  $U$  est un ouvert de  $J^k(x, Y)$ , on pose  $O(U) = \{f \in C^\infty(x, Y) \mid j^k f(x) \in U\}$

toq  $\{j^k f(x) \in U\}$

$$\text{ona } O(U_1 \cap U_2) = O(U_1) \cap O(U_2)$$

et donc la famille des  $O(U)$  est une base pour une topologie sur  $C^\infty(x, Y)$  qu'on appelle topologie<sup>k</sup> de Whitney

$\varepsilon: x \rightarrow ]0, +\infty[$  continue, d'une distance sur  $J^k(x, Y)$ , on pose

$$B(f_0, \varepsilon) = \{f \in C^\infty(x, Y) \mid d(j^k f(x), j^k f_0(x)) < \varepsilon(x) \forall x \in X\}$$

rayon =  $f_0$  continue sur  $X$

Prop: les  $B(f_0, \varepsilon)$  forment une base de une topologie qui coïncide avec la topologie  $C^k$ .

dem

$$B(f_0, \varepsilon) \subset O(U) \quad f_0 \in O(U)$$

$$\text{ou a: } B(f_0, \varepsilon) \subset O(U) \iff$$

$$d(j^k f(x), j^k f_0(x)) < \varepsilon(x)$$

$$U = \{z \in J^k(x, Y) \mid d(z, j^k f_0(\alpha(z))) < \varepsilon(\alpha(z))\}$$

$\alpha(z)$ : source du jet  $z$ .

donc  $U$  est un ouvert de  $J^k(x, Y)$  et  $O(U) \subset B(f_0, \varepsilon)$ .

pour l'autre inclusion

$K \subset X$  compact  $\exists \varepsilon$  tq  $\forall f$  tq  $d(j^k f(x), j^k f_0(x)) < \varepsilon \forall x \in K$

$\subset C^k(X, \mathbb{R}^n)$

$(x_1) \text{ int } K \rightarrow$  construction d'une fonction  $\varepsilon$ . mais qui peut tendre vers 0 à l'infini

Prop  $f_n \in C^k(X, Y)$  converge vers  $f$  pour la top.  $C^k \iff \exists K$  compact  $CX$

tq 1-  $f_n(x) = f(x) \forall x \notin K, \forall n \geq n_0$

2-  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $K$  ainsi que les  $\partial$  dérivées jusqu'à l'ordre  $k$ .

deux sens  $\Leftarrow$  est ~~évident~~ clair

$\Rightarrow$  - supposons  $\forall K$  cpt  $CX, \exists$  une suite d'app  $f_n \neq f$  hors de  $K$ .

$f_n \neq f \Rightarrow \exists x_1$  tq  $j^k f_{n_1}(x_1) \neq j^k f(x_1)$

$$d(j^k f_{n_1}(x_1), j^k f(x_1)) = \alpha_1.$$

$X = \cup K_i, K_i \subset \text{int } K_{i+1}$

$x_1 \in K_{m_1}$

par récurrence on a :

$\exists x_j \in K_{m_j}$  avec  $d(j^k f_{l_j}(x_j), j^k f_{m_j}(x_j)) \geq \varepsilon_j$

Soit  $\varepsilon: X \rightarrow ]0, \infty[$  tq  $\varepsilon(x) < \varepsilon_j$  sur  $K_{m_j} - K_{m_{j-1}}$

alors  $\exists$  une infinité de  $f_n$  qui ne sont pas de  $B(f, \varepsilon)$  -  $\square$

donc: si  $X$  est compacte, la topologie  $C^k$  de Whitney c'est la même chose que la  $C^0$  unif de la fonction et de ses dérivées d'ordre  $\leq k$ .  
si  $X$  est non compacte, la topologie  $C^k$  est plus fine que la top ( $C^0 \dots$  et dér.  $\leq k$ ) sur les compacts.

$$B_K(f, \varepsilon) = \{f \mid d(j^k f(z), j^k f_0(z)) < \varepsilon \forall z \in K\}$$

# Transversalité:

définition Soient  $X$  et  $Y$  des variétés,  $Z$  une sous variété de  $Y$  et  $f: X \rightarrow Y$   $f \in C^\infty(X, Y)$  - on dit que  $f$  est transverse à  $Z$  en  $x$  si  $f(x) \notin Z$ , ou bien  $f(x) \in Z$  et  $T_x Y = T_x Z + T_x f(T_x X)$

Rq: Si  $\dim X + \dim Z < \dim Y$ . On dit que  $f$  est transverse à  $Z$  en  $x$  si et seulement si  $f(x) \notin Z$

Vocabulaire:  $f$  est transverse à  $Z$  sur  $U$  ouvert de  $X$  si  $f$  transverse à  $Z$  en tous les pts de  $U$ .

$C \subset X$   $f$  transverse à  $Z$  près de  $C$  si  $f$  transverse à  $Z$  sur un voisinage  $U$  de  $C$

si on ne précise pas, c'est que  $f$  est transverse à  $Z$  sur  $X$  tout entier.

Prop:  $y = f(x) \in Z$  - Soient  $V$  voisinage de  $y$  dans  $Y$ ,  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$  une équation locale de  $Z$  ( $g^{-1}(0) = V \cap Z$ ,  $g$  submersion) alors  $f$  est transverse à  $Z$  en  $x$  si  $g \circ f$  est une submersion, soit si  $0$  est une valeur régulière de  $g \circ f$ .

$T_x Y = \ker dg_x \oplus \mathbb{R}^m$  la projection  $T_x Y \rightarrow \mathbb{R}^m$  est exactement  $dg_x$ .

$$T_x Y \supset T_x Z + T_x f(T_x X)$$

$$\text{ou a égalité} \iff dg_x(T_x f(T_x X)) = \mathbb{R}^m$$

Cor: si  $f: X \rightarrow Y$  est transverse à  $Z$  sur  $U$ , alors  $f^{-1}(Z) \cap U$  est une sous variété de  $U$ . ▣

en effet:

si  $x \in f^{-1}(Z) \cap U \Rightarrow y = f(x) \in Z$   $g$  équation locale de  $Z$  au vois. de  $y$

alors  $g \circ f|_{V(x)}$  est une équation locale de  $f^{-1}(Z) \cap U$ .

de plus les codimensions de  $Z$  et de  $f^{-1}(Z) \cap U$  sont égales. ▣

Prop:  $Z$  sous variété fermée de  $J^k(X, Y)$  - Alors  $\{f \in C^\infty(X, Y) \text{ tq } j^k f \text{ est transverse à } Z\}$  est un ouvert de  $C^\infty(X, Y)$  pour la top  $C^k$ .

Contre exemple si  $Z$  est non fermée

$$Y = \mathbb{R}^3, X = S^1, Z = \text{dte} - 1 \text{ pt.}$$

$$k=0 \quad J^0(X, Y) = X \times Y$$



$f_0(S^1) \cap Z = \emptyset$  - mais tout près il y a d'autres  $f$  qui coupent - cf les dim. et ce suffit

dein. de la prop.

ou montre que l'ensemble de la prop. est de la forme  $O(U)$  pour un  $U$  ouvert de  $J^1$ .

$$U = \{z \in J^{k+1}(x, y) \text{ tq } z = j^{k+1}g(x), j^{k+1}g(x) \text{ transverse à } Z \text{ en } x\}.$$

~~$J^k(x, y)$~~  ]  $C = \text{complémentaire de } U \text{ est fermé:}$   
 $z_n \rightarrow z \quad z_n \in \pi^{-1}(Z) \text{ (autrement$

$$z \in J^k(x, y)$$

$$\uparrow \pi$$

$$J^{k+1}(x, y)$$

c'est transverse.)  
 donc comme  $Z$  est fermé  $\Rightarrow z \in \pi^{-1}(Z)$

$$z_n = j^{k+1}g_n(x_n)$$

$$z = j^{k+1}g(x)$$

$$T_{\pi(z_n)} J^k(x, y) \not\supset T_{\pi(z_n)} Z$$

$$+ T_{j^{k+1}g_n}(T_x X).$$

$$T_{\pi(z)} J^k(x, y)$$

le rang ne peut pas augmenter

donc à la limite on a aussi une  $\supset$  omise - donc  $z \in C$ . ▣

Sur  $C^\infty(x, y)$  on a défini la top  $C^k$  ( $k \geq 1$ )

topologie  $C^\infty$   $(C^\infty(x, y), C^{k+1}) \rightarrow (C^\infty(x, y), C^k)$

continue.

la top.  $C^\infty$  est la limite projective des topologies  $C^k$ .

plus simplement:  $B_k(f_0, \varepsilon)$  boule de  $C^k$ .

$\bigcup_{k \geq 1} B_k(f_0, \varepsilon)$  forme une base de topologie - c'est la top.  $C^\infty$ .

Exercice (théorème de Baire) - Si  $U_i$  est une suite d'ouverts denses de  $C^\infty(x, y)$  pour la topologie  $C^\infty$ , alors  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$  est dense de  $C^\infty(x, y)$  (top  $C^\infty$ ).

# Théorème de transversalité

pour ab. math

th: Soit  $Z$  une sous variété de  $J^k(x, y)$  - l'ensemble  $\{f \in C^\infty(x, y), \text{transverse à } Z \text{ sur } X\}$  est dense dans  $C^\infty(x, y)$  pour la top.  $C^\infty$ . (C'est une intersection dénombrable d'ouverts denses)

(th de Baire, lemme de Sard...)

- on va démontrer un peu plus faible -

démme: Soit  $f_a: X \rightarrow Y \quad a \in U$  tq  
 $F: X \times U \rightarrow Y \quad F(x, a) = f_a(x)$  soit de classe  $C^\infty$   
 $Z \subset Y$  sous variété - on suppose  $F$  transverse à  $Z$ .

Alors:  $\{a \in U \mid f_a \text{ est transverse à } Z\}$  est dense dans  $U$ .

dém:  $V = F^{-1}(Z)$  est une sous variété de  $X \times U$ .

$p: V \rightarrow U$  projection sur le 2<sup>e</sup> facteur.

1.  $a \notin \text{Im } p \Rightarrow f_a$  est transverse à  $Z: \forall x \in X, F(x, a) \notin Z$ .

2. ~~accéder~~ Lemme de Sard: si  $f: X \rightarrow Y$  est de classe  $C^\infty$ ,  
 l'ensemble des valeurs critiques de  $f = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x) \text{ et } T_x f \text{ non surjective}\}$  est de mesure nulle  
 (donc a un complémentaire dense).

en part.  $\dim X < \dim Y$ . alors  $Y - \text{Im } f$  est dense dans  $Y$ .

donc si  $\dim V < \dim U$  dans notre lemme, alors  $U - \text{Im } p$  est dense dans  $U$ , on a donc le lemme.

on étudie donc le cas  $\dim V \geq \dim U$ .

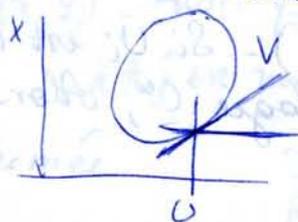
$[U - \{\text{val. critiques de } p\}]$  dense dans  $U$

~~il existe~~  $a$  une valeur régulière de  $p$ .

soit  $x \in X \quad (x, a) \notin V$  c'est gagné:  $f_a(x) \notin Z \Rightarrow f_a \pitchfork Z$  en  $x$ .

si non  $(x, a) \in V$ .  $T_{(x, a)}(X \times U) = T_{(x, a)}V + T_x X \times \{a\}$ .

car  $a$  est val. régulière de  $p$ .



$$T_{(x,A)} F(T_{x,A}(x \times U)) = T_{x,A} F(T_{x,A}V) + T_x f_a(T_x X)$$

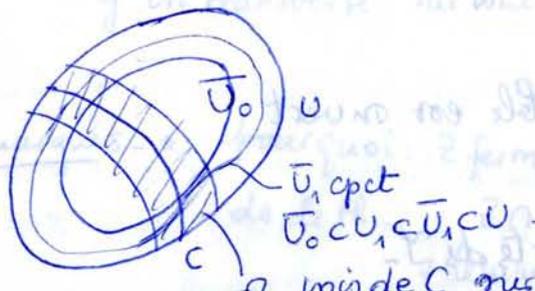
mais  $F \pitchfork Z$  donc  $T_y Y = T_y Z + T_{(x,A)} F(T_{x,A}(x \times U)) = T_y Z + TF(TV)$

$$V = F^{-1}(z) \quad \text{donc } TF(T_y Y) \subset T_y Z + T_x f_a(T_x X)$$

et  $T_y Y = T_y Z + T_x f_a(T_x X) \rightarrow$  donc  $f_a$  est  $\pitchfork$  à  $Z$ .

Lemme local de transversalité:

$U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $V$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $C$  fermé de  $U$ ,  $U_0 \subset \bar{U}_0 \subset U$ ,  $\bar{U}_0$  compact.  
 $Z$  sous variété fermée de  $J^k(U, V)$ ,  $f_0: U \rightarrow V$   $f_0$  transverse à  $Z$  près du fermé  $C$ .  
 Alors, pour tout voisinage  $\mathcal{V}(f_0)$  ( $\text{top } C^\infty$ ),  $\exists f \in \mathcal{V}(f_0)$   
 tq  $\begin{cases} 1. f_0 = f \text{ près du fermé } C \\ 2. f \pitchfork Z \text{ près de } \bar{U}_0 \end{cases}$



$\Omega$  voisinage de  $C$  (ouvert rel. comp.)  
 $\Omega_0 \subset \Omega$  voisinage de  $C$  (ouvert rel. comp.)

on choisit  $\alpha: U \rightarrow [0, 1]$  à support compact [à cause de en nuis de  $\text{top } C^k$ ].  
 tq  $\alpha = 1$  sur  $U_1 - \Omega$ ,  $\alpha = 0$  sur  $\Omega_0$ .

on considère  $f_0(x) + \alpha(x)T(x) = f_T(x)$  [où  $T$  polynôme de degré  $\leq k$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .  
 Ensemble de tels  $T$ .

Tassez petit  $\Rightarrow$   
 $U \times P \rightarrow V$   
 $(x, T) \mapsto f_T(x)$   $\alpha$  est à support compact donc  $T \mapsto f_T$   
 $P \rightarrow C^0(U, V)$  est une application continue.

Si  $T$  est assez petit,  $f_T \pitchfork Z$  (car  $Z$  fermée) ~~et de même~~.  
 sur  $\Omega$ .

ona:  $U \times P \xrightarrow{F} J^k(U, V)$   
 $(x, T) \mapsto j^k f_T$  / restreint à  $U_1 - \Omega$  [mettre un  $\Omega_1$  entre  $\Omega$  et  $\Omega_0$  pour ne pas avoir de bords].  
 donc à  $U_1 - \bar{\Omega}_1$

8 donc:  $(U_1 - \bar{\Omega}_1) \times P \xrightarrow{\cong} \mathcal{J}^k(U_1 - \bar{\Omega}_1, V)$  difféo local

$(U_1 - \bar{\Omega}_1) \times V \times \text{fibre}$   
 do fibre: P- termes lots! - C'est ce qui fait marcher -

$Z \cap \mathcal{J}^k(U_1 - \bar{\Omega}_1, V) = Z_1$   
 F est transverse à  $Z_1$

donc le lemme assure que  $\{T \mid j^k f_T \pitchfork Z_1\}$  dense dans  $P$ .  
 et donc  $\exists T_0$  assez petit pour que ça marche (cf conditions plus haut) et  $j^k f_{T_0} \pitchfork Z_1$  sur  $U_1 - \bar{\Omega}_1$ .  
 et on choisit  $T_0$  assez petit pour que  $f_{T_0} \in \mathcal{C}(f_0)$  et on a fini ▣

théorème de transversalité:

$Z$  sous variété fermée de  $\mathcal{J}^k(x, Y)$ , alors  $\{f \mid j^k f \text{ transverse à } Z\}$  est un ouvert dense de  $C^\infty(x, Y)$ .

dém - on a vu + haut que cet ensemble est ouvert  
 - montrons qu'il est dense.

$\mathcal{C}(f_0)$   $f_0: X \rightarrow Y$   $V_j$  ouv. de cartes de  $Y$ .

$\exists U_i$  recouvrement de  $X$  par des ouverts de coordonnées, avec  $f_0(U_i) \subset V_{j(i)}$  et  $U_{0,i} \subset \bar{U}_{0,i} \subset U_i$   $\bar{U}_{0,i}$  cpt. et les  $U_{0,i}$  recouvrent  $X$ .

On suppose  $\mathcal{C}(f_0) = B_\varepsilon(f_0, \varepsilon)$  - La trace de cette boule dans  $C^\infty(U_i, V_{j(i)})$  donne un voisinage de  $f_0|_{U_i}$

$\{g: U_i \rightarrow V_{j(i)} \mid d(j^l g(x), j^l f_0(x)) < \varepsilon(x) \forall x \in U_i\}$ .

noté  $B_\varepsilon(f_0, \varepsilon)$ .

Soit  $f \in C^\infty(x, Y)$  avec  $f(U_i) \subset V_{j(i)}$  et  $f|_{U_i} \in B_\varepsilon(f_0, \varepsilon)$

alors  $f \in B_\varepsilon(f_0, \varepsilon)$  -

$\exists f'_0: U_0 \rightarrow V_{j(0)}$   $f'_0 \uparrow$  près de  $\overline{U_{00}}$ ,  $f'_0 \in \mathcal{B}_\varepsilon^0(f_0, \varepsilon)$

$U_1$  Le fermé  $C = \overline{U_{00}} \cap U_1$  on recouvre  $f'_0$  à  $f_0$  en dehors du cpet sur lequel on a modifié.  
 on applique le lemme local à  $g_0$  on a donc  $g_0: X \rightarrow Y$  avec  $g_0|_{U_0} = f'_0$ .

$\Rightarrow f'_1: U_1 \rightarrow V_{j(1)}$

$f'_1 = g_0$  au vois de  $C$

transverse près de  $\overline{U_{0,1}}$   $\rightarrow g_1: X \rightarrow Y$

en itérant:  $g_n: X \rightarrow Y$ ,  $g_n \in \mathcal{B}_\varepsilon^0(f_0)$

$g_n = g_{n-1}$  près de  $\overline{U_{0,0}} \cup \dots \cup \overline{U_{0,n-1}}$

$g_n \uparrow Z$  près de  $\overline{U_{0,n}}$ .

Soit alors  $g: \begin{cases} g(x) = g_n(x) \\ x \in U_{0,n} \end{cases}$  ne dépend pas du  $n$  choisi, par construction

$g$  est transverse sur tout  $X$ , et  $g \in \mathcal{B}_\varepsilon^0(f_0, \varepsilon)$  - les vérifications sont immédiates -

Remarques - \* pourquoi:  $Z$  fermée?  $\leftrightarrow$  pour montrer que c'est dense / ouvert  $\leftrightarrow$  indispensable - ds le lemme local  $\rightarrow$  important  
 - ds le th.  $Z \cap J^k(U_i, Y)$  fermé de  $J^k(U_i, Y)$ .  
 + lemme local.

si on peut trouver des  $U_i$  et  $V_j$  tq  $Z \cap J^k(U_i, V_j|_{U_i})$  fermé,

ça suffit - En particulier:

-  $k=0$   $J^0(x, Y) = X \times Y$ .  $Z'$  ss var. de  $Y$

$Z = X \times Z'$

le résultat s'applique:  $Z'$  est loc. fermée

done  $\exists V_j$  recouvr. tq  $V_j \cap Z'$  fermé ds  $V_j$  | et on peut appliquer la forme locale -

- si  $k > 0$ . on ne voit pas très bien comment couper. (il y a une fibre) -

\* On a eu fait monté plus = on a un énoncé relatif;

$f_0: X \rightarrow Y$  transverse près de  $C$  fermé  $C \subset X$

ds  $\mathcal{B}_\varepsilon^0(f_0)$ ,  $\exists f: X \rightarrow Y$  1.  $f = f_0$  près de  $C$

2.  $f \uparrow$  à  $Z$  sur  $X$ .

même démonstration en faisant attention avec  $C$ .

## Applications

Théorème (Whitney) Si  $\dim Y \geq 2 \dim X \Rightarrow$  l'ens. des immersions de  $X$  dans  $Y$  est un ouvert dense de  $C^\infty(X, Y)$

$f$  immersion  $\Leftrightarrow \text{rg } T_x f = \dim X \quad \forall x$   
 $= n$   $[\dim Y = p] \cdot p \geq 2n$

$\Leftrightarrow j^1 f(x) \in Z_n \forall x$  (cf la déf des les ex. de ss. var. de  $J(x, Y)$ )

$j^1 f(x) \cap \left[ \bigcup_{r < n} Z_r \right] = \emptyset$  en particulier ici  $Z_r$  non fermée  $\partial Z_r = Z_{r-1} \cup \dots$

mais  $\bigcup_{r < n} Z_r$  est un fermé de  $J^1(X, Y)$

donc  $\{ \text{immersions} \}$  est un ouvert de  $C^\infty(X, Y)$  (la condition d'immersion est ouverte) -

$j^1 f$  transverse à  $Z_r \ (r < n) \Rightarrow j^1 f(x) \cap Z_r = \emptyset$ .

$$\begin{aligned} \text{codim } Z_r &= (n-r)(p-r) \\ \dim J_1 &= n + p + np \end{aligned}$$

$n < (p-r)(n-r)$  dès que  $r < n$ .

- avec l'autre forme du th c'est automatique.
- avec celle qu'on a montrée remonter le th en bloc pour toutes les ss var.  $Z_r$  - Comme  $\bigcup_{r < n} Z_r$  est fermé ça marche.

transversalité

[Morlet Séminaire Cartan 61-62 ~  
Tougeron Idiaux de fus diff.  
Golubitsky - Guillemin Stable mappings and their singularities]

th Soit  $f: X^n \rightarrow Y^p \quad p \geq 2n$ ,  $f$  immersion au voisinage d'un fermé  $C$ , alors  $\exists g: X^n \rightarrow Y^p$  approximation de  $f$ , immersion, égale à  $f$  près de  $C$

$g$  approximation de  $f \Rightarrow g$  est homotope à  $f$  (variétés  $\rightarrow$  loc. contractibles).

$g = f$  près de  $C \Rightarrow$  d'homotopie est constante près de  $C$ .

(Cq du th relatif de  $\mathcal{H}$ ).

Cor: Soit  $f: (X, \partial X)^n \rightarrow (Y, \partial Y)^p$

Si  $p \geq 2n$ ,  $\exists g: (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial Y)$ , approx. de  $f$ , et immersion

dém: on applique le résultat préc. au bord.

$$f|_{\partial X} : \partial X^{n-1} \rightarrow \partial Y^{p-1} \quad p-1 \geq n-1 \geq 2(n-1)$$

$g_1 : \partial X \rightarrow \partial Y$  approx. de  $f|_{\partial X}$  immersion -

$\partial X$  admet un collier dans  $X$  (de même pour  $Y$ )

donc  $g_1$  s'étend en  $g_2$  : voisinage de  $\partial X \rightarrow$  vois. de  $\partial Y$ .

on peut étendre  $g_2$  en une  $g_3 : X \rightarrow Y$  approximation de  $f$   
 tq  $g_3$  immersion au voisinage de  $\partial X$

on ne considère plus les bords :  $g_3 : \overset{\circ}{X} \rightarrow \overset{\circ}{Y}$  immersion au voisinage d'un fermé  $(\dots)$ .



donc on a  $g$  approximation de  $f$

tq  $g = g_3$  au voisinage du bord -  $\square$

Rq: c'est un argument général pr les variétés à bord -

### Plongements < en part. immersions injectives > -

- on n'a utilisé les  $j_r^k f$ , donc on ne peut pas avoir d'injectivité (pts locaux) -

tr. au voisinage au but, on multitransversalité:

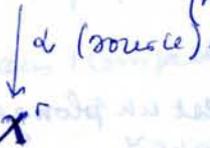
$$X^r \supset X^{(r)} = X^r - \text{diag} = \{(x_1, \dots, x_r) \mid x_i \text{ distincts}\}.$$

produit cartésien

c'est un ouvert de  $X^{(r)}$

$$\text{on considère } (J_r^k(x, y))^r \supset J_r^k(x, y) = \alpha^{-1}(X^{(r)})$$

(multijets d'ordre  $r$ )



$$\text{Si } f \in C^\infty(X, Y) \quad j_r^k f : X^{(r)} \rightarrow J_r^k(x, y)$$

### Théorème de multitransversalité

$Z$  ss. var. de  $J_r^k(x, y)$

$\{f \in C^\infty(X, Y) \mid j_r^k f \pitchfork Z\}$  est dense dans  $C^\infty(X, Y)$ , est ouvert si  $Z$  est compacte

méthode analogue à celle du th. de transversalité.

$Z$  compacte nécessite par la suppression des diagonales

Application :

$$J_2^0(x, Y) \supset Z_2 = \{(z_1, z_2) \mid \beta(z_2) = \beta(z_1)\}$$

↑  
suffit  
pour étudier  
l'injectivité

$Z_2$  fermé de  $J_2^0$ , sous variété de codimension  $p = \dim Y$ .

$(\beta(z) \text{ but})$  en eff.  $J_0(x, Y) = X \times Y$

$Z_2 = (x \times Y)^2$  pts dont les coord de  $X$  sont  $\neq$   
les coord. de  $Y$  sont = .  
 $(x, y), (x, y') \quad y = y'$

Lemme :  $\left\{ \begin{array}{l} p \geq 2n+1 \\ \text{injective} \end{array} \right\}, f: X \rightarrow Y \text{ et } J_2^0 f \text{ transverse à } Z_2, \text{ alors } f \text{ est}$

Codim  $p = (\text{p'équations!})$

$$J_2^0 f: X^{(2)} \rightarrow J_2^0(x, Y)$$

dim  $2n$

$\cup_{Z_2} \text{codim } p \Rightarrow J_2^0 f(X^{(2)}) \cap Z_2 = \emptyset$

Théorème : Si  $\dim Y \geq 2 \dim X + 1$ , toute application  $f: X \rightarrow Y$  est approximable par une immersion injective de  $X \rightarrow Y$ .

analogue dans le cas à bord par la même technique que + haut :

$$f: (X, \partial X)^n \rightarrow (Y, \partial Y)^p \quad p \geq 2n+1$$

Cas particulier :  $X$  compacte, une immersion injective, est un plongement.

Cor :  $X$  cpcte  $f: X \rightarrow Y \quad p \geq 2n+1 \Rightarrow f$  approximable par un plongement.

Lemme : l'ensemble des immersions injectives de  $X$  dans  $Y$  est un ouvert de  $C^0(X, Y)$

dém. directe nécessaire - < injectivité pas à priori une condition ouverte > - laissé en exercice -

Lemme :  $X \xrightarrow{f} Y \quad f \text{ [continue, injective et propre]}$   
 $X \text{ et } Y \text{ loc. cpcts} \Rightarrow f \text{ est un plongement topologique de } X \text{ dans } Y$

- exercice - < propre des l.e. cpcts :  $f$  propre ssi  $f^{-1}(\text{compact})$  est compact > -

Théorème de Whitney : toute variété  $X^n$  se plonge dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  - Plus précisément, toute application  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  est approximable par un plongement.

démonstration :  $\{f: X \rightarrow \mathbb{R}^p, \text{ propres}\}$  est un ouvert non vide -

non vide :  $X$  cpcte tte les apl. sont propres.  
 $X$  non cpcte  $X = \cup K_i \quad K_i \subset K_{i+1} \quad \mathbb{R}^p$  et on construit une suite  
propre de  $X \rightarrow \mathbb{R}$ .



procédé de Stol  $\rightarrow$  application propre de  $X \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 en multipliant les composantes  $\rightarrow X \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

c'est ouvert:  $f_0: X \rightarrow \mathbb{R}$  propre

$|f(x) - f_0(x)| < 1 \Rightarrow f$  est propre:

$f^{-1}(B(0, r)) \subset f_0^{-1}(B(0, r+1)) \quad \# \Rightarrow$  cpct.  
 fermé cpct

condition ouverte de  $C^0 \dots C^\infty \quad \square$ .

$\rightarrow$  des 2 lemmes donnent le plongement cherché -  $\square$

On n'a fait que des raisonnements de position générale:

$M^m \subset \mathbb{P}^p$   
 $N^n \subset \mathbb{P}^p$   
 $m+n < p \Rightarrow$  par position générale on peut supposer  $M \cap N = \emptyset$  (donc  $M \cap N = \emptyset$ )  
 $m+n = p \Rightarrow$  alors  
 $M \cap N$  est une sous variété de  $P$  de dim 0:  $M \cap N =$  réunion de pts.

Quand peut-on supprimer des pts, etc...?

Lemme

Théorème de Whitney: Soient  $M^m$  et  $N^n$  deux sous variétés ~~convexes~~ de  $\mathbb{P}^p$

avec  $m+n = p$ . On suppose  $M$  et  $N$  s'intersectent transversalement en 2 pts  $x_0$  et  $x_1$  ( $M \cap N = \{x_0, x_1\}$  et en ces pts l' $N$  est  $\perp$ ).

1. On suppose  $\exists$  un arc  $\gamma$  plongé dans  $M$  entre  $x_0$  et  $x_1$  dont l'intérieure  $\#$  ne coupe pas  $N$ .



tels que le lacet  $\gamma\gamma^{-1}$  est homotope à zéro dans  $P$ .

2. On suppose que les  $\cap$  en  $x_0$  et  $x_1$  sont de signes opposés

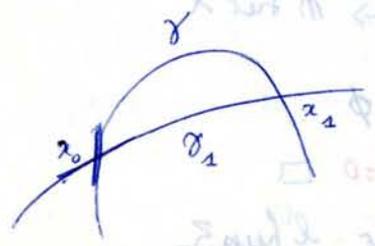
3.  $m+n \geq 5$ ,  $m, n > 0$ ; si  $m=1$  ou  $2$ , alors  $\pi_1(P-N) \rightarrow \pi_1(P)$  est injective;  $n=1$ , ou  $2$   $\pi_1(P-M) \rightarrow \pi_1(P)$  injective.

Alors  $\exists$  une isotopie  $h_t: P \rightarrow P$ ,  $h_0 = id$ ,  $\exists t_0$

1.  $h_{t_0}(M) \cap N = M \cap N - \{x_0, x_1\}$

2. Si  $V$  voisinage de  $\gamma$  dans  $M$ , alors  $\Phi_t(x) = x \quad \forall t \in [0, 1], \forall x \in M \cup N - (V_1 \cup V_2)$

Remarques 1. sur la condition 1.



$\gamma_M^n$  le fibré normal de  $M$  dans  $P$   
 $\gamma_N^n$   $\hookrightarrow$  bgt  $\rightarrow N$

d'après la condition de  $\perp$ , on a des isom

entre  $\gamma_{M, x_0} \xrightarrow{\alpha_0} \gamma_{N, x_0}$

de même  $\gamma_{M, x_1} \xrightarrow{\alpha_1} \gamma_{N, x_1}$

$\gamma_M |_{\gamma}$  trivial - on l'oriente  
 $\tau_N |_{\gamma_1}$  —————

les  $N$  en  $x_0$  et  $x_1$  sont de signe opposé:  
 signifie qu'entre  $x_0$  et  $x_1$ , d'un conserve l'orientation et l'autre non.

- c'est indép. du choix de orientations (clai).
- on aurait pu faire jouer des rôles inverses à  $M$  et  $N$ , ça ne change pas (exercice) -

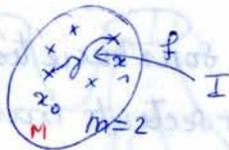
$\Sigma$  [Rien ne dit que ça ne dépende pas des choix de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  (si  $M$  et  $N$  et  $P$  sont orientable, c'est vrai) -

2. sur la condition 2.

si dim  $m=1$ ,  $M$  et  $N$  connexes, alors il n'est pas évident qu'il  $\exists \gamma, \gamma_1$ .



si  $m$  et  $n \geq 2$ ,  $M, N$  connexes, l'existence de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  est automatique.



dis que le reste de  $M \cap N$  est  $\emptyset$

par position générale.

$f_2 \neq (I^{(2)}) \cap Z_2$ , on peut remplacer



on supprime les composantes connexes du nouveau chemin qui sont des cercles.

- on a le résultat = ( $\gamma$  et  $\gamma_1$  plongés).

3. condition 3.

lemme:  $X$  sous variété de  $Y$  de codimension  $q$  - Alors:

$$\pi_j(Y-X) \xrightarrow{z^*} \pi_j(Y) \text{ est surjective } j \leq q-1$$

isom.  $j \leq q-2$ .

$\alpha \in \pi_j(Y)$  représenté par  $g: S^j \rightarrow Y$  différentiable, qu'o.p.s. transverse à  $X$ .  $j < q \Rightarrow g(S^j) \subset Y-X$  d'où la surjectivité

$$\beta \in \pi_j(Y-X)$$

$$L_*(\beta) = 0$$

$$f: S^j \rightarrow Y-X \text{ différentiable}$$

$$g: S^{j+1} \rightarrow Y \text{ différentiable, } \rightarrow \nexists \text{ sur } X$$

homotopie.

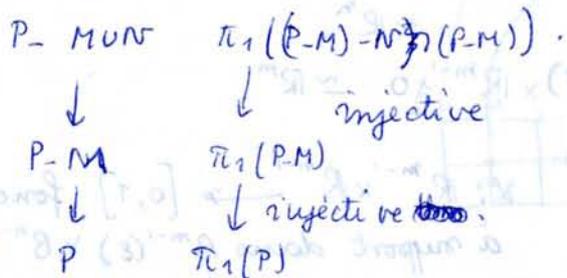
$$j+1 < q \text{ et } g \nexists \Rightarrow g(S^{j+1}) \cap X = \emptyset$$

donc  $g$  htpie de  $f$  ds  $Y-X \Rightarrow \beta = 0 \quad \square$

pour les petites dim on a besoin de rajouter l'hyp 3-

Cor: la condition 3  $\Rightarrow \pi_1(P - \text{MUN}) \rightarrow \pi_1(P)$  est injective.

$m+n \geq 5 \Rightarrow$  ops  $m \geq 3$



de démonstration du th. de Rohitney:

méthode modèle: étude d'un cas simple où on construit à la main la déformation cherchée

partie utile du modèle: (là où la déformation agit effectivement)

plongement de la partie utile du modèle dans la situation considérée

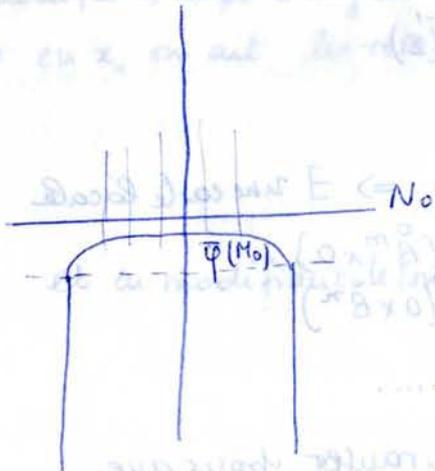
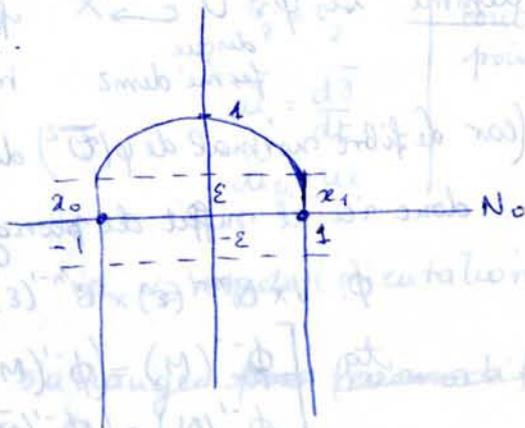
démonstration: étude du modèle:

$m = n = 1 \quad P_0 = \mathbb{R}^2 \quad M_0, N_0 = \mathbb{R}$

$N_0 = \mathbb{R} \times 0 \subset \mathbb{R}^2$

$(M_0 \subset \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\varphi}$

déformation:

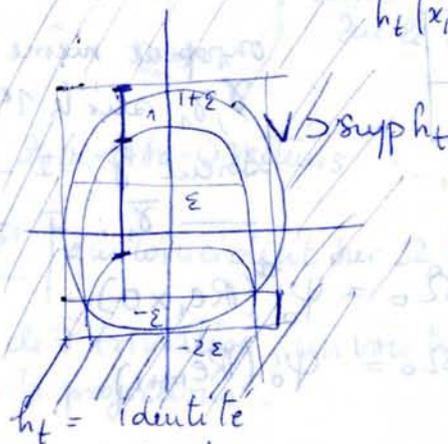


$M_0 \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi}$

isotopie  $\varphi_s = (1-s)\varphi + s\bar{\varphi}$

on veut une isotopie ambiante  $h_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$h_t(x, y) = (x, \dots)$   
 $(x, y)$  si (hauteur)



$x \in [0, 1] \quad \varphi(M)$  et  $\bar{\varphi}(M)$   
 sont les graphes de  $g$   
 et  $\bar{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .





on peut construire sur  $P$  une nouvelle métrique  $Riem.$ , identique à l'ancienne ~~sur~~ loin de  $\delta$  et  $\bar{\delta}_1$ , produit près de  $\bar{\delta}_1$  et  $\delta$

→ on a en rapetissant au besoin tout le monde une métrique sur  $P$  qui est un produit près de  $\bar{\delta}_1$  et  $\delta$ .

Le long de  $\bar{\delta}$  on considère le ruban engendré par  $u_1$ .

$\bar{\delta}_1$   $\xrightarrow{u_1}$

la réunion de ces 2 rubans exhibe ds  $P$  un voisinage du modèle :



on a un plongement  $\phi: C_0 \hookrightarrow C$ .

on choisit une courbe  $\delta$  lisse disjointe de  $A$ , dont un vois. tub. contient un vois. de  $A$ .

on transporte  $\delta$  par  $\phi$ . Dans  $C$  on a  $\phi(\delta)$  et

$$\phi(\delta) \times ]-1, 1[ \supset \gamma_1 \cup \gamma$$

$\phi(\delta)$  est disjoint de  $MUN$ .

$\phi(\delta)$  est homotope à  $L = \gamma\gamma_1^{-1}$ , donc  $\phi(\delta) \sim 0$ . (hyp. du th.) dans  $P$ , et donc dans  $P - MUN$  d'après une remarque précédente.

Ça qui permet de boucher le trou :

$\exists$  une application  $\bar{\phi}$  de  $V$  dans  $P$  étendant  $\phi$  sur  $\delta \times ]-1, 1[$  et  $\bar{\phi}(V - \delta \times ]-1, 0]) \subset P - MUN$

$m+n \geq 5 \Rightarrow$  on peut modifier  $\bar{\phi}$  sans rien bouger près de  $\delta \times [0, 1]$  de sorte que la nouvelle  $\bar{\phi}$  est un plongement.

on a donc  $\bar{\phi}: V \hookrightarrow P$ , et sur le voisinage du bord de  $\bar{\phi}(V)$ , les champs de vecteurs donnés sur  $\bar{\phi}(\delta \times [-1, 1])$  s'étendent ils en des champs de vecteurs normaux à  $\bar{\phi}(V)$  (et orthonormés)

(il y en a (f.  $\perp$  trivial), mais sont-ils prolongés de ceux dont on se parti) - ~~On veut donc~~ Mais

$\nu^{n+m-2}$  fibré  $\perp$  de  $\bar{\phi}V$  ds  $P$  a une trivialisat. près du bord - On a une obstruction  $\in \pi_1(SO_{n+m-2})$ , pour que cette trivialisat. s'étende

Soit on modifie (le long de  $\bar{\delta}$ )  $u_2, \dots, u_m$

ou sur  $\bar{\delta}_1$   $\tilde{v}_2 \dots \tilde{v}_m$  ou  $v_1 \dots v_n$   $\left| \begin{array}{l} \rightarrow \text{éléments de } \pi_1 SO_{m-1} \text{ ou} \\ \pi_1(SO_{n-1}) \end{array} \right.$

$n+m \geq 5 \Rightarrow n-1$  ou  $m-1 \geq 2$  donc un des  $\pi_1$ , est non nul =  $\mathbb{Z}/2$ :

$$\pi_1(SO_{n-1}) \rightarrow \pi_1(SO_{n+m-1}) \rightarrow 0$$

en modifiant, la nouvelle obstruction est nulle = 0  $\rightarrow$  on peut prolonger les champs de vecteurs -

On a donc trouvé sur  $\bar{\Phi}(V)$  des champs de vecteurs  $(\xi_1, \eta, \mu_2, \dots, \nu_m, v_2, \dots, v_m)$   
 $\xi_1, \eta$  tangents à  $\bar{\Phi}(V)$   
 les autres sont  $\perp$  à  $\bar{\Phi}(V)$ .

$\mu_2, \dots, \mu_m |_{\bar{\gamma}}$  sont  $\perp$  à  $\bar{\gamma}$  de  $M$   
 $\nu_2, \dots, \nu_m |_{\bar{\gamma}}$  sont  $\perp$  à  $M$ .

similairement sur  $\bar{\gamma}_1$

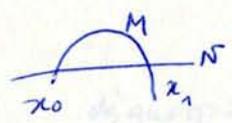
Donc en prolongeant  $\bar{\Phi}$  en un plongement de  $V \times B^{m-1}(\epsilon) \times B^{n-1}(\epsilon)$  grâce au champs de vect  $u_i$  et  $v_j$  triv. le fibré  $\perp$ , en  $\psi$ , on a:

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(M) & = & (\psi^{-1}(M) \cap V) \times B^{m-1}(\epsilon) \times 0 \\ \psi^{-1}(N) & \xrightarrow{N} & 0 \times B^{n-1}(\epsilon) \end{array}$$

par def et  $\perp$  des champs de vecteurs

□.

Remarques sur la démonstration:



$\gamma_M x_0 \approx \tau_N x_0$   
 les nom. entre  $\gamma_M$  et  $\tau_N$  changent de signe,  
 et c'est indépendant du choix  $(\gamma_M, \tau_N)$  ou  $(\tau_M, \gamma_N)$

en effet  $\tau_M \oplus \gamma_M |_{x_0} = \tau_P |_{x_0}$   
 $\gamma$  et  $\gamma_1^{-1} \sim 0$  de  $P$ , donc le long de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  on aboutit aux  $\hat{u}$  or. de  $\tau_P |_{x_1}$  - des champs d'or. sont donc les  $\hat{m}$ .

Applications du lemme de Whitney.

Cor.  $P^{m+n}, M^m, N^n$  orientable,  $m+n \geq 5, \pi_1(P) = 0$ .  
 conn. compacte  
 $m=1, 2 \Rightarrow \pi_1(P-N) = 0$   
 $n=1, 2 \Rightarrow \pi_1(P-M) = 0$

$$\begin{array}{l} [M] \in H_m(P) \\ [N] \in H_n(P) \end{array} \quad \begin{array}{l} [M][N] \in \mathbb{Z} \\ [M][N] = 0 \end{array}$$

$\langle \bar{D}'(M) \cup \bar{D}'(N), [P] \rangle$   
 $\uparrow$   
 $\bar{D} =$  dualité de Poincaré

Alors: J'une isotopie  $h_t: P \rightarrow P$   
 $h_0 = \cup h_1(M) \cap N$  est formé de  $[M][N]$  pts en particulier si  $[M][N] = 0$ , on peut disjointre  $M$  et  $N$

$M$  et  $N$   $\hat{A}$

dem:  $m$  et  $n \geq 2$

$$[M][N] = d > 0 \quad x \in M \cap N$$



pour  $x \in M \cap N$

$$T_x P = T_x M \oplus T_x N$$

or. par  $P$  or. par  $M$  et  $N$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{si ls or. coïncident} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sum_{x \in M \cap N} \varepsilon(x) = [M][N]$$

idée de la dem:

1<sup>ère</sup> étape  $\mathbb{D}^{m+n}$  avec  $\omega$  & var  $\mathbb{D}^m$  et  $\mathbb{D}^n$

$$[\mathbb{D}^m][\mathbb{D}^n] = 1 \quad \langle \text{calcul avec le cup produit et } \mathbb{D} \rangle$$

2<sup>ème</sup> étape



$$P = P_0 \cup P_1$$

$$\partial P_0 = \partial P_1$$

$$M = M_0 \cup M_1$$

$$N = N_0 \cup N_1 \quad M_0 \cap N_0 = \emptyset$$

$P_1$  vois. des pts d' $N$ .

$$[M_0][N_0] = 0 \quad [M][N] = [M_0][N_0] + [M_1][N_1] \quad \text{par Mayer Vietoris}$$

$\langle \text{Dold} \rangle$

$$x_1, x_2 \text{ tq } \varepsilon(x_i) = 1$$

$x_{d+1} \dots x_n$  que l'on peut grouper par paires  $\varepsilon = -1$  et  $\varepsilon = +1$

met  $n \geq 2 \Rightarrow \exists \gamma$  chemin plongé ds  $M$  entre  $x_{d+1}$  et  $x_{d+2}$  qui ne passe pas par les autres  $x_i$

de  $\hat{m}$  ds  $N$ . les hyp. du lemme sont réunis pour diminuer de 2 le nb de pts d' $N$ .

$m=1 \Rightarrow M$  est un cercle. trouver  $\gamma$ ?

s'il y a des pts de signe  $\neq$ , il y en a forcément un 2 consécutifs, qu'on peut supprimer, et ads.

# Immersion et plongements en dimension double

$$f: X^n \rightarrow Y^{2n}$$

Yoneda il existe de telles immersions

$$J_2^0(x, y) \supset Z = \{z_1, z_2 \mid \beta(z_1) = \beta(z_2)\}$$

$$\begin{array}{c} J_2^0 f \uparrow \\ X^{(2)} \quad 2n \end{array} \quad \text{codim } 2n$$

$J_2^0 f(X^{(2)}) \cap Z$  est formé de pts isolés (par transversalité)

exercice: en un tel point  $x_1, x_2 \in X$  tq  $x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$ , on a

$$T_{x_1} f(T_{x_1} X) + T_{x_2} f(T_{x_2} X) = T_{f(x_1)} Y$$

on fait l'hypothèse:  $X$  et  $Y$  orientés,  $X$  compact connexe.

• cas où  $n$  est pair

$$y = f(x_1) = f(x_2) \quad T_y Y = T_{x_1} f(T_{x_1} X) \oplus T_{x_2} f(T_{x_2} X)$$

$\times$   
en changeant  $x_1$  et  $x_2$ .

matrice  $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$   $\det = (-1)^n = 1$ .

$\rightarrow$  associer à  $y$  un  $\varepsilon(y) = \pm 1$

$$\theta(f) = \sum_{y \text{ pt double}} \varepsilon(y)$$

auto-int. de l'immersion  $f$

dès que  $q > 2$   $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , ~~seulement pas~~ <sup>de pts multiples</sup>

"générique" ( $J_2^0 f \cap Z$ ) et les points multiples  $q: q \mid (q-1)2n$

• si  $n$  est impair

le signe dépend de la façon dont on a choisi  $x_1$  et  $x_2$ .

on prend donc  $\theta(f) = \sum \varepsilon(y) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

homotopie régulière:  $f_0$  et  $f_1$  (immersions  $X \rightarrow Y$ ) sont régulièrement homotopes

si  $\exists$  une htpie qui est à chaque instant une immersion ( $X \rightarrow Y$ ), on choisira ici  $f_t$  qui dépend différentiablement de  $t$ .

lemme: si  $f_0$  et  $f_1: X^n \rightarrow Y^{2n}$  sont régulièrement homotopes, alors  $\theta(f_0) = \theta(f_1)$  (immersions génériques).

Rq: on n'a pas à chaque traanche des immersions génériques ~~entre~~  $f_t$  (ça montrerait que les  $\varepsilon(y)$  sont individuellement conservés, donc a posteriori ça montrerait que ~~il n'y a pas~~ il n'y a pas forcément d'homotopie "immersion générique") -

$$G: X \times I \rightarrow Y \times I$$

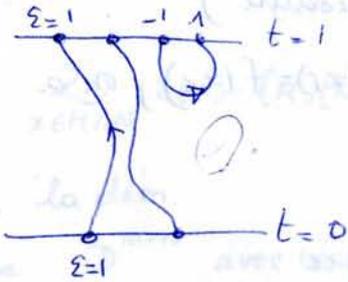
$$(x, t) \mapsto (F(x, t), t)$$

$G$  est une immersion... on peut supposer (sans modifier sur les bords (th de  $\Lambda$  relatif)) que  $G$  est générique.

points doubles de  $G$ .

$$\dim X \times I = n+1 \rightarrow 2n+1$$

$\dim X_0^{(2)} = 2(n+1)$   $\text{codim } Z_2 = 2n+1$   $\Rightarrow$  les points doubles de  $G$  forment une sous variété de dim 1. (reliant les pts double de  $f_0$  et ceux de  $f_1$ ) dans  $X^2$ , pas de  $Y$ .



n pair: ces sous variétés sont orientées.  
 mtrq pour d'or. de d'sf. normal à la courbe de  $Y \times I$   
 et cf figure pour les signes de  $Z$ .

mais, les composantes fermées de d'eus de pts doubles ne nous intéressent pas. Et il n'y a qu'un seul rev. d'un pt.

n impair un segment à 2 extrémités.  
 ça marche bien

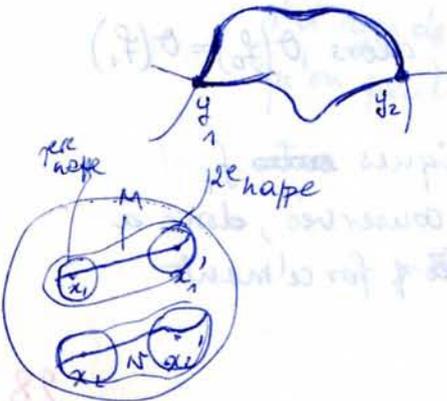
Théorème  $\left[ \begin{array}{l} \tau_0, Y=0 \ n \geq 3 \\ f_0: X^n \rightarrow Y^{2n} \text{ immersion générique} \\ f_0 \text{ rég. htpé à un plongement} \Leftrightarrow \Theta(f) = 0 \end{array} \right.$

au sens trivial.

$$\Theta(f) = 0$$

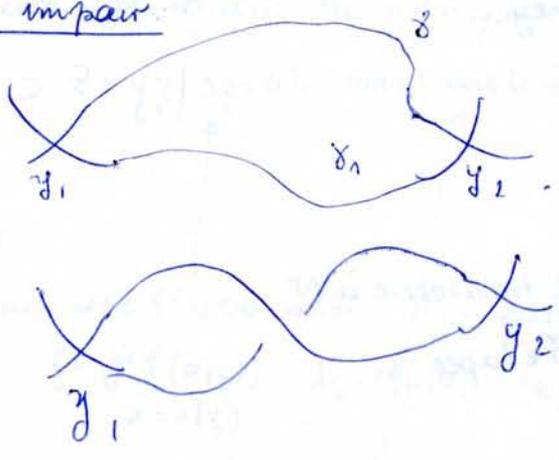
n pair:

$y_1 \dots y_{2q}$  les pts doubles de  $Y$ .  
 $+1 -1 \dots$



chemins  $y_1 \rightarrow y_2$  ~~part~~ ~~partant~~ partant des 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> nappe (ça a un sens comme on l'a vu parce que  $n$  est pair)  
 quitte à se restreindre à des ouvert non connexes de  $X$ , on est de la situation du lemme de Whitney.

n impair



pas de séparation en 2 naps  
 il se peut que le signe de  $\Delta$   
 ne soit pas opposé par un  
 choix de  $\delta$  et de  $\delta_n$ .  
 Dans ce cas on échange le rôle  
 de 2 naps au pt  $y_2$ .

Soit  $\delta \in X$ :



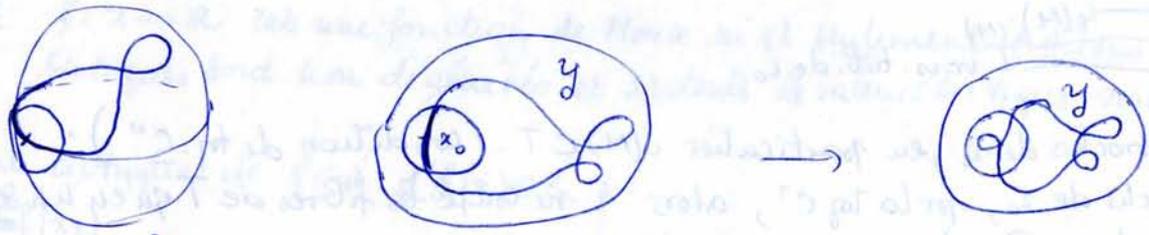
Donc on fait disparaître les pts 2 à 2. □

exercice: Il existe des immersions génériques  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  ou  $S^{2n}$  telles que

$\theta(f) = \pm 1$  si  $n$  pair,  $\theta(f) \neq 0$  si  $n$  impair

Corollaire (Whitney) sous les hyp. du th, toute application de  $X \rightarrow Y$  est homotope à un plongement.

démonstration:  $g: X \rightarrow Y$ . on peut approximer  $g$  par une immersion générique  $f$  -  $\theta(f) = 0$  c'est fini - sinon  $\theta(f) \neq 0 \rightarrow$  modification de  $\theta(f)$



$f_0: S^n \rightarrow S^{2n}$   
 q'exercice

$$X \# S^n \xrightarrow{f \# f_0} Y \# S^{2n}$$

$$X \xrightarrow{f_2} Y \quad f_1 \text{ immersion générique htpc à } f.$$

certes les  $f_0$  sont htps entre elles.

parce procédé on se ramène à  $\theta(f) = 0$ .

Corollaire: toute variété  $X^n$  se plonge dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .

(petites dimensions, c'est bien connu)

Exercice:  $X^n \rightarrow Y^n$   $n \geq 3$   $\pi_1 Y = 0$ .  
 $\{f: X \rightarrow Y$  immersions homotopes à  $g$  ~~application~~ <sup>immersion</sup> donnée  $\} / \sim$  htpc régulière  
 cet ens. est en bijection avec  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/2$  suivant la parité de  $n$ .

Sur la première application du lemme de Whitney.

on avait des hypothèses :  $M \pitchfork N$ .

$$\begin{array}{l} M^m \xrightarrow{i} P \\ N^n \xrightarrow{j} P \end{array} \quad \begin{array}{l} h_t: P \rightarrow P \text{ isotopie} \\ h_0 = \text{id} \\ h_{1,0}: M \rightarrow P \text{ transverse à } N. \end{array}$$

par le th de th:  $\exists i_1: M \rightarrow P$  approximant  $i$  et transverse à  $N$

on veut avoir ce  $i_1$  de la forme  $i_1 = h_{1,0} \circ i$ . 3 étapes:

1.  $i_1$  assez proche de  $i \Rightarrow i_1$  plongement
2.  $i_1$  est l'extrémité d'une isotopie de  $\text{plgt}^{\pm}$ :  $i_t: M \rightarrow P$   $i_t$  plongement
3. si  $i_t$  est une isotopie de  $\text{plgt}^{\pm} M \rightarrow P$ ,  $i_0 = i, i_1$

alors  $\exists$  une isotopie de  $P$  tq  $h_0 = \text{id}$  et  $i_t = h_t \circ i_0$ .

(Lemme d'extension des isotopies) -

< Morlet Seim Carstan >

- Diff  $M$  loc. connexe par arcs:

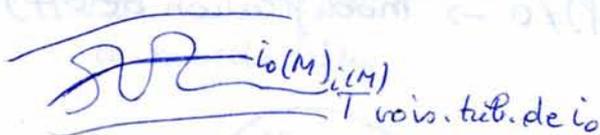
si  $M =$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on aurait un sous-ouvert de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , e.v. top. (top  $C^0$ ) loc. connexe par arcs. donc vérifier que loc, on a des voisinages qui ressemblent à des ouverts de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  - se ramènera à des cartes; on intègre des champs de vecteurs

tq  $\Gamma(M) \rightarrow \text{Diff } M$ . suffisamment restreinte cette flèche est un homeo

(au voisin de Id) -

cf Morlet -

- Lemme d'extension des isotopies



$i: M \rightarrow P$  proches de  $i_0$ , en particulier  $i(M) \subset T$ . (condition de top.  $C^0$ ) -

Si  $i$  assez proche de  $i_0$ , par la top  $C^1$ , alors  $i$  ne coupe les fibres de  $T$  qu'en un seul point. (pas de  $S$ ) - trouver d'isotopie ambiante  $i \rightarrow i_0$

= id sur  $P-T$ .

Sur  $T$ , travaille sur les fibres de  $T$ .

$\rightarrow k: P \rightarrow P$  à support ds  $T$ , isotopie à id, travaillant sur les fibres, tq  $k \circ i(M) = i_0(M)$

$k \circ i \in \text{Diff } P$ , proche de  $i_0 \dots$

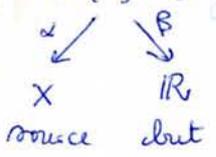
$\exists \mathcal{V}(i_0)$  et  $\sigma: \mathcal{V}(i_0) \rightarrow \text{Diff } P$ , continue

$$i \in \mathcal{V}(i_0) \begin{cases} \sigma(i) \circ i = i_0 \\ \sigma(i_0) = \text{id} \end{cases}$$

$\sigma(i)$  isotopie à id si  $\mathcal{V}(i_0)$  assez petit

- on a ensuite noté résultat par un argument de compacité standard -

$J^1(X; \mathbb{R}) \supset Z = \{z \mid \lambda_z = 0\}$  sous variété fermée de codimension  $n = \dim X$ .



loc. on définit une  $\delta^1$  application:  $A_z =$  partie linéaire du jet:

$$\beta = j^1 f(\alpha(z)) \quad \lambda_z = df(x) = T_x f \in \text{Hom}(T_x X, \mathbb{R})$$

$x = \alpha(z)$

$$\left. \begin{array}{l} z_0 \in Z \quad \alpha(z_0) = x_0 \\ U \text{ carte de } X \text{ au voisinage de } x_0 \\ J^1(U, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n*} \\ Z \cap J^1(U, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times 0 \end{array} \right\}$$

$J^2_2(X; \mathbb{R}) \supset Z_2 = \{(z_1, z_2) \mid \lambda_{z_1} = \lambda_{z_2} = 0, \beta_{z_1} = \beta_{z_2}\}$  sous variété fermée de codimension  $2n+1$ .

définition: on appelle fonctions de Morse les  $f \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$  tq  $\left\{ \begin{array}{l} j^1 f \pitchfork Z \\ j^2_2 f \pitchfork Z_2 \end{array} \right.$

Remarque: {fns de Morse} est dense dans  $\mathcal{C}(X; \mathbb{R})$  (ouvert)

Vocabulaire:  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x$  pt critique de  $f$  si  $df(x) = 0$   
 $x$  non dégénéré si  $df(x) = 0$  et  $d^2 f(x)$  est non dégénérée

Lemme:  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Morse si et seulement si 1) tous les points critiques sont non dégénérés et 2) toutes les valeurs critiques sont différentes

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ point critique de } f \Leftrightarrow j^1 f(x) \in Z \\ f(x_1) \neq f(x_2) \\ x_1, x_2 \text{ critiques} \Leftrightarrow j^2_2 f(x_1, x_2) \in Z_2 \end{array} \right\}$$

$j^2_2 f$  transverse à  $Z_2 \Leftrightarrow j^2_2 f(x) \cap Z_2 = \emptyset$   
 transversalité sur  $Z$

$U$  carte de  $X \quad U \simeq \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{l} \alpha(j^1 f) = \text{id} \\ \beta(j^1 f) = f \\ \lambda(j^1 f) = df \end{array}$$

$$T j^1 f(T_{x_0} U) = \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} n \\ \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \hline df \\ \hline d^2 f \\ \uparrow \\ n \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ X \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ \uparrow \end{array} & & \end{array}$$

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*})$

$\rightarrow$  transversalité en  $Z \Leftrightarrow d^2 f(x)$  surjective comme apl lin  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$   
 $\Leftrightarrow d^2 f$  est non dégénérée.

Cobordisme:  $W$  variété compacte -  $\partial W = V_0 \cup V_1$

on appellera fonction de Morse sur  $(W, V_0, V_1)$  une application

$$f: (W, V_0, V_1) \rightarrow (I, 0, 1)$$

ctg

$$1 - j_1^* f \uparrow z, j_2^* f \uparrow z_2$$

$$2 - \forall x \in V_0, \langle df(x), v \rangle > 0 \text{ si } v \text{ rentre ds } W$$

$$\forall x \in V_1, \langle df(x), v \rangle < 0$$



Remarque d'fus de Morse est due ds ds appl  $(W, V_0, V_1) \rightarrow (I, 0, 1)$

2 -  $f = \text{cote sur les colliers}$

Lemme de Morse: si  $f: V^n \rightarrow \mathbb{R}$  a un pt critique non dégénéré  $a$ ,

$\exists$  une carte locale centrée en  $a$   $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tq  $f \circ \varphi^{-1}(x) = f(a) + q(x)$  où  $q$  est une forme quadratique non dégénérée

dém: ops  $V = \text{boule } B(0, 1) \text{ de } \mathbb{R}^n$   
 $\begin{cases} a=0 \\ f(a)=0 \end{cases}$

$Df(0)=0$   $D^2f(0)=b(0)$  forme bilinéaire non dégénérée

$$f(x) = 0 + 0 + \int_0^1 D^2f(tx)(x, x) \frac{(1-t)}{x} dt$$

Taylor

$$= b(x)(x, x) \text{ avec } b(x) = \int_0^1 D^2f(tx) \frac{1-t}{x} dt$$

$$b: V \rightarrow \mathcal{L}_{\text{sym}}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Lemme:  $E = \{ \text{matrices } n \times n \text{ symétriques} \}$

$$A_0 \in E \quad A_0 \text{ inversible}$$

$$\Rightarrow \exists \Omega \text{ voisinage de } A_0 \text{ ds } E$$

$$\exists \psi \in \mathcal{C}^\infty: \Omega \rightarrow M_n \text{ tq } \psi(A_0) = I$$

$$A = \psi(A) A_0 \psi(A) \quad \forall A \in \Omega$$

$$F = \{ Y \in M_n \text{ tq } \tilde{Y} A_0 = A_0 Y \} \text{ sev. de } M_n$$

$$g: F \rightarrow E$$

$$x \mapsto \tilde{x} A_0 x \quad g \in \mathcal{C}^\infty$$

$$Dg(x)H = \tilde{H} A_0 x + \tilde{x} A_0 H$$

$$Dg(I)H = 2A_0 H$$

$$K \in E \quad A_0 H = K \Leftrightarrow H = A_0^{-1} K \text{ sol. unique}$$

$$\text{et } A_0^{-1} K \text{ est dans } F$$

$\rightarrow g$  diffé local  $\rightarrow \psi$  eu inversant

$u: V_0 \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  pour un vois.  $V_0 \subset V$   
 $x \mapsto \psi(b(x))$

alors  $f(x) = b(o)(u(x)x, u(x)x)$

$x \xrightarrow{h} u(x)x$  difféo local au voisinage de zéro

$u(o) = Id$

$Dh(o) = 0 + Id$

donc  $f(x) = b(o)(h(x), h(x))$

la carte locale que l'on cherchait est donc  $h^{-1}$ .

formes quadratiques réelles:  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_{n-\lambda}^2 - \underbrace{x_{n-\lambda+1}^2 - \dots - x_n^2}_{\lambda \text{ termes}}$

$\lambda =$  indice de la forme, du point critique.

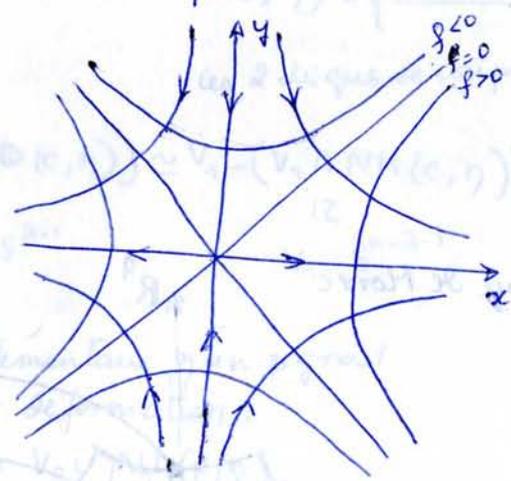
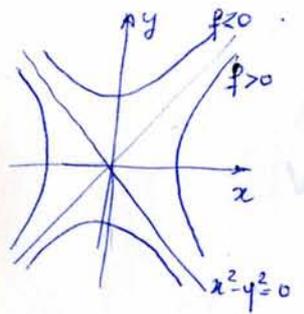
indice 0:  $f(x) = f(a) + \sum x_i^2$  a minimum de  $f$ .

indice  $n$ :  $f(x) = f(a) - \sum x_i^2$  a maximum de  $f$ .

$0 < \lambda < n$

Etude du modèle de  $\mathbb{R}^n$ :

$n=2$   $\lambda=1$   $f=x^2-y^2$ .  $grad f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$  lignes de champ  $\rightarrow$

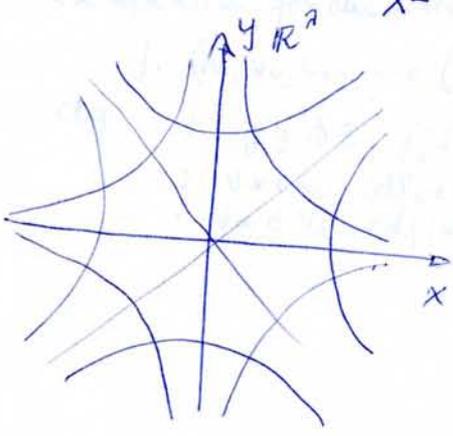


$\lambda=0$  (ou 2) ne changeant le signe.



$grad f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

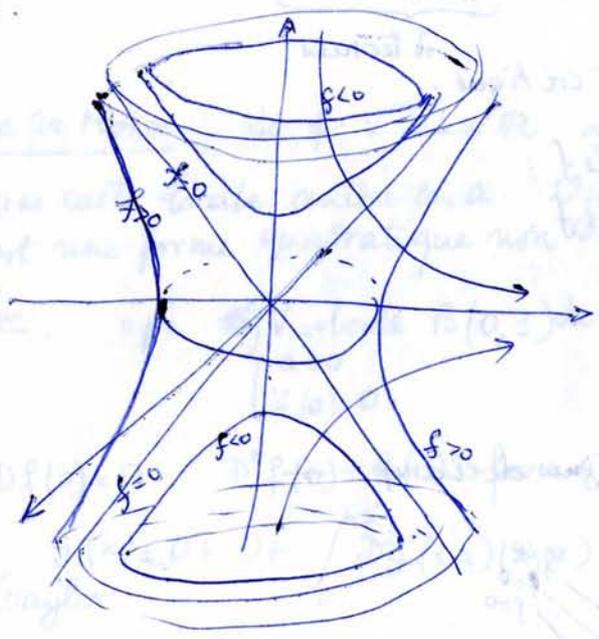
$n$  quelconque  $\underbrace{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}_{X^2} - \underbrace{(x_{n-1+1}^2 + \dots + x_n^2)}_{Y^2}$



$\mathbb{R}^{n-2}$  faire tourner

dessins quand  $n=3$ .

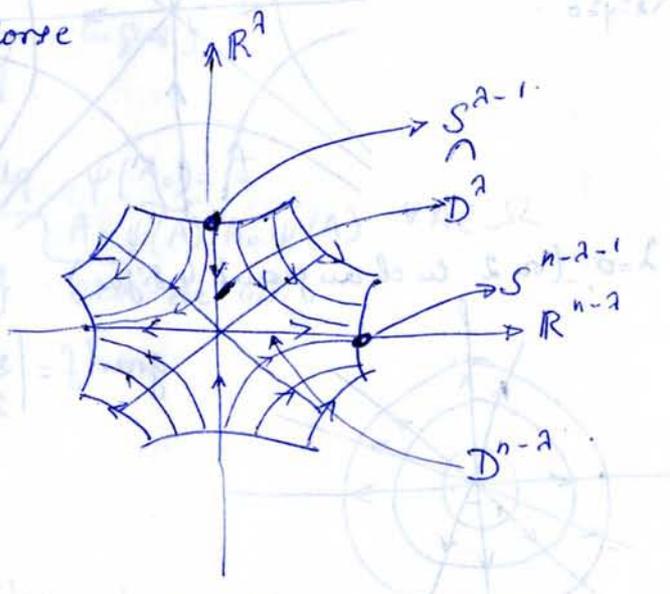
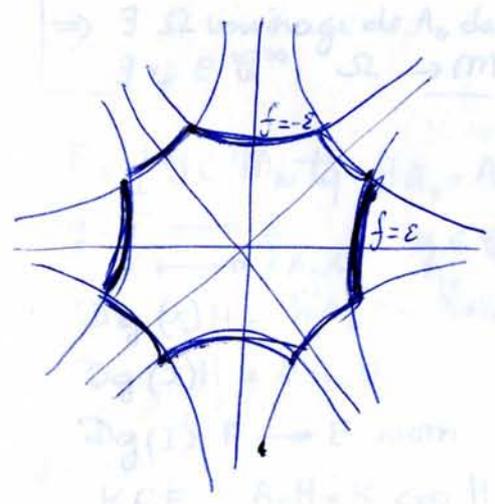
$\lambda=1$ .



ici les surfaces de niveau  $f > 0$  et  $f < 0$  ne sont pas du même type disques  $n \neq 2$ .

$\lambda=2$ . la forme de chose

voisinage utile donné par le lemme de Morse



définition:  $W \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  fonction de Morse

$\mu$  métrique Riemannienne

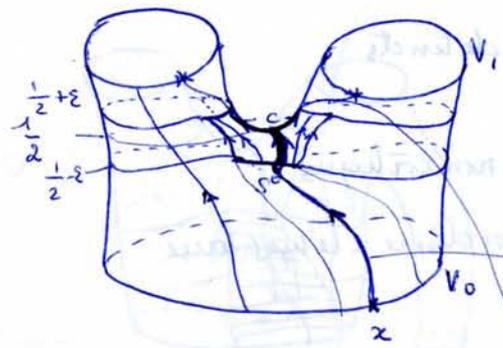
$\eta$  champ de vecteurs sur  $W$  sera dit un champ de pseudo gradient

- Si
- 1-  $\langle df(x), \eta(x) \rangle > 0 \forall x$  non critique
  - 2- au voisinage de pts critiques,  $\eta$  est exactement le grad  $f$ .

exercice: un  $\psi$ -grad  $\eta$   
 $(W, V_0, V_1) \xrightarrow{f} (\mathbb{I}, 0, 1)$  sans pt critique } alors  $W \cong V_0 \times \mathbb{I}$   
 de m que si  $\eta = \text{grad } f$ : on intègre  $\eta$

étude d'un cobordisme élémentaire:

$(W, V_0, V_1) \xrightarrow{f} (\mathbb{I}, 0, 1)$   $f$  Morse avec un point critique



$\eta$   $\psi$ grad coïncidant au vois du pt critique ac le chp dessiné.

$x$  arrive au pt critique ssi sa traj: arrive de  $S^{n-1}$ .

$ND(c, \eta)$  nappe descendante de  $g/c$   
 =  $\downarrow$  trajectoires mourant au point critique  $= D^2$

$NM(c, \eta) = \left\{ \begin{array}{l} \text{critique} \\ \text{naissant} \end{array} \right\}$  nappe montante  $= D^2$

ces 2 disques se coupent  $\uparrow$  au pt critique

$$V_0 - (V_0 \cap ND(c, \eta)) \cong V_1 - (V_1 \cap NM(c, \eta))$$

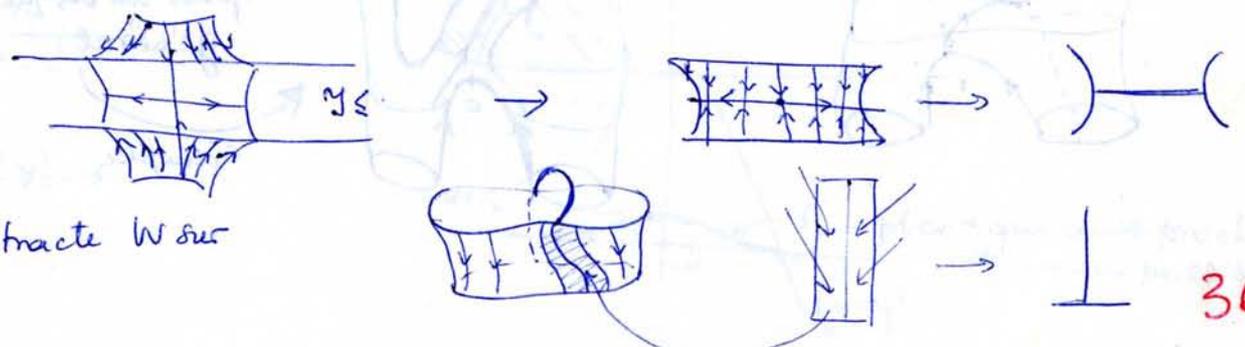
$$\begin{matrix} \cong \\ \cong \\ V_0 - S^{n-1} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cong \\ \cong \\ V_1 - S^{n-1} \end{matrix}$$

Lemme:  $W$  cobordisme élémentaire,  $\eta$  un  $\psi$ grad

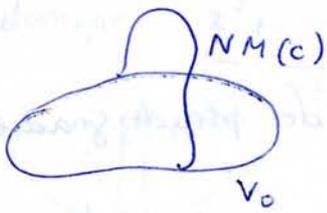
$W$  se rétracte par déformation:

- 1- (rel.  $V_0$ ) sur  $V_0 \cup ND(c, \eta)$
- 2- (rel.  $V_1$ ) sur  $V_1 \cup NM(c, \eta)$ .

à l'ext. du modèle, faûle de rétracter; passage du point critique pose pb.



donc on rétracte  $W$  sur

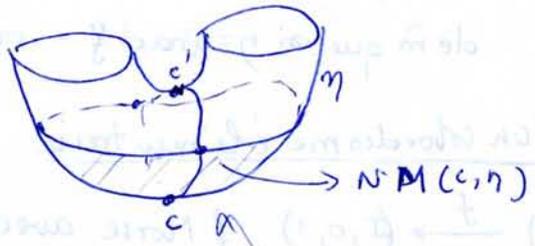
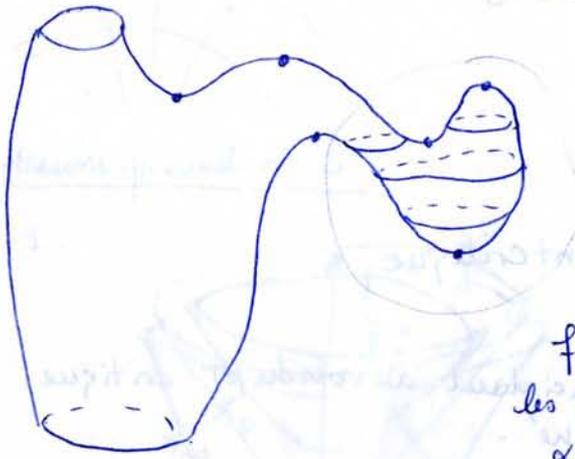


$$V_0 \cup ND(c, \eta) = V_0 \cup e^d$$

$$= \bigcup_{S^{\lambda-1}} \eta^{n-\lambda}$$

$$= \bigcup_{S^{\lambda-2-1}} e$$

Cobordisme général



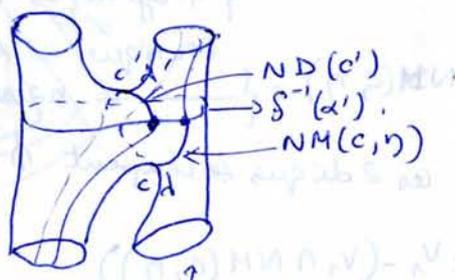
$f$  de Morse  
les valeurs critiques sont distinctes

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$$

$$\alpha'_1, \dots, \alpha'_{q-1}$$

$f^{-1}(\alpha'_i)$  non critiques

$W = \cup W_i$   $W_i$  cobordisme élémentaire

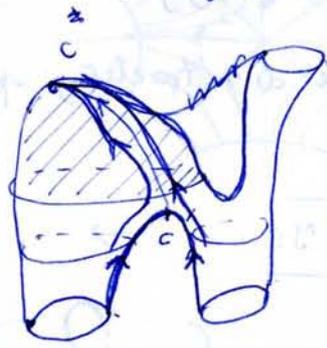
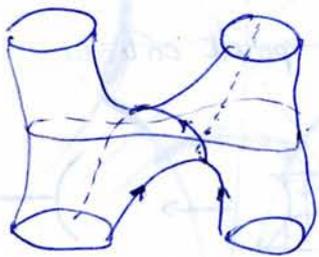


$$\text{Si } S^{\lambda-1} \cap S^{n-\lambda-1} = \emptyset$$

sinon:  $\partial$  traj. naissant de c mourant en c'

→ extension de la notion de nappes descendantes:

"définition générale":  $ND(c, \eta) = \{x \in W \mid \text{traj. passant par } x \text{ meurt en } c\}$

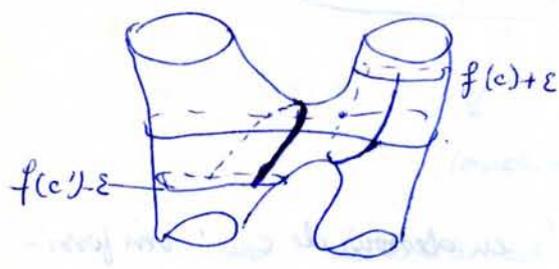


mauvaise définition  
car cette nappe n'est  
plus un disque  $D^2$  en  
général

exemple

On suppose que  $c'$  et  $c$  sont 2 pts critiques avec  $f(c') < f(c)$  (et pas d'autres valeurs critiques entre ces 2 là).  
 on dit que  $N_D(c, \eta)$  descend jusqu'au niveau  $f(c') - \varepsilon$

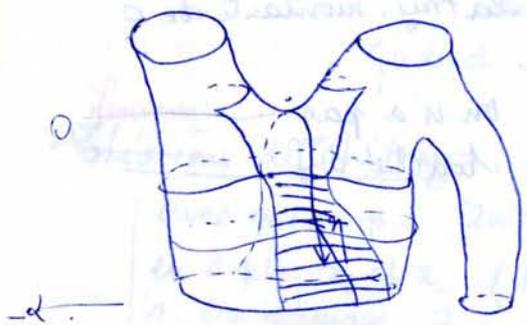
si la nappe descendante de  $c$  et la nappe montante de  $c'$  sont disjointes



(prolongement de trajectoires sur un produit)

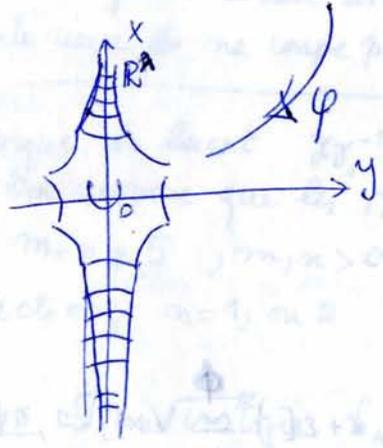
la nappe descendante jusqu'au niveau  $f(c') - \varepsilon$  est encore un disque  $D^2$  dont le bord est plongé dans la surface de niveau  $f^{-1}(f(c') - \varepsilon)$

Monter et descendre les valeurs critiques



les traj de  $\eta$  sont  $\perp$  aux surf de niveau par def des chps  $\psi$  grad.

→ on a une triv. du fibre  $\perp$  à la traj.  
 toutes les tranches doivent ds la surf de niveau

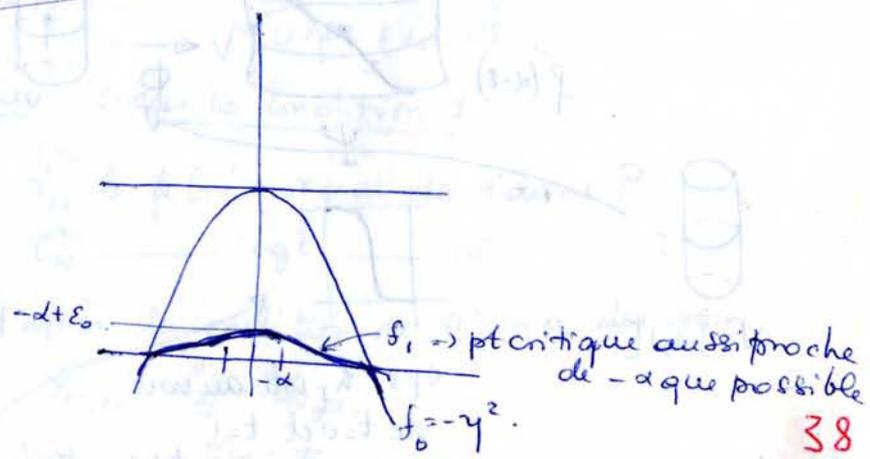
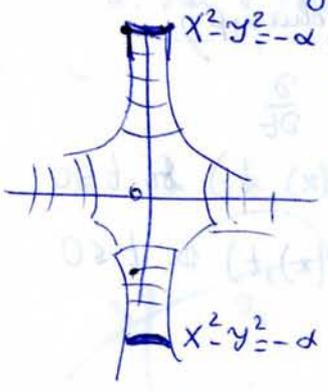


extension du modèle

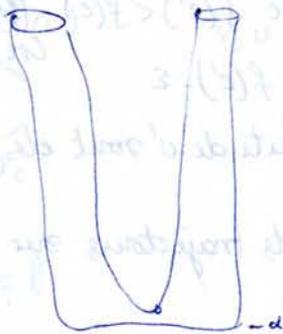
$\psi$  tq  $f \circ \psi^{-1} = \frac{1}{2} x^2$  (quadratique)

$\forall x \in U_0 \cup$  voisinage de la nappe descendante

de m<sup>ême</sup> le long de la nappe montante → le modèle:

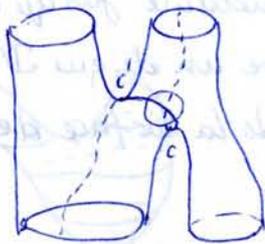


on obtient



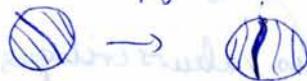
on ne peut pas descendre ce point au delà de celui là

dernier cas

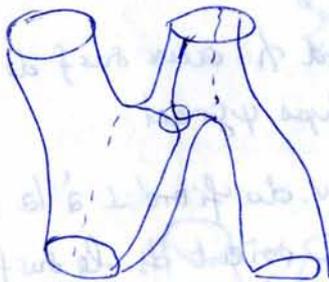


laisser  $c'$  en dessous de  $c$  : un fossile comme + haut -

il va falloir modifier le champ de  $\psi$  grad.



la traj: desc. de  $c'$  évite maintenant la traj: montante de  $c$



on n'a pas touché à  $f$ .

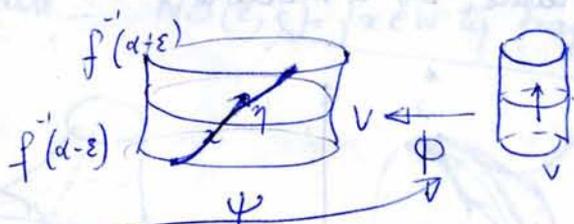
Modification des nappes et du champ de  $\psi$  grad

$W \xrightarrow{f} I$  fonction de Morse

$V = f^{-1}(\alpha)$  non critique

$h_t$  isotopie de  $V$  ( $h_0 = \text{id}$ )

on considère la tranche non critique  $f^{-1}(] \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon [) \cong V \times ] - \varepsilon, \varepsilon [$ .



difféo obtenu en intégrant le champ  $\eta$

$$\eta \leftarrow \frac{\phi_*}{\partial t}$$

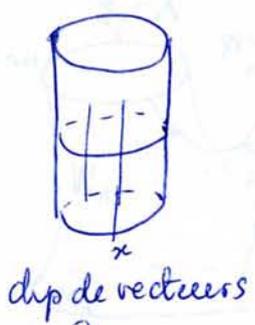
$$\psi(x, t) = \begin{cases} (h_{1-t}(x), t) & \text{si } t \geq 0 \\ (h_1(x), t) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$



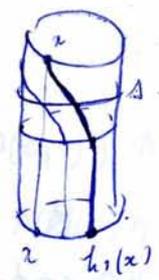
$V \times ] - \varepsilon, \varepsilon [$

ops  $h_t$  est au vois de  $t=0$  et  $t=1$  en reparamétrisant par cette fn

$\Rightarrow \psi$  difféo  $C^\infty$   
 $V \times I \rightarrow V \times I$



$\psi$



~~mais~~  
 → difféo de la trauche +1  
 sur la trauche  $\mathbb{S}$   
 = exactement  $h_1$ .

$\frac{\partial}{\partial t}$

$\eta' = \phi_* \psi_* \frac{\partial}{\partial t}$



$f'(x+z)$   
 difféo sur  $V$  en intégrant  $-\eta$   
 autre difféo  $-\eta'$

ces deux difféo se déduisent l'un de l'autre par composition par  $h_1$

Corollaire:

On dira que  $\eta$  est un champ  $\psi$ -grad régulier si dans chaque des faces de niveau non critique s'interme'diaie entre  $c$  et  $c'$  ( $f(c) < f(c')$ ), la sphère  $SM(c, \eta)$  coupe transversalement  $SD(c', \eta)$ .

le cor. dit que:  $\exists$  des champs réguliers =

$\exists h_t$  isotopie de  $V$  tq  $h_1(SD(c', \eta))$  coupe  $\cap$  la sphère  $SM(c, \eta)$

Corollaire: il existe des fonctions de Morse ordonnées, ie

(si indice  $c <$  indice  $c' \Rightarrow f(c) < f(c')$ .)

en effet:  $\eta$   $\psi$ -grad régulier pour  $f$ .

$c, c'$  2 pts critiques  $ind c < ind c'$ , et  $f(c) \geq f(c')$   
 (choisis comme paire contiguë).

si  $f(c) = f(c')$   
 si  $f(c) > f(c')$



pas de pb.

$V$  niveau intermédiaire

$SM(c', \eta) = S^{n-2'-1}$

$SD(c, \eta) = S^{2'-1}$

transverses: ~~+~~

mais  $n-2'-1+2'-1 < n-1$ .

donc sont disjointes.

on peut faire comme plus haut

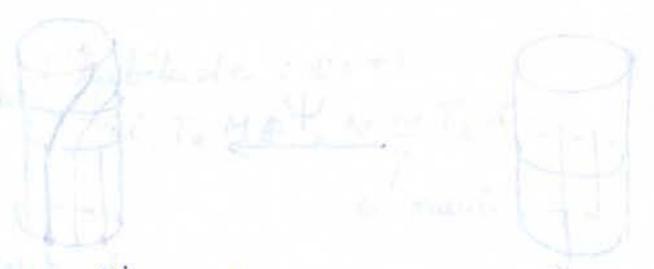
→  $f(c) < f(c')$   
 en modifiant  $f$

# Fonctions de Morse ordonnées

indice 0

indice 1...

$W_0$   $W_1$   $W_2$   $M_2 \dots$   
 [on peut couper par des niveaux non critiques  $M_i$



$$f(W_i, M_i, M_{i+1}) \rightarrow$$

fonction de Morse avec uniquement des points critiques d'indice  $i$

$$W = U W_i$$



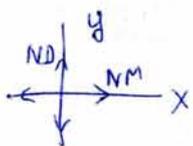
$h-2-1+2-1 = h-2 < h-1$   
 donc les  $S^1$  ne se coupent pas

$W_a$  se rétracte par déformation sur  $M_2 \cup ND(c_i, \eta)$ .  
 (mê situation que ds le cas du cobordisme é'lémentaire).

$$\text{donc } H_* (W_a, M_a) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{m_a} & \text{endim } a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Structure de CW-complexe sur  $W$ .

$W$  orientée



on oriente au vois. de chaque pt critique comme le modèle:  
 (or NM, or ND) = or  $W$ .

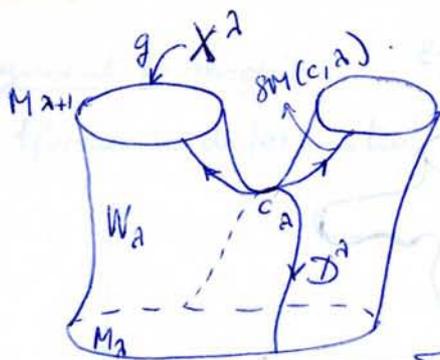
donc  $H_2(W_a, M_a)$  base formée par les nappes descendants orientés.

Soit  $N_a = W_0 \cup \dots \cup W_a$ .

$$H_* (N_a, N_{a-1}) = H_* (W_a, M_a) \text{ par excision}$$

$$H_2(W_a, M_a)$$

$\int \omega$ ? on: comment les ND d'indice  $a+1$  s'attachent sur  
 $H_{a-1}(W_{a-1}, M_{a-1})$  les ND d'indice  $a$ .



$ND(c, \eta) \uparrow NM(c, \eta)$   
 et  $NM(c, \eta) \cdot ND(c, \eta) = +1$

d'après le  
 (choix des  
 orientations)

$H_2(W_a, M_a) \ni \sum_{\substack{c \text{ pt} \\ \text{critique} \\ \text{d'indice } \lambda}} \left( SM(c, \eta) \cdot g_*[x^\alpha] \right) [ND(c, \eta)]$   
 générateur

théorème:  $H_*(W)$  est obtenue à partir du complexe suivant:

$C_\lambda = \bigoplus_{c_a} \mathbb{Z}c_a$   
 et  $\partial: C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$

$\partial(c) = \sum_{\substack{c' \text{ pts critiques} \\ \text{d'indice} \\ \lambda-1}} (c, c') [ND(c')]$

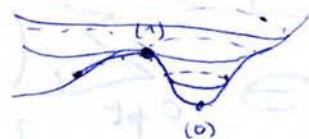
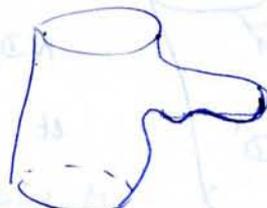
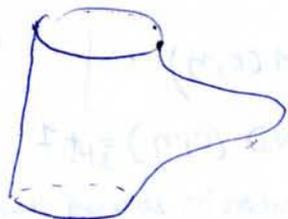
coef = l'intersection  
 dans  $M_a$  de la sphère  
 descendant de  $c$  avec  
 la sphère montante  
 de  $c'$

**Rq**: interprétation du coef  $(c, c')$ :  $(c, c') = \text{nb algébrique de trajectoires allant de } c \text{ à } c' \text{ pour un champ de pseudo-gradient régulier}$

Cor les inégali-  
 tés de Morse

# Élimination et naissance de points critiques

Naissances:



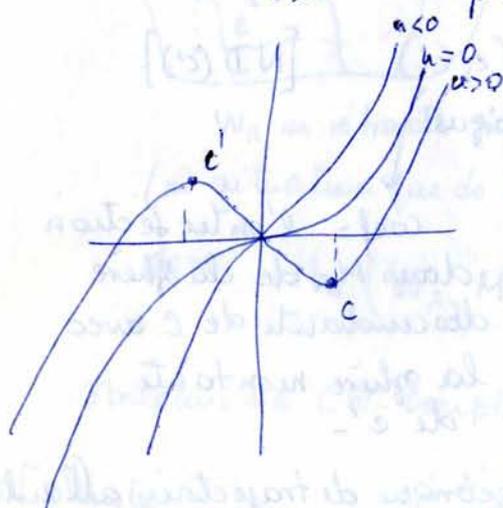
$$f(y) = y^3 - 3uy \quad \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

points critiques  $y^2 - u = 0$

si  $u < 0$  pas de pts critiques

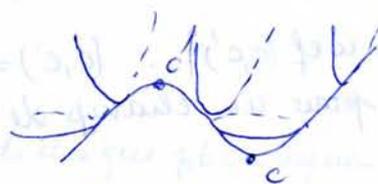
$u = 0$  1 pt critique  $y = 0$   $f'' = 0$  dégénéré

$u > 0$  2 pts critiques  $y = \pm\sqrt{u}$   $f'' = 6(\pm\sqrt{u}) \neq 0$  non dégénérés



$y = -\sqrt{u}$  maximum local  $\rightarrow$  indice 1.  
 $y = \sqrt{u}$  min  $\rightarrow$  indice 0

$\rightarrow$  modèle de déformation



$$x_1^2 + (x_2^3 - 3ux_2)$$

$$\text{ou } -x_1^2 + (x_2^3 - 3ux_2)$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \xrightarrow{f} x_n$$

$$f(x) = q(x') + x_n^3 - 3ux_n$$

$q$  quadratique non dégénérée d'indice  $\lambda$

$u < 0$  pas de pt critique

$u = 0$  1 pt cr. dégénéré

$u > 0$   $x' = 0$   $x_n = \pm\sqrt{u}$  indices:  $(0, +\sqrt{u}) \rightarrow \lambda$   
 $(0, -\sqrt{u}) \rightarrow \lambda + 1$

Topologie sur cet exemple:

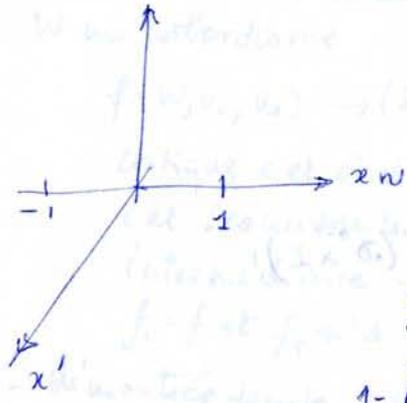
$NM(c)$  et  $ND(c')$  s'intersectent (dans une surface de niveau indéfinie) transversalement en un seul point

et donc  $\langle c', c \rangle = \pm 1$  (selon les or. choisis)

(dans le modèle c'est la topologie géométrique d' $\Omega$  qui est 1)

plongement du modèle.

former la déformation en une def. à sup. cpct ( $y \text{ pd} \Rightarrow f_t(y)$  indep de  $t$ ).



segment  $x' = 0 \quad |x_n| \leq 1$

La fonction en cloche est tq

$\alpha|_{\text{segment}} = 1 \quad \text{supp } \alpha \text{ cpct } \supset \text{segment}$

$g_t(x) = q(x') + x_n^3 - 3\epsilon (1 - (t+1)\alpha(x))x_n$

1- hors du support de  $\alpha$ ,  $g_t(x) = q(x') + x_n^3 - 3\epsilon x_n$

- est sans point critique si  $\epsilon$  petit  $0 < \epsilon < 1$
- indépendance de  $t$

2- sur  $\alpha^{-1}(1)$   $g_t(x) = q(x') + x_n^3 + 3\epsilon t x_n$

- $t < 0 \rightarrow 2$  pts critiques
- $t > 0 \rightarrow 0$  pt critique

3- da' où  $\alpha$  varie.  $g_t$  et  $q(x') + x_n^3$

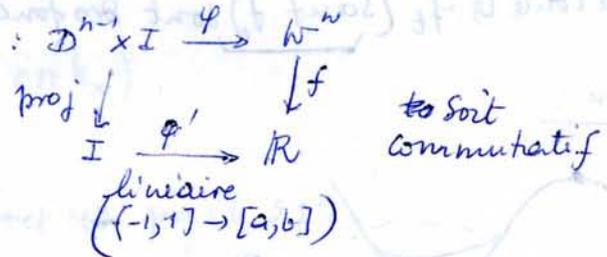
sont aussi proches que l'on veut pour la topologie  $C^1$  si  $\epsilon$  est assez petit.

$\epsilon$  petit  $\Rightarrow g_t$  n'a pas de point critique dans  $\alpha^{-1}(0, 1[)$

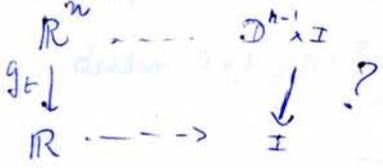
$W$  cobordisme,  $y$  non critique,  $f$  une carte :  $D^{n-1} \times I \xrightarrow{\varphi} W^n$

pour  $f$

tq :



$(\varphi(D^{n-1} \times I))_{\text{dcf}}$  ne contient pas de pts critiques

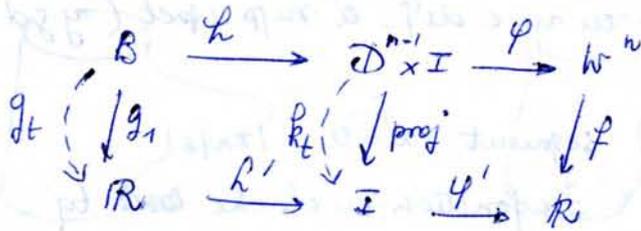


$\mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n$   
 $(x', x_n) \mapsto (x', g_1(x))$  difféomorphisme car  $g_1$  n'a pas de pt critique -



on règle  $h$  par  $h = h' \circ (x', g_1(x))$   
 $\rightarrow$  m<sup>e</sup> diagramme avec  $\mathbb{R} \xrightarrow{h'} \mathbb{R}$  en bas, où  $h'$  est cette homothétie

on choisit  $h'$  de sorte que  $h(\text{supp } \alpha) \subset \mathcal{D}^{n-1} \times I$



$$\text{supp } \alpha \subset B = h^{-1}(\mathcal{D}^{n-1} \times I)$$

$$k_t: \mathcal{D}^{n-1} \times I \rightarrow I$$

$$k_t = h' \circ g_t \circ h^{-1}$$

famille d'applications  $k_t \equiv k_1$  près du bord de  $\mathcal{D}^{n-1} \times I$

$$k_1 = \text{pr}$$

$k_{-1}$  a 2 points critiques non dégénérés (comme  $g_{-1}$ )  
d'indice 2 et 2+1-

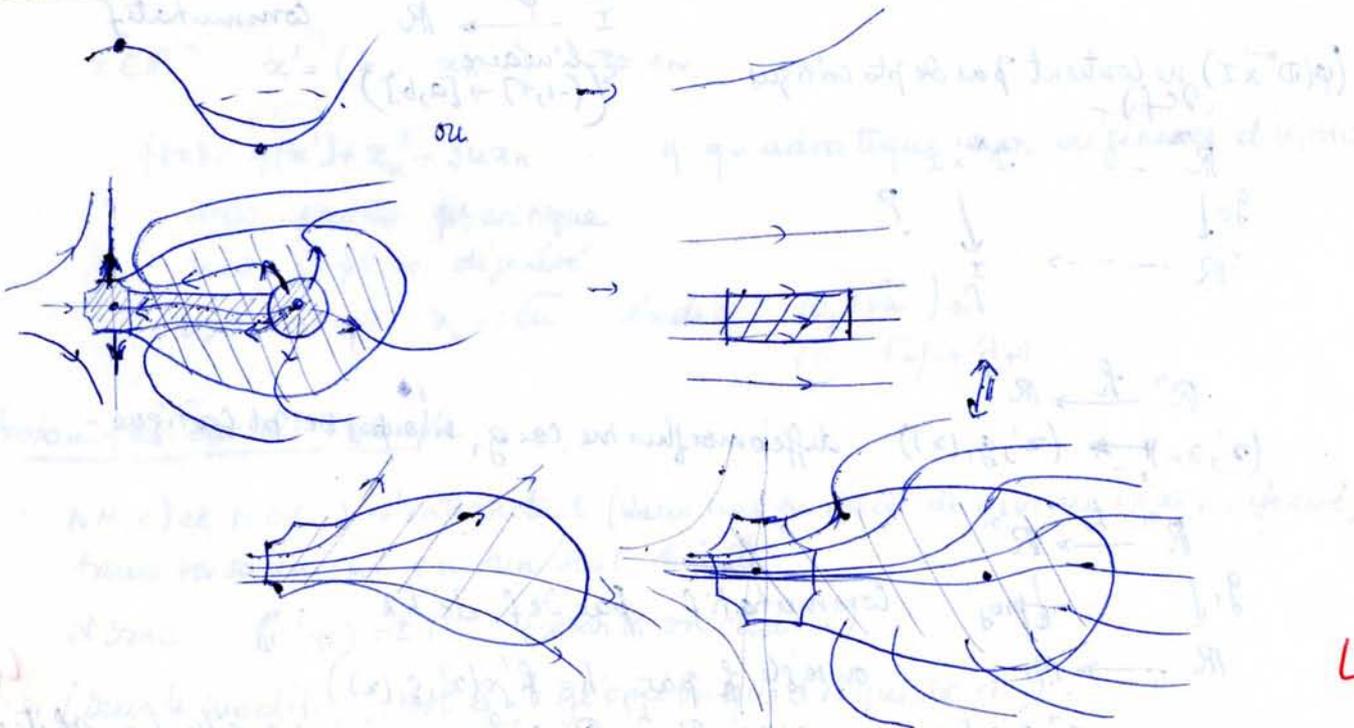
Reste à faire passer  $k_t$  dans  $W^n$ .

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \varphi(\mathcal{D}^{n-1} \times I) \\ \varphi' k_t \varphi^{-1}(x) & \text{si } x \in \varphi(\mathcal{D}^{n-1} \times I) \end{cases}$$

$f_t$  est une famille d'appl  $C^\infty$ ;  $f_1 = f$ ,  $f_{-1}$  a 2 pts critiques non dégénérés d'indices 2 et 2+1 au voisinage de  $y$  -

presque tous les  $f_t$  (sauf  $f$ ) sont des fonctions de Morse -

Elimination:



nécessaire: une seule trajectoire de  $c$  à  $c'$

Lemme d'élimination de Morse

$W$  un cobordisme

$f: (W, V_0, V_1) \rightarrow (I, 0, 1)$  une fonction de Morse ayant exactement 2 points critiques  $c$  et  $c'$  d'indices  $2k$  et  $2k+1$ . On suppose que les nœuds montants de  $c$  et descendants de  $c'$  se coupent  $n$  et en un seul pt dans un niveau intermédiaire. Alors il existe une déformation  $f_t$  de  $f$  tq  $f_0 = f$  et  $f_1$  n'a pas de points critiques.

- de montées dans le poly de Cerf et Gramain
- dans Mithor: la fu de Morse obtenue (déformation du champ de  $\psi$  grad) n'est pas relié à la première comme dans notre énoncé.



idées de la démo:

$$D^{n-1} \times I \xrightarrow{k_t} I$$

$k_1 = \text{proj}$   
 $k_{-1}$  2 pts critiques

pour  $k-1$ :



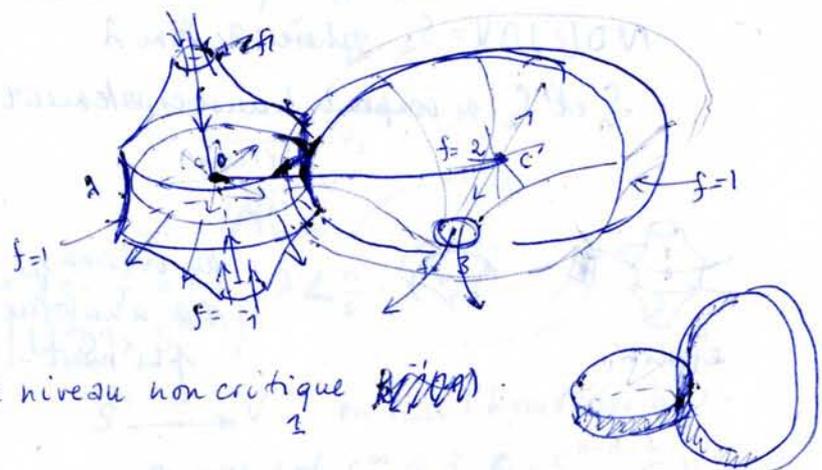
sur  $D^1 \times I$



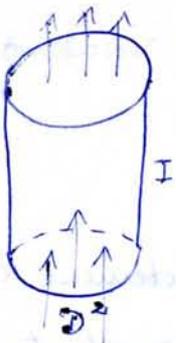
(au vois. du bord c'est  $k_1$ )

en dim supérieure, il y a des NM et ND pour les 2 pts.

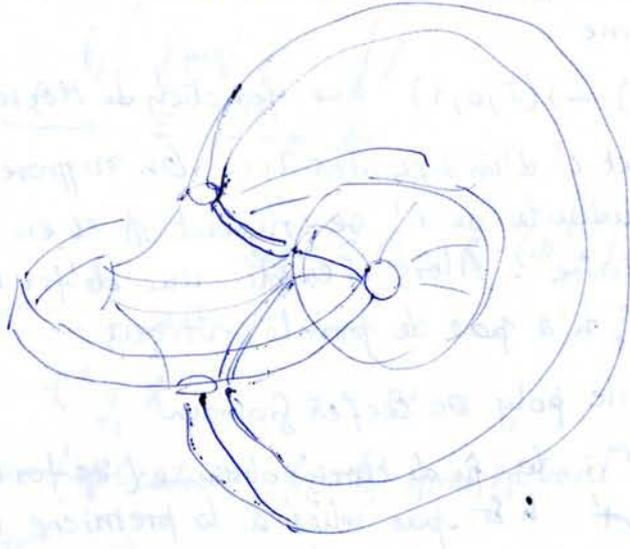
$\lambda \geq 1$  dessin  $\lambda=1, n=3$



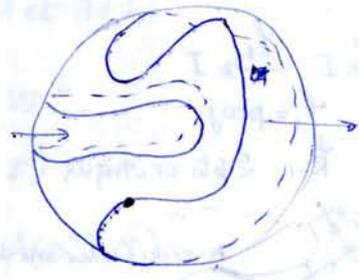
(a) avec le niveau non critique



on prolonge le dessin (derrière)  
comme dans le cas  $n=2$



→ nouveau modèle disque  $D^3$



entre les 2 disques → cylindre conforme au modèle



= partie essentielle du disque  $D^{n-1} \times I$

résoluer cette situation là dans le cobordisme  $W$

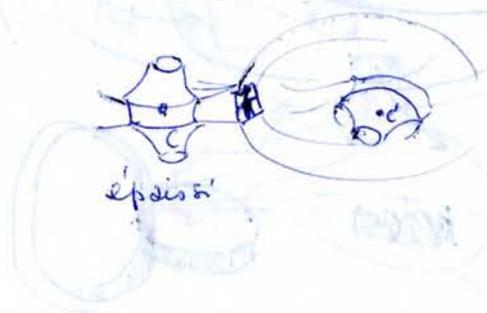
$f: W \rightarrow I$  2 pts critiques  $c$  et  $c'$

V niveau intermédiaire

$NM(c) \cap V = S_1$  sphère de dim  $n-1-2$

$ND(c') \cap V = S_2$  sphère de dim 1

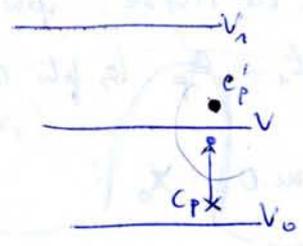
$S_1$  et  $S_2$  se coupent transversalement en un seul point



au voisinage de ce pt, la situation est analogue à ce qu'on a vu plus haut -







ou les enlève ...

Donc tout le pb : peut-on se ramener à  $\partial = id$  -

$\partial$  dépend de  $f$ , de  $\eta$  et des orientations des diverses maps -

si on change les signes  $\Rightarrow$  on peut changer les signes d'une ligne ou d'une colonne

chgt de numérotation:  $\rightarrow$  on peut permuer les lignes et les colonnes

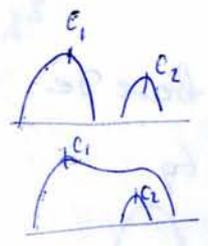
lemme d'addition: Soit  $f: (W, V_0, V_1) \rightarrow (I, 0, 1)$

où  $f$  n'a que des pts critiques d'indice  $\leq 1$

Soit  $\eta$  un chp de  $\psi$  grad régulier

on a ainsi une base  $b_1, \dots, b_p$  de  $H_2(W, V_0)$  (c'est une aux chgs de signes et permutation près) -

Il existe un nouveau chp de  $\psi$  grad,  $\eta'$ , tq la nouvelle base  $b'_1, \dots, b'_p$  tq  $b'_1 = b_1 + b_2, b'_i = b_i, i \geq 2$  -



donner sa signification de suite de dim -

une fois le lemme démontré

$GL(p, \mathbb{Z})$  est engendré par  $\left[ \begin{matrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ & & 0 \end{matrix} \right]$   $\rightarrow$  cf division euclidienne de  $\mathbb{Z}$  -  
 les permutations  
 les chgs de signe -

Donc suffit d'appliquer le lemme suffisamment de fois jusqu'à avoir  $\partial = id$  -

$(Y, x_0, x_1) \xrightarrow{f} (I, 0, 1)$   $f$  de Morse - pts critiques d'indice  $\leq n$ .  
 $\eta$   $\psi$  grad associé à  $f$  (régulier)  $c_1 \dots c_p$  les pts critiques

$ND(c_i)$  descend jusqu'au niveau 0  $x_0$ .

on les oriente  $\rightarrow b_i \in H_2(Y, x_0)$

$NM(c_i)$  idem  $\rightarrow$  jusqu'au niveau 1  $x_1$ .

on les oriente de façon que  $ND(c_i) \cdot NM(c_i) = +1 \mapsto \bar{b}_i \in H_{n-2}(Y, x_1)$ .

Lemme:  $\{b_i\}$  base de  $H_2(Y, x_0)$ . Si  $(D^2, S^{2-1}) \hookrightarrow (Y, x_0)$  flong  $\bar{b}_i$  définit un élément de  $H_2(Y, x_0)$  dont les composantes dans  $\{b_i\}$  sont  $[D^2] \cdot [NM(c_i)]$ .

$$[D^2] \in H_2(Y, x_0) \quad [D^2] = \sum a_i b_i$$

$$[D^2] \cdot NM(c_i) = \sum a_j \underbrace{[ND(c_j)] \cdot [NM(c_i)]}_{\delta_{ij}} = a_i$$

Rq: la base  $\{b_i\}$  est définie par  $(f, \eta)$  modulo l'ordre de  $b_i$  l'or. de  $ND \leftrightarrow$  (signe de  $b_i$ ) ou l'appelle  $B(f, \eta)$

Prop:  $\forall b_i$   $2 \leq i \leq n-3$ , avec les notations précédentes, pour toute base de  $H_2(Y, x_0)$ , il existe une déf. de  $f$  en  $f'$  et de  $\eta$  en  $\eta'$  tq  $B(f', \eta') = B$  base donnée.

dém: lemme  $(b_1, b_2, \dots, b_p) = B(f, \eta)$

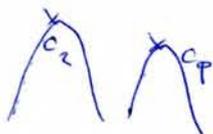
$\exists f', \eta'$  déformation tq  $B(f', \eta') : b'_1 = b_1 + b_2, b_2, \dots$  inchangés

on peut modifier la valeur de  $f$  aux pts critiques:

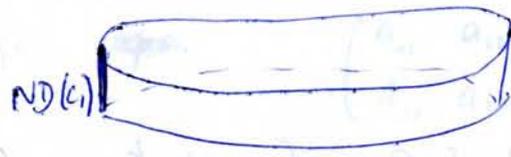
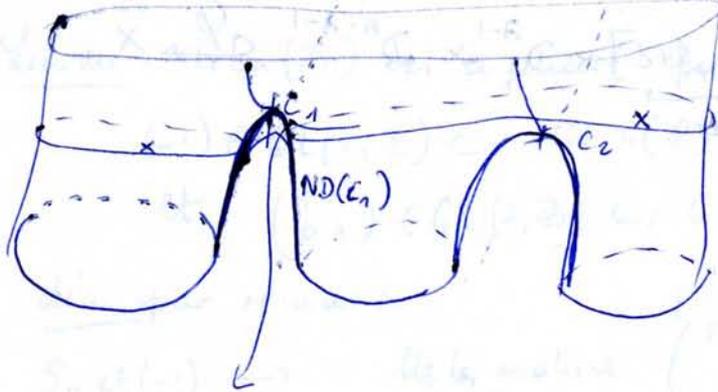
$$f(c_1) > f(c_2) > \dots > f(c_p)$$

$\uparrow$   
 $> \alpha >$

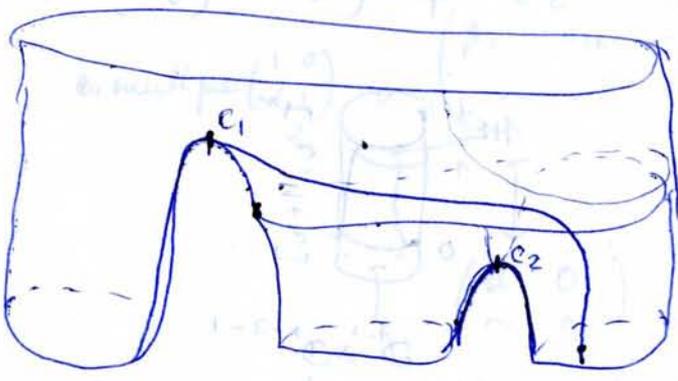
$$X = f^{-1}(\alpha)$$



on déforme  $\eta$  au voi. de  $X$  - la condition d'é.g. de derniers vecteurs de base est automatiquement vérifiée: on ne touche pas aux  $ND(c_i)$   $i \geq 2$ . 51



nouvelle  $ND(c_1)$



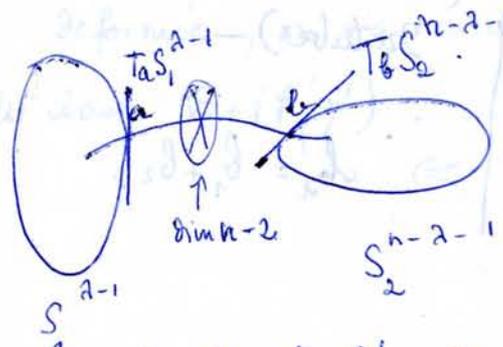
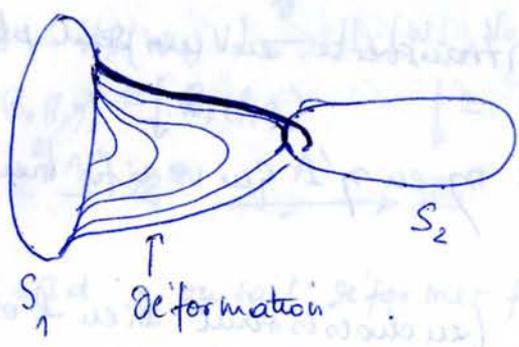
la nouvelle  $ND(c_1)$  coupe  
 la  $NM(c_2)$  une et une  
 ancienne  
 seule fois [elle ne coupe  
 pas la nouvelle].

dimension  $n=4$   
 $X^3$

$$ND(c_1) \cap X = S^{a-1}$$

$$NM(c_j) \cap X = S_j^{n-2-1} \quad 2 \leq j \leq p$$

et ces sphères sont disjointes



initialisation du  $\varphi$ .  $\perp$  à l'arc  $\gamma: \gamma \cong \gamma \times \mathbb{R}^{a-1} \times \mathbb{R}^{n-2-1}$   
 au dessus de a  $T_a S_1 \cong \mathbb{R}^{a-1} \times 0$   
 b  $T_b S_2 \cong 0 \times \mathbb{R}^{n-2-1}$

chemin plongé entre  
 un pt de  $S_1^a$  et un pt  
 de  $S_2$ . ( $\gamma$  est connexe)  
 donc  $X_0$  est connexe  
 $Y = X_0 \cup e_2$ , ainsi que  
 les var. de niveau -  
 on prolonge un peu le 52  
 chemin - ops il coupe  $\perp$   
 les 2 sphères.

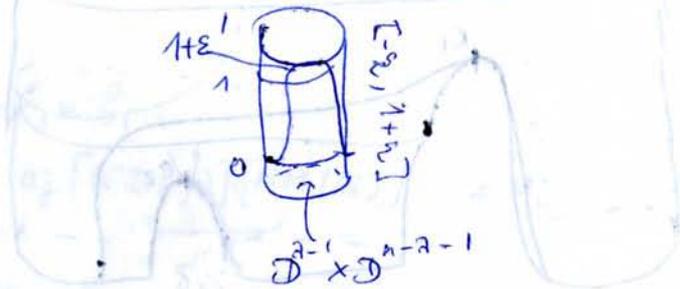
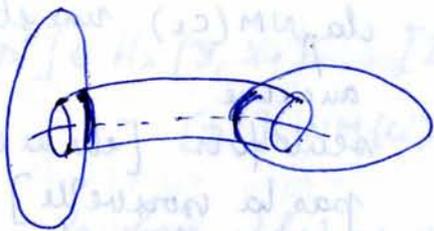
d'où un plongement de  $[-\varepsilon, 1+\varepsilon] \times \mathbb{D}^{a-1} \times \mathbb{D}^{n-a-1} \xrightarrow{\varphi} X$ .

tg  $\varphi(0 \times \mathbb{D}^{a-1} \times 0) \subset S_1$  arc  
 $\varphi(0 \times 0 \times \mathbb{D}^{n-a-1}) = a$   
 $\varphi(1 \times 0 \times \mathbb{D}^{n-a-1}) \subset S_2$   
 $\varphi(1, 0, 0) = b$ .

et  $\varphi^{-1}(S_1) = 0 \times \mathbb{D}^{a-1} \times 0$   
 $\varphi^{-1}(S_2) = 1 \times 0 \times \mathbb{D}^{n-a-1}$

ou choisir  $\varepsilon$  tq  $\varepsilon$  ne rencontre pas  $S_3 \dots S_p$  (cas  $X = (S_3 \cup \dots \cup S_p)$  connexe)

donc  $\varphi^{-1}(S_j) = \emptyset \quad j \geq 3$



niveau zéro poussé par une fn  
 en cloche jus qu'au niveau  $1+\varepsilon$

$\rightarrow h_t: X \rightarrow X$  isotopie  
 $h_0 = id_X$

$h_1(S_1)$  disjoint de  $S_j$

$\exists ! t$  tq  $h_t(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$  et  $\cap$  transverse en un seul pt.

$h_t$  engendre une déformation de  $\eta$  en  $\eta'$  - qui vérifie bien ce qu'on voulait :

$ND(c_1) \cdot NM(c_2) = +1$

$ND(c_1) \cdot NM(c_j) = 0 \quad j \geq 2$

et  $ND(c_1) \cdot NM(c_1) = +1$

(en choisissant bien l'orientation  
 du tube) -

$\Rightarrow b'_1 = b_1 + b_2$

Lemme:  $GL_n(\mathbb{Z})$  est engendré par  $S_n \in GL_n(\mathbb{Z})$ ,

$(-1) \in GL(1, \mathbb{Z}) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$

et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$

dém par récurrence

$S_n$  et  $(-1) \rightarrow$  les matrices  $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$  où  $\varepsilon_i = \pm 1$ .

A gc. ~~ops.~~  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  ops  $a_{11} > a_{12} > 0$

$a_{11} = \alpha_1 a_{12} + \beta_1$

en mult par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$   $\begin{pmatrix} \beta_1 & a_{12} \\ \sim & \sim \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} d & 0 \\ \sim & \sim \end{pmatrix}$   $d = \text{pgcd } a_{11}, a_{12}$

A inversible  $\Rightarrow d = 1$

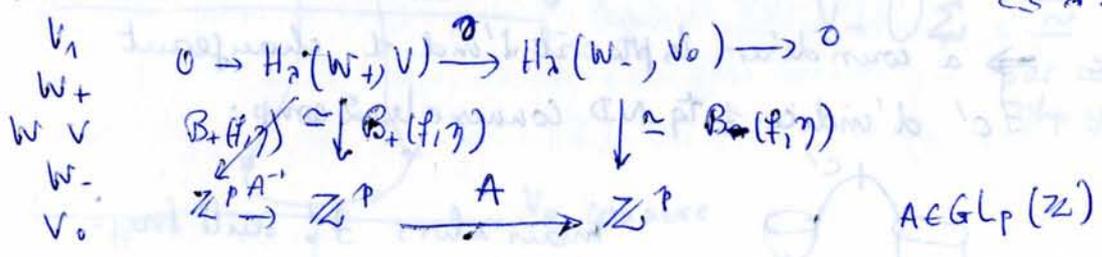
$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sim & \sim \end{pmatrix}$

cas général n éluse -

$\rightarrow$  on a démonté la prop -

dém. du h-cobordisme "semi-élémentaire"

$2 \leq 2 \leq n-3$



$A = Id$ , on sait déformer  $f$ .

sinon

$f|_{W_+}$  déformée, on n'a rien changé sur  $V, W^-$ .

$\rightarrow$  nouvelle base  $B_+(f', \gamma')$  -  $A'$  - choisir  $A' = A^{-1}$

démonstration du th du h-cobordisme.

$(W, V_0, V_1) \xrightarrow{f} (I, 0, 1)$   $\eta$   $\psi$  grad régulières

premier pas: suppression des pts critiques d'indice 0 (et n)

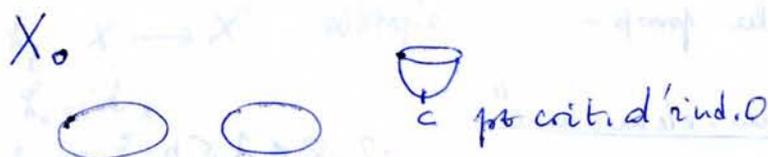
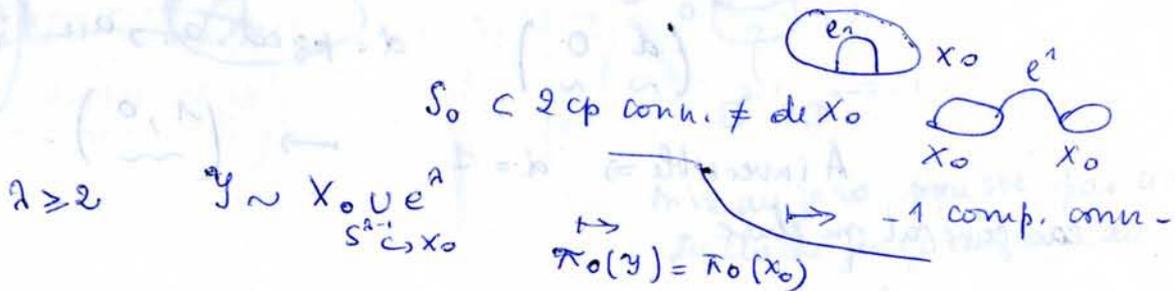
Lemme:  $W$  connexe, on peut supprimer les pts critiques d'indice 0 avec autant de pts critiques d'indice 1

sem:  $(Y, X_0, X_1)$  1 seul pt crit d'indice 2.

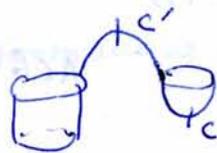
$\lambda=0$   $Y = X_0 \cup D^n$  nb de comp. conn. de  $Y =$  nb de  $X_0 + 1$ .

$\lambda=1$   $Y$  à m type d'htpie que  $X_0 \cup e^1$   
 $S_0 \subset X_0$

$S_0 \subset 1$  comp conn de  $X_0 \rightarrow m$  nb de comp. conn.



$W$  connexe  $\Rightarrow$  à considérer les pts crit d'ind. 1 changeant le  $\pi_0$ .  $\exists c'$  d'indice 1 tq  $ND$  connexe les 2 comp:



mais alors  $\exists!$  seule traj. entre  $c'$  et  $c$   
 $\rightarrow$  on peut éliminer  $c$  avec  $c'$

2<sup>e</sup> pas élimination des pts crit. d'indice 1. (et n-1)

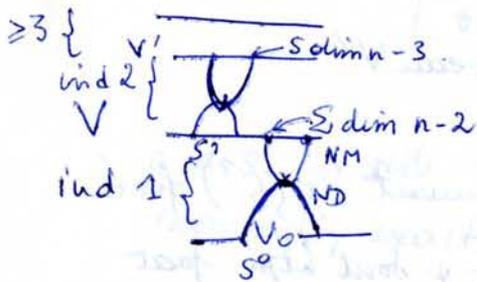
Lemme:  $W$  ac les hyp du h-cobordisme

$f: W \rightarrow I$  fonction de Morse ss pt critique d'indice 0

alors on peut échanger les pts critiques d'ind. 1 contre autant de pts critiques d'indice 3.

ici la  $dim \geq 5$  va servir ( $n=4 \rightarrow 3 \rightarrow n-1 \rightarrow ?$  !)  
 $(\geq 5)$

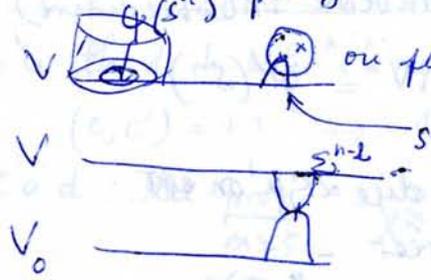
fonctionnelle



$$\pi_1(V') \simeq \pi_1(W) = 0$$

on ne peut pas assurer  $\pi_1(V) = 0$

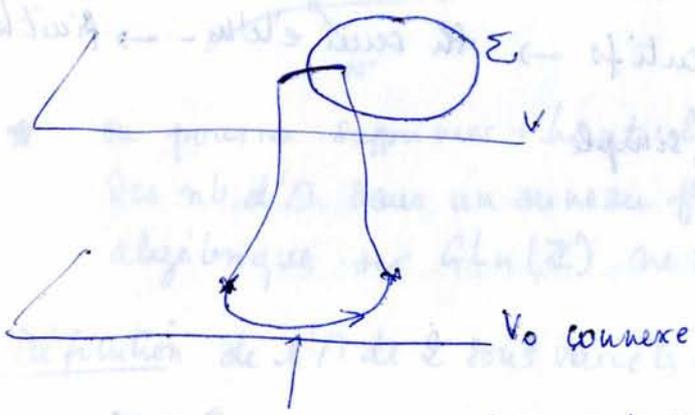
plongement fixé



on peut créer un pt 2 et un pt 3

on veut ramener ce  $S^1$  au vu vu  $V$

- > construire  $S^1 \subset V$  tq  $\cap$  avec  $\Sigma_i$  transverse. Sale et = un seul point, disjointe de autres  $\Sigma_i$
- \* disjointe des cercles  $S^1$  (nappes de pts critiques d'indice 2).



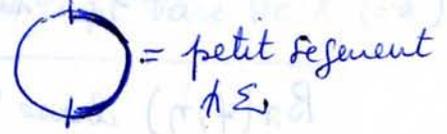
$$V - U\Sigma \simeq V_0 - U(S^0_i)$$

par un chp 4 grad

on ferme en évitant le ND des pts crit. d'indice 1. ( $\Leftarrow \dim V_0 \geq 2$ ) donc  $n \geq 3$ .

on peut maintenant remonter ce chemin à  $V$ .

donc on a une application  $S^1 \rightarrow V^{n-1}$



$n-1 \geq 3$ , on peut la transformer en un plongement encore disjoint des  $\Sigma_i^{n-2}$

on peut m supposer ( $n-1 \geq 3$ ) que la dernière \* condition soit satisfaite -

$$\varphi(S^1) \cap S_j^1 = \emptyset$$

on peut monter ce plongement au niveau  $V'$   
 $\varphi': S^1 \hookrightarrow V'$

$\pi_1(V') = 0 \Rightarrow \varphi'$  homotope à un plongement  $\varphi(S^1)$  fixé dans  $V'$  ( $\dim V' \geq 5$ ) Whitney  $\Rightarrow \varphi'$  et  $\varphi$  sont htps par une isotopie ambiante de  $V'$   $h_t$  tq  $h_0 = 1, h_1 \varphi = \varphi'$

on modifie (au dessus de  $V'$  dans un niveau intermédiaire)  $\eta$  par  $h_t$  tq la  $ND(C_2, \eta') \cap V' = \varphi(S^1)$

pt critique d'indice 2 qu'on est le train de créer -

$$\text{donc } ND(C_2, \eta') \cap V = \varphi(S^1)$$

entre  $C$  et  $C_2$  il y a une et une seule trajectoire donc on élimine  $C$  et  $C_2$  -

Req: de la même façon on peut échanger les pts critiques d'ind 2 contre des pts critiques d'ind  $k$  etc... et se ramener avec seulement des pts critiques de 2 ind. consécutifs  $\rightarrow$  th semi élém.  $\rightarrow$  fait la

ici avec le  $\pi_1$  nul, il y a une chose plus simple:

$f$  pts crit. d'ind  $\geq 2 \in [2, n-2]$

$\eta$   $\varphi$  grad rég.

$f$  ordonné

$$\longrightarrow C_{a+1} \xrightarrow{\partial} C_a \longrightarrow 0$$

$B_2(f, \eta)$  base de  $C_2$ . ( $b_i$ )

$\exists$  une base  $B_{a+1}$  de  $C_{a+1}$  telle que  $\begin{cases} \partial \bar{b}_1 = b_1 \dots \partial \bar{b}_p \\ \partial \bar{b}_j = 0 \quad j \geq p \end{cases}$

en modifiant  $f$  sur la partie du cobordisme comprenant les pts critiques d'indice  $a+1$ , on peut réaliser la base

$B_{a+1}$  comme étant la base des ND de  $f, \eta: B_{a+1} = B_{a+1}(f, \eta)$

$$\begin{matrix} \partial \bar{b}_1 = b_1 \\ \vdots \end{matrix}$$

on peut tuer les pts crit d'ind  $\lambda$  avec les pts crit d'ind  $\lambda+1$  en modifiant  $f$ .

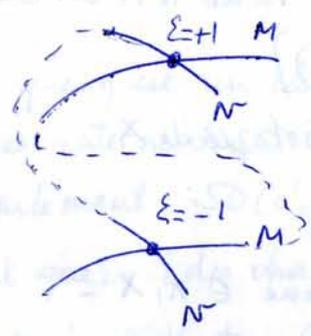
a.d.s.  $\rightarrow$  reste une chaîne avec seulement 2 spcs consécutifs non nuls, exactement ce qu'on a fait plus haut - ☒

Rôle de l'hypothèse  $\pi_1(W)=0$ :

★ de la th de h-cob. "élémentaire". 2 pts crit ind  $\lambda, \lambda+1$ .

$(c, c') = +1 \rightarrow$  1 et 1 seule trajectoire entre les pts  $c$  et  $c'$

c'a'd : la prop  $\left. \begin{matrix} n \geq 5 \\ p, q \geq 3 \\ n = p+q \end{matrix} \right\} \begin{matrix} X^n \supset MP \\ \supset N^q \\ \pi_1(X) = 0 \end{matrix} \Rightarrow [M][N] = 0 \Rightarrow \exists h, t, \tau, h_1 [M] \cap N = \emptyset$



lacet ds  $X \sim 0$ .

★ on pourra supprimer + haut l'hyp  $\pi_1(X)=0$ , mais en ~~considérant~~ <sup>considérant</sup> des nb d' $N$  dans un anneau plus compliqué de  $\mathbb{Z}$ , où de lemme algébrique sur  $GL_n(\mathbb{Z})$  ne sera peut-être plus vrai.

Définition de  $[M] \cdot [N]$  de 2 sous variétés ds le cas non simplement connexe.

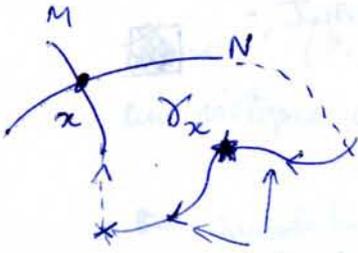
$\left. \begin{matrix} X^n \supset MP \\ \supset N^q \end{matrix} \right\} \begin{matrix} n = p+q \\ M \cap N \end{matrix}$  tout orienté  $M$  et  $N$  simplement connexes,  $t$  est pt base de  $X$  (=★) ou suppose donné un chemin dans  $X$  entre le pt base de  $X$  et un point de  $M$ , et un point de  $N$ ,  $[M] \cdot [N] \in \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$

(Exercice.  $G=0 \Rightarrow \mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}$   
 $G = \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  pol de Laurent  
 $G = \mathbb{Z}^n \Rightarrow \mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}]$ )

$x \in M \cap N$   $\varepsilon(x) = \pm 1$  comme d'habitude :  $\varepsilon = +1$

si  $T_x M \oplus T_x N \cong T_x X$   
 $\uparrow$   
 or. orientée

$\gamma_x \in \pi_1(X)$



$\gamma_x$  ne dépend pas des choix faits  
 (chemins dans M et N)

2 chemins donnés -

$$[M] \cdot [N] = \sum_{x \in M \cap N} \varepsilon(x) \gamma_x \in \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$$

Lemme:  $X^w$  [ $M^p, N^q$  simplement connexes] + les hyp + haut pr la déf  
 $p+q=w \geq 5$  du ut d'n obs X -

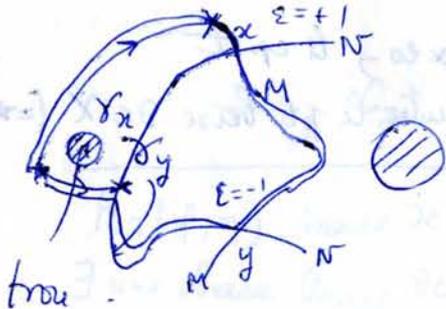
[si  $p=2$  on suppose  $\pi_1(X-N) \subset \pi_1(X)$ ]

Alors si  $[M][N] = 0$  ds  $\mathbb{Z}[\pi_1 X]$ ,  $\exists$  ht isotopie de X  
 avec  $h_1(M) \cap N = \emptyset$  -

rem: ops M et N  
 on groupe les  $x \in M \cap N$  tq  $\gamma_x = g$  donnée' e  $\pi_1 X$  -  
 $x_1^g \dots x_q^g$

$$\left[ \sum_i \varepsilon(x_i^g) = 0 \right. \\ \left. \forall g \in \pi_1 X \right] \left[ \begin{array}{l} \text{c'est la comp. sur } g \text{ dans la somme} \\ \text{se finit sans le b. d'n.} \end{array} \right]$$

$\Rightarrow q_g$  est pair et on a le groupe  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  (1 avec +1, 1 avec -1)



trou

mais on sait que  $\gamma_x \sim \gamma_y$  dans X

$\delta$  obtenu en allant  $x \xrightarrow{ds M} y \xrightarrow{ds N} x$  dans X, est (à l'origine j'ai son

(pt base posés)  $\sim \gamma_x \gamma_y^{-1} = e$

Donc on a les hyp. pr appliquer le lemme de Whitney et supprimer x et y.

définition  $H_*(X; \mathbb{Z}[\pi_1 X])$  coefficients locaux -  
 $\parallel$   
 $H_*(\tilde{X})$   $\tilde{X} \rightarrow X$  revêtement universel  
 $H_p(X; \mathbb{Z}[\pi_1 X])$  est un  $\mathbb{Z}[\pi_1 X]$ -module.

$G$  agissant sur  $M$   
 ou  $+g \cdot m$ . un  $\Lambda(G)$ -module  
 $(g, m) \mapsto g \cdot m$   $\rightarrow$  structure de  $\Lambda(G)$ -module sur  $M$  de la façon suivante:  
 $(\sum_g \lambda_g g) \cdot m = \sum_g \lambda_g (g \cdot m)$

$\rightarrow$  faire agir  $\pi_1(X)$  sur  $H_*(\tilde{X})$  -  
 agit comme groupe du revêtement  $\tilde{X} \rightarrow X$  -

$M^p \hookrightarrow X^n$  (# orienté) -  $M$  est 1-connexe  $\Rightarrow M$  se relève de  $\tilde{X}$ ,  
 $\uparrow \quad \searrow \quad \uparrow$   
 $\tilde{M} \rightarrow \tilde{X}$   
 il faut choisir <sup>un</sup> comp. de  $\tilde{M}$ , soit: choisir un chemin entre  $*$  et  $M$ .

$(M, \delta) \mapsto [M] \in H_p(X; \mathbb{Z}[\pi_1 X])$   
 $\uparrow$   
 dépend de  $\delta$

Si  $f: W \rightarrow I$  fu de Morse,  $\eta$  grad régulier, ordonné, sans pts critiques d'indice 0 et 1.

on choisit des chemins entre les pts bases et les points critiques, on oriente les nappes descendantes  $\rightarrow$  calcul de l'homologie de  $W$  à coef  $\mathbb{Z}[\pi_1 X]$ .

les  $NM, ND \rightarrow$  de comp. se remontent  $\rightarrow$  de comp cellulaire de  $\tilde{X}$ .

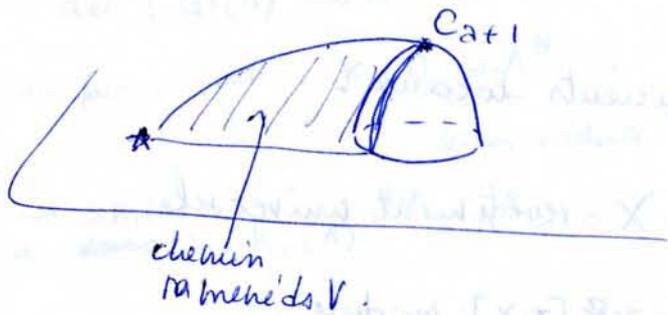
$C_\lambda = \mathbb{Z}[\pi_1 X]$ -mod. libre de base les pts critiques d'indice  $\lambda$

$$C_{\lambda+1} \xrightarrow{\partial} C_\lambda$$



$\pi_1 V = \pi_1 W$  (à cause de restrictions sur  $\lambda$ )

on choisit la base de  $W$  de  $V$



$$[NM(c', \eta) \cap V] \cdot [NM(c, \eta) \cap V] \in \mathbb{Z}[\pi_1 V] = \mathbb{Z}[\pi_1 W]$$

alors 
$$\partial(c') = \sum_{\substack{c \text{ pt crit} \\ d'ind \geq 2}} [ \quad ] \cdot [ \quad ] c$$

d'homologie  $\partial c(C_*, \partial)$  est  $H_*(W, V_0; \mathbb{Z}[\pi_1 W])$ .

$(\tilde{V}_0 \subset \tilde{W}$  car  $\tilde{\pi}_1: V_0 \subset W$  induit l'identité sur  $\pi_1$ ) -

done la demonstration du th du h cobordisme élémentaire s'applique dans le cas non simplement connexe [hyp. avec homologie devient  $V_0 \subset W$  est une  $\sim$  d'htpie].

non

$$\tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{W} \sim \text{d'htpie} \Rightarrow H_*(\tilde{W}, \tilde{V}_0) = 0$$

$$H_*(W, V_0; \mathbb{Z}[\pi_1 W]) = 0$$

$$0 \rightarrow C_{a+1} \xrightarrow{\partial} C_a \rightarrow 0 \Rightarrow \text{isomorphisme}$$

$$\mathbb{Z}[\pi_1 W] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1 W]$$

si par hasard,  $\partial$  est la mult. par  $1 \times g$

par ex. si tels unités de  $\mathbb{Z}[\pi_1]$  sont de la forme  $1 \times g$

on rajoute un lacet  $g^{-1}$  au pt base  $\rightarrow$  on est ramené à  $\partial = x \pm 1 \rightarrow$  élimination de  $c$  et  $c'$

Exercice:

$$G = \mathbb{Z}/5 \text{ (ex espace lenticulaire)}$$

$\mathcal{I}$  des unités de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/5]$  qui ne sont pas de la forme  $1 \times g$  et  $g$  u. de  $\mathbb{Z}/5$

$$\mathbb{Z}[G] = \{a_0 + a_1 t + \dots + a_4 t^4, a_i \in \mathbb{Z}, t^5 = 1\} \mid \begin{cases} \text{cf } 1 - t^5 \\ [1 - (t^2 + t^{-2})][1 - (t + t^{-1})] \end{cases}$$



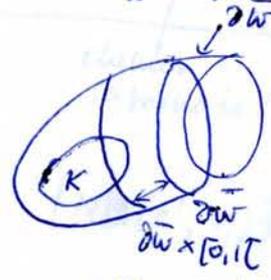
16: mettre un bord simplement connexe à une variété non compacte

$W^n$ .  $\exists ? \bar{W}$  cpcte,  $\partial \bar{W}$  1-conn. tq  $W$  diffé à  $\bar{W}$ .

CN: 1.  $H_*(W) \simeq H_*(\bar{W})$  de type fini ( $\bar{W}$  cpcte)

2.  $\exists$  1 collier sur  $\partial \bar{W}$ :  $\partial \bar{W} \times [0, 1[ \hookrightarrow \bar{W}$  image 1-connexe.

$\partial \bar{W} \times [0, \alpha[$  disjoint de  $\partial \bar{W} \times [0, 1[$ : figure



$K' = \bar{W} - \partial \bar{W} \times [0, \alpha[$  cpcte de  $W$   
 $W - K' \simeq \partial \bar{W} \times [0, \alpha[$  simplement connexe.

$\rightarrow$  CN:  $\forall K \subset W, \exists K' \supset K$  tq  $W - K'$  soit 1-connexe.

def: on dit que  $W$  est non cpcte, 1-conn. à l'oo.

th:  $W^n$ ,  $\dim \geq 6$ , non cpcte, 1-conn. à l'oo, tq  $H_*(W)$  de t. fini

Alors  $\exists \bar{W}$  cpcte,  $\partial \bar{W}$  1-conn et  $W \simeq \bar{W}$ .

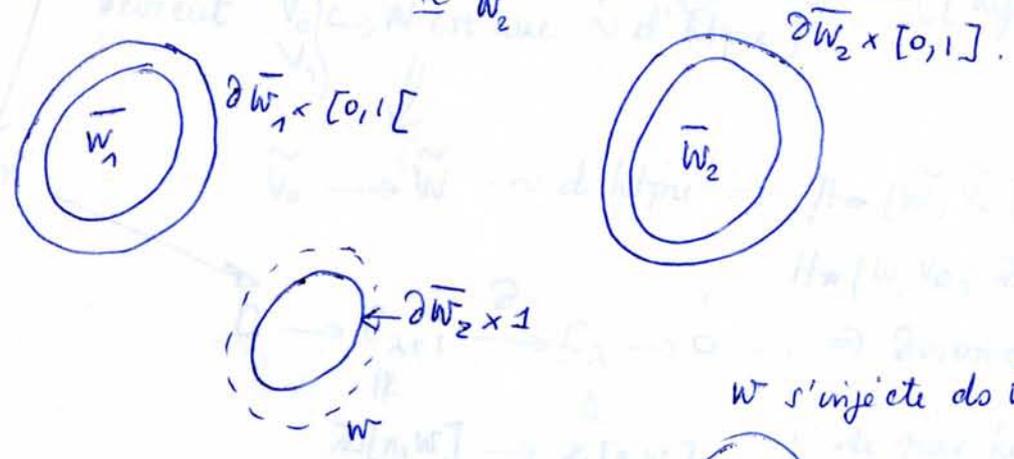
Browder  
 Levine  
 Livesay  
 Am. J. of M. 65

Application:  $W^n$  contractible non cpcte, 1-conn. à l'oo,  $n \geq 6 \Rightarrow W \simeq \mathbb{R}^n$ .

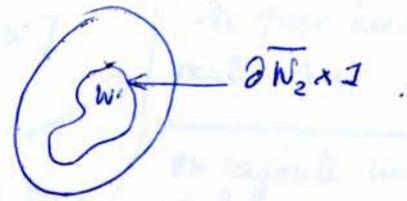
on a  $W = \text{Int } \bar{W}$   $\bar{W}$  est cpcte contractile. donc (h-ob.)  $\Rightarrow \bar{W} \simeq D^n$

donc  $W \simeq \text{Int } D^n \simeq \mathbb{R}^n$ .

"Unicité":  $\bar{W}_1, \bar{W}_2$ .  $W \simeq \overset{\circ}{\bar{W}}_1 \simeq \overset{\circ}{\bar{W}}_2$



$W$  s'injecte ds  $\bar{W}_1$ :



$H_*(\bar{W}_1, W') \simeq H_*(\bar{W}_1, W) = 0$

$\Rightarrow$  on a un h-cobordisme  $\Rightarrow \underline{\partial \bar{W}_1 \simeq \partial \bar{W}_2}$

Démonstration du théorème :

Lemme fondamental : les hyp. du th :  $K$  cpt  $\subset W$ ,  $\exists U^n$  cpt, à bord  $\partial U$ , plongée

- Dans  $W$  tq
- 1-  $K \subset U$
  - 2-  $\partial U$  1-conn.
  - 3-  $H_*(W, U) = 0$ .

dém. du th :

$C_i \subset \overset{\circ}{C}_{i+1} \subset C_{i+1} \quad W = \cup C_i$

$W$  1-conn à l' $\infty$   $\Leftarrow D_1 = C_1, D_2 \subset C_2$ , de compl. 1-conn.

$W = \cup_i D_i \quad W - D_i$  1-conn. ,  $D_i \subset \overset{\circ}{D}_{i+1}$ .

$\exists U_1$  tq  $D_1 \subset \overset{\circ}{U}_1$

$U_1 \cup D_2 \quad U_1 \cup D_2 \subset \overset{\circ}{U}_2$

$V_i = U_i - \overset{\circ}{U}_{i-1}$  var. cpt

1-  $\partial V_i = \partial U_{i-1} \cup \partial U_i$

2-  $H_*(V_i, \partial U_{i-1}) \cong H_*(U_i, U_{i-1}) = 0$  (excision)

$\pi_1(\partial U_i) = 0$  grâce au lemme.

Calcul de  $\pi_1(D_i)$  ?

$W - D_{i-1} = (W - U_i) \cup V_i \cup (U_{i-1} - D_{i-1})$

VauKampen  $\rightarrow 0 = \pi_1(W - D_{i-1}) = \pi_1(W - U_i) * \pi_1(V_i) * \pi_1(U_{i-1} - D_{i-1})$   
 $\Rightarrow \pi_1(V_i) = 0$ .

$V_i \xrightarrow{\sim} \partial U_{i-1} \times [0, 1]$  permet de construire

$f_i: U_{i-1} \rightarrow U_i$  isom. qui est l'identité hors d'un  $\otimes$  vois de  $\partial U_{i-1}$  (par ex  $U_{i-2}$ ).

$g = \dots f_n \dots f_2 f_1$  existe (suite stationnaire). □

dém. du lemme fondamental :

Lemme 0 :  $W$  noncpt,  $K$  cpt,  $\exists U$  cpt à bord tq  $K \subset \text{Int } U$ .

dém :  $f: W \rightarrow [0, \infty[$ ,  $C^\infty$ , propre.

$f(K) \leq \alpha$ .  $\exists \beta > \alpha$  valeurs régulières de  $f$  (Lemme de Sard),

donc  $U = f^{-1}([0, \beta]) \quad \partial U = f^{-1}(\beta) \quad \text{int } U = f^{-1}(]0, \beta[)$   
 $K \subset \text{Int } U$

Lemme 1 : on peut rendre  $U, \partial U, W - U$  connexes.

$K = \cup U' / K \subset K'$ ,  $W - K'$  connexe par arcs

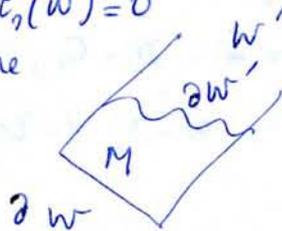
soit  $U$  tq  $\text{int } U \supset K'$ . Si  $U$  a plusieurs comp. conn., on les joint par des arcs plongés aux bords. on épaissit  $\rightarrow U'$  connexe

$W-U'$  a peut être plusieurs comp conn, mais une seule st non cpcte.  
 les comp. conn. <sup>cpctes</sup> sont en nb fini - On peut les rajouter à  $U' \rightarrow U''$ .

$U''$  est connexe,  $W-U''$  connexe -

on refait la même opération pour assurer la connexité de  $U''$ , sans perdre celle de  $W-U''$ .

Lemme 2:  $W$  à bord,  $\partial W$  cpct.  $\pi_1(W) = 0$   
 alors  $\exists M \subset W$  cobordisme



$M = \partial W \cup D_i^2$   
 et  $\partial W'$  est 1-connexe.

dém:  $g_1 \dots g_p$  un syst. de gén. de  $\pi_1(\partial W)$

$\exists f_i: D_i^2 \times S^1 \rightarrow W, \partial W$  tq  $[f_i|_{S^1}] = g_i$

ops.  $f_i|_{S^1}$  plongement car  $\partial W$  dim  $\geq 5$

$f_i: D^2 \hookrightarrow W$  plongement.

$\rightarrow (D^2, S^1) \hookrightarrow W$

un voisinage tubulaire est de la forme:

$$(D_i^2 \times D^{n-2}, S_i^1 \times D^{n-2}) \hookrightarrow (W, \partial W)$$

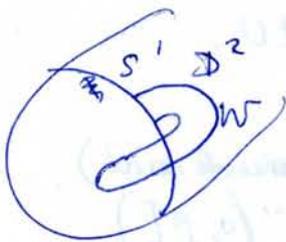
$$M = \partial W \times I \cup \bigcup_i D_i^2 \times D^{n-2}$$

en arrondissant les coins  $\rightarrow M$  est  $C^\infty$ .

$$\text{Van Kampen} \Rightarrow \begin{aligned} \pi_1(\partial W') &= 0 \\ \pi_1(W') &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

$W^n$  1-conn.

$X^{n-1} \subset W, X$  cpcte



$D^2$  peut avoir d'autres  $\cap$  avec  $X$ .

$\varphi \cap X$

$\varphi^{-1}(x)$  relation de cercles.

on élimine les cercles minimaux.

$\rightarrow$  on se ramène au cas du lemme 2.

on a construit  $U$  tq  $K \subset \bar{U}$

$U$  connexe,  $\partial U$  1-connexe - peut-on avoir  $W-U$  1-conn.?

$$W-K' = U-K' \cup_{\partial U} W-U$$

$$\begin{aligned} \pi_1(W-K') &= \pi_1(U-K') * \pi_1(W-U) \\ &= 0 \text{ car } \pi_1(W-U) = 0 \end{aligned}$$

$g_1, \dots, g_p$  gen. de  $H_*(W)$

$\exists C$  compact  $\subset W$  tq ~~les~~ les simplexes singuliers intervenant dans les cycles  $g_i$  aient leur image dans  $C$ .

$$H_*(C) \rightarrow H_*(W) \text{ surjective}$$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \\ CCU & & H_*(U) \\ & \searrow & \end{array}$$

donc  $H_*(U) \rightarrow H_*(W)$  surjective.

Donc on peut toujours supposer  $H_*(U) \xrightarrow{i_*} H_*(W) \rightarrow 0$ .

$$0 \rightarrow H_{k+1}(W, U) \rightarrow H_k(U) \xrightarrow{i_*} H_k(W) \rightarrow 0$$

$$V = W - \overset{\circ}{U}, \partial V = \partial U$$

$$\begin{array}{ccc} H_{k+1}(V) & \xrightarrow{0} & H_{k+1}(V, \partial V) \\ & & \downarrow \cong \text{exc.} \\ H_{k+1}(W) & \xrightarrow{0} & H_{k+1}(W, U) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_k(\partial U) & \xrightarrow{i'_*} & H_k(U) \\ \downarrow \square & & \downarrow \\ H_k(\partial U) & \xrightarrow{i_*} & H_k(W) \end{array}$$

Lemme 3:  $\Rightarrow (i_* \text{ injective} \Leftrightarrow i'_* \text{ injective})$

Procède pour rendre  $i'_*$  injective:

on suppose 1.  $x \in H_k(\partial U) \quad i_* x = 0$

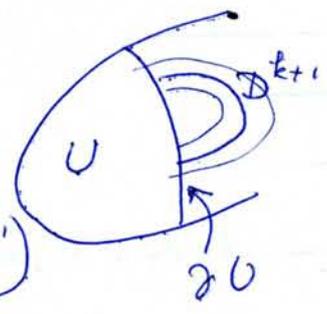
2.  $\exists$  plong  $\mathbb{D}^{k+1}, S^k \hookrightarrow (V, \partial V)$  tq  $[\varphi(S^k)] = x$ .

$(\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k-1}, S^k \times \mathbb{D}^{n-k-1}) \hookrightarrow (V, \partial V)$  étend  $\varphi$ .

$$U' = U \cup \mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k-1}$$

$$\begin{aligned} \partial U' &= \partial U \cup \mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k-1} \\ V' &= V - \overset{\circ}{\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_*(U', U) &\underset{\text{exc.}}{\cong} H_*(\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k-1}, S^k \times \mathbb{D}^{n-k-1}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{k+1}(U) & \rightarrow & H_{k+1}(U') & \rightarrow & H_{k+1}(U', U) \rightarrow H_k(U) \rightarrow H_k(U') \rightarrow 0 \\ & & & & & & \cong \\ & & & & & & \mathbb{Z} \nearrow \\ & & & & & & 1 \mapsto \square x \end{array}$$

→ on a peut-être rajouté qc en dim  $k+1$ , mais rien en dim  $< k$

Lemme 4:  $K, W$ .  $\exists U$  pct à bord tq

1.  $K \subset U$

2.  $\partial U, W=U$  1 conn.

3.  $i_*: H_p(U) \rightarrow H_p(W)$  surjective, et isom. pr  $p \leq 2$ .

dém

$$\begin{array}{ccc} H_2(U) & \xrightarrow{i_*} & H_2(W) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_2(\partial U) & \xrightarrow{i_*} & H_2(V) \end{array}$$

Howicz:  $x \in H_2(\partial U)$

$\exists g: S^2 \rightarrow U$  représ.  $x$ ,

(car  $\pi_1=0$ ). donc  $i_* = 0$ .

$ig$  homotope à 0.

donc on a:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{g} & \partial U \\ \downarrow & & \downarrow i \\ D^3 & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

avec  $\dim V \geq 5 \Rightarrow$  ops  $g$  plongement

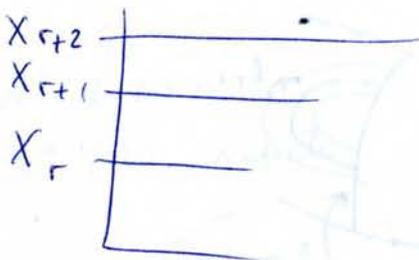
$\dim V \geq 6$  Whitney  $\Rightarrow$  plongement pour  $f$ .

on est dans les hyp. du procédé

→ on a diminué le noyau en dim 2  
on recommence → nul.

Prop:  $X^n$  cobordisme  $\partial X = M \cup N$ ,  $X, M, N$  1 conn.  $H_p(X, M) = 0$   $2 \leq p \leq r-1 < n-4$   
Alors tt élément de  $H_{r+1}(X, M)$  est représentable par un plongement  $(D^{r+1}, S^r) \hookrightarrow (X, M)$ .

dém:  $f: X \rightarrow I$  ops les pts critiques d'indice  $< r$  (cf dém. du h-cob.)



$$H_{r+1}(X, M) \xrightarrow{\cong} H_{r+1}(X_{r+1}, X_r) \xrightarrow{\cong} H_r(X_r, M) \rightarrow 0$$

$\exists x' \quad \partial x' = 0 \quad H_{r+1}(X_{r+1}, X_r) \cong \mathbb{Z}^a$   
 $x' = \sum y_i$   $y_i$  primitif.

$y$  1<sup>er</sup> vect. d'une base → on peut s'arranger for que  $y$  soit représenté par la  $ND$  d'un pt critique. donc  $y$  représenté par  $(D^{r+1}, S^r) \hookrightarrow (X_{r+1}, X_r)$

$x'$  représenté comme une réunion de disques.



plongement de  $2y$ .

Il se peut que notre plongement de  $S'$  coupe une NM  
 mais  $\partial x' = 0 \Rightarrow \partial x' = \sum_{i=0}^n [-1]^i x_i$

donc on peut trouver un plongement disjoint de  $SM$ , poussé jusqu'en bas par  $\gamma$

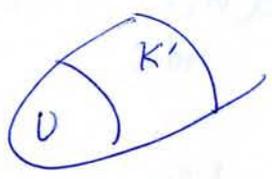
Lemme 5

$W, K \quad 2 \leq k \leq n-1$   
 $\exists U$  comme + haut tq

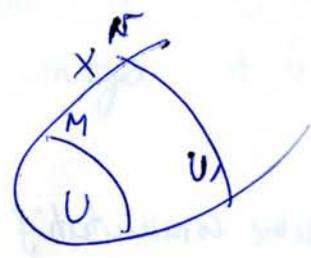
- 1-  $K \subset \bar{U}$
- 2-  $\partial U$  et  $W - \bar{U}$  1-conn.
- 3-  $i_* H_p(U) \rightarrow H_p(W)$  isom. pour  $p \leq k$ .

récurrence on suppose  $i_*$  isom. pour  $p < k$ . on le veut pour  $k$ .

$x \in H_k(U)$  tq  $i_* x = 0$ .



$\exists K$  contenant  $\text{supp } x$   $\alpha: U \hookrightarrow K'$   
 $\alpha_* x = 0$   
 on met  $U' \supset K'$



$h: U \hookrightarrow U'$  tq  $h_* x = 0$

$h_* x = 0$  ds  $H_k(U)$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \rightarrow & H_{k+1}(W, U) & \xrightarrow{\bar{x}} & H_k(U) \xrightarrow{i_*} H_*(W) \\
 & & \downarrow & & \downarrow h_* \\
 & & H_{k+1}(W, U') & \rightarrow & H_k(U')
 \end{array}$$

$\forall x \exists \bar{x}$  ayant  $x$  pour image.

donc l'image de  $\bar{x}$  ds  $H_{k+1}(W, U')$  est 0 :

$$\begin{array}{ccc}
 H_{k+1}(W, U') & \simeq & H_{k+1}(W, X) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H_{k+1}(W, U) & \simeq & H_{k+1}(U, M)
 \end{array}$$

donc  $\exists y \in H_{k+1}(U, M)$  donnant  $x$  par les flèches

$H_*(X, M) = H_*(U', U) \quad U \subset U' \subset W$

donc l'homologie est 0 jusqu'au bon rang, donc  $y$  est représenté par un plongement  $(D^{k+1}, S^k) \hookrightarrow (X, M)$ .

$$0 \rightarrow H_{n-2}(W, U) \rightarrow H_{n-3}(U) \rightarrow H_{n-3}(W) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H_{n-2}(V, \partial U) \xrightarrow{12} H_{n-3}(\partial U) \rightarrow H_{n-3}(V) \rightarrow 0$$

libre  $\quad H^2(\partial U)$  libre

$$0 \rightarrow H_{n-1}(W, U) \xrightarrow{12 \text{ exc.}} H_{n-2}(U) \rightarrow H_{n-2}(W) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H_{n-1}(V, \partial U) \xrightarrow{21} H_{n-2}(\partial U) \rightarrow H_{n-2}(V) \rightarrow 0$$

$H^1(\partial U) = 0$

donc  $H_p(V, \partial U) = 0$   $\forall p \neq n-2$  et libre  $p = n-2$ .

On choisit  $U' \supset U$  avec ds m<sup>es</sup> prop. etc de plus  $\bar{h}_* : H_{n-2}(V, M) \rightarrow H_{n-2}(V, X)$   
 $\bar{h}_* = 0$

donc  $\bar{h}^* : H^p(V, X) \rightarrow H^p(V, M)$  est zéro.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & H^{n-2}(V, M) & \xleftarrow{\alpha} & H^{n-3}(M) & \xleftarrow{\beta} & H^{n-3}(V) \leftarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{h}^* & & \downarrow \bar{h}^* & & \downarrow \bar{h}^* \\ 0 & \leftarrow & H^{n-2}(V, X) & \xleftarrow{\alpha} & H^{n-3}(X) & \xleftarrow{\beta} & H^{n-3}(V) \leftarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{h}^* & & \downarrow \bar{h}^* & & \downarrow \bar{h}^* \\ 0 & \leftarrow & H^{n-2}(V, N) & \xleftarrow{\beta} & H^{n-3}(N) & \xleftarrow{\beta} & H^{n-3}(V') \leftarrow 0 \end{array}$$

$\exists \alpha$  qui scinde la suite exacte  $\text{Im } \alpha \subset \ker \beta^*$

on scinde en bas par  $\beta$  de façon à rendre le diagramme commutatif.

$\text{Im } \beta$  est facteur direct libre dans  $H^*(N)$  ( $\ker \beta^*$ )

par dual. de Poincaré dans  $N$ :  $h^{n-3}(N) \rightarrow h_2(N)$

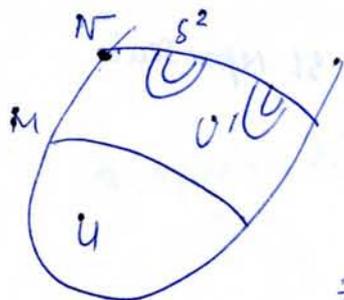
le facteur direct libre devient facteur direct libre dans  $\ker \beta^*$ .

$g_1, \dots, g_p$  base de  $H_2$   $g_i : S^2 \rightarrow N$  ds représentants

$g_i$  se plonge à  $D^3 \rightarrow X$

et on peut tout transformer en plongements disjoints

$$U = U' \text{ - disques, } \bar{N} = \partial \bar{U}$$



Il faut comparer  $H_*(\bar{N})$  et  $H_*(N)$

on suppose  $n > 6$ :

$$Z = N \times I \cup D_i^3 \times D^{n-3}$$

$$H_*(Z, N) = H_*(D_i^3, S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}^q & (3) \\ 0 & \text{si } n \end{cases}$$

$$H_* (Z, \bar{N}) = H_* (D^{n-3}, S^{n-4}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n-3) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$H_* N$  et  $H_* \bar{N}$  coïncident sauf en dim 2 et  $n-3$

donc  $H_2(\bar{N}) = H_2(N) / \text{facteur direct}$

$$H_3(\bar{N}) = H_3(N)$$

c'est vrai aussi pour  $n=6$

on a  $\bar{V} = V' \cup D_i^3$   $H_* (\bar{V}, V') = \begin{cases} \mathbb{Z} & (3) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

$$H^{n-3}(\bar{V}) = H^{n-3}(V')$$

$$0 \leftarrow H^{n-2}(\bar{V}, \bar{N}) \xleftarrow{\text{libre}} H^{n-3}(\bar{N}) \xleftarrow{12} H^{n-3}(N) / \text{Im } \beta$$

donc  $H^{n-3}(\bar{N}) \cong H^{n-3}(V')$

le noyau est libre donc  $H^{n-2}(\bar{V}, \bar{N}) = 0$  ce qui achève la démon. du lemme.

Th de la cobordisme orienté

$$\left[ \begin{array}{l} W^n \text{ non compact} \quad \partial W = V \text{ Compact} \\ \pi_1 W = \pi_1 V = 0 \quad W \text{ st } \perp \text{ connexe } \tilde{\text{à l'∞}} \\ H_*(W, V) = 0 \quad n \geq 6 \\ \Rightarrow W \cong V \times \mathbb{R}^+ \\ \text{diff} \end{array} \right.$$

methode : mettre  $\perp$  bord  $\tilde{\text{à}} W$ .

$H_*(W) = H_*(V)$  st de type fini car V Compact

Donc  $\exists$  1 variété compact  $\bar{W}$  tq  $\partial \bar{W} = V \cup V'$   
 $W$  diff  $\tilde{\text{à}} \bar{W} - V'$

$\bar{W}$  vérifie les hypothèses du h cobordisme  
 en effet  $V'$  st  $\perp$ -connexe

$H_*(\bar{W}, V) = H_*(W, V) = 0$  (Poincaré)  
 $H^*(\bar{W}, V) = 0$  (coef universels)

Dualité de Poincaré  $H_*(\bar{W}, V') = 0$

Donc  $\bar{W} \cong V \times [0, 1]$   
 $V' \cong V \times 1$

$g|_W : W \xrightarrow{\cong} V \times ]0, 1[$

Remarque:  $H_*(W, V) = 0 \Leftrightarrow V \hookrightarrow W$  st l'eq. d'homotopie

(la retraction de  $W$  sur  $V$  n'est pas propre  
 $\Rightarrow$  nécessité de l'hypothèse de  $\perp$ -connexe  $\tilde{\text{à}} l'∞$  pour garantir ce qui se passe  $\tilde{\text{à}} l'∞$ )

Notion d'équivalence d'homotopie propre

$C \partial \partial a$

$X$  et  $Y$  2 espaces loc. compacts

$f, g: X \rightarrow Y$  propres

$f$  et  $g$  propres homotops  $\Leftrightarrow^{\text{def}}$   $\exists F_t$  homotopie  $F_t$  propre  $\forall t$

$X \xrightarrow{f} Y$   $f$  est l'éq. d'homotopie propre  $\Leftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} 1) f \text{ propre} \\ 2) \exists g: Y \rightarrow X \text{ propre tq} \\ f \circ g \text{ prop. homotope à } id_Y \\ g \circ f \text{ prop. homotope à } id_X \end{array} \right.$

ex:  $\mathbb{R}^n$  a le type d'homotopie de  $\mathbb{P}$   
mais pas le type d'hom. propre de  $\mathbb{P}$

hypothèse pour le th de h. cobords me orient:  $W$  et  $V \times \mathbb{R}_+$  ont m<sup>e</sup> type d'hom. propre

Soit en effet

$W \xrightarrow{f} V \times \mathbb{R}_+$  ch. p.  $\Rightarrow W$  est  $\neq$  connexe à l' $\infty$ .  
et  $W$  a le type d'homotopie de  $V$

Rem:  $X$  non compact  $K \subset K'$  compacts

$X - K' \hookrightarrow X - K$

$\pi_0(X - K') \rightarrow \pi_0(X - K) \Rightarrow$  système projectif  $\pi_0(X - K)$   $K$  compact de  $X$

Ens. ds bouts de  $X$  =  $\varprojlim_K \pi_0(X - K)$

$X$  a 1 bout  $\Leftrightarrow \forall K, \exists K' \supset K, \pi_0(X - K')$  a 1 seul élém.

ex:  $\mathbb{R}$  a 2 bouts

Si  $f$  est 1 e.h.p. de  $X \rightarrow Y$   
appl. propre

$f$  induit  $\{\text{bords } X\} \rightarrow \{\text{bords } Y\}$

Si  $f$  est 1 e.h.p. alors  $\{\text{bords de } X\} \xrightarrow{\text{bij.}} \{\text{bords } Y\}$

Comparaison de 2 th de h. cobordisme :

$$W \stackrel{\text{e.h.}}{\sim} V \times I \Rightarrow W \stackrel{\text{diff}}{\simeq} V \times I$$

$$W \stackrel{\text{e.h.p.}}{\sim} V \times \mathbb{R}_+ \Rightarrow W \stackrel{\text{diff}}{\simeq} V \times \mathbb{R}_+$$

Théorème de scindement :  $n \geq 6$

Soit  $W^n$  1 variété diff. non compacte  
 $V$  Compacte |  $\pi, V=0.$

si  $W$  a le type d'homotopie propre de  $V \times \mathbb{R}$

Alors  $W$  est difféom. à  $V \times \mathbb{R}$

Si on veut trouver  $W$  comme un intérieur d 1 variété compact  $\bar{W} \Rightarrow \bar{W}$  a 2 cpts connex de bord  
Car  $\mathbb{R}$  a 2 bords

$$\text{Soit } \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow[\cong]{\text{e.h.p.}} & V \times \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & f \text{ propre} \end{array}$$

on prend 1 valeur régulière de  $f$ .

$$f \geq a \text{ et } f \leq a \rightarrow W_+ \text{ et } W_- \quad u = \bar{f}^{-1}(a)$$

$$H_x(W, u) = H_x(W_+, u) \oplus H_x(W_-, u)$$

$\uparrow$   
type fini car  $W$  a le t.h. de  $V$  compact  $\Rightarrow H_x(W)$  de t.f  
 $H_x(U) \text{ --- } (U \text{ compact})$

Donc  $H_x(W_+, u)$  de type fini et donc  $H_x(W_+)$  de t.f.

$\Rightarrow \exists V_+ \text{ \& } \text{bord pour } W_+$   
 et  $V_- \text{ --- } W_-$

et  $W$  est diff'om à  $\text{int}(\bar{W})$  avec  $\partial \bar{W} = V_+ \cup V_-$

$\bar{W}$  est 1 h. cobordisme entre  $V_-$  et  $V_+$ ? exercice

$X \rightarrow Y$  ...  
 $\exists V \xrightarrow{H_0} W$   
 $\exists W \xrightarrow{H_0} V$

la  $\mathbb{R}^n$  est le type de homotopie de  $E$   
 ...  
 $\alpha = V, \pi$

... : transformation de cobordisme

...  
 $\mathbb{R}^n \times V \cong \dots$   
 $\mathbb{R}^n \times V \cong \dots$



...  
 $(U, W) \times H \oplus (U, W) \times H = (U, W) \times H$   
 $(U, W) \times H \oplus (U, W) \times H = (U, W) \times H$   
 $(U, W) \times H \oplus (U, W) \times H = (U, W) \times H$



$E(A)$  <sup>def</sup> = sous-groupe engendré par les matrices élémentaires

on va montrer que c'est le sous-groupe distingué.

on a donc  $A \sim B \Leftrightarrow A = E_1 B E_2$   $E_i \in E(A)$

- La multiplication à droite par  $E \in E(A) \Leftrightarrow$  faire des opérations élémentaires sur les colonnes de  $B$ .

à gauche  $\Leftrightarrow$  sur les lignes

opération élémentaire : ajoutez une combinaison linéaire de colonnes à une colonne.

ex: 
$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P+Q \\ Q \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P+Q \\ -P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix}$$

on n'a pas exactement les substitutions de lignes et colonnes.

Lemme :  $AB \sim BA$ .

$A, B \in GL(n, \Lambda)$

on regarde ds  $GL(2n, \Lambda)$ :

$$\left( \begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc} AB & A \\ 0 & I \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc} 0 & A \\ -B & I \end{array} \right)$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc} 0 & A \\ -B & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array} \right)$$

et de  $\hat{m}$

$$\left( \begin{array}{cc} BA & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc} B & 0 \\ 0 & A \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array} \right)$$

Lemme  $[E(\Lambda)$  est le sous grpe des commutateurs de  $GL(\Lambda)$ ]

deux

$$BAB^{-1} \sim A$$

$$XAX^{-1} = E, AE_2$$

$$[A, B] = AB\bar{A}^{-1}\bar{B}^{-1}$$

$$\Rightarrow D(GL(\Lambda)) \subset E(\Lambda)$$

$AB \sim BA \Rightarrow E(\Lambda)$  est (sous grpe distingué)

en effet  $(XE)\bar{X}^{-1} \sim \bar{X}^{-1}(XE) = E$   
 $\Rightarrow XE\bar{X}^{-1} = E, EE_2$

$[A, B] = AB\bar{A}^{-1}\bar{B}^{-1} = E, \underbrace{BAE_2(BA)^{-1}} = E, E_3 \in E(\Lambda)$

$$I + aE_{ij} = [I + aE_{ik}, I + aE_{kj}]$$

dé que  $k \neq i \neq j$

donc  $E(\Lambda) \subset D(GL(\Lambda))$

$$K_1(\Lambda) = GL(\Lambda) / E(\Lambda) \text{ abélianisé de } GL(\Lambda)$$

Soit  $G$  sous grpe de  $\Lambda^*$  (units de  $\Lambda$ ) ( $= GL(1, \Lambda)$ ) donc  $G \subset GL(\Lambda)$ .

$$K_G(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} K_1(\Lambda) / G$$

$$w. G = \{-1, 1\} \quad \bar{K}_1(G) = K_1(\Lambda) / \{\pm 1\}$$

on peut alors prendre n'importe quelle permutation des lignes ou colonnes

ex:  $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi] \quad \pi \in \Lambda^* \quad \pi$  grpe.

$$\{ \pi, -\pi \} \subset \Lambda^*$$

$$Wh(\pi) = K_1(\Lambda) / \{ \pm \pi \} \quad \text{grpe de Whitehead de } \pi.$$

quand  $\Lambda$  est commutatif on a

$$\det : GL(\Lambda) \rightarrow \Lambda^*$$

en fait :  $\det : K_1(\Lambda) \rightarrow \Lambda^*$

Section évidente

$$0 \rightarrow SK_1(\Lambda) \rightarrow K_1(\Lambda) \xrightarrow{\det} \Lambda^* \rightarrow 0$$

ex: dans le cas d 1 corps,  $K_1(\Lambda) \xrightarrow{\det} \Lambda^* = \Lambda - \{0\}$

$K_1(\Lambda)$  est donc 1 generalisation du determinant.

$$GL(\Lambda) \xrightarrow{\tau} K_1(\Lambda)$$

$$GL(\mathbb{Z}[\pi]) \xrightarrow{\tau} Wh(\pi)$$

$\tau(A)$  = torsion de la matrice A.

$$\text{on a } \tau(AB) = \tau(A) + \tau(B).$$

$\Lambda$  module libre et stablement basé:  $(M, \mathcal{B})$   $\mathcal{B}$  famille de bases de  $M$  tq

$$\forall b, b' \in \mathcal{B} \quad \langle b/b' \rangle \in GL(\Lambda) \text{ et } \tau(\langle b/b' \rangle) = 0$$

cad

$$(M, b) \oplus (\Lambda^2, \beta)$$

$$(M, b') \oplus (\Lambda^2, \beta)$$

passage par opérations élémentaires

(on a d'abord stabilisé  $M$  en ajoutant  $\Lambda^2$ )

Soit  $f: M \rightarrow M'$  isom de modules basés

torsion de  $f$  est définie par  $\tau(\langle b'/f|b \rangle) \in K_1(\Lambda)$  (ne dépend pas du choix de  $b$  et  $b'$ )

Notion d'isomorphisme simple entre 2 modules basés:  $\tau(f) = 0$ .

$$\tau(f) = 0 \Leftrightarrow \exists b, b' \text{ bases des familles } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}' \text{ tq } \langle b'/f|b \rangle = \text{id (stablement)}$$

en effet si  $\tau(f) = 0$   $\langle b'/f|b \rangle$  est 1 produit de matrices élémentaires

et on change  $b'$  par ces matrices élémentaires -

Complexe de  $\Lambda$ -modules basés.

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

$$d_{i-1} \circ d_i = 0$$

chaque  $C_i$  est libre et basé

Isom de complexes basés est simple si

$$\begin{array}{ccc}
 f_i : C_i \rightarrow D_i & & \\
 d_i \downarrow & \downarrow d_i & \text{Commute} \\
 C_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} D_{i-1} & & \text{et } \underline{f_i \text{ est isom. simple } \forall i}
 \end{array}$$

Donc

$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est isom. simple si on peut stablement choisir des bases de  $C_i$  et  $D_i$  de telle sorte que  $\langle f \rangle = \text{id}$  et  $\langle d_i \rangle = \langle d'_i \rangle$

- Théorème pour 1 Complexe:

Soit 1 Complexe acyclique  $0 \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ .

Lemme  $\left[ \begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ 1 Complexe acyclique de } \Lambda\text{-modules} \\ B_i = \text{Im}(C_i) \text{ sont stablement libres} \\ \text{et } \exists \delta_i : C_i \rightarrow C_{i+1} \text{ tq } d\delta + \delta d = 1 \text{ et en plus } \delta^2 = 0 \end{array} \right.$

$B_i$  stablement libre par récurrence

$M$  1 module est stablement libre  $\Leftrightarrow \exists$  2 modules libres de t.f.  $F_1$  et  $F_2$  tq

$$M \oplus F_1 = F_2$$

1 module stablement libre est projectif:

$N \xrightarrow{f} M$  surj. et  $M$  stablement libre  $\Rightarrow \exists$  1 section de  $f$

en effet

$$N \oplus F_1 \rightarrow M \oplus F_1$$

$\downarrow \text{id}$

et sur la base de  $F_2$  on choisit l'antécédant et on construit la section

recurrence

$$C_0 \rightarrow 0 \quad C_0 = B_0 \Rightarrow \underline{B_0 \text{ libre}}$$

$$0 \rightarrow B_i \rightarrow C_i \xrightarrow{d_i} B_{i-1} \rightarrow 0$$

$\swarrow S_i \text{ section}$

$$C_i = B_i \oplus S_i B_{i-1}$$

$$B_{i-1} \oplus F_1 = F_2 \text{ libre (recurrence)}$$

$$\underbrace{C_i \oplus F_1}_{\text{libre}} = \underbrace{B_i \oplus F_2}_{\text{libre}}$$

donc  $B_i$  est stable libre

Soit  $S: C_i \rightarrow C_{i+1}$

$$\begin{matrix} B_i & B_{i+1} \oplus S_{i+1}(B_i) \\ \oplus S_i(B_{i-1}) & \end{matrix}$$

$$S \text{ a la matrice } \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline S_{i+1} & 0 \end{array} \right) \text{ et on a } S^2 = 0$$

Vérification  $dS + Sd \Big|_{C_i}$

$$d_i \cdot S_i = \text{id}_{B_{i-1}} \text{ par def de } S_i$$

$$\text{sur } B_i \quad Sd \Big|_{B_i} = 0$$

$$dS + Sd \Big|_{B_i} = d_{i+1} S_{i+1} \Big|_{B_i} = \text{id}_{B_i}$$

$$\text{sur } S_i B_{i-1} \quad Sd \Big|_{S_i B_{i-1}} = \text{id}_{S_i B_{i-1}} \text{ et } dS \Big|_{S_i B_{i-1}} = 0$$

Le lemme est donc démontré

PF

Complexes stablement équivalents

Complexes triangulaires élémentaires

$$0 \rightarrow \Lambda^r \xrightarrow{id} \Lambda^r \rightarrow 0$$

$C_{i+1} \quad C_i$

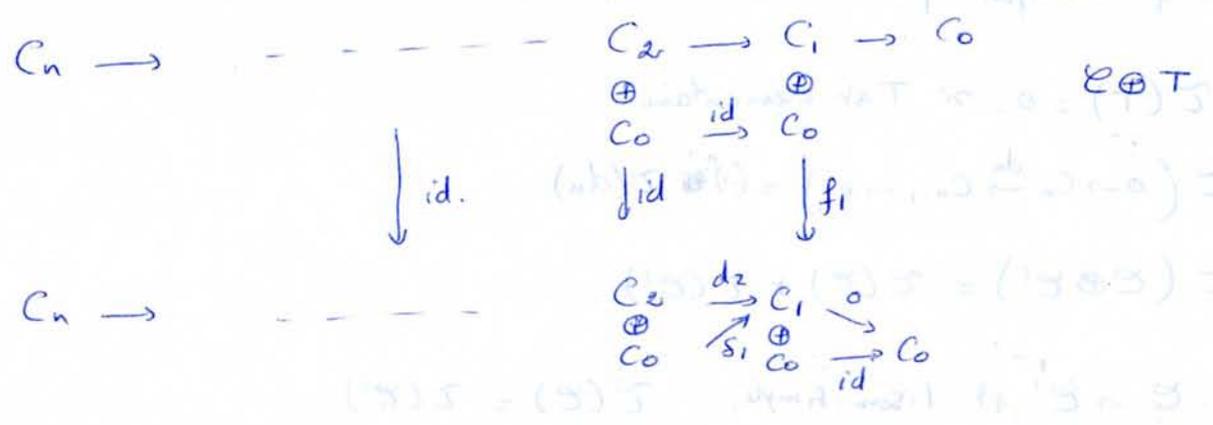
Complexes triangulaires :  $T = \bigoplus_f T_f$   $T_f$  triangulaire élémentaire

Def : 2 Complexes basés  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont stablement équivalents  $\Leftrightarrow T, T'$  Complexes triangulaires tq  $\mathcal{C} \oplus T$  et  $\mathcal{D} \oplus T'$  soient simplement isomorphes.

Pb : Etude des classes d'éq. stable de Complexes basés acycliques. (en bif. avec  $K_1(\Lambda)$ )

Lemme :  $C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$  basés et acyclique stablement équivalent à  $C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \begin{bmatrix} C_2 \\ \oplus C_0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 \oplus \delta_1} C_1 \rightarrow 0$

deux :



$f_1 : C_1 \oplus C_0 \rightarrow C_1 \oplus C_0$  a pour matrice

	$C_0$	$C_1$
$C_0$	0	$d_1$
$C_1$	$s_1$	id.

on obtient l'isomorphisme simple

en effet  $f_1$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ \delta_1 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & d_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \delta_1 & I \end{pmatrix}$

et  $\tau(f_1) = 0$  n' a pas place dans  $\bar{K}_1(\Lambda) = K_1(\Lambda) / \{\pm 1\}$   
 eqfd.

Par récurrence  $\mathcal{E}$  est stablement équivalent à 1 complexe  
 réduit à 2 dim consécutives

on aura donc

$$\begin{matrix} C_1 & C_0 \\ \oplus & \oplus \\ C_3 & C_2 \\ \oplus & \oplus \\ \vdots & \oplus \\ & \oplus \\ & \vdots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} C_{\text{imp}} & \xrightarrow{(d+\delta)|_{C_{\text{imp}}}} & C_{\text{pair}} \\ = \oplus C_{2i+1} & & \oplus C_{2i} \end{matrix}$$

Def:  $\tau((d+\delta)|_{C_{\text{imp}}}) \in \bar{K}_1(\Lambda)$

Def:  $\left[ \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ complexe basé acyclique, } \delta \text{ une contraction, on pose} \\ \tau(\mathcal{E}) = \tau((d+\delta)|_{C_{\text{imp}}}) \in \bar{K}_1(\Lambda) \end{array} \right]$

Rem: il faut vérifier que  $\tau(\mathcal{E})$  ne dépend pas de  $\delta$ . c'est vrai!

on a  $\tau(T) = 0$  si  $T$  est élémentaire

$$\tau(0 \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow 0) = (-1)^{n-1} \tau(d_n)$$

$$\tau(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}') = \tau(\mathcal{E}) + \tau(\mathcal{E}')$$

si  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  est l'isom. simple,  $\tau(\mathcal{E}) = \tau(\mathcal{E}')$

et si  $\mathcal{E}$  stable  $\simeq$  à  $\mathcal{E}'$   $\tau(\mathcal{E}) = \tau(\mathcal{E}')$

$\tau$  induit l'appl. Clans stables de Complexes bas' acycliques  $\longrightarrow \bar{K}_1(\Lambda)$

Proposition :  $\tau$  est l'bijection

surjectivité évidente avec 1 complexe  $0 \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow 0$

injectivité:

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  tq  $\tau(\mathcal{C}) = \tau(\mathcal{D})$

Soit  $\mathcal{C}' : 0 \rightarrow C'_n \xrightarrow{\alpha} C'_{n-1} \rightarrow 0$   $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}'$

et  $\mathcal{D}' : 0 \rightarrow D'_n \xrightarrow{\beta} D'_{n-1} \rightarrow 0$   $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$

$\tau(\alpha) = \tau(\beta)$

on peut toujours assumer  $\dim C'_n = \dim D'_n$ . quitte à ajouter 1 complexe trivial

Donc  $C'_n \cong D'_n$ .

$$0 \rightarrow C'_n \xrightarrow{\alpha} C'_{n-1} \rightarrow 0$$

$\parallel$

$$0 \rightarrow D'_n \xrightarrow{\beta} D'_{n-1} \rightarrow 0$$

$\beta\alpha^{-1}$  est l'isom. simple.

Donc  $\mathcal{C}'$  simpl<sup>t</sup> isom. à  $\mathcal{D}'$   
 $\Rightarrow \mathcal{C} \sim \mathcal{D}$  stable<sup>t</sup>  $\sim$  à  $\mathcal{D}$ .

$K$  est contractile:



$K$  a le t.h. s du point  $e$

dans la suite  $L$  cas  $K$  sign. relative d'après

$\tau(L) = \pi_1(K) = \pi_1$

$L, \tilde{L}$  de base

$C_n(\tilde{L}, L)$  est un  $\mathbb{Z}[\pi_1]$ -module

(il agit de manière  $\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$ )

$\mathbb{Z}[\pi_1]$  complexe base

acyclique

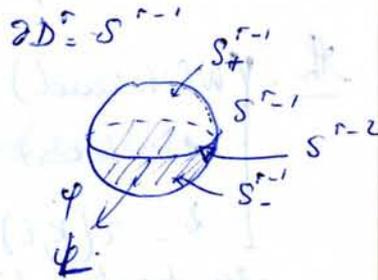
$K$  complexe fini,  $L$  CW compl. connex

2 "rel. d'~":

1.  $L \hookrightarrow K$  équivalence d'homotopie  
ou  $K$  se rétracte par déf sur  $L$   
ou  $\pi_i(K, L) = 0$ .

2. Si  $K = L \cup_{\varphi} D^r$   $\varphi: S^{r-1} \rightarrow L$

on dit que  $K$  est obtenu à partir de  $L$  par une expansion élémentaire -  
Clair que  $L \hookrightarrow K$  est une ~ d'homotopie  
on passe de  $K$  à  $L$  par une contraction



def: On dit que  $L \hookrightarrow K$  est une équivalence d'homotopie simple, si ~~l'on~~ on passe de  $L$  à  $K$  par une suite finie d'expansions et de contractions élémentaires (A.H.S) ( ~ d'homotopie simple  $\rightarrow$  ~ d'homotopie ) - Réciproque?

Rq: Si  $\star \hookrightarrow K$  mais on ne peut pas forcément passer de  $K$  à  $\star$  par seulement des contractions -  
ex: Bing.



$K$  - Complexe dim 2 -

$K$  est contractile:  
une autre construction



Cylindre plein



(= rétraction de  $D^3$  de  $K$ ) -  $\pi$

$K$  a le t.h.s. du point =

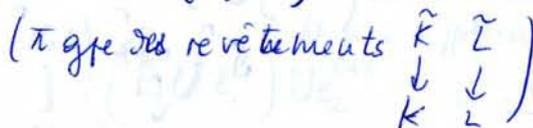


dans la suite.  $L \hookrightarrow K$  équivalence d'homotopie

$\pi_1 L \cong \pi_1 K = \pi$

$\tilde{K}, \tilde{L}$  rev. univ.

$C_{\star}(\tilde{K}, \tilde{L})$  est un  $\mathbb{Z}[\pi]$ -module.



$\mathbb{Z}[\pi]$ -complexe basé. base donnée par les cellules de  $(K, L)$  en t.h.s dim -

acyclique car  $\tilde{L} \hookrightarrow \tilde{K}$  ~ d'homotopie, les  $H_{\star}$  sont nuls

$$\tau(K, L) = \tau(C_*(\tilde{K}, \tilde{L})) \in Wh(\pi) \quad \text{d\u00e9f.}$$

Rq :  $\pi \xrightarrow{\varphi} \pi$   $\varphi$  autom. int\u00e9rieur  
 alors  $\varphi_* : K_1(\mathbb{Z}[\pi]) \rightarrow K_1(\mathbb{Z}[\pi])$  est = identit\u00e9 (ab\u00e9lien)  
 donc on peut prendre n'importe quel  $\varphi$  base de  $L$  pour d\u00e9finir les  $\tilde{\sigma}_i$ .

Th : (Whitehead)  $L \hookrightarrow K$  une  $\sim$  d'homotopie. Il y a \u00e9quivalence entre :

1.  $L \hookrightarrow K$   $\sim$  d'h. simple
2.  $\tau(K, L) = 0$  ds  $Wh(\pi)$  -

en particulier si  $Wh(\pi) = 0$  les 2 notions sont identiques - (par ex  $\mathbb{C}P^2$  simplement connexe) -

d\u00e9monstration

1.  $\Rightarrow$  2. montrer que ds chaque cas \u00e9l\u00e9m, la torsion est nulle :

$$K = L \cup D^r$$

$$K-L \text{ a 2 cellules } \begin{cases} \text{dim } r-1 & \mathbb{C} = (S_+^{r-1}, S^{r-2}) \xrightarrow{\psi} (K, L) \\ \text{dim } r & (D^r, S^{r-1}) \rightarrow L \cup e^{r-1} \end{cases}$$

$$C_*(\tilde{K}, \tilde{L})$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[\pi] \xrightarrow{\pm 1} \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow 0$$

le bord est clairement  $\pm 1$

$$\tau(K, L) = \tau(\pm 1) = 0.$$

2  $\Rightarrow$  1.

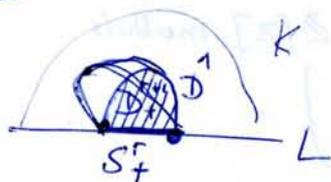
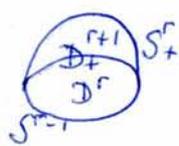
Lemme :  $K = L \cup e^r \cup e^{r+1} \cup e^{r+2} \dots$   $L \hookrightarrow K$   $\sim$  d'homotopie

Il existe  $K'$  et  $L'$  simplement \u00e9quivalents \u00e0  $K$  et  $L$

$$\text{avec } K' = L' \cup e^{r+1} \cup e^{r+2} \cup e^{r+3} \dots$$

d\u00e9m : avec une seule cellule de dim  $r$

$$\chi : (D^r, S^{r-1}) \rightarrow (K, L)$$

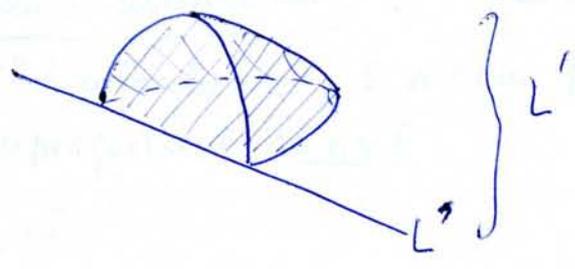


$$K' = K \cup D^{r+2} \quad \text{on a } K' \xrightarrow{\psi} K$$

$$L' = L \cup S_+^{r+1}$$

$$\psi|_{S_+^r} = \chi|_{S_+^r}$$

$L'$  s'obtient par une expansion \u00e9l\u00e9mentaire \u00e0 partir de  $L$  95



proove le lemme

Donc ops:

$$K = L \cup_{\varphi_i} e_i^r \cup_{\psi_j} e_j^{r+1}$$

ops (convexité) que les  $e_i$  sont attachés au point base

$$C_*[K, \tilde{L}]$$

$$\begin{matrix} \xi'_j \\ \mathbb{Z}[\pi] \end{matrix} \xrightarrow{\partial} \begin{matrix} \xi_i \\ \mathbb{Z}[\pi] \end{matrix}$$

$\partial$  isomorphisme  
 $\tau(\partial) = 0$  de  $\text{Wh}(\pi)$ .

on a forcément au tant de  $e^r$  que de  $e^{r+1}$

une expansion élém. de  $\partial$  rajoute:

$$\begin{matrix} \mathbb{Z}[\pi]^p & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z}[\pi]^p \\ \oplus & & \oplus \\ \mathbb{Z}[\pi] & \xrightarrow{\pm 1} & \mathbb{Z}[\pi] \end{matrix}$$

Donc o.p.s. que  $\partial$  est un produit de matrices élémentaires -

- $\pm g$   $g \in \pi$  portant sur  $\xi'_1$ : on modifie l'application d'attache de  $e_1$  en changeant l'orientation (pr changer le signe) -

[cf action de  $\pi_1$  sur  $\pi_k$   $x \mapsto \alpha \cdot x$  - même chose] -

•  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm g & 1 \end{pmatrix}$   $x \in \mathbb{Z}[\pi]$

produit des  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm g & 0 \end{pmatrix}$  ←  $x = \sum n_j g_j$

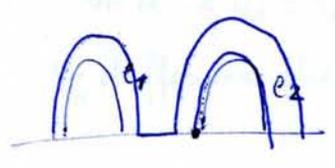
$$e_1^{r+1} \quad e_2^{r+1} \quad \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{matrix} \mathcal{D}^{r+1} \longrightarrow K$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{bmatrix} \mathcal{D}^{r+1} \text{ coupé en 2} \longrightarrow K$$

correspondant à  $\pm g e_2$   $\pm g \psi_2$

c'est une application caractéristique.

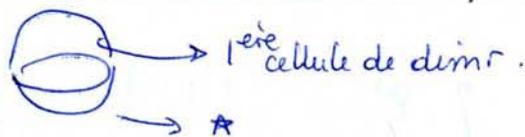
$$\left( \begin{matrix} L \cup e_i^r \\ U e_j^{r+2} \end{matrix} \right) \cup$$



2 descriptions de  $K/\mathbb{Z}$  homotops

Donc ops  $\pi_{r+1}(K, L \cup \{e_j^r\}) \xrightarrow{\partial} \pi_r(L \cup e_i^r, L)$   
que  $\partial$  est l'identité -

$e^{I+1}$   
 $\rightarrow 1$



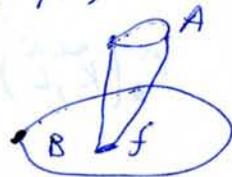
donc  
par contraction  
élémentaire :



Req -  $\tau(K, L)$ , dépendance / la structure cellulaire  
si  $K'$  et  $L'$  sont des subdivisions de  $K$  et  $L$ , alors  $\tau(K, L) = \tau(K', L')$ .

-  $L \subset K$ .  
pour des raisons  
techniques

si  $f: A \rightarrow B$   $\sim$  d'htopie cellulaire  
 $M(f) = A \times I \cup_f B$  structure cellulaire  
 $B$  et  $A \times 0$  sous complexes de  $M(f)$ .



$B \hookrightarrow M(f) \sim$  d'htopie simple.

$A \times 0 \hookrightarrow M(f)$  in prop. htopiques que  $A \rightarrow B$ ,  
donc  $\sim$  d'htopie

donc on peut définir  $\tau(f) = \tau(M(f), A \times 0)$   
 $\tau(f) = 0$

## Torsion d'un h. cobordisme

$W^n$  diff cpcte, orientée, convexe.

$\partial W = V_0 \cup V_1$   $V_i \hookrightarrow W \sim$  d'htopie

théorème (Whitehead)  $C^1$ -triangulation:

$X^n$  diff cpcte (compact) fini  
 $\exists$  un complexe simplicial  $K$  et  $f: K \rightarrow X$  homéomorphisme de classe  $C^1$   
 sur chaque simplexe.  
 Si  $f_0$  et  $f_1$  sont 2  $C^1$ -triangulations  $\Rightarrow \exists$  une subdivision de  $K_0$   
 une de  $K_1$  simplicialement isomorphes.

(à bord: le bord est un sous complexe)

permet de définir  $\tau(W, V_0) \in Wh(\pi_1 W)$

Théorème du  $\mathcal{A}$ -cobordisme

Si  $W^n$  h-cobordisme, si  $W$  est un produit alors  $\tau(W) = 0$   
 et réciproquement si  $n \geq 6$

dem

1.  $W \cong V_0 \times I$

Une  $C^1$  triangulation de  $V_0$ ,  $L \times I$   $C^1$  triang. de  $W$ .  
 $L \times 0 \hookrightarrow L \times I \sim$  d'hyper simple  $\rightarrow \tau(W) = 0$

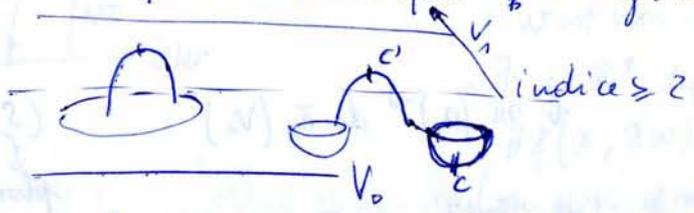
2. Idée

$f: W \rightarrow I$  f. de Morse ordonnée

- suppression des pts critiques d'indice 0, n
- échange indice 1  $\mapsto$  indice 3
- après ts les var. de niveau ont  $\hat{m} \pi_1$ .
- échange  $2 \mapsto 2+1$ .

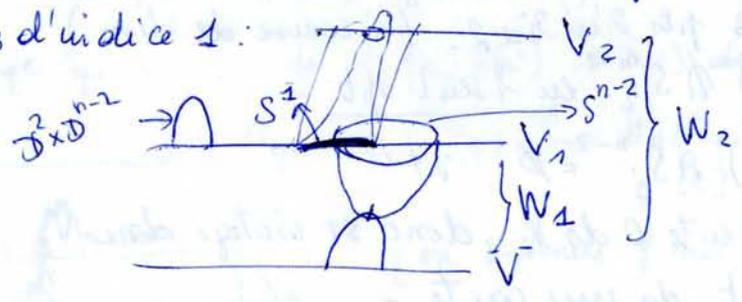
$\rightarrow$  f a uniquement des points critiques  $2, 2+1$ .

pts critiques d'indice 0, n identique  $\#$  : arguments de connexité ..



$V_1$  connexe - les comp connexes créés par les pts d'indice 0  
 $\rightarrow$  pt critique d'ind 1 c' atq 1 trajectoire de c' à c -

pts critiques d'indice 1 :



au niveau  $V_2$ , ce n'est plus simplement connexe

$W$  type d'homotopie de  $W_2 \cup_{\lambda \geq 3} e^\lambda \Rightarrow \pi_1(W_2) \cong \pi_1(W) = \pi$

$\pi_1(V_2) \cong \pi_1(W_2)$  ( $W_2$  obt. à partir de  $V_2$  en rajoutant tout de cellules  $n-1, n-2$  grands) -

on a  $\pi_1 V_1 \cong \pi_1 W_1 \rightarrow \pi$

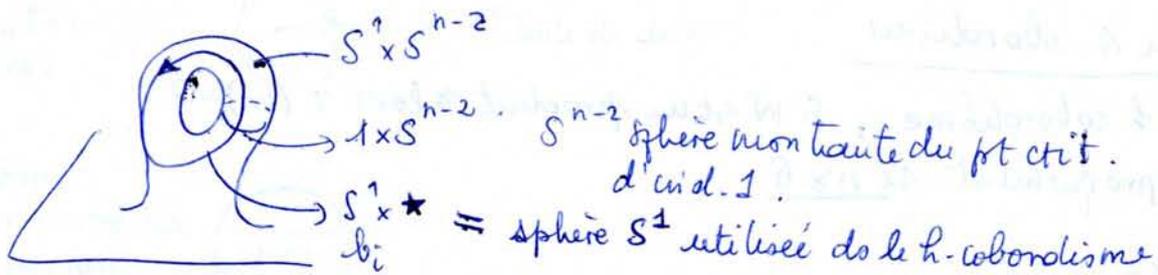
$W_1$  difféo morphe à  $V \times I \cup D^1 \times D^{n-1}$

plongst des sphères de  $V$  -

$V$  connexe



$V \times I \# S^1 \times D^{n-1} \Rightarrow V_1 \cong V_0 \# (S^1 \times S^{n-2})_i$



$$\pi_1 V = \pi = (a_1 \dots a_p; R_1 \dots R_q)$$

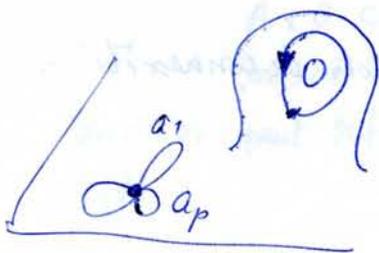
$$\pi_1 V_1 = (a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_r; R_1 \dots R_q)$$

$S_1 \dots S_s$  classes (à conjugaison près) de sphères descendantes des pts critiques d'indice 2.

$$\pi_1 V_2 = (a_1 \dots a_p; b_1 \dots b_r; R_1 \dots R_q, S_1 \dots S_s) = (a_1 \dots a_p; R_1 \dots R_q) \cdot \pi_1 W$$

donc  $b_i = m_i (a_1 \dots a_p)$  ds  $\pi_1 V_2 = \pi$

dans  $\pi_1 V_2$  on n'a pas ça -



$$b_i m_i (a_1 \dots a_p)^{-1} \text{ ds } \pi_1(V_1)$$

$(S^1 \rightarrow V_1)$   
plongement

on a trouvé  $\varphi_i: S^1 \times D^{n-2} \hookrightarrow V_1$

etq 1-  $\varphi_i$  disjoints entre eux & disjoints des nappes descendantes ds pts d'indice 2. (à cause de dim)

2-  $\varphi_i(S^1 \times 0) \cap S_i^{n-2}$  en 1 seul pt.

3-  $\varphi_i(S^1 \times 0) \cap S_j^{n-2} = \emptyset \quad i \neq j$

3-  $\varphi_i$  représente 0 ds  $V_2$ , donc est isotope ds  $V_2$  au plongement ds une carte -

m'fui de dim que ds le cas simplement connexe

pts critiques d'indice 2.

Lemme  $f: W \rightarrow I$  fu de Morse n'ayant de pts critiques que ds  $[2, n-2]$  ( $n-4 \leq 2 \leq n-2$ ), on peut la déformer en  $f'$  n'ayant que des pts critiques d'indice  $\in [2+1, n-2]$  -

Lemme technique

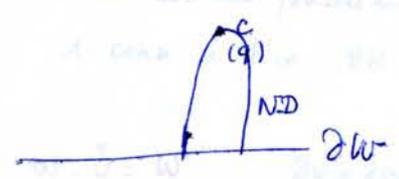
$W^n$  pas forcément compacte  
 $\partial W$  compact  
 $n \geq 5$   $W, \partial W$  1-conn.  
 $H_j(W, \partial W) = 0$   $j < k \leq n-3$ .  
 $H_k(W, \partial W)$  de type fini

$\Rightarrow \exists f: (W, \partial W) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$  fu de Morse propre  
 n'ayant que des pts critiques d'indice  $\geq k$   
 et (un nb. fini) de pts crit. d'ind.  $k$

dém (récurrence)

$f: (W, \partial W) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$   
 indices des pts critiques  $\geq q$ ,  $q < k$ .

on enlève les pts crit. d'indice  $q$ .  
 $\eta$   $\psi$  grad régulier



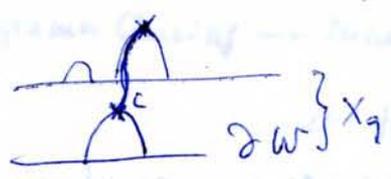
ND induit  $[c] \in H_q(W, \partial W) = 0$ .  
 $[c]$  bord d'une chaîne relative  
 $W$  est non compacte

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^+$  tq  $ND(c)$  nulle dans  
 $H_q(X, \partial W)$  où  $X = f^{-1}([0, \alpha])$ .  
 (on p.s. d non critique).  
 $X$  est cpct.  $\partial X = \partial W \cup \partial W'$

$f|_X$  n'a de pts critiques que d'indice  $\geq q$

$X_0 \subset X_q \subset X_{q+1} \subset \dots$  de  $H_q(X_q, \partial W)$   $ND(c)$  ~~de~~ vient de  $\partial$ :  $[c] \in \text{Im } \partial$ .

$$H_{q+1}(X_{q+1}, X_q) \xrightarrow{\partial} H_q(X_q, \partial W) \rightarrow [c]$$

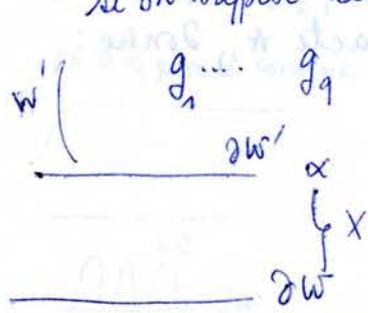


(on ordonne  $f$  sur le cob. cpct  $X$ )

$\rightarrow$  suppression de  $c$  avec un pt critique d'indice  $q+1$  dans  $X$ .

$f'$  obtenue sr propre (car  $X$  compact)  $\rightarrow$  elim. de tous les pts d'ind.  $< k$ .

si on suppose en plus  $H_k(W, \partial W)$  de type fini.



$g_1, \dots, g_q$  générateurs de  $H_k(W, \partial W)$ , représentés par des ND.  
 $\rightarrow \exists \alpha$  tq ces générateurs soient dans  
 $H_k(X, \partial W)$

donc  $H_k(X, \partial W) \rightarrow H_k(W, \partial W) \rightarrow 0$

$$H_j(w', \partial w') = H_j(w, x) \text{ par } 0$$

$$\partial w \subset x \subset w'$$

$$\Rightarrow H_j(x, \partial w) \rightarrow H_j(w, \partial w) \rightarrow H_j(w, x) \rightarrow H_{j-1}(x, \partial w)$$

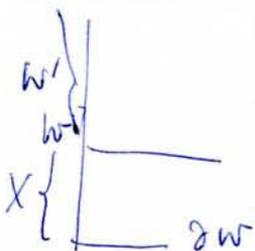
sur  $X$  pts crit. d'ind  $\geq k \Rightarrow H_j(x, \partial w) = 0$  pour  $j < k$ .

$$H_k(x, \partial w) \rightarrow H_k(w, \partial w) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow H_j(w', \partial w') = 0 \quad j \leq k$$

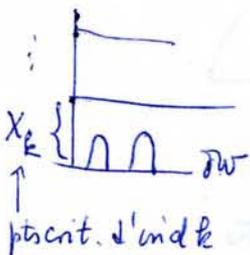
$\rightarrow$  nb fini de pts crit. d'ind.  $k$  (tous de  $X$  compact).

Complément ss les m hyp, si  $H_k(w, \partial w)$  est libre, on peut trouver  $f$  comme précédemment, de plus,  $f|_X$  n'a que des pts crit. d'indice  $k$ .



$$\text{et } H_j(w', \partial w') = \begin{cases} 0 & (j \leq k) \\ H_j(w, \partial w) & (j > k) \end{cases}$$

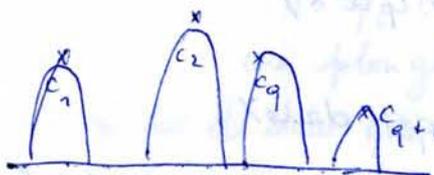
$g_1 \dots g_q$  base de  $H_k(w, \partial w)$



$H_k(X_k, \partial w)$  base par les ND des pts critiques ( $b$ ).

$$\text{et on a } H_k(X_k, \partial w) \xrightarrow{\text{isom}} H_k(w, \partial w) \rightarrow 0$$

$\exists$  b' autre base  $tq \begin{cases} i_* [b'_1, \dots, b'_q] \text{ isomorphisme} \\ i_*(b'_j) = 0 \quad j \neq 1 \end{cases}$



on les reordonne  $tq: f(c_1) \leq f(c_2) \dots \leq f(c_q) < f(c_{q+1}) \leq \dots$

on appelle  $X = f^{-1}([0, \beta])$

$$H_j(X, \partial w) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ H_k(w, \partial w) & j = k \end{cases}$$

ds la suite exacte  $\star$ , donne:

$$0 \rightarrow H_{k+1}(w, \partial w) \xrightarrow{\cong} H_{k+1}(w', \partial w') \xrightarrow{0} H_k(X, \partial w) \xrightarrow{\cong} H_k(w, \partial w) \rightarrow H_k(w', \partial w')$$

on a  $H_q(w, \partial w) = H_q(w', \partial w')$   $q \geq k+2$ , puis  $k+1$  d'après  $\star$ .



arg. que + haut (suite exacte du triple)  $\rightarrow H_{n-2} = 0$  et les autres inchaufes - ms c'taient nuls  $\rightarrow \square$

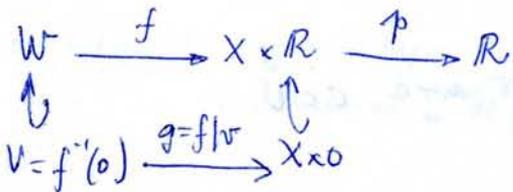
### théorème de scindement

$W^{n+1}$  connexe orientée,  $n \geq 5$

et  $f: W \rightarrow X \times \mathbb{R} \sim d'$ htopie propre. avec  $X$  compacte,  $\pi_1 X = 0$

$X$  var diff, ou top. mais ~~type d'htopie~~ complexe fini vérifiant la dualité de Poincaré: cplx de Poincaré dim  $n$ :  
 $\exists [X] \in H_n(X, \mathbb{Z})$  tq  $\cap [X]: H^p(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(X, \mathbb{Z})$

Alors  $\exists V$  de dim  $n$ , diff' et un difféo  $W \cong V \times \mathbb{R}$ .



on peut modifier loc.  $f$  en une  $\sim d'$ htopie propre tq prof ait 0 comme val. régulière.  
 ( $f$  transversalisée sur  $X \times 0$ ).

Si  $g$  est une  $\sim d'$ htopie on dit qu'on a scindé  $f$ .

$W$  a le type d'htopie de  $X$ . donc  $g \sim d'$ htopie  $\Leftrightarrow i \sim d'$ htopie.

$$\begin{aligned} W_+ &= f^{-1}(\mathbb{R}^+) \\ W_- &= f^{-1}(\mathbb{R}^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_*(W, V) &= H_*(W_+, V) \oplus H_*(W_-, V) \\ \parallel & \qquad \qquad \parallel \\ 0 & \Rightarrow \qquad \qquad 0 \end{aligned}$$

$f \sim d'$ htopie propre  $\Rightarrow W_+$  et  $W_-$  sont 1-connexes à l'infini.  
 $V$  simpl. connexe. (a le type d'htopie de  $X$ )  
 Van Kampen  $\Rightarrow W_+$  et  $W_-$  1-connexes.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\text{th du h-cob. ouvert d'un côté}) & \quad W_+ \cong V \times [0, \infty[ \cong \text{id sur } V \\ & \quad W_- \cong V \times ]-\infty, 0] \\ \Rightarrow W & \cong V \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

### autres types de th de scindement - exemple

th.  $f: W^n \rightarrow X \times S^1 \sim d'$ htopie,  $n \geq 6$ ,  $\pi_1 X = 0$

Alors  $f$  est scindable: on peut l'homotoper en  $f'$  sur  $X \times 1$ :

$$\begin{array}{ccc} f: W^n & \longrightarrow & X \times S^1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ V^{n-1} & \longrightarrow & X \times 1 \end{array}$$

$$f|_V: V \rightarrow X \text{ et } f'|_{W-V} \rightarrow X \times ]0, 1[ \sim d'$$
htopie.

### dém. du 1<sup>er</sup> th de scindement:

1.  $g = f|_V$  en tous cas, en dim maximale comme une  $\sim d'$ htopie ie.  $\deg g = 1$ .

$$\begin{aligned} [V] \in H_n(V, \mathbb{Z}) \\ [X] \in H_n(X, \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad g_* [V] = [X]$$

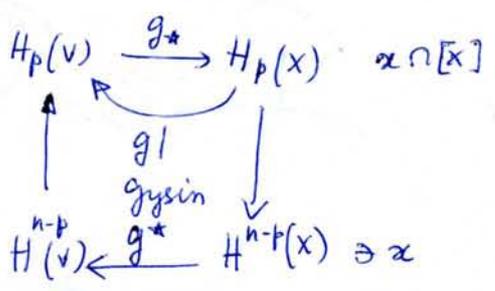
$$H_c^1(X \times \mathbb{R}) \quad \omega = 1 \times \alpha.$$

$[X]$  est duale de  $\omega$ .

$\alpha \in H_c^1(\mathbb{R})$  classe fondamentale.

$[V]$  est aussi duale de  $f^* \omega$ .

Structure homologique de  $g_*$   
 surjective en  $h_*$ :



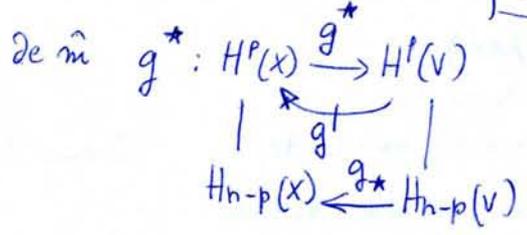
$g_* g_! = \text{deg } g \text{ Id}$

$g_!(\mathbb{Z}) = g^* \mathbb{Z}$

$g_* g_! (\mathbb{Z}) = g_* g^* \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap g_* [V] = \text{deg } g (\mathbb{Z})$

$\text{deg } g = 1 \Rightarrow g_* \text{ surjective } H_{p+1}(X, V) \rightarrow H_p(V) \xrightarrow{g_*} H_p(X) \rightarrow$

$\Rightarrow H_p(V) = H_p(X) \oplus K_p \quad (K_p = H_{p+1}(X, V))$

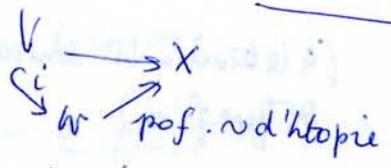


$g^! g_* = \text{Id}$

et de  $\hat{m}$

$H^p(V) = H^p(X) \oplus K^p$

ici



donc  $i_*$  a les  $\hat{m}$  (prop. de  $g_*$ )  
 elle ont les  $\hat{m}$  noyaux.

$H_{p+1}(W, V) \xrightarrow{i_*} H_p(V) \rightarrow H_p(W)$

décompositions invariants par dual. de Poinc.

$H^p(V) \cong H^p(X) \oplus K^p$   
 $\downarrow D_V \quad \downarrow D_X \quad \downarrow \mathbb{Z}$   
 $H^{n-p}(V) \cong H^{n-p}(X) \oplus K_{n-p}$   
 commutatif.

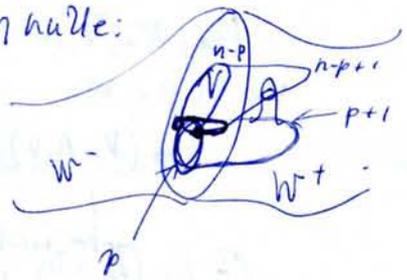
de  $\hat{m}$

$K_p = H_{p+1}(W, V) = H_{p+1}(W_+, V) \oplus H_{p+1}(W_-, V)$   
 $K^{n-p} = H^{n-p}(W, V) = H^{n-p}(W_+, V) \oplus H^{n-p}(W_-, V)$

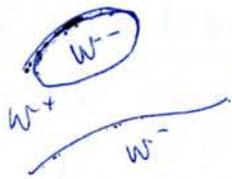
la dual. de Poincaré induit des isom :

$H_{p+1}(W_+, V)$   
 $H^{n-p+1}(W_+, V)$  ont une intersection nulle.

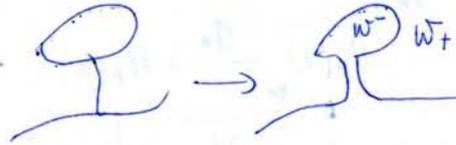
cf l' $\Omega$  des var. bordées  
 $\rightarrow \Omega$  nulle ds  $V$ .



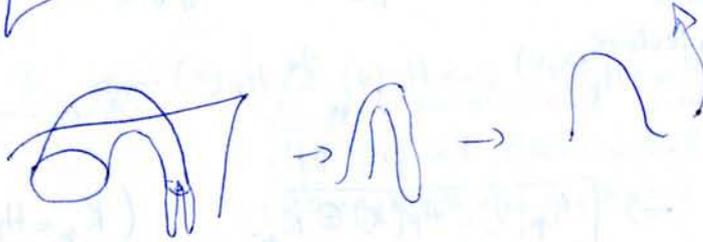
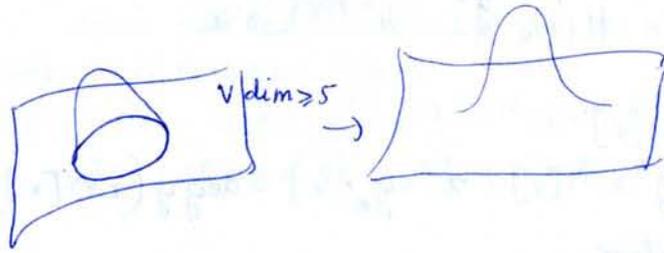
Premier Pas : rendre  $V$  1-connexe.



$V$  est 1-connexe



simple connexité



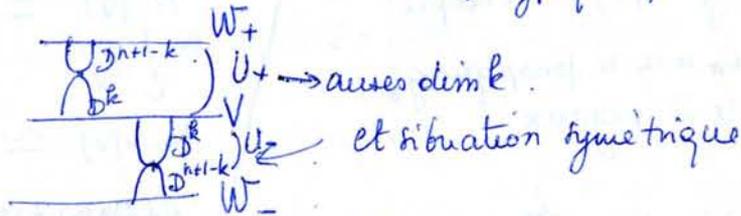
alors  $W_+^*$  et  $W_-$  le sont aussi (théorème de Van Kampen)

Supposons  $k_j = 0$  pour  $j < k-1$

$$\left. \begin{matrix} H_j(W_+, V) \\ H_j(W_-, V) \end{matrix} \right\} = 0 \text{ pour } j < k$$

$H_k(W_+, V)$  et  $H_k(W_-, V)$  sont de type fini (les termes de la somme sont de type fini) -

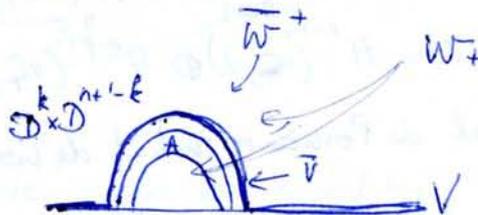
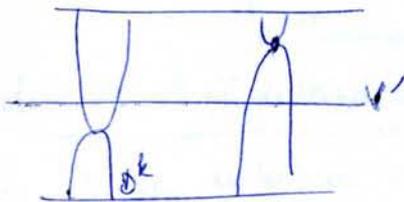
on utilise la même technique



si  $k < n+1-k$ .

$U_+ \cup U_-$  redondant

$V'$  = nouveau  $V$ : variété de niveau intermédiaire -



$$H_*(W_+, V) = H_*(W_+, V \cup A)$$

$$V \subset V \cup A \subset W_+$$

$$H_p(V \cup A, V) \rightarrow H_p(W_+, V) \rightarrow H_p(W_+, V \cup A) \rightarrow H_{p-1}(V \cup A, V)$$

$$\bigoplus_{k \leq p} H_p(D^k \times D^{n+1-k}, S^{k-1})$$



donc:  $H_\lambda(W, V, \mathbb{Z}[\pi]) = 0$

$H_{\lambda+1}(W_{\lambda+1}, V) \xrightarrow{\partial} H_\lambda(W_\lambda, V)$  est donc surjectif.

$$b_i^\lambda = \sum x_{ij} \partial b_j^{\lambda+1}$$

$\Rightarrow f_i: S^\lambda \times D^{n-\lambda} \hookrightarrow U_1$  plongés comme ds le lemme

Lemme de Whitney

$$[f_i] = b_i^\lambda \Leftrightarrow (f_i)_* (S_j^{n-\lambda-1}) = \delta_{ij} \text{ ds } \mathbb{Z}[\pi]$$

$\rightarrow$  assure qu'on peut avoir en plus:

$f_i(\cdot)$  disjoint de  $S_j^{n-\lambda-1}$ , coupe  $A$  en un seul pt la sphère  $S_i^{n-\lambda-1}$

ops (cf construction) que les  $f_i$  sont disjointes (on peut prendre les  $g_i$  disjointes) -

puis comme ds le cas  $\pi_1 = 0$  -

Fini de la démonstration:

$f: W \rightarrow I$  de Morse, uniquement ds pts critiques d'indices  $\lambda$  et  $\lambda+1$   
 $2 \leq \lambda \leq n-3$ .

$C_\star$  (pts critiques) = :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\pi]^\lambda & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}[\pi]^\lambda \\ \uparrow \simeq \cong \text{grad} & & \uparrow \simeq \\ H_{\lambda+1}(W_{\lambda+1}, W_\lambda) & \xrightarrow{\partial} & H_\lambda(W_\lambda, W) \end{array}$$

Diagramme commutatif -

$\exists$  sur  $W$  une structure de CW-complexe associée à la fu de Morse -

donc  $\tau(\partial) = 0$  .  $\tau(A) = 0$

$A$  produit de matrices élémentaires quitte à stabiliser (on introduit une paire  $\lambda, \lambda+1$  disjointe ds autres).

puis  $\tilde{m}$  de  $\tilde{m}$  qui est simplement connexe

th d'existence  $V, x \in Wh(\pi, V)$  alors  $\exists$  un  $h$ -cobordisme  $W$  de dim  $n$  tq  $\tau(W, V) = x$  pourvu que  $n \geq 5$ .

dem:  $W_0 = V \times I$

$x$  représenté par  $A$   $p \times p$  sur  $\mathbb{Z}[\bar{n}]$ .  $A = (a_{ij})$

$f: W_0 \rightarrow I$   $p$  pts critiques d'indice 2 / cris

donc  $H_3(\ ) \xrightarrow{I} H_2(\ )$

d'après le lemme + haut

$f_i: S^2 \times D^{n-3} \rightarrow V_1$

tq  $[f_i] =$  ~~colonne de~~ la  $i$ -ème ligne de  $A$ .

$W_2 = V \times I \cup$  vois des pts critiques d'indice 2.

$W = W_2 \cup_{f_i} (D^3 \times D^{n-3})_i$

$W$  est un  $h$ -cobordisme  $\tau(W, V) = \tau(A) = x$ .

Corollaires:

th de classification des  $h$ -cobordismes (à un bout donné)

def:  $(W, V, V')$  et  $(W', V, V')$  sont équivalents si

$\exists$  difféo  $f: W \rightarrow W'$  tq  $f|_V = id$ .

th:  $\tau$  définit un isomorphisme des classes d'eq de  $h$ -cobordismes sur  $Wh(\pi)$

(à dim  $V \geq 5$ )

dem

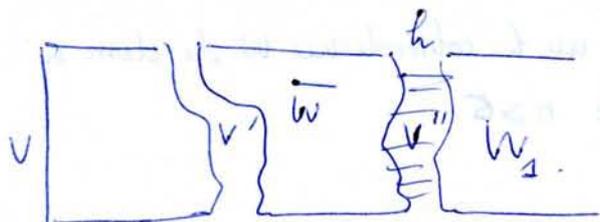
$V \begin{matrix} W \\ \downarrow \\ V' \end{matrix} \begin{matrix} W' \\ \downarrow \\ V'' \end{matrix} \mid 2 \text{ h-cobordisme.}$

Alors  $W \cup V \cup W'$  est un  $h$ -cobordisme entre  $V$  et  $V''$ .

(Mayer-Vietoris)

et  $\tau(W \cup V \cup W', V) = \tau(W, V) + \tau(W', V') -$

$W, V$   
 $W', V$  de même torsion



$\exists \bar{w}$  entre  $V'$  et  $V''$   $\tau(\bar{w}, V') = -\tau(W, V)$

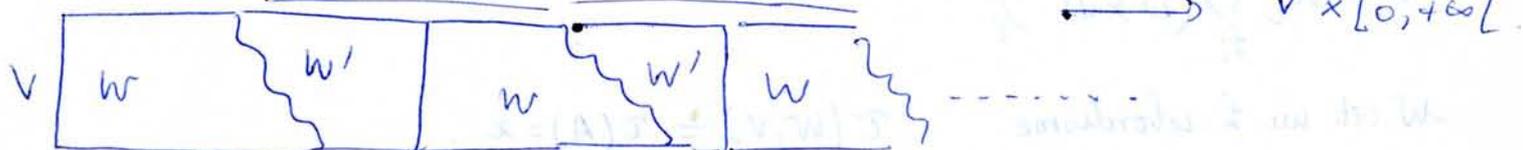
th du s-cob.  $\Rightarrow W \cup \bar{w} \simeq V \times I$

done  $V''$  difféo à  $V$ .  $h: V'' \rightarrow V$

on recolle  $W_1$  par  $h$ :  $W \cup \bar{w} \cup W_1 \xrightarrow{h} V \times I \cup_h W_1 \simeq W_1$   
 $\xrightarrow{h} W$  de  $\hat{u}$

th: Si  $W$  est un h-cobordisme quelconque,  $n \geq 5$ ,  $W = V' \simeq V \times [0, 1[$

(en appliquant 2 fois  $\hat{W} \simeq V \times ]0, 1[ \simeq V' \times ]0, 1[$ )



comme + haut

$V \times I$   $V \times I$   $\dots$   $\rightarrow V \times [0, +\infty[$

$$\frac{W \cup V' \times [0, +\infty[}{\cong} \simeq V \times [0, +\infty[ \quad \square$$

$W = V'$

donc  $H_k(V \cup A, V) \rightarrow H_k(W, V)$  surjective.

$\Rightarrow H_k(\bar{W}_+, \bar{V}) = 0$

situation analogue en bas en rechangeant  $k$  en  $n+1-k$ .

donc si  $k < n+1-k$   $\left. \begin{aligned} H_j(W'_+, V') &= 0 \\ H_j(W'_-, V') &= 0 \end{aligned} \right\} j \leq k$

$n=2l$   $2k < 2l+1$  s'arrête pour  $k=l$   $K_j=0$   $j < l$ .

il reste  $K_l, K_{l+1}, \dots, K_n$ .

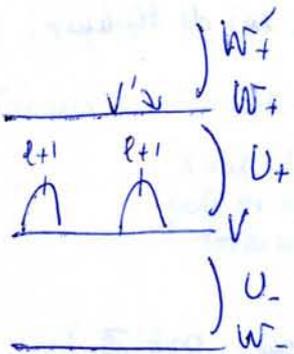
si  $K_l=0$  alors  $g \sim \partial$  homotopie car:  $K_l$  vérifie coef universels etc...

$K^p = \text{Hom}(K_p, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(K_{p-1}, \mathbb{Z})$

$K_j=0$   $j < l \Rightarrow K^j=0$   $j < l \Rightarrow K_j=0$   $j > l$ .  
Princ.

$K_l = K^l \approx \text{Hom}(K_l, \mathbb{Z})$   $K_l$  type f.  $\Rightarrow \text{Hom}(K_l, \mathbb{Z})$  libre type fini

$\Rightarrow H_{l+1}(W_+, V)$  et  $H_{l+1}(W_-, V)$  sont libres t.f



$\rightarrow$  base de  $H_{l+1}(W_+, V)$

$H_{l+1}(W_+, V) = \begin{cases} 0 & (l+1) \\ \hat{m} \text{ qu'avant} \rightarrow 0 \end{cases}$

dualité  $\rightarrow$  m chose de l'autre côté:

$H_{l+1}(W_-, V)$   
 $\mathbb{Z} \leftarrow$  quel que soit le partage  $V, W_+, W_-$   
 $H_{2l+2-l+1}(W_+, V) = H^{l+1}$

$n=2l+1$   $2k < 2l+2$   $k \leq l$ .

$K_j=0$   $j \leq l-1$

$K_l, K_{l+1}$

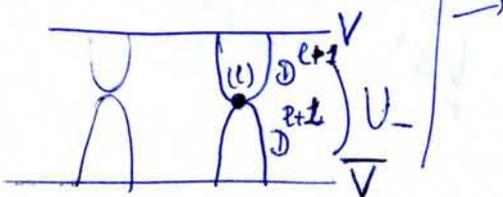
les suivants nuls comme plus haut.

$H_{l+1}(\bar{W}_-, \bar{V}) = \begin{cases} 0 & * \leq l+1 \\ ? \end{cases}$

$\rightarrow$  nouvelle situation  $(W_+, V)$   $H_{l+1}(W_+, V) = 0$ .

par dualité  $H_{2l+1+2-(l+1)}(W_+, V) = 0 = H^{l+2}(W_+, V)$

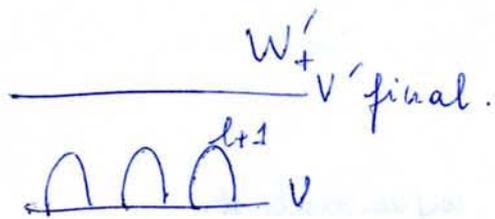
$\Rightarrow H_{l+2}(W_+, V) = 0$



$$H^{2k+2}(W_+, V) = \underbrace{\text{Hom}(H_{2k+2}(W_+, V))}_0 \oplus \underbrace{\text{Ext}(H_{k+1}(W_+, V), \mathbb{Z})}_0$$

$\rightarrow H_{k+1}(W_+, V)$  libre [ext=0, et t.f.]

$\Rightarrow H_{k+2}(W_+, V)$  est de torsion et nul.



$H_*(W'_+, V') = 0$  d'après le complément  
ou une autre technique -  
cqfd.

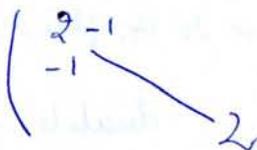
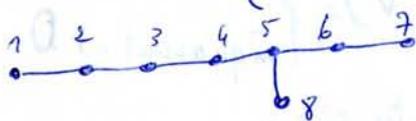
MAIS  $W \xrightarrow{f} X \times \mathbb{R}$   $X$  diff, cpcte, 1-conexe.  $f$   $\nu$  d'homotopie  
alors  $W$  n'est pas forcément difféo à  $X \times \mathbb{R}$ .

Contre ex:  $X = S^7$

on construit  $V^7$  différentiable à  $S^7$  et non difféo à  $S^7$ .

on pose  $W = V \times \mathbb{R}$  - montrer que  $V^7 \times \mathbb{R}$  n'est pas difféo à  $S^7 \times \mathbb{R}$  - ex. de Milnor

Construction de  $V$  (Kervaire et Milnor)



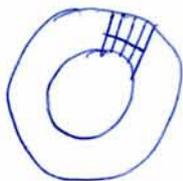
forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ .  
~~non défini~~ de forme  $\geq 0$   $\det = +1$   
Signature 8

filtré tout en disques à  $S^4$

$S^4 \rightarrow U^8 \rightarrow S^4$   
plombage.

$H_4(U)$  <sup>self</sup> intersection du gen =  $\chi(S^4) = 2$

$U$  est parallélisable (clair cf le fibré  $\perp$  de  $\mathbb{R}^8$ )  
fibré tout



$\rightarrow W^8$  parallélisable

$U$  a le type d'h. de  $S^4 \Rightarrow W^8$  a le type d'homotopie de  $V^8 S^4$

en particulier  $\pi_1 W^8 = 0$

$V = \partial W$   $\pi_1 V = 0$  ( $4 = \dim$ . assez gde)

$$0 \rightarrow H_4(W) \rightarrow H_4(W, V) \rightarrow H_3(V) \rightarrow 0$$

$H_j(W, V) = 0 \quad j \neq 4$  par dualité de Poincaré.

et  $H^4(W, \partial W) \cong H_4(W)$   $H_4(W) \rightarrow H_4(W, V)$  est la matrice  
 $H^4(W) \cong H_4(W, V)$  d'où on se passe.

$$H^*(V) = \begin{cases} 0 \\ \mathbb{Z} & 0 \text{ et } 7 \end{cases}$$

Donc  $V$  a le type d'homotopie de  $S^7$ , donc homéo à  $S^7$  (th du h-cob).  
 $V$  non difféo à  $S^7$  ( $\Leftrightarrow$ )  $V$  ne borde pas une var. contractile (h-cob) -

absurde:  $V = \partial W_0$   $W_0$  contractile.

$M = W \cup_V (-W_0)$   $M^8$  orientée fermée sans bord.

$M$ -disque =  $W_0$  parallélisable  $\Rightarrow M$ - $p^t$  // isable.

$$\Sigma(M) = \Sigma(W) = 8$$

$$H_u(M) = H_u(M\text{-disque}) = H_u(W) \Rightarrow$$

Classes caractéristiques  $p_1 \in H^4(X)$   $p_2 \in H^8(X)$  Pontryagin  $X$  // isable  $\Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 0$   
 $X$  var dim 8  $p_1$   $p_2$   
 qpts or ss bord  
 formule de Hirzebruch:  $\Sigma(X) = \frac{7 \langle p_2, [X] \rangle - \langle p_1^2, [X] \rangle}{45}$

$M^8$  stable // isable  $\Rightarrow p_1 = 0$

alors  $8 = \frac{7 \langle p_2, [M] \rangle}{45}$  absurde -

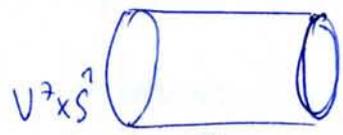
Reste  $V^7 \times \mathbb{R}$  non difféo à  $S^7 \times \mathbb{R}$  :

$V^7 \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} S^7 \times \mathbb{R}$  difféo.  $\rightarrow$  difféo périodique sur  $\mathbb{R}$   
 $\downarrow$   
 $V^7 \times S^1 \rightarrow S^7 \times S^1$  difféo -

$$V^7 \times S^1 \xrightarrow{f} S^7 \times S^1$$

$\uparrow \downarrow S^7 \times S^1 \swarrow \searrow \text{id}$   
 maj de  $V^7 \rightarrow S^7$ .  
 $g \times \text{id}$

homotopiquement  $\cong$



mappyl. de  $f$ .

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc} X^g & I & X^g & S^7 \times S^1 & \\ & V^7 \times S^1 & \downarrow & \downarrow \text{id} & \\ & g \times \text{id} & \downarrow & \downarrow \text{id} & \\ & S^7 \times S^1 & S^7 \times S^1 & S^7 \times S^1 & \end{array} \sim \text{d'htopie}$$

$\sim 2$  htopies scindées

→ on peut scinder  $h$  sans bouger le bord.

$h' \sim h$  rel  $\partial$  e. h. scindée  
h-topie

