

La topologie dans la correspondance entre

Henri Cartan et André Weil

Michèle Audin

Institut de recherche mathématique avancée

(CNRS et Université de Strasbourg)

www-irma.u-strasbg.fr/~maudin

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES

CORRESPONDANCE ENTRE
HENRI CARTAN ET ANDRÉ WEIL
(1928–1991)
Michèle AUDIN



SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE



Henri Cartan (1904-2008)

- élève de l'ENS (1923)
- thèse 1928
- fonctions de plusieurs variables complexes
- **Bourbaki**
- Strasbourg, Paris (ENS)



Henri Cartan est le
fils aîné
d'**Élie Cartan** (1869-1951)
fondateur de la géométrie
différentielle moderne



André Weil (1906-1998)

- élève de l'ENS (1922)
- thèse 1928
- arithmétique
- **Bourbaki**
- Inde, Strasbourg...



Leur correspondance s'échelonne du

10 novembre 1928 — [première lettre d'André Weil](#)

(mathématiques, musique, séminaires, et postes)

au 8 mai 1991 — dernière lettre d'Henri Cartan
(réception du livre de souvenirs d'André Weil).

VITA MATHEMATICA

André Weil
Souvenirs
d'apprentissage

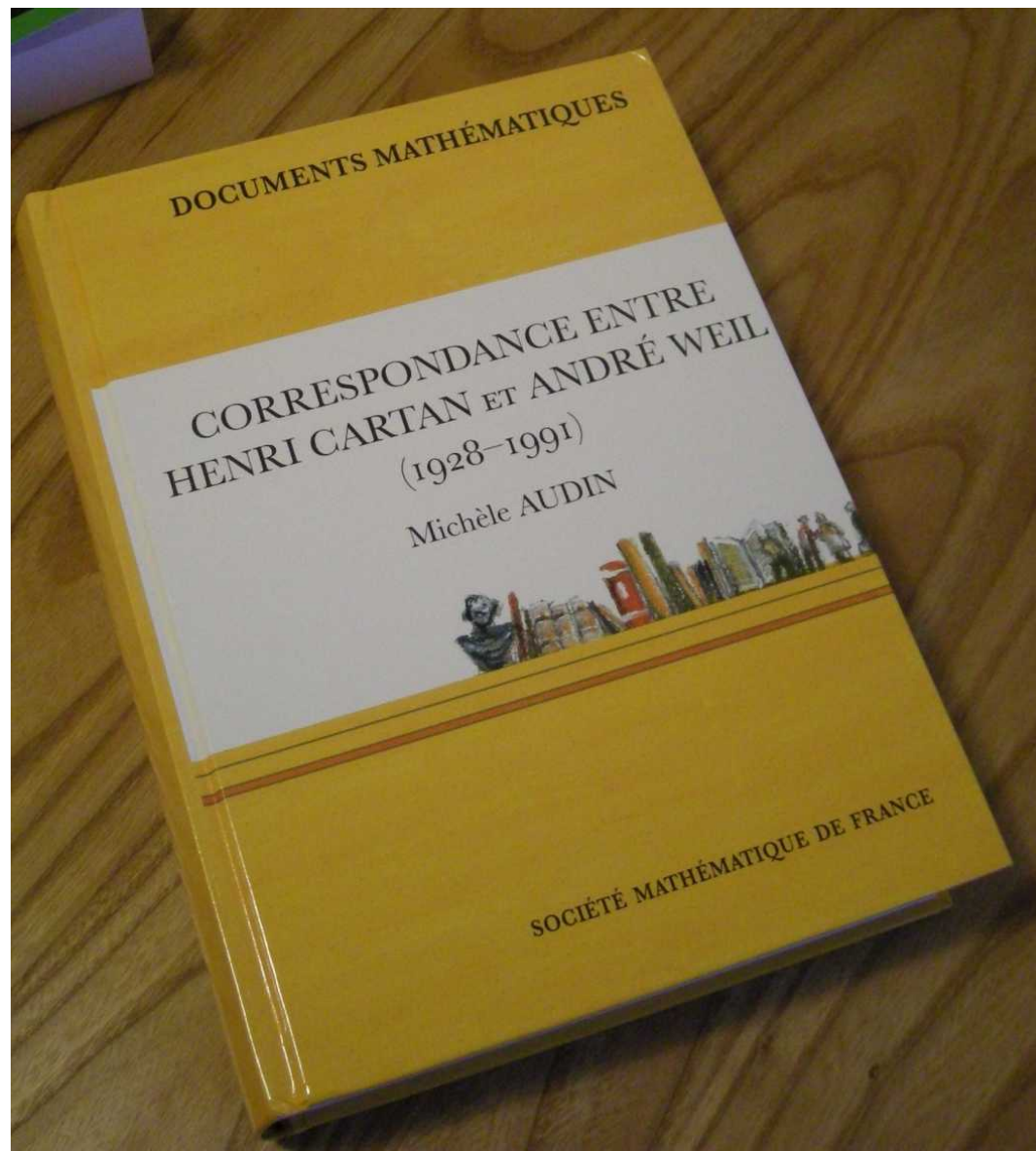


A Weil

B I R K H A U S E R

Un résumé de la correspondance

dates	HC est	AW est	sujets abordés	remarques
1928-30	Caen, Lille	Paris	postes	Bourbaki la guerre insoumission statut des juifs retour ?
1930-33	Strasbourg	Inde, Marseille		
1933-39	Strasbourg	Strasbourg	∅	
1939-40	Strasbourg	mission		
	Clermont	prison	math	
1941-45	Paris	États-Unis	∅	
1945-47	Paris	São Paulo	Bourbaki	
			topologie	
1947-58	Paris	Chicago	visas	
			postes	
1958-	Paris	Princeton		



mais aussi...

des notes et commentaires
incluant d'autres lettres,
en particulier
d'André Weil
à Pierre Honnorat
datées de 1925-1927

Un résumé de la correspondance

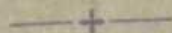
dates	HC est	AW est	sujets abordés	remarques
1928-30	Caen, Lille	Paris	postes	Bourbaki la guerre insoumission statut des juifs retour ?
1930-33	Strasbourg	Inde, Marseille		
1933-39	Strasbourg	Strasbourg	∅	
1939-40	Strasbourg	mission		
	Clermont	prison	math	
1941-45	Paris	États-Unis	∅	
1945-47	Paris	São Paulo	Bourbaki	
			topologie	
1947-58	Paris	Chicago	visas	
			postes	
1958-	Paris	Princeton		

Nom
et adresse
de l'expéditeur

M. Weil
376 - st Michel, Paris

20

CARTE POSTALE



CORRESPONDANCE

respecto chez toi; et
reçois mes meilleures
amitiés

Handwritten signature: Weil

819

ADRESSE

Monsieur H. Cartan
Professeur au lycée de Caen
51 rue de Bayeux

Caen

Un résumé de la correspondance

dates	HC est	AW est	sujets abordés	remarques
1928-30	Caen, Lille	Paris	postes	Bourbaki la guerre insoumission statut des juifs retour ?
1930-33	Strasbourg	Inde, Marseille		
1933-39	Strasbourg	Strasbourg	∅	
1939-40	Strasbourg Clermont	mission prison	math	
1941-45	Paris	États-Unis	∅	
1945-47	Paris	São Paulo	Bourbaki topologie	
1947-58	Paris	Chicago	visas postes	
1958-	Paris	Princeton		

Un résumé de la correspondance

dates	HC est	AW est	sujets abordés	remarques
1928-30	Caen, Lille	Paris	postes	Bourbaki la guerre insoumission statut des juifs retour ?
1930-33	Strasbourg	Inde, Marseille		
1933-39	Strasbourg	Strasbourg	∅	
1939-40	Strasbourg	mission		
	Clermont	prison	math	
1941-45	Paris	États-Unis	∅	
1945-47	Paris	São Paulo	Bourbaki	
			topologie	
1947-58	Paris	Chicago	visas	
			postes	
1958-	Paris	Princeton		

Un visa américain pour
Jacques Hadamard (1865-1963)
président d'honneur du congrès
international
de Cambridge en 1950 ?



Henri Cartan, président de la SMF, en France
et André Weil, à Chicago
se mobilisent pour régler la question.

Après de longs échanges de lettres, le visa est accordé à Hadamard,
in extremis, le 26 juillet 1950.

La correspondance continue :

1^{er} août 1950

1.VIII.50.

à l'abbé L. Le Cam

Mon cher Cartan,

Voici quelques remarques dont j'espère que tu pourras tenir compte dans la préparation de ton laus du congrès. En premier lieu, il est grand temps de réagir contre la tendance (classique en théorie des fons. de plus, var.) de considérer tous les "domaines" comme étalés sur un espace (généralement projectif) de n var. comp. En réalité, ce qui existe a priori, ce sont les variétés à structure analytique complexe, et c'est de là qu'il faut partir. Bien entendu, je sais fort bien qu'on ne peut pas démontrer grand chose sur une telle variété sans hypothèses supplémentaires: p.ex., compacité et existence d'une métrique kählerienne (c'est le cas ~~uniques~~ qui est à la base de la géométrie algébrique) ou encore existence globale de n fonctions holomorphes bornées ~~indépendantes~~ (si la variété a la dimension complexe n) à jacobien partout $\neq 0$ (c'est le cas couramment considéré en théorie des fonctionnels, ou d'autres hypothèses. Mais la conclusion est la même: on ne peut pas

Mon cher Cartan,

Voici quelques remarques dont j'espère que tu pourras tenir compte dans la préparation de ton exposé du congrès. En premier lieu, il est grand temps de réagir contre la tendance (classique en théorie des fons. de plus. var.) de considérer tous les "domaines" comme étalés sur un espace (généralement projectif) de n var. comp. En réalité, ce qui existe a priori, ce sont les variétés à structure analytique complexe, et c'est de là qu'il faut partir. Bien entendu, je sais fort bien qu'on ne peut pas démontrer grand chose sur une telle variété sans hypothèses supplémentaires: p.ex., compacité et existence d'une métrique Kählerienne (c'est le cas ~~général~~ qui est à la base de la géométrie algébrique) ou encore existence globale de n fonctions holomorphes bornées indépendantes (si la variété a la dimension complexe n) à jacobien partout $\neq 0$ (c'est le cas couramment considéré en théorie des fonctionnels), ou d'autres hypothèses. Mais le seul moyen d'apporter de la clarté dans une théorie assez confuse est de faire comme je dis, c'est-à-dire de partir de la variété abstraite, et de formuler dans chaque cas les hypothèses indispensables sur cette variété. (Et surtout plus ces hypothèses de "domaines" "non univalents" !)

Mais voici qui t'intéressera plus, j'espère. C'est l'intervention constante des espaces fibrés dans cette théorie. P.ex. le problème de Cousin: on se donne un recouvrement de la variété par des ouverts U_i , et dans chaque U_i , une fnc. méromorphe f_i , telle que $g_{ij} = f_j/f_i$ soit holomorphe $\neq 0$ dans U_{ij} ; on demande s'il existe f telle que f/f_i soit partout holom. $\neq 0$? ou (question équivalente) si on peut écrire $g_{ij} = h_j/h_i$, h_i holom. $\neq 0$ dans U_i ? Or il est clair que les g_{ij} définissent, sur la variété donnée, une structure fibrée analytique-complexe pour le groupe multiplicatif à 1 variable complexe; il s'agit de savoir si cette structure est triviale (au sens anal.-complexe) ? Une condition nécessaire évidente est que cette structure fibrée soit topologiquement triviale; or, topologiquement parlant, le groupe en question est $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, et on se ramène immédiatement à $\mathbb{Z}$, donc à un espace fibré par $\mathbb{Z}$, dont l'unique invariant, comme il est bien connu, est une classe de cohomologie de dimension 2; celle-ci doit donc être 0 (c'est la condition d'Oka-Stein: existence d'une fonction continue avec les pôles et zéros donnés). Si on la suppose satisfaite, ce n'est pas tout, en général (p.ex. quand la base est compacte); mais le théorème de Cousin dit qu'il n'y a pas d'autre condition si la variété est un "domaine d'holomorphie" (th. de Oka), et en particulier si c'est un polycylindre (th. de Cousin proprement dit). Pour ce dernier cas, la démonstration que tu connais bien se fait à partir du lemme de Cousin, qui dit précisément que, si D et D' sont deux polycylindres satisfaisant aux conditions du lemme, et si on a une structure fibrée, $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ sur $D \cup D'$, à groupe multiplicatif à une variable, et triviale sur D et sur D' ~~même~~ séparément, elle est triviale sur $D \cup D'$. Ton fameux lemme matriciel dit précisément la même chose pour une structure fibrée à groupe linéaire général à p variables (complexes); il ne me paraît pas douteux que la démonstration ne s'en étende aisément à n'importe quel groupe de Lie à paramètres complexes (cela mériterait d'être vérifié); d'où on déduirait, comme pour le th. de Cousin, que toute structure fibrée analytique complexe, sur un polycylindre, qui est topologiquement triviale, est triviale au sens analytique complexe. ~~impl. comme ?~~

Une fois qu'on a pris l'habitude de voir les espaces fibrés dans ces questions, on ne tarde pas à se convaincre qu'ils apparaissent partout (ou tout au moins "presque partout"), et qu'on gagne énormément.

1^{er} août 1950

de "domaines" "non univalents" !)

Mais voici qui t'intéressera plus, j'espère. C'est l'intervention constante des espaces fibrés dans cette théorie. P.ex. le problème de Cousin: on se donne un recouvrement de la variété par des ouverts U_i , et dans chaque U_i une fnc. méromorphe f_i telle que $g_{ij} = f_i/f_j$ soit holomorphe $\neq 0$ dans U_{ij} ; on demande s'il existe f telle que f/f_i soit partout holom. $\neq 0$? ou (question équivalente) si on peut écrire $g_{ij} = h_i/h_j$, h_i holom. $\neq 0$ dans U_i ? Or il est clair que les g_{ij} définissent, sur la variété donnée, une structure fibrée analytique-complexe pour le groupe multiplicatif à 1 variable complexe; il s'agit de savoir si cette structure est triviale (au sens anal.-complexe)? Une condition nécessaire évidente est que cette structure fibrée soit topologiquement triviale; or, topologiquement parlant, le groupe en question est $\mathbb{C}^*$ et on se rappelle que...

Mais voici qui t'intéressera plus, j'espère.

C'est l'intervention *constante* des **espaces fibrés** dans cette théorie.

P.ex. le problème de Cousin :

on se donne un recouvrement de la variété par des ouverts U_i ,

et dans chaque U_i une fonc.méromorphe f_i telle que

$g_{ij} = f_i/f_j$ soit holomorphe $\neq 0$ dans U_{ij} ; on demande

s'il existe f telle que f/f_i soit partout holom. $\neq 0$?

ou (question équivalente) si on peut écrire $g_{ij} = h_i/h_j$,
 h_i holom. $\neq 0$ dans U_i ?

Or il est clair que les g_{ij} définissent, sur la variété donnée,
une **structure fibrée analytique-complexe** pour
le groupe multiplicatif à 1 variable complexe ;
il s'agit de savoir si cette structure est triviale
(au sens anal.-complexe) ?

Une condition *nécessaire* évidente est que
cette structure fibrée soit *topologiquement* triviale [...]

4 août 1950

Die, le 4 août 1950

Mon cher Weil,

Bien reçu tes lettres du 31 juillet et du 1^{er} août. J'espère que tu es maintenant tout à fait rassuré quant à l'octroi du visa à Hadamard; d'ailleurs j'ai reçu aussi une confirmation officielle des Affaires Etrangères, via l'Ambassade à Washington.

Les questions dont tu me parles, en vue de mon laïus au Congrès, sont justement de celles que j'ai étudiées ces jours derniers, dans le même but. Mais je n'avais pas vu clairement le lien avec les espaces fibrés. Il y a encore des choses pas tout à fait claires dans mon esprit; aussi je te livre les notes suivantes.

D'accord pour voir qu'une donnée de Cousin définit un espace fibré principal de groupe G , et que l'existence d'une section (qui équivaut à la trivialité) est nécessaire et suffisante pour que le problème de Cousin correspondant à cette donnée ait une solution. D'accord aussi ~~sur~~ sur ceci: la démonstration de Cousin.

Un résumé de la correspondance

dates	HC est	AW est	sujets abordés	remarques
1928-30	Caen, Lille	Paris	postes	Bourbaki la guerre insoumission statut des juifs retour ?
1930-33	Strasbourg	Inde, Marseille		
1933-39	Strasbourg	Strasbourg	∅	
1939-40	Strasbourg	mission		
	Clermont	prison	math	
1941-45	Paris	États-Unis	∅	
1945-47	Paris	São Paulo	Bourbaki	
			topologie	
1947-58	Paris	Chicago	visas	
			postes	
1958-	Paris	Princeton		

Un résumé de la correspondance

dates	HC est	AW est	sujets abordés	remarques
1928-30	Caen, Lille	Paris	postes	Bourbaki la guerre insoumission statut des juifs retour ?
1930-33	Strasbourg	Inde, Marseille		
1933-39	Strasbourg	Strasbourg	∅	
1939-40	Strasbourg	mission		
	Clermont	prison	math	
1941-45	Paris	États-Unis	∅	
1945-47	Paris	São Paulo	Bourbaki topologie	
1947-58	Paris	Chicago	visas postes	
1958-	Paris	Princeton		

H. Cartan
Pensons "la joie de vivre"
Le Bourboulle (P.-de-Dôme)

CARTE POSTA



Monsieur André Weil

Maison d'arrêt

1940
la prison de Bonne-Nouvelle

Rouen

(Seine-Inf^{re})

1940. En prison à Rouen, André Weil travaille.

- Il (re-)rédige un rapport sur l'intégration pour Bourbaki,
- il rédige la dédicace à Élie Cartan de son livre *l'Intégration dans les groupes topologiques*
- il corrige les épreuves d'un article sur les probabilités
- il entretient une correspondance intensive avec
 - sa femme
 - sa sœur
 - ses amis de Bourbaki, dont Henri Cartan
- et surtout, il comprend comment démontrer l'hypothèse de Riemann pour les corps finis.

1940. En prison à Rouen, André Weil travaille.

- Il (re-)rédige **un rapport sur l'intégration** pour Bourbaki,
- il rédige la dédicace à Élie Cartan de son livre *l'Intégration dans les groupes topologiques*
- il corrige les épreuves d'un article sur les probabilités
- il entretient une correspondance intensive avec
 - sa femme
 - sa sœur
 - ses amis de Bourbaki, dont Henri Cartan
- et surtout, il comprend comment démontrer l'hypothèse de Riemann pour les corps finis.

1940. En prison à Rouen, André Weil travaille.

- Il (re-)rédige un rapport sur l'intégration pour Bourbaki,
- il rédige la *dédicace à Élie Cartan de son livre *l'Intégration dans les groupes topologiques**
- il corrige les épreuves d'un article sur les probabilités
- il entretient une correspondance intensive avec
 - sa femme
 - sa sœur
 - ses amis de Bourbaki, dont Henri Cartan
- et surtout, il comprend comment démontrer l'hypothèse de Riemann pour les corps finis.

1940. En prison à Rouen, André Weil travaille.

- Il (re-)rédige un rapport sur l'intégration pour Bourbaki,
- il rédige la dédicace à Élie Cartan de son livre *l'Intégration dans les groupes topologiques*
- il corrige les épreuves d'un article sur les probabilités
- il entretient une correspondance intensive avec
 - sa femme
 - sa sœur
 - ses amis de Bourbaki, dont Henri Cartan
- et surtout, il comprend comment démontrer l'hypothèse de Riemann pour les corps finis.

1940. En prison à Rouen, André Weil travaille.

- Il (re-)rédige un rapport sur l'intégration pour Bourbaki,
- il rédige la dédicace à Élie Cartan de son livre *l'Intégration dans les groupes topologiques*
- il corrige les épreuves d'un article sur les probabilités
- il entretient une correspondance intensive avec
 - sa femme
 - sa sœur
 - ses amis de Bourbaki, dont Henri Cartan
- et surtout, il comprend comment démontrer l'hypothèse de Riemann pour les corps finis.

1940. En prison à Rouen, André Weil travaille.

- Il (re-)rédige un rapport sur l'intégration pour Bourbaki,
- il rédige la dédicace à Élie Cartan de son livre *l'Intégration dans les groupes topologiques*
- il corrige les épreuves d'un article sur les probabilités
- il entretient une correspondance intensive avec
 - sa femme
 - sa sœur
 - ses amis de Bourbaki, dont Henri Cartan
- et surtout, il comprend comment démontrer l'hypothèse de Riemann pour les corps finis.

La bibliothèque mathématique
de la prison de Bonne-Nouvelle
laissait à désirer.
Pourtant...

Apporté par la famille...

Mathematical Reviews

Pages 1-32

JANUARY, 1940

Vol. 1, No. 1

ALGEBRA

Tsakalanyoda, T. The 7-13 problem. Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A, 9, 531 (1939). [MF 3]
The problem of placing $2n+1$ people around a table n times so that no two persons sit beside each other more than once is solved when $n=7$. P. Scherk (New York, N. Y.).
Eugene, New First Course in the The-

Erdős, P. and Grünwald, T. On polynomials with only real roots. Ann. of Math. 40, 517-548 (1939). [MF 93]
Es sei $f(x)$ ein Polynom mit nur reellen Wurzeln.

$$f(-1) = f(1) = 0, \quad 0 < f(x) \leq f(\mu) \quad \text{für } -1 < x < 1,$$

wobei $-1 < \mu < 1$, so dass μ die Stelle des Maximums von $f(x)$ im Intervall $(-1, 1)$ bedeutet. Dann ist

76-14 11.11.1936

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK UND IHRE GRENZGEBIETE

(REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
THEORETISCHE PHYSIK · ASTROPHYSIK · GEOPHYSIK)

HERAUSGEGEBEN VON

P. ALEXANDROFF MOSKAU	J. BARTELS EBERSWALDE	W. BLASCHKE HAMBURG	H. BOHR KOPENHAGEN	R. COURANT NEW YORK
G. H. HARDY CAMBRIDGE	F. HUND LEIPZIG	G. JULIA VERSAILLES	H. KIEHLE GÖTTINGEN	T. LEVI-CIVITA ROM
J. D. TAMARKIN PROVIDENCE R. I.	H. THIRRING WIEN	O. VEHLER PRINCETON	R. L. VAN DER WAERDEN LEIPZIG	R. NEVANLINNA GÖTTINGEN

REDAKTION:

O. NEUGEBAUER
KOPENHAGEN

14. BAND

875



Mathematisches Institut
Universität Hamburg

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1936

Lu par Cartan...

proved with the notion of equality replaced by the Artin equivalence $a \sim b$ if $a^{-1} = b^{-1}$, multiplication by v -multiplication $a \times b = ((ab)^{-1})^{-1}$. Notions of v -multiplication rings are defined and it is shown that if $\mathfrak{R}$ is such so is $\tilde{\mathfrak{R}}$. *Jacobson* (Bryn Mawr).

Hasse, Helmut: Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper. I. Die Struktur der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung. *J. reine angew. Math.* 175, 55—62 (1936).

Mit einer aus der Theorie der Weierstraßpunkte geläufigen Methode wird gezeigt: Satz. In einem elliptischen Funktionenkörper K mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper k der Charakteristik p ($= 0$ oder Primzahl) ist die Anzahl A_n der Divisorenklassen C von K mit $C^n = 1$ gleich n^2 , wenn $n \not\equiv 0 \pmod{p}$; gleich n , wenn $n = p^r$ und $A \not\equiv 0$; gleich 1, wenn $n = p^r$ und $A = 0$. Dabei ist A durch die Entwicklung $v = \frac{1}{\pi^r} - \frac{A}{\pi} + \dots$ eines passenden Elementes v aus K an der willkürlichen Stelle p bestimmt. — Bei festem Primdivisor $\mathfrak{o}$ folgt nämlich aus dem Riemann-Rochschen Satz, daß diese C umkehrbar eindeutig den p mit $p^n/\mathfrak{o}^n \sim 1$ entsprechen. Um diese p , soweit $\neq \mathfrak{o}$, zu charakterisieren, sei $y_0, \dots, y_{n-1}$ eine Basis der ganzen Multipla von $\mathfrak{o}^{-n}$. Es ist dann und nur dann $y = \sum c_i y_i \simeq p^n/\mathfrak{o}^n$, wenn $D_\pi^n y \equiv 0 \pmod{p}$, d. h. $|D_\pi^n y_i| \equiv 0 \pmod{p}$ gilt. Da diese p also gerade im Zähler des Divisors $|D^{(n)} y_i|$ aufgehen, ergibt sich der Satz aus der Gestalt der Primzerlegung von $|D^{(n)} y_i|$. *Witt*.

Chabauty, Claude: Sur certaines équations diophantiques ternaires. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 2117—2119 (1936).

Sei K ein endlicher algebraischer Zahlkörper, von dessen Konjugierten genau

Lu par Cartan...

kein Nullteiler ist. Deuring (Leipzig).

Deuring, Max: Automorphismen und Divisorenklassen der Ordnung t in algebraischen Funktionenkörpern. *Math. Ann.* 113, 208—215 (1936).

Für einen algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht g über dem Körper aller komplexen Zahlen als Konstantenkörper folgt aus dem Abel'schen Theorem und dem Jacobischen Umkehrsatz leicht, daß die Anzahl der Lösungen von $X^n = C$ in der Divisorenklassengruppe genau gleich n^{2g} ist. Sei jetzt K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht g über irgendeinem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k . Um die Lösungsanzahlen T_n von $X^n = C$ in der Divisorenklassengruppe von K zu bestimmen, genügt es, für alle Primzahlen p die Lösbarkeit von $X^p = C$ nachzuweisen und die Lösungsanzahlen T_p von $X^p = 1$ zu bestimmen. Dann ist $T_n = \prod_{p|n} T_p^{e_p}$ für $n = \prod_{p|n} p^{e_p}$. Die Ergebnisse des

Ref. für $g = 1$ (Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 325—348; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. 1, Fachgruppe I, 119—129; J. f. Math. 175, 55—62; dies. Zbl. 11, 197; 13, 197) legen die Vermutung nahe, daß auch allgemein folgendes gilt:

$T_p = p^{2g}$, falls die Charakteristik von k von p verschieden ist,

$T_p = p^g$ mit $0 \leq g \leq g$, falls k die Charakteristik p hat.

Verf. zeigt hier, daß diese Vermutung im Einklang ist mit einem Satz, den er aus dem Verhalten der Divisorenklassen der Ordnung p von K bei einem Automorphismus σ der Ordnung p von K herleitet, und der die Anzahl T_p für K in Verbindung setzt mit der entsprechenden Anzahl für den Invariantenkörper K_0 des Automorphismus σ . Der Satz lautet folgendermaßen: Der algebraische Funktionenkörper K einer Unbestimmten über dem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k sei separabel zyklisch vom Primzahlgrad p über K_0 . t Primdivisoren von K_0 seien in K verzweigt; es sei $t > 0$. In K_0 sei jede Divisorenklasse nullten Grades p -te Potenz von genau p^{2g} Klassen. Hat k nicht die Charakteristik p , so ist jede Klasse nullten Grades von K die p -te Potenz von genau $p^{2g+(p-1)(t-2)}$ Klassen; hat k die Charakteristik p , so ist jede Klasse nullten Grades von K die p -te Potenz von genau $p^{g+(p-1)(t-1)}$ Klassen. — Bei seinem Beweis wird der Normensatz von Tsen (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1933, 335—339; dies. Zbl. 7, 294) angewendet. — In einem Zusatz bei der Korrektur stellt Verf. ohne Beweis fest, daß die Lösbarkeit von $X^p = C$ mittels der Methode des Ref. leicht allgemein beweisbar ist. — Es sei auch auf eine inzwischen erschienene Arbeit von Deuring (Math. Ann. 113, 477—499; dies. Zbl. 13, 341) hin-

Mon cher Cartan,

L'absence de renseignements précis sur les travaux de Hasse et Derring (nombre de racines de périodes et même de racines de $x^n = a$) me gêne fort; il me faudrait, non seulement le résultat (pour n premier à la caractéristique, du moins) mais des indications sur la méthode. Penses-tu aller à Paris prochainement, ~~ou~~ ou y aurait-il quelque normalien assez dégourdi pour faire le nécessaire? Provisoirement, rédigeant une note aux Comptes Rendus que je viens d'expédier à ton père, j'ai pris le parti d'admettre tout bonnement le résultat, et sans le dire; mais pour la suite de mon travail je crois qu'il me serait utile, d'avoir des précisions sur la démonstration, à part le fait qu'il serait tout de même bon d'en être sûr, puisque tout ce que je fais repose là-dessus. Chose plus sérieuse, j'ai expédié la note sans attendre d'avoir démontré le lemme fondamental; mais j'y vais assez clair ~~pour en être sûr~~ à présent sur ces questions pour en prendre le risque. Jamais je n'ai rien écrit, et je n'ai presque jamais rien vu, qui atteigne un aussi haut degré de concentration que cette note. Hasse n'a plus qu'à se pendre, car j'y résous (sous réserve de mon lemme) tous les principaux problèmes de la théorie, et avant tout: 1) hypothèse de Riemann pour les fonctions ζ de ces corps (démontrée par Hasse pour le genre 1); 2) les séries L d'Artin relatives aux caractères des extensions algébriques de ces corps sont des polynômes, dont je détermine le degré (connu, en vertu de la loi de réciprocité d'Artin, pour les extensions abéliennes seulement). Le second point est à

L'absence de renseignements précis sur les travaux de Hasse et Derring (nombre de nièmes de périodes et même de racines de $x^n = a$) me gêne fort; il me faudrait, non seulement le résultat (pour n premier à la caractéristique, du moins) mais des indications sur la méthode. Penses-tu aller à Paris prochainement, ~~ou~~ ou y aurait-il quelque normalien assez dégourdi pour faire le nécessaire? Provisoirement, rédigeant une note aux Comptes Rendus que je viens d'expédier à ton père, j'ai pris le parti d'admettre tout bonnement le résultat, et sans le dire; mais pour la suite de mon travail je crois qu'il me serait utile, d'avoir des précisions sur la démonstration, à part le fait qu'il serait tout de même bon d'en être sûr, puisque tout ce que je fais repose là-dessus. Chose plus sérieuse, j'ai expédié la

22 avril 1940

ALGÈBRE. — *Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini.*

Note (1) de M. **ANDRÉ WEIL**, présentée par M. Élie Cartan.

Je vais résumer dans cette Note la solution des principaux problèmes de la théorie des fonctions algébriques à corps de constantes fini; on sait que celle-ci a fait l'objet de nombreux travaux, et plus particulièrement, dans les dernières années, de ceux de Hasse et de ses élèves; comme ils l'ont entrevu, la théorie des correspondances donne la clef de ces problèmes; mais la théorie algébrique des correspondances, qui est due à Severi, n'y suffit point, et il faut étendre à ces fonctions la théorie transcendante de Hurwitz.

La fonction zêta

$$\zeta_A(s) = \prod_{\mathfrak{m} \text{ idéal maximal}} \left(1 - \#(A/\mathfrak{m})^{-s}\right)^{-1}$$

$$\text{où } f \in \mathbb{F}_q[X, Y] \quad \text{et} \quad A = \mathbb{F}_q[X, Y]/(f)$$

A est l'anneau des fonctions sur la courbe C d'équation $f(X, Y) = 0$ (une courbe lisse de genre g).

Avec $A = \mathbb{Z}$, on aurait

$$\zeta_A = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

la (forme eulérienne de la) fonction ζ de Riemann.

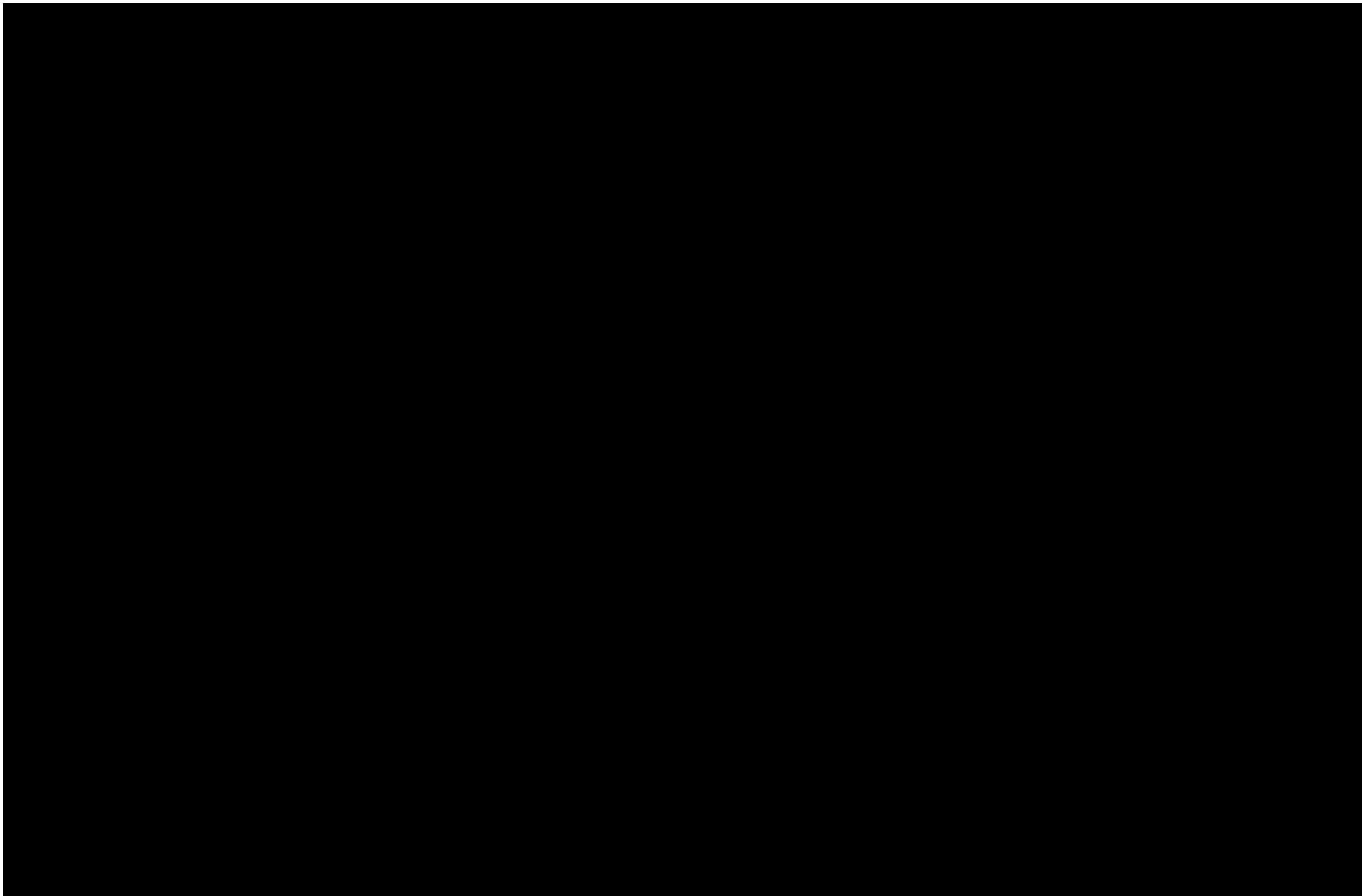
$$\zeta_A = Z(C, q^{-s}) \text{ avec } Z(C, T) = \exp \left(\sum_m \#C(\mathbb{F}_{q^m}) \frac{T^m}{m} \right)$$

$\#C(\mathbb{F}_{q^m})$ désigne le nombre de points de C sur le corps $\mathbb{F}_{q^m}$.
En utilisant le théorème de Riemann-Roch, on montre que $Z(C, T)$ est une fraction rationnelle en T , plus précisément

$$Z(C, T) = \frac{\prod (1 - \alpha_i T)}{(1 - T)(1 - qT)}.$$

Le numérateur est un polynôme P de degré $2g$.

- L'hypothèse de Riemann généralisée postule que la partie réelle des zéros de ζ_A est $1/2$ (ou que les racines de P sont de module $q^{-1/2}$).



Du lemme il suit que le **nombre** de **points coïncidents** de C est

$$m_1 + m_2 - \text{tr}(L)$$

Ceci se passe en 1940 et sur fond de rivalité avec **Hasse** (qui avait traité le cas des courbes de **genre 1**) et son école, **Deuring**, en particulier, qui avait eu l'idée d'utiliser les correspondances.

L'affrontement personnel, la guerre, les choix (politiques) des uns et des autres, la **prison** *vs* le service dans la *Wehrmacht*, le choix **arithmétique pure** *vs* **géométrie algébrique**...

Sur l'histoire de cette note et de ses recensions, voir aussi

La guerre des recensions

septembre 2011, [arXiv 1109.5230](#)

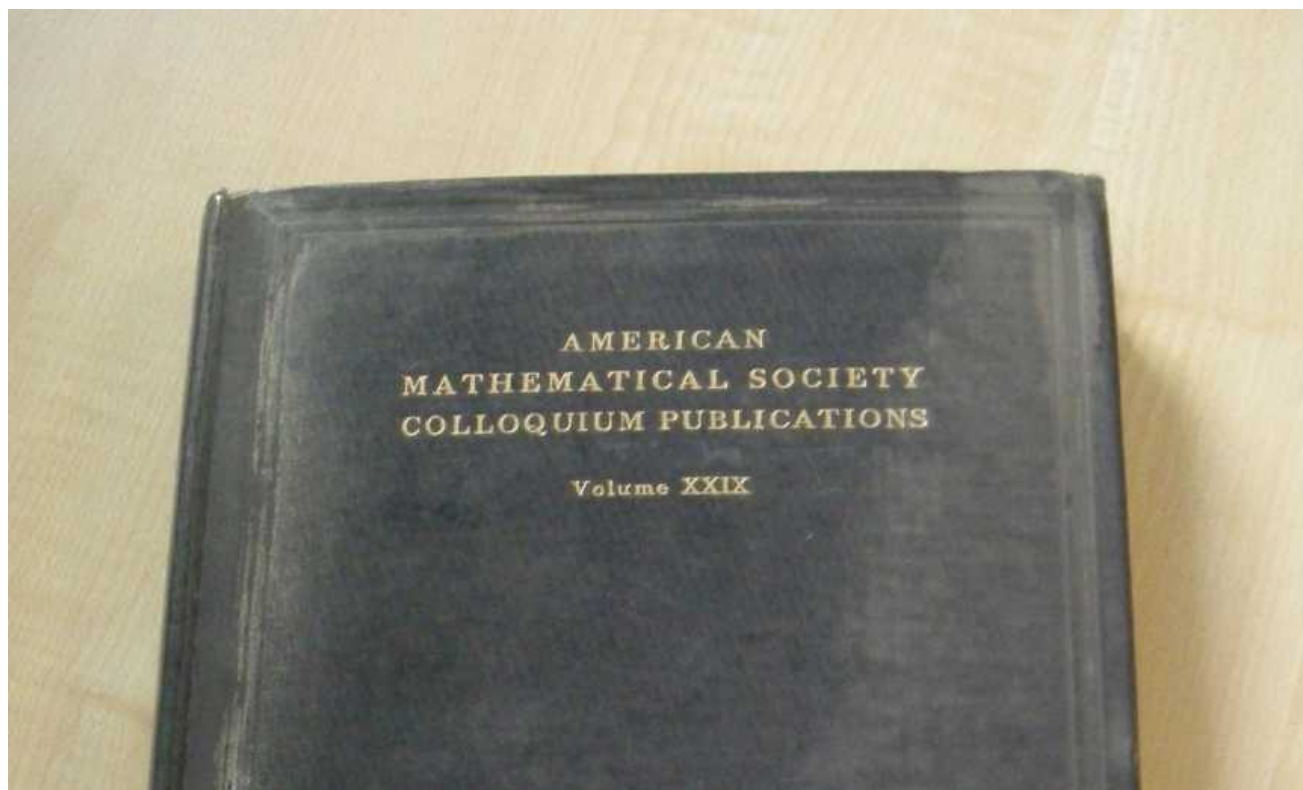
Théorie des correspondances,
la vision géométrique d'André Weil
et son intérêt constant pour la topologie

En particulier, pour le théorème de Lefschetz

Théorème. Soit V une variété topologique compacte et connexe, et soit $f : V \rightarrow V$ une application continue. Alors le *nombre* algébrique de *points fixes* de f est

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(f_{\star} : H_k(V) \rightarrow H_k(V)).$$

1946, *Foundations of algebraic geometry*



AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
COLLOQUIUM PUBLICATIONS
VOLUME XXIX

FOUNDATIONS OF ALGEBRAIC GEOMETRY

BY
ANDRÉ WEIL
PROFESSOR AT THE FACULDADE DE FILOSOFIA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



1946

André Weil est professeur
à São Paulo

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1041

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année 1945

VII

SUR
LES COURBES ALGÈBRIQUES
ET LES
VARIÉTÉS QUI S'EN DÉDUISENT

PAR

ANDRÉ WEIL

Professeur à l'Université de Chicago



1948

André Weil est professeur
à Chicago

Ces deux livres permettent de définir
la bonne notion d'intersection
et de démontrer le fameux lemme sur la trace,
ainsi de compléter la démonstration
de l'hypothèse de Riemann
et de résoudre

*les principaux problèmes de la théorie
des fonctions algébriques
à corps de constantes fini*

Notion de *variété*
après le passage du **genre 1** (Hasse)
au **genre g** (Weil), permet
le passage en dimensions supérieures
et l'énoncé des **conjectures de Weil** (1949)
l'idée révolutionnaire que l'on puisse calculer
le nombre de solutions d'une équation mod. p
par la formule des points fixes de Lefschetz

L'essentiel du contenu mathématique
de la correspondance porte, après la guerre,
sur la topologie, qui sera
un des grands thèmes du **Séminaire Cartan**



FIN

