
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
MAGISTÈRE DE MATHÉMATIQUES 2^{ème} ANNÉE
EXERCICES SUR LES FONCTIONS SPÉCIALES

2010–2011

Michèle Audin

1. Exercices de « révision »

Exercice 1.1. Trouver une fonction entière (non constante) qui prend la valeur 1 en tous les entiers.

Exercice 1.2. On pose $a = (1 + i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}$.

- (1) Calculer a^2 et montrer que $g(z) - g(z + a) = e^{-z^2}$.
- (2) Montrer que les pôles de g sont les $(2k + 1)a/2$ (pour $k \in \mathbf{Z}$) et calculer son résidu en $a/2$.
- (3) Pour $r > 0$ dessiner le parallélogramme de sommets $-r, r, r + a, -r + a$. On appelle C_r ce parallélogramme parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale

$$\int_{C_r} g(z) dz.$$

- (4) En admettant provisoirement que, lorsque $r \rightarrow \infty$, l'intégrale de g sur les côtés « non horizontaux » du parallélogramme tend vers 0, déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

- (5) Montrer que, lorsque $r \rightarrow \infty$, l'intégrale de g sur les côtés « non horizontaux » du parallélogramme tend vers 0.

Exercice 1.3 (Produits infinis). Dire si les produits infinis suivants sont convergents et donner éventuellement leur valeur :

$$(1) \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$(4) \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n^3 + 1}\right)$$

$$(2) \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$(5) \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + z^{2^n}) \text{ (selon les valeurs de } z \in \mathbf{C}\text{).}$$

$$(3) \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$

2. Exercices sur la fonction Γ

Exercice 2.1. Montrer que la formule

$$f(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

définit une fonction entière.

Exercice 2.2. Montrer que, pour $z \in \mathbf{C} - (-\mathbf{N})$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n^z \Gamma(n)} = 1.$$

Exercice 2.3. Soit f une fonction analytique sur $\mathbf{C} - (-\mathbf{N})$ et qui satisfait aux deux propriétés

$$(1) \quad f(z+1) = zf(z), \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(z+n)}{n^z f(n)} = 1.$$

Montrer que $f(z) = \Gamma(z)f(1)$.

Exercice 2.4.

(1) Montrer que la série de fonctions méromorphes

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$$

converge normalement sur tout compact. L'exprimer en fonction de la dérivée logarithmique de la fonction Γ .

(2) Montrer que l'on a $\Gamma(2z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2^{2z} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2)$ (on utilisera $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et on calculera la dérivée logarithmique des deux termes).

Exercice 2.5. Montrer que, pour $y \in \mathbf{R}$, on a

$$(1) \quad |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}, \quad (2) \quad \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}.$$

On pourra utiliser la formule des compléments.

Exercice 2.6 (La fonction bêta d'Euler). Soit $D \subset \mathbf{C}$ le demi-plan

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Ré}(z) > 0\}.$$

Pour $(z, w) \in D^2$, on écrit

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt$$

(ce qu'on prononce « bêta de zed et double vé », la lettre B est un β majuscule).

- (1) Montrer que B est une fonction continue sur D^2 et que
- pour tout $z \in D$, $w \mapsto B(z, w)$ est analytique, et de même que
 - pour tout $w \in D$, $z \mapsto B(z, w)$ est analytique.
- (2) Vérifier que, pour tous (z, w) , on a

$$(a) \quad B(z+1, w) = \frac{z}{z+w} B(z, w), \quad (b) \quad B(1, w) = \frac{1}{w}.$$

(3) Vérifier que la fonction

$$f(z) = \frac{B(z, w) \Gamma(z+w)}{\Gamma(w)}$$

a les mêmes propriétés que la fonction Γ et donc que, pour $(z, w) \in D^2$, on a

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

(4) Montrer que

$$(a) \quad B(z, w) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt, \quad (b) \quad B(z, w) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2z-1} (\cos \varphi)^{2w-1} d\varphi.$$

Exercice 2.7 (Volume de la boule). Soit $B_n(r)$ la boule unité de rayon r dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ et soit $\mu_n(r)$ son volume. Montrer que $\mu_n(r) = r^n \mu_n(1)$ et que

$$\mu_n(1) = 2\mu_{n-1}(1) \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

3. Autour de $\zeta(2n)$

Exercice 3.1 (Nombres de Bernoulli). Montrer que l'égalité

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

définit bien une série formelle. Les *nombres de Bernoulli* B_n sont alors définis par cette égalité. Montrer que la suite des nombres de Bernoulli n'est pas bornée.

Montrer qu'ils satisfont à la relation

$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

et que ce sont des nombres rationnels. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 . Montrer que $B_n = 0$ si n est impair ≥ 3 .

Montrer l'égalité

$$\frac{z e^{z/2} + e^{-z/2}}{2 e^{z/2} - e^{-z/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

et en déduire

$$\pi z \cot \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}.$$

Exprimer les développements en série entière de $\tan z$ (on pourra démontrer et utiliser le fait que $\tan z = \cot z - 2 \cot 2z$), $z/\sin z$ (et celui que $\cot z + \tan z/2 = 1/\sin z$) en termes des nombres de Bernoulli⁽¹⁾.

Exercice 3.2. On a montré que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

On développe ici en série de Laurent, sur le disque épointé de centre 0 et de rayon 1, la fonction

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} q_{2n} z^{2n-1}.$$

Vérifier que

$$q_{2n} = 2\zeta(2n) \left(= 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n}} \right).$$

En déduire la formule d'Euler

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$$

(les B_i sont les nombres de Bernoulli introduits dans l'exercice 3.1) et, en utilisant les valeurs des B_{2i} obtenues dans ce même exercice 3.1, en déduire les valeurs de $\zeta(2)$ (encore...), $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

La fonction cotangente est solution de l'équation différentielle

$$y' = -1 - y^2$$

donc la série

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

⁽¹⁾ Les nombres de Bernoulli interviennent dans la valeur de $\zeta(2k) = \sum n^{-2k}$, voir l'exercice 3.2.

est solution de

$$y' = -y^2 - \pi^2.$$

En déduire (toujours...) que $\zeta(2) = \pi^2/6$ et, pour $n \geq 2$, la formule « récursive »

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \zeta(2n) = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k) \zeta(2n-2k)$$

qui permet de calculer, de proche en proche les $\zeta(2n)$ à partir de $\zeta(2)$.

Exercice 3.3. Montrer que

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - z^2}$$

En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots.$$

4. Fonctions elliptiques

Exercice 4.1 (La fonction ϑ). Soit τ un nombre complexe tel que $\text{Im}(\tau) > 0$ et soit $q = e^{\pi i \tau}$. Montrer que la série

$$\sum_{-\infty \leq n \leq +\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi n i z}$$

converge uniformément sur tout compact⁽²⁾ de $\mathbf{C}$.

On désigne par ϑ la somme de cette série. Montrer que

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= \vartheta(z), \\ \vartheta(z+\tau) &= -q^{-1} e^{-2i\pi z} \vartheta(z). \end{aligned}$$

Montrer que ϑ n'est pas identiquement nulle. On pourra montrer par exemple que

$$\int_0^1 |\vartheta(x)|^2 dx = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} |q|^{2n^2}.$$

Montrer que les nombres $m + \left(n + \frac{1}{2}\right) \tau$ sont des zéros de ϑ . En évaluant l'intégrale de la fonction ϑ'/ϑ sur le contour d'un parallélogramme de périodes bien choisi, montrer que ϑ n'a pas d'autre zéro.

Exercice 4.2 (La fonction ϑ (suite)). On utilise les notations de l'exercice 4.1. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n \geq 1} \left((1 - q^{2n-1} e^{2i\pi u}) (1 - q^{2n-1} e^{-2i\pi u}) \right)$$

définit une fonction $f(u)$ holomorphe dans le plan de la variable complexe u . Quels sont les zéros de f ? Montrer que f/ϑ est doublement périodique et entière. En déduire que

$$f(u) = c \cdot \vartheta(u)$$

où c est une constante.

Exercice 4.3. Montrer que si

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2n} z^{2n} + \cdots$$

est le développement de Laurent de la fonction $\wp$ à l'origine, l'équation différentielle vérifiée par $\wp$ permet de déterminer par récurrence les coefficients a_{2n} avec $n \geq 3$ comme polynômes en a_2 et a_4 . Déterminer effectivement a_6 et a_8 .

⁽²⁾C'est aussi une série de Fourier.

Exercice 4.4 (Zéros et pôles, ordre d'une fonction elliptique). On donne un réseau Λ , engendré par u et v . On appelle *parallélogramme de périodes* tout parallélogramme de sommets $t, t+u, t+u+v, t+v$ (pour $t \in \mathbb{C}$). Soit f une fonction méromorphe bipériodique par rapport à ce réseau, non identiquement nulle (ce qu'on appelle une *fonction elliptique*⁽³⁾).

- (1) Montrer que f a un nombre fini de pôles dans chaque parallélogramme de période et, de même, qu'elle y a un nombre fini de zéros.
- (2) Montrer que la somme des résidus de f en ses pôles d'un même parallélogramme de périodes est nulle.
- (3) Soit $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que le nombre de solutions de l'équation $f(z) = c$ dans un parallélogramme de périodes est indépendant de c . On appelle ce nombre l'*ordre* de la fonction elliptique f . Montrer que l'ordre d'une fonction elliptique est toujours au moins égal à 2. Quel est l'ordre de $\wp$? de $\wp'$?
- (4) Soit C le contour bord d'un parallélogramme de périodes (parcouru dans le sens direct) choisi⁽⁴⁾ tel qu'aucun zéro ni pôle de f ne soit sur C . Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz \in \Lambda.$$

En déduire que la différence entre la somme des zéros et la somme des pôles de f dans un parallélogramme de périodes est un élément du réseau Λ . Combien la fonction $\wp$ a-t-elle de zéros dans un parallélogramme de périodes? Que vaut la somme de ces zéros?

Exercice 4.5 (Les racines de $4X^3 - g_2X - g_3$). Cet exercice est la suite du précédent, dont il utilise les notations et les résultats. On pose

$$\omega_1 = \frac{u}{2}, \quad \omega_2 = \frac{v}{2}, \quad \omega_3 = -\omega_1 - \omega_2 \quad \text{et} \quad e_i = \wp(\omega_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Montrer que $\wp'(\omega_i) = 0$. Combien $\wp'$ a-t-elle de zéros dans un parallélogramme de périodes? Quels sont ces zéros?

Montrer que $\wp(z) - e_i$ a un zéro double en $z = \omega_i$. Quels sont les zéros de $\wp(z) - e_i$? Montrer que e_1, e_2 et e_3 sont trois nombres distincts et que ce sont les trois racines du polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ (celles-ci sont donc simples).

Exercice 4.6 (La formule d'addition). Cet exercice utilise les notations et les résultats de l'exercice 4.3. Soient x et y deux nombres complexes. Montrer que le système linéaire

$$\begin{cases} \wp'(x) = A\wp(x) + B \\ \wp'(y) = A\wp(y) + B \end{cases}$$

détermine uniquement deux nombres complexes A et B (dépendant de x et y) pourvu que $x \not\equiv y$ et $-y \pmod{\Lambda}$. Montrer qu'alors, la fonction

$$z \longmapsto \wp'(z) - A\wp(z) - B$$

a exactement trois zéros dans un parallélogramme de périodes et que ceux-ci sont congruents à x, y et $-x - y$ modulo Λ . On a donc

$$\wp'(-x - y) = A\wp(-x - y) + B.$$

En éliminant A et B , montrer que

$$\begin{vmatrix} \wp(x) & \wp'(x) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(x+y) & \wp'(x+y) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

⁽³⁾On trouvera de nombreux résultats et exercices sur les fonctions elliptiques, par exemple dans [?], une bonne occasion de faire de la publicité pour cet immortel ouvrage.

⁽⁴⁾Cette précaution vaut dès que nécessaire sans qu'elle soit toujours explicitement mentionnée.

Exercice 4.7 (Loi de groupe sur une cubique). Soit $\mathbf{K}$ un des trois corps $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (que l'on considérera comme un sous-corps de $\mathbf{C}$ lorsque ce sera nécessaire) et soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré 3 sans racine multiple. On considère la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y^2 = P(x)\}.$$

Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ (non symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des x). Montrer que la droite AB (la tangente à $\mathcal{C}$ en A si $A = B$) coupe $\mathcal{C}$ en un troisième point C' . On appelle C le symétrique⁽⁵⁾ de C' par rapport à l'axe des $\mathcal{C}$ et on pose

$$A + B = C.$$

Pour prolonger cette loi en une loi de composition interne sur $\mathcal{C}$, on convient d'ajouter un unique point « à l'infini » à $\mathcal{C}$, qui est aussi sur toutes les droites parallèles à l'axe des y . On note ce point 0.

Montrer que $+$ est une loi de composition interne sur $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{0\}$, qu'elle est commutative, possède un élément neutre et que tout élément possède un inverse. Remarquer aussi que l'on a

$$A + B + C = 0 \Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$$

En admettant que $+$ est aussi associative, on a ainsi une loi de groupe commutative sur la « cubique » $\tilde{\mathcal{C}}$. Déterminer les éléments d'ordre 2, d'ordre 3.

On considère maintenant $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$ et on suppose que

$$P(X) = 4X^3 - g_2X - g_3$$

est le polynôme associé à un réseau Λ de $\mathbf{C}$. Ainsi on a une application

$$(\wp, \wp') : \mathbf{C} - \Lambda \longrightarrow \mathcal{C}$$

que l'on prolonge en envoyant les points de Λ sur le point 0 $\in \tilde{\mathcal{C}}$. Montrer qu'on a ainsi défini une bijection

$$\Phi : \mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}.$$

En utilisant les formules d'addition (exercice 4.5), montrer que

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

En déduire que la loi $+$ définie sur $\tilde{\mathcal{C}}$ est associative.

Question subsidiaire. Combien y a-t-il de points d'inflexion sur $\tilde{\mathcal{C}}$?

Exercice 4.8 (La fonction $\wp$ comme fonction de variable réelle). Montrer que le réseau Λ engendré par 1 et τ (avec $\text{Im } \tau > 0$) est invariant par conjugaison complexe si et seulement si $\text{Ré } \tau \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Vérifier qu'alors le polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ est réel et déterminer, suivant que $\text{Ré } \tau \in \mathbf{Z}$ ou pas, le nombre de racines réelles de ce polynôme. Dessiner le graphe de la fonction $t \mapsto \wp(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ et, si $\text{Ré } \tau \in \mathbf{Z}$, celui de $t \mapsto \wp(\frac{\tau}{2} + t)$. Vérifier vos résultats en contemplant les figures ?? et ?? où $\tau = 2i$ et où, comme on le voit sur la couverture de ce cours, la couleur représente l'argument de la fonction, rouge $\equiv 0 \pmod{2\pi}$, etc.

Références

- [1] M. AUDIN – *Analyse complexe*, ULP, Strasbourg, 2007, Cours de Licence L3 et Magistère 1^e année, disponible sur <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/analysecomp.pdf>.
- [2] J.-B. BOST – *Fonctions analytiques d'une variable complexe*, École polytechnique, 1997.
- [3] H. CARTAN – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.
- [4] J.-P. SERRE – *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

⁽⁵⁾On est prié de faire une figure dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.