

Après une lecture de Kovalevskaya — qu'est-ce que l'intégrabilité ?

Michèle Audin

Institut de recherche mathématique avancée
CNRS et Université de Strasbourg

Lecture

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ I.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r r' - q r'', \\ (1) \quad B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= p r'' - r r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= q r' - p r''. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Lecture

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ I.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r r' - q r'', \\ (1) \quad B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= p r'' - r r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r), & \frac{dr''}{dt} &= q r - p r'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Acta mathematica, 12. Imprimé le 22 janvier 1889.

23

Lecture

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ I.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r r' - q r'', \\ (1) \quad B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= p r'' - r r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= q r' - p r''. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Lecture

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

À STOCKHOLM.

$$(1) \quad \begin{aligned} B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0\dot{r} - x_0\dot{r}'), & \frac{d\dot{r}'}{dt} &= p\dot{r}'' - r\dot{\gamma}, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0\dot{r}' - y_0\dot{r}), & \frac{d\dot{r}''}{dt} &= q\dot{r} - p\dot{r}'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Lecture

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹



(1850-1891)

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

À STOCKHOLM.

$$\begin{aligned} B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0r' - x_0r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r\gamma, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0r' - y_0r), & \frac{dr''}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

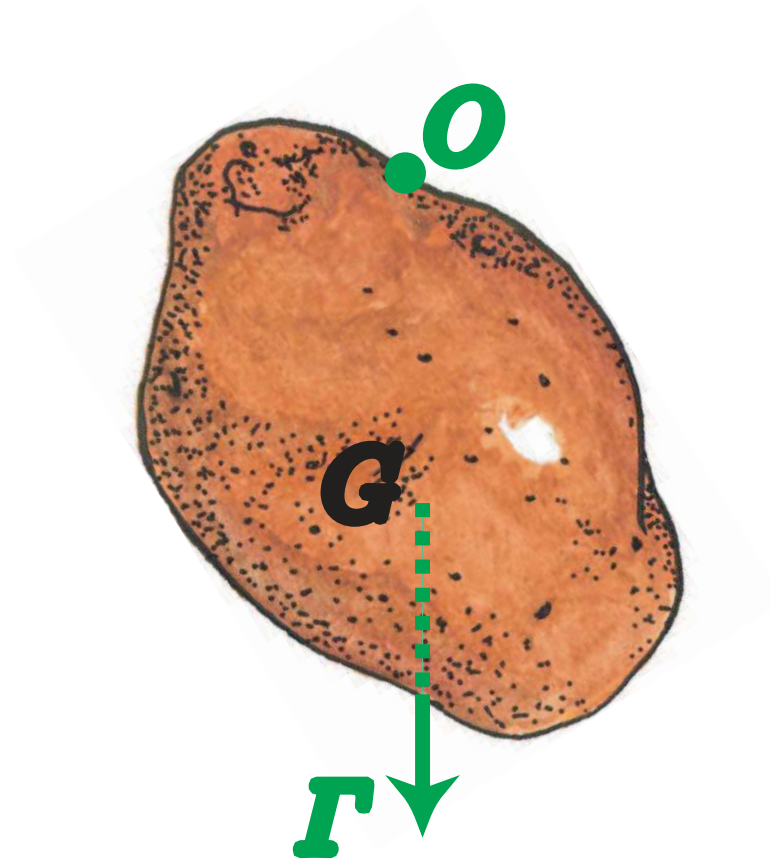
A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Un solide



Le solide en 1888

Le solide en 1888

Un problème classique et difficile,

Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié par Euler (1707-1783) qui traite, en 1765, le cas $O = G$.

Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié par Euler (1707-1783) qui traite, en 1765, le cas $O = G$.



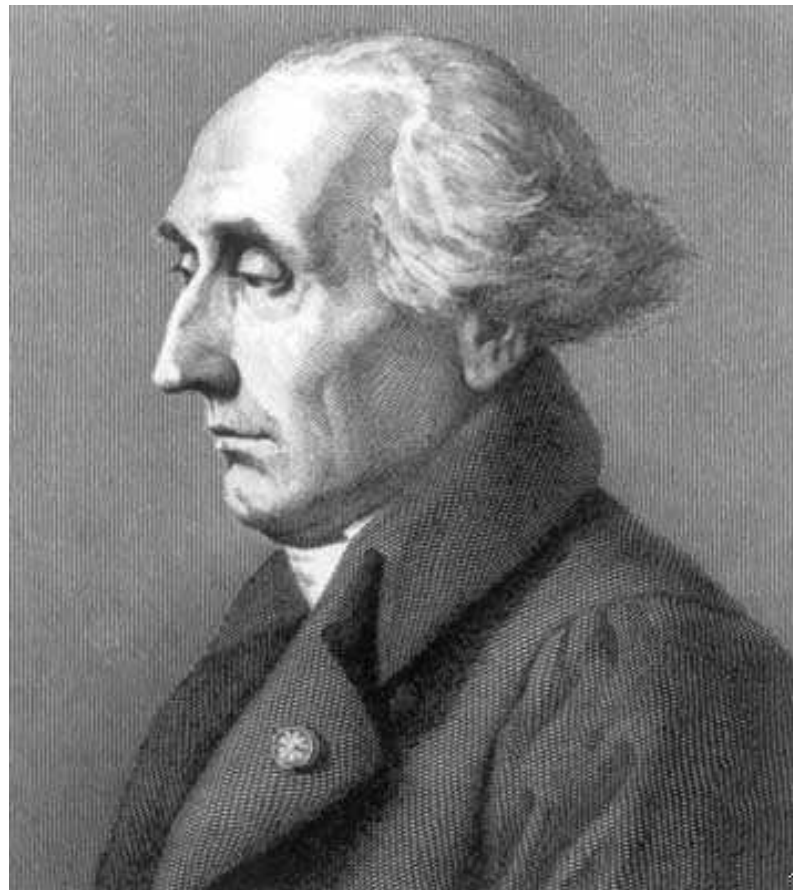
Le solide en 1888

Le solide en 1888

puis par Lagrange (1736-1813), qui traite, en 1788, le cas d'un axe de révolution passant par le point fixe.

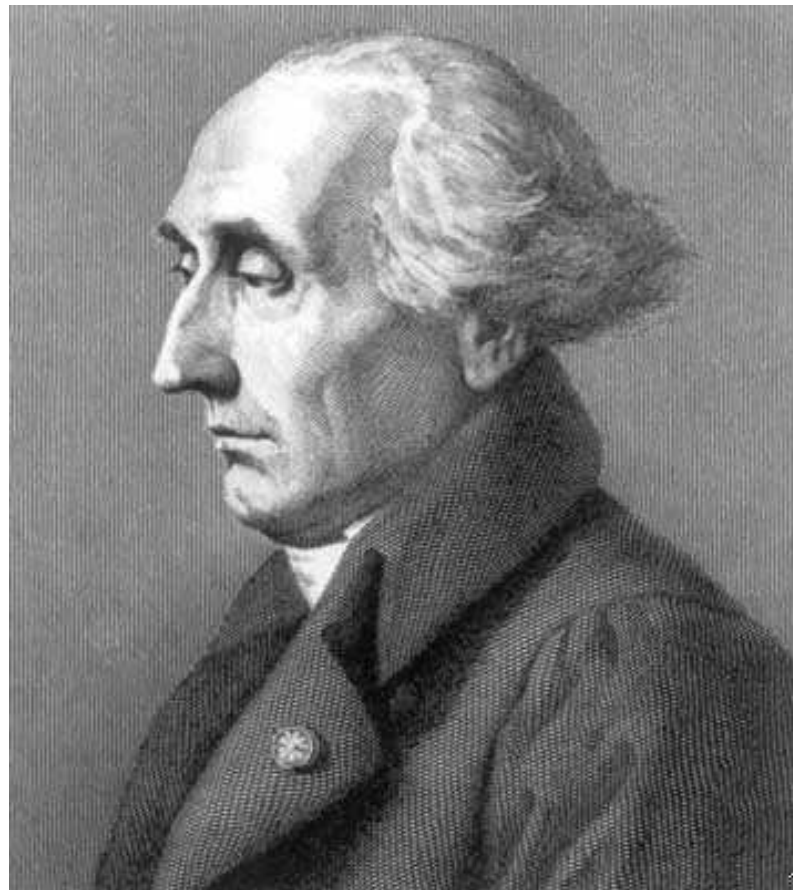
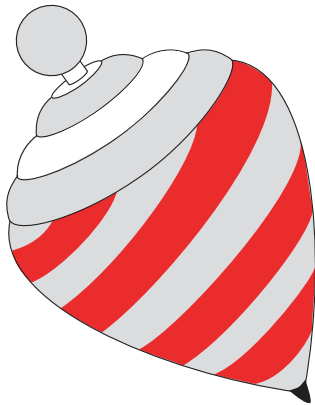
Le solide en 1888

puis par Lagrange (1736-1813), qui traite, en 1788, le cas d'un axe de révolution passant par le point fixe.



Le solide en 1888

puis par Lagrange (1736-1813), qui traite, en 1788, le cas d'un axe de révolution passant par le point fixe.



Le solide en 1888

Le solide en 1888

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution.

Le solide en 1888

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution. En Allemagne, on appelait ce problème *die mathematische Nixe*.

Le solide en 1888

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution. En Allemagne, on appelait ce problème *die mathematische Nixe*.

Dans un roman anglais paru en 1872, on pouvait lire :

Le solide en 1888

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution. En Allemagne, on appelait ce problème *die mathematische Nixe*.

Dans un roman anglais paru en 1872, on pouvait lire :

Bref, la femme était un problème qui, puisque Monsieur Brooke se sentait l'esprit vide en sa présence, ne pouvait guère être moins compliqué que les révolutions d'un corps solide de forme irrégulière.

Le solide en 1888

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution. En Allemagne, on appelait ce problème *die mathematische Nixe*.

Dans un roman anglais paru en 1872, on pouvait lire :

Bref, la femme était un problème qui, puisque Monsieur Brooke se sentait l'esprit vide en sa présence, ne pouvait guère être moins compliqué que les révolutions d'un corps solide de forme irrégulière.

George Eliot
Middlemarch

Sofia Kovalevskaya

Sofia Kovalevskaya

Thèse avec Weierstrass en 1874,

Sofia Kovalevskaya

Thèse avec Weierstrass en 1874,
trois mémoires (intégrales abéliennes, anneaux de Saturne,
théorème de Cauchy-Kovalevskaya).

Sofia Kovalevskaya

Thèse avec Weierstrass en 1874,
trois mémoires (intégrales abéliennes, anneaux de Saturne,
théorème de Cauchy-Kovalevskaya).
Professeur à Stockholm depuis 1884.

Sofia Kovalevskaya

Thèse avec Weierstrass en 1874,
trois mémoires (intégrales abéliennes, anneaux de Saturne,
théorème de Cauchy-Kovalevskaya).

Professeur à Stockholm depuis 1884.

Prix Bordin de l'Académie des sciences en 1888 pour ce
travail sur le solide.

Le système différentiel

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + Mg(y_0 \gamma'' - z_0 \gamma'), \quad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mg(z_0 \gamma - x_0 \gamma''), \quad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + Mg(x_0 \gamma' - y_0 \gamma), \quad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'.$$

Le système différentiel

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 \gamma'' - z_0 \gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 \gamma - x_0 \gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 \gamma' - y_0 \gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc.

Le système différentiel

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 \gamma'' - z_0 \gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 \gamma - x_0 \gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 \gamma' - y_0 \gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc. Il y a six quantités inconnues, p , γ , etc.

Le système différentiel

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0\gamma' - x_0\gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc. Il y a six quantités inconnues, p , γ , etc. Elles décrivent la **position** et la **vitesse** du solide en fonction du temps t .

Le système différentiel

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc. Il y a six quantités inconnues, p , γ , etc. Elles décrivent la **position** et la **vitesse** du solide en fonction du temps t . Il y a aussi des constantes A , x_0 , etc.

Le système différentiel

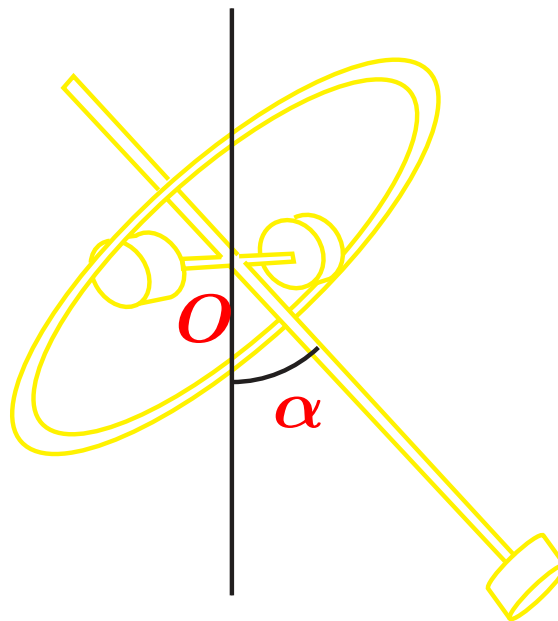
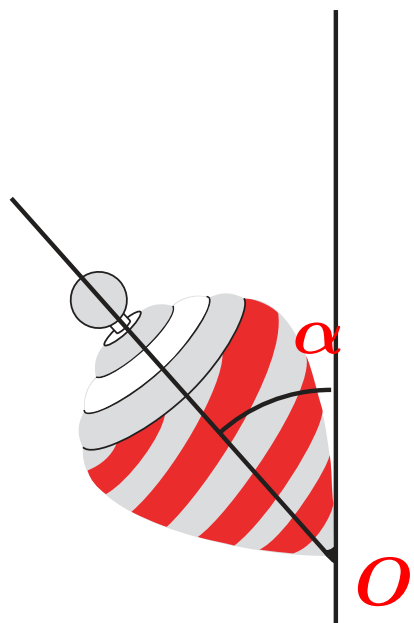
$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc. Il y a six quantités inconnues, p , γ , etc. Elles décrivent la **position** et la **vitesse** du solide en fonction du temps t .

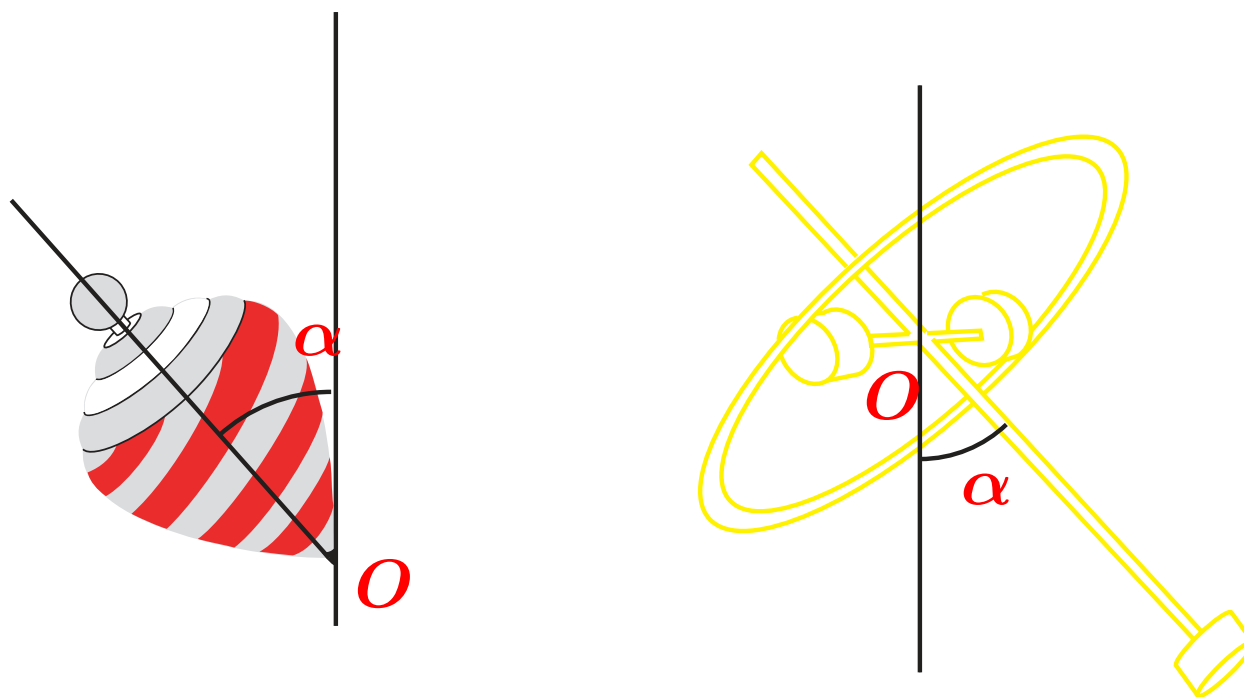
Il y a aussi des constantes A , x_0 , etc. Elles décrivent la **forme** du solide et la **position** du point fixe par rapport au centre de gravité.

Par exemple γ'' est le **cosinus** de l'angle entre OG et la verticale

Par exemple γ'' est le **cosinus** de l'angle entre OG et la verticale



Par exemple γ'' est le **cosinus** de l'angle entre OG et la verticale



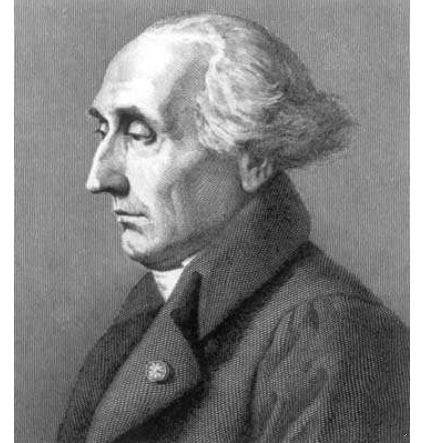
$$\gamma'' = \cos \alpha$$

Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie

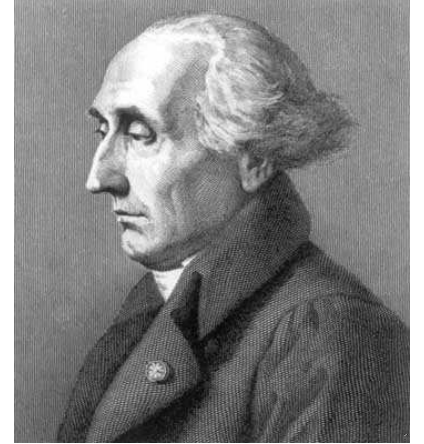
Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie

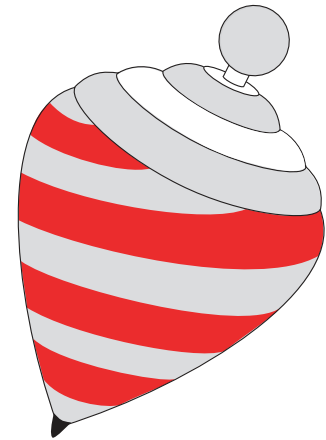


Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie

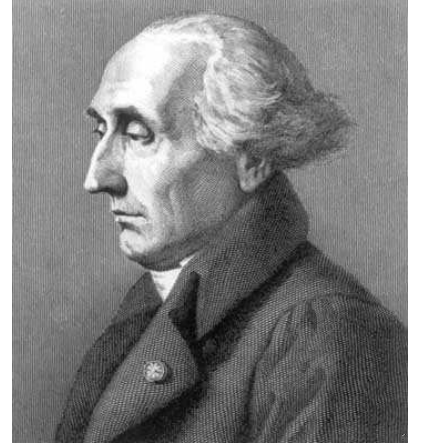


rotation :

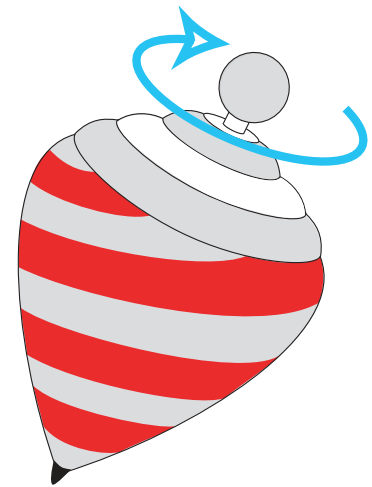


Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie

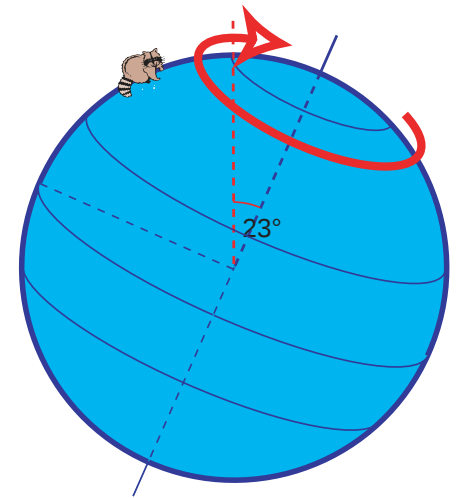
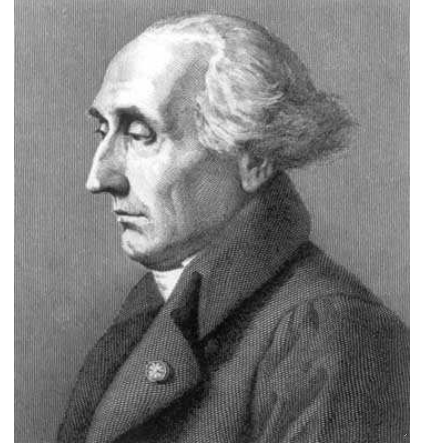


rotation : la toupie tourne autour de son axe



Ce que l'on voit...

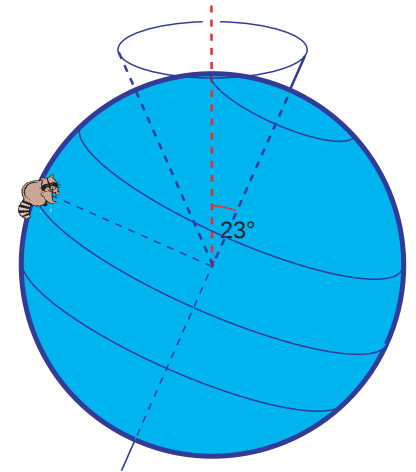
... quand on regarde une toupie



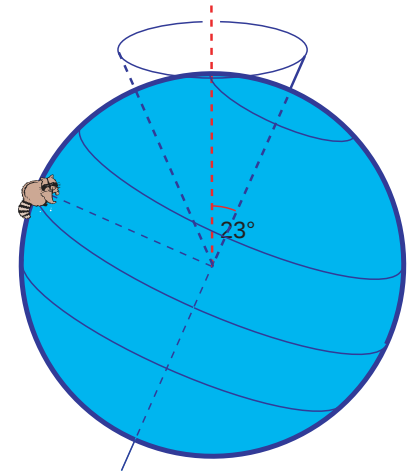
rotation : la toupie tourne autour de son axe

Ce que l'on voit...

précession :



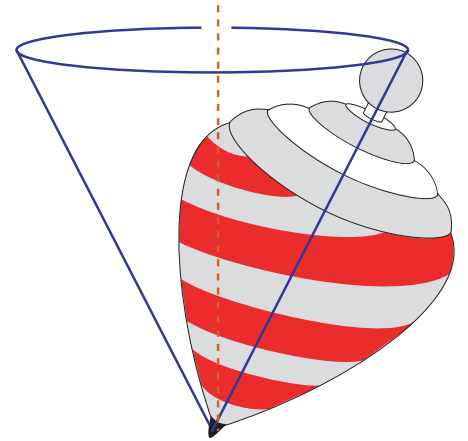
Ce que l'on voit...



précession : l'axe décrit un cône

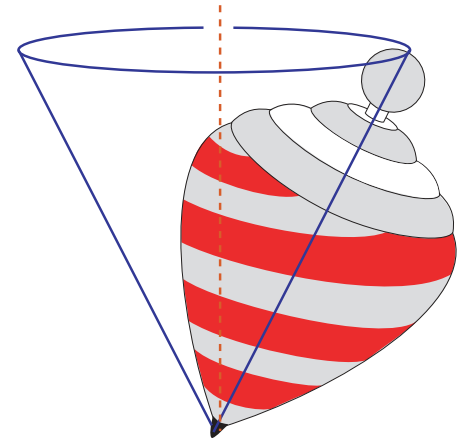
Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône

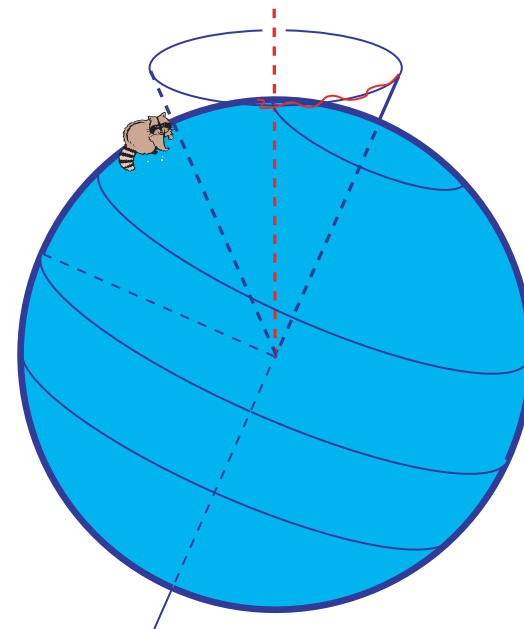


Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône

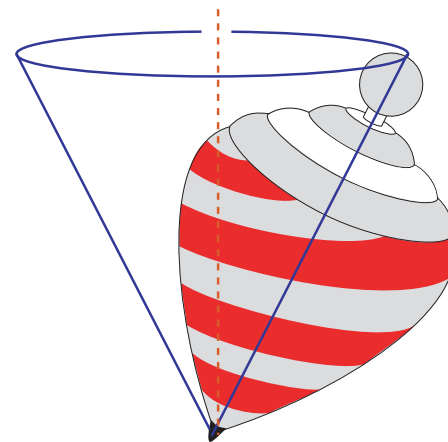


nutaton :

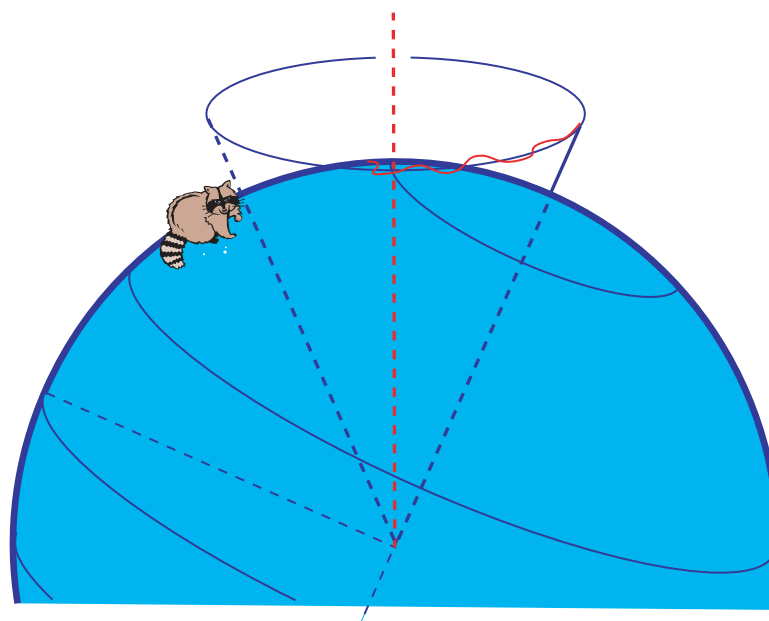


Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône

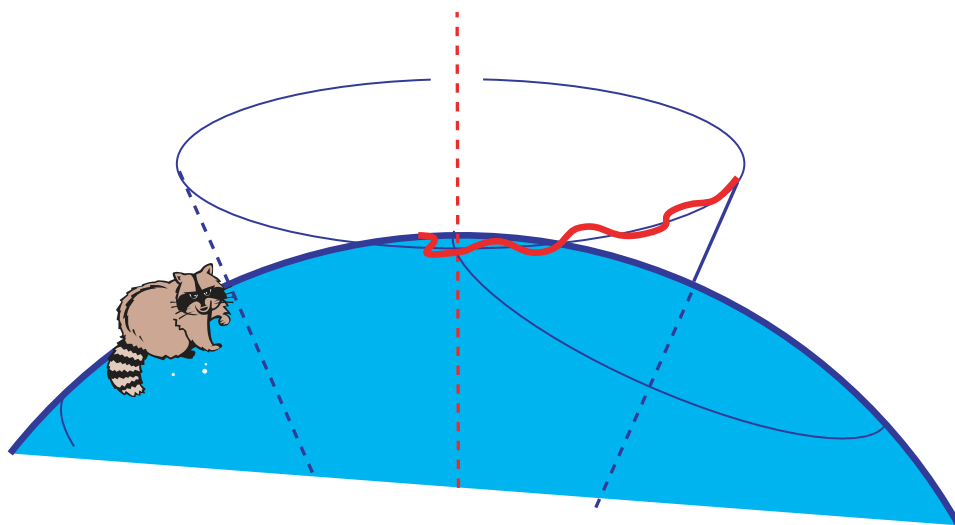
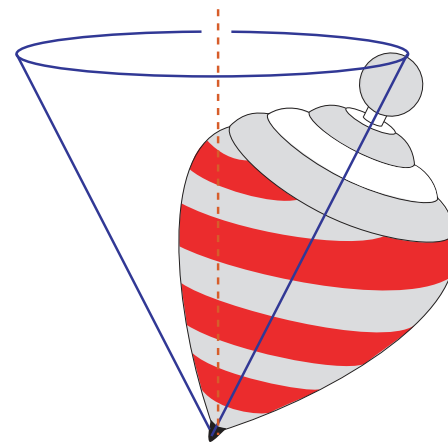


nutaton :



Ce que l'on voit...

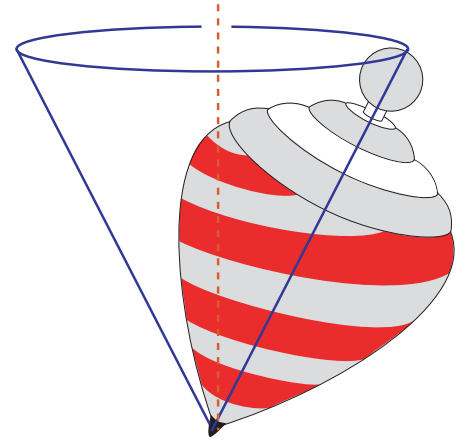
précession : l'axe décrit un cône



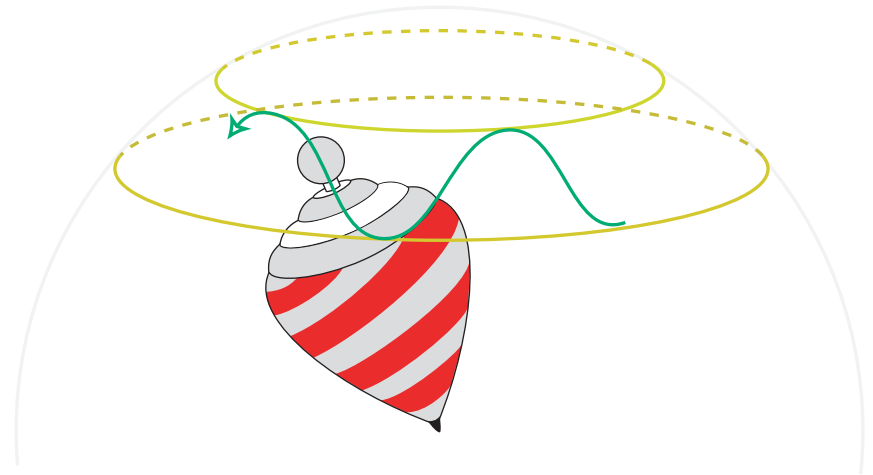
nutation :

Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône



nutaton : les petits festons



Résolution (1)

- On utilise les lois de conservation de la physique.

Résolution (1)

- On utilise les lois de conservation de la physique.
- Par exemple l'énergie est conservée,

Résolution (1)

- On utilise les lois de conservation de la physique.
- Par exemple l'énergie est conservée,
- ainsi que le moment de la toupie par rapport à son axe de révolution.

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie.

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie.

$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie.

$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré 3.

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la **hauteur** de l'extrémité de l'axe de la toupie.

$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré **3**.

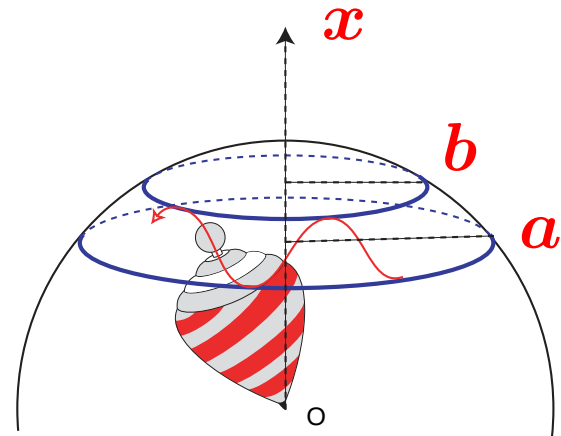
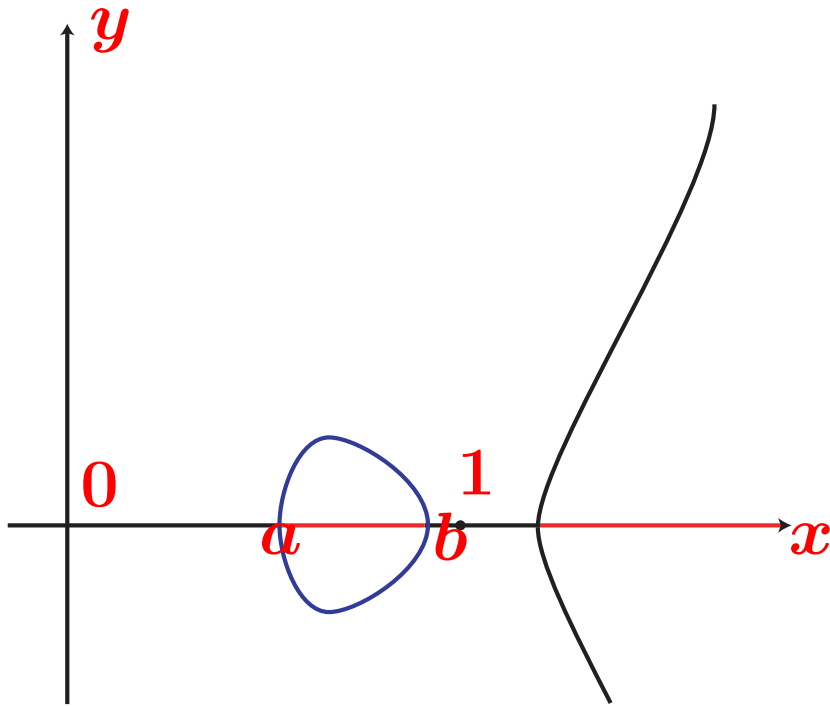
Les quantités x et $y = \dot{x}$ sont donc astreintes à vérifier l'équation $y^2 = P(x)$.

Résolution (3)

La courbe d'équation $y^2 = P(x)$... et la toupie

Résolution (3)

La courbe d'équation $y^2 = P(x)$... et la toupie



Première idée de Kovalevskaya

Première idée de Kovalevskaya

Voyons ce qui se passe dans les cas où l'on sait résoudre le système et regardons si des propriétés analogues pourraient être plus générales.

Première idée de Kovalevskaya

Voyons ce qui se passe dans les cas où l'on sait résoudre le système et regardons si des propriétés analogues pourraient être plus générales.

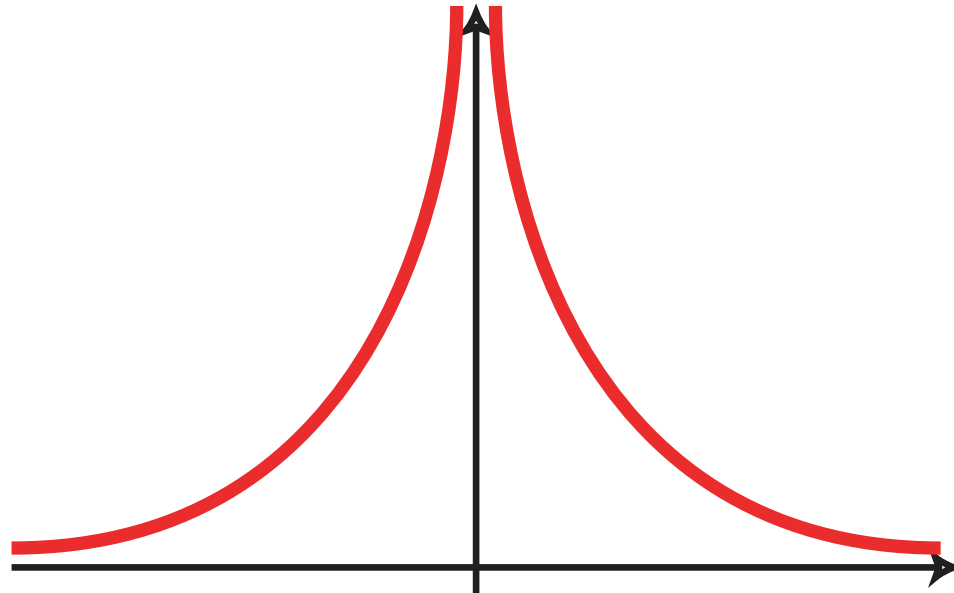
Dans les cas d'Euler et de Lagrange, les solutions ont des pôles.

Première idée de Kovalevskaya

Voyons ce qui se passe dans les cas où l'on sait résoudre le système et regardons si des propriétés analogues pourraient être plus générales.

Dans les cas d'Euler et de Lagrange, les solutions ont des pôles.

Les solutions ont des pôles, ça veut dire qu'elles partent à l'infini.



Ce que l'on voit...

Vous ne l'avez pas vu en regardant tourner la toupie. Par exemple, $x = \cos \alpha$ reste plus petit que **1**, la toupie n'explose pas !

Ce que l'on voit...

Vous ne l'avez pas vu en regardant tourner la toupie. Par exemple, $x = \cos \alpha$ reste plus petit que **1**, la toupie n'explose pas !

Regardons mieux.

Ce que l'on voit...

Vous ne l'avez pas vu en regardant tourner la toupie. Par exemple, $x = \cos \alpha$ reste plus petit que **1**, la toupie n'explose pas !

Regardons mieux.

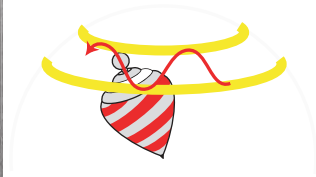
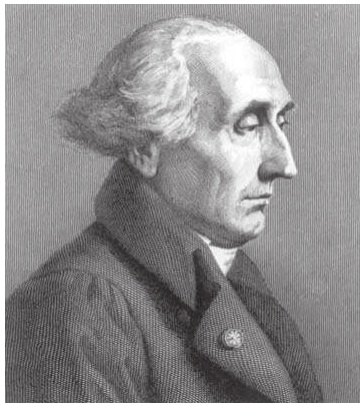
« La mathématique est la science qui demande le plus d'imagination. »

Regarder, c'est imaginer...

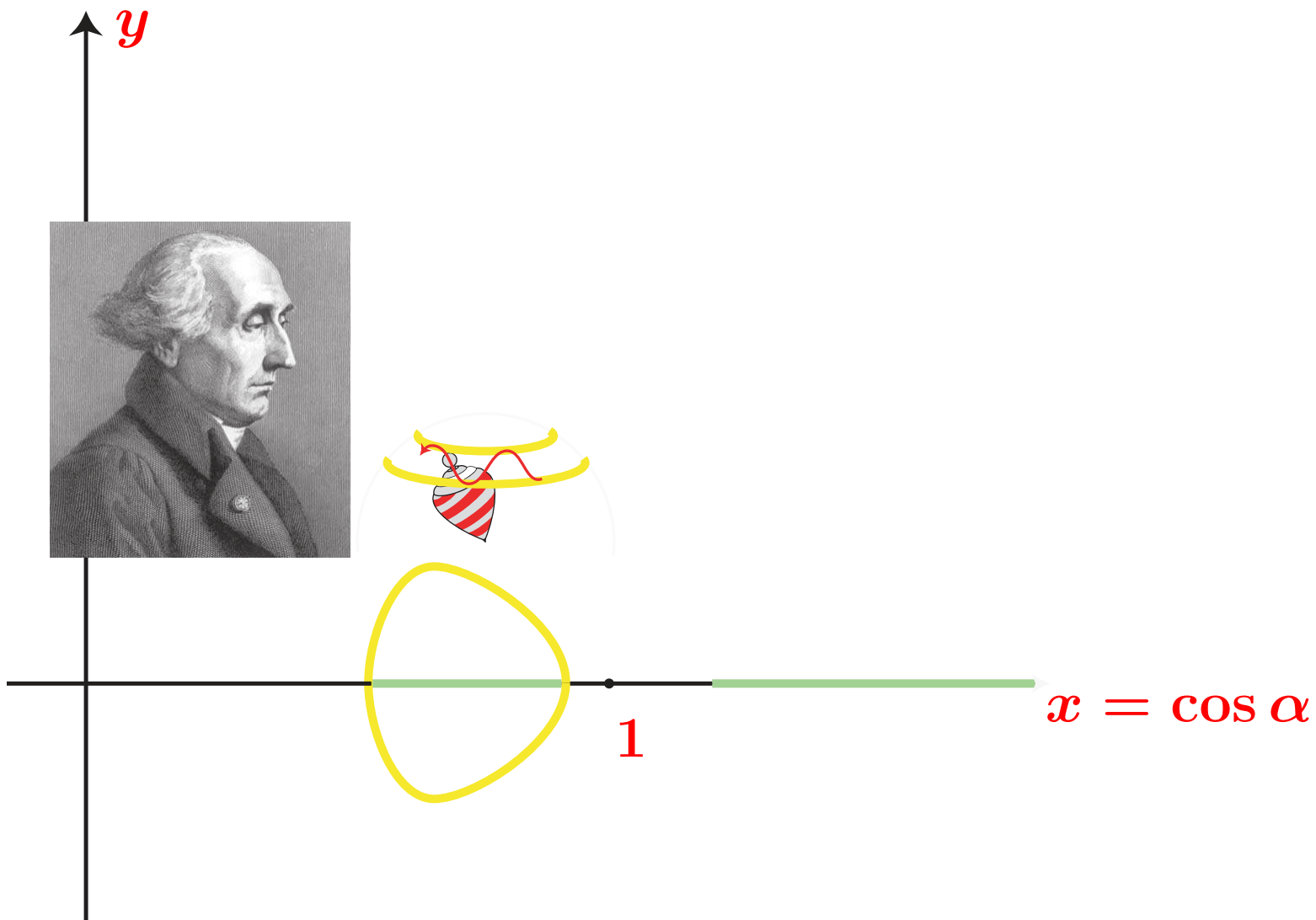
Regarder, c'est imaginer...



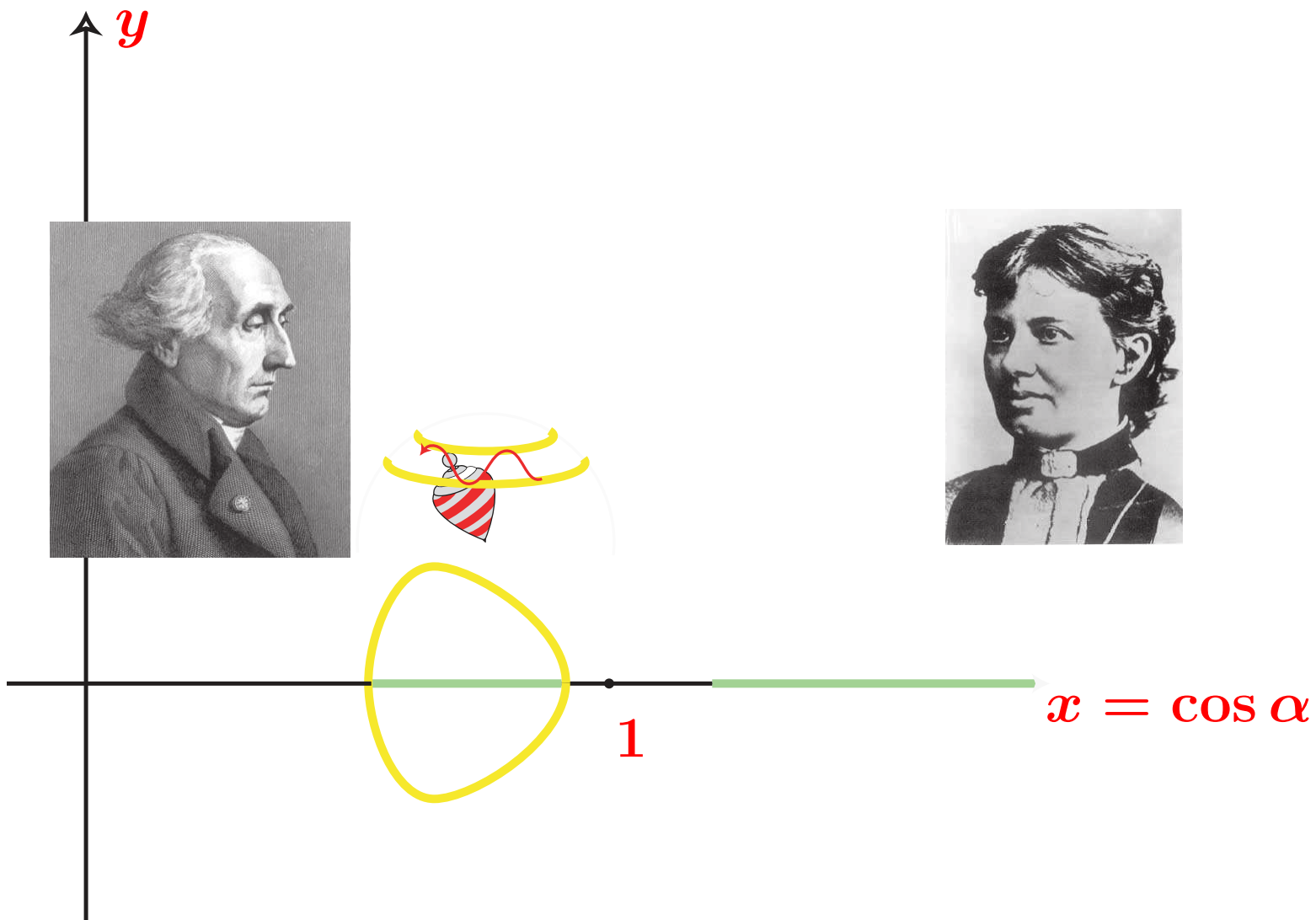
Regarder, c'est imaginer...



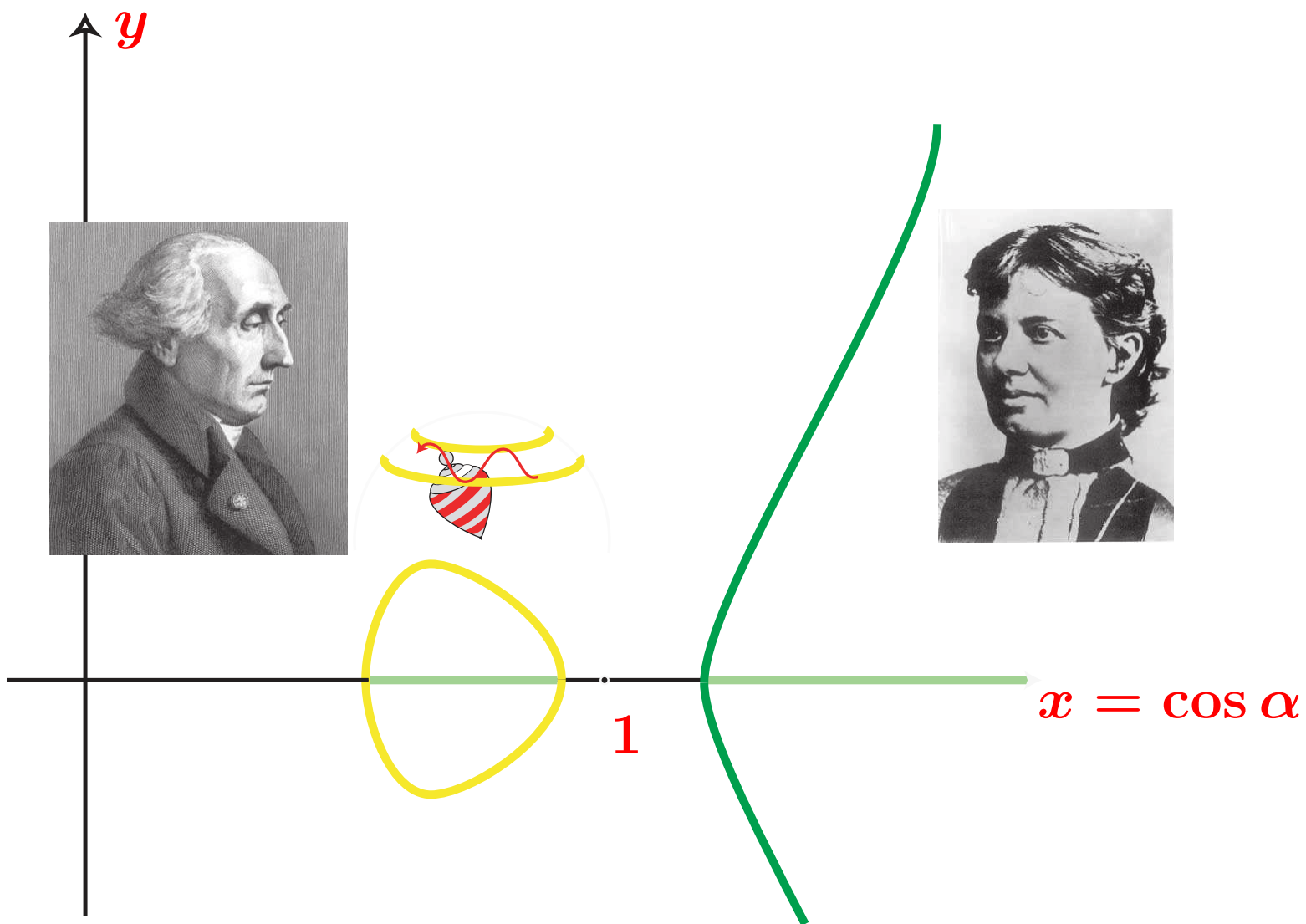
Regarder, c'est imaginer...



Regarder, c'est imaginer...



Regarder, c'est imaginer...



Imaginer...

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que 1...

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que 1...

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que **1**...

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha > 1 \iff \sin^2 \alpha < 0$$

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que **1**...

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha > 1 \iff \sin^2 \alpha < 0$$

c'est imaginer un nombre dont le carré est négatif...

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que 1...

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha > 1 \iff \sin^2 \alpha < 0$$

c'est imaginer un nombre dont le carré est négatif...

Kovalevskaya considère désormais le temps t comme une variable complexe $t \in \mathbb{C}$.

Le cas de Kowalevski

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général
et se demande pour quelles valeurs de A , B , C (forme du solide) et (x_0, y_0, z_0) (position du point fixe) les solutions, comme fonction de la variable complexe temps, ont cette propriété,

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général et se demande pour quelles valeurs de A , B , C (forme du solide) et (x_0, y_0, z_0) (position du point fixe) les solutions, comme fonction de la variable complexe temps, ont cette propriété, n'avoir **que** des pôles.

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général et se demande pour quelles valeurs de A , B , C (forme du solide) et (x_0, y_0, z_0) (position du point fixe) les solutions, comme fonction de la variable complexe temps, ont cette propriété, n'avoir **que** des pôles.

C'est le comportement le plus simple possible pour une solution d'un système comme celui du solide...

Le cas de Kowalevski (suite)

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais.

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas,

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas, le cas d'Euler, celui de Lagrange,

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas, le cas d'Euler, celui de Lagrange,

et un nouveau (en 1888) cas, le cas dit **de Kowalevski**

Le cas de Kowalevski (suite)

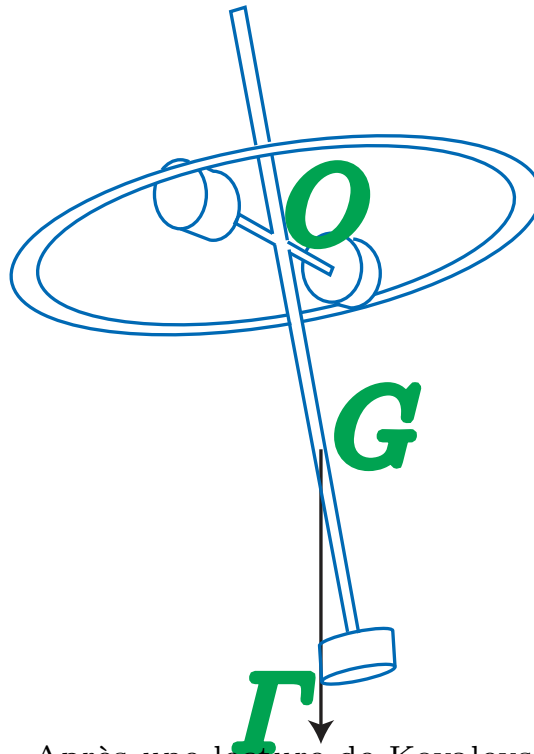
... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas, le cas d'Euler, celui de Lagrange,

et un nouveau (en 1888) cas, le cas dit **de Kowalevski** où $A = B = 2C$, $z_0 = 0$.

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas, le cas d'Euler, celui de Lagrange,

et un nouveau (en 1888) cas, le cas dit **de Kowalevski** où $A = B = 2C$, $z_0 = 0$.



Le cas de Kowalevski (suite)

Le cas de Kowalevski (suite)

« C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants, »

Le cas de Kowalevski (suite)

« C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants, » dit-elle à la septième page de l'article,

Le cas de Kowalevski (suite)

« C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants, » dit-elle à la septième page de l'article, qui en comporte cinquante-cinq.

Le cas de Kowalevski (suite)

« C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants, » dit-elle à la septième page de l'article, qui en comporte cinquante-cinq.

Elle exprime les solutions en termes de « fonctions ϑ de deux variables ». Ce sont de nouvelles fonctions, qu'elle connaît bien.

Le cas de Kowalevski (suite)

« C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants, » dit-elle à la septième page de l'article, qui en comporte cinquante-cinq.

Elle exprime les solutions en termes de « fonctions ϑ de deux variables ». Ce sont de nouvelles fonctions, qu'elle connaît bien.

Et grâce auxquelles elle écrit effectivement les solutions. Le système est résolu, intégré.

Et aujourd'hui ? systèmes intégrables

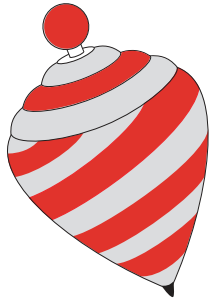
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables

Le cas de Kowalevski est un exemple de ce que l'on appelle un **système intégrable**,

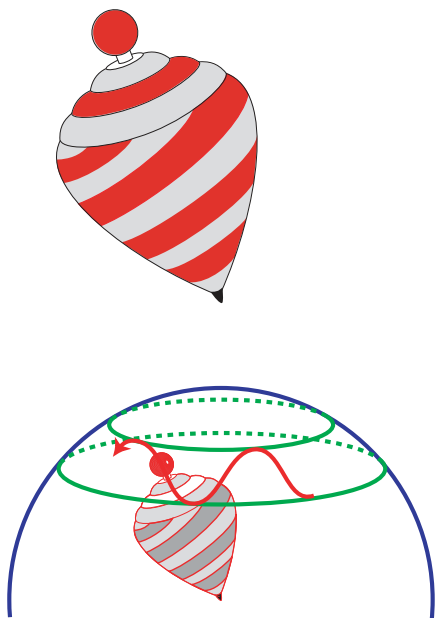
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables

Le cas de Kowalevski est un exemple de ce que l'on appelle un **système intégrable**,
un système différentiel qui possède assez de quantités conservées (énergie, moment,...) ce qui donne à ses solutions un comportement très régulier sur le long terme.

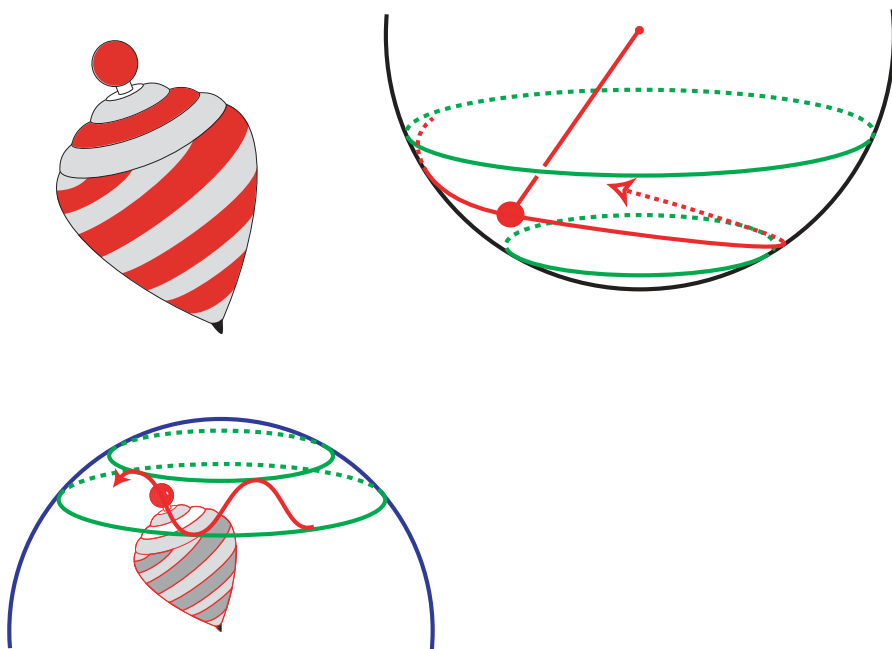
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



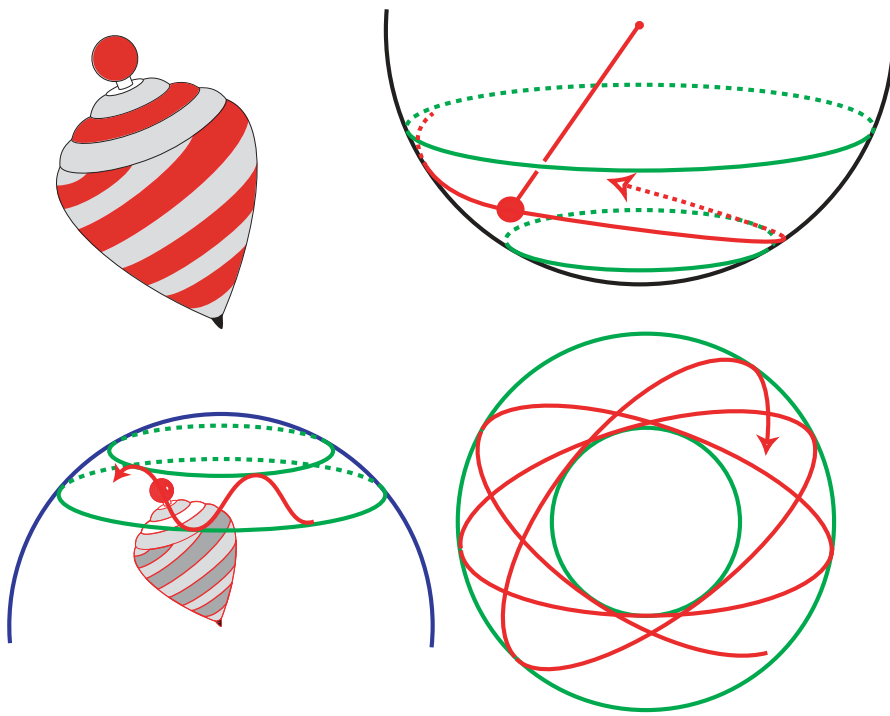
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



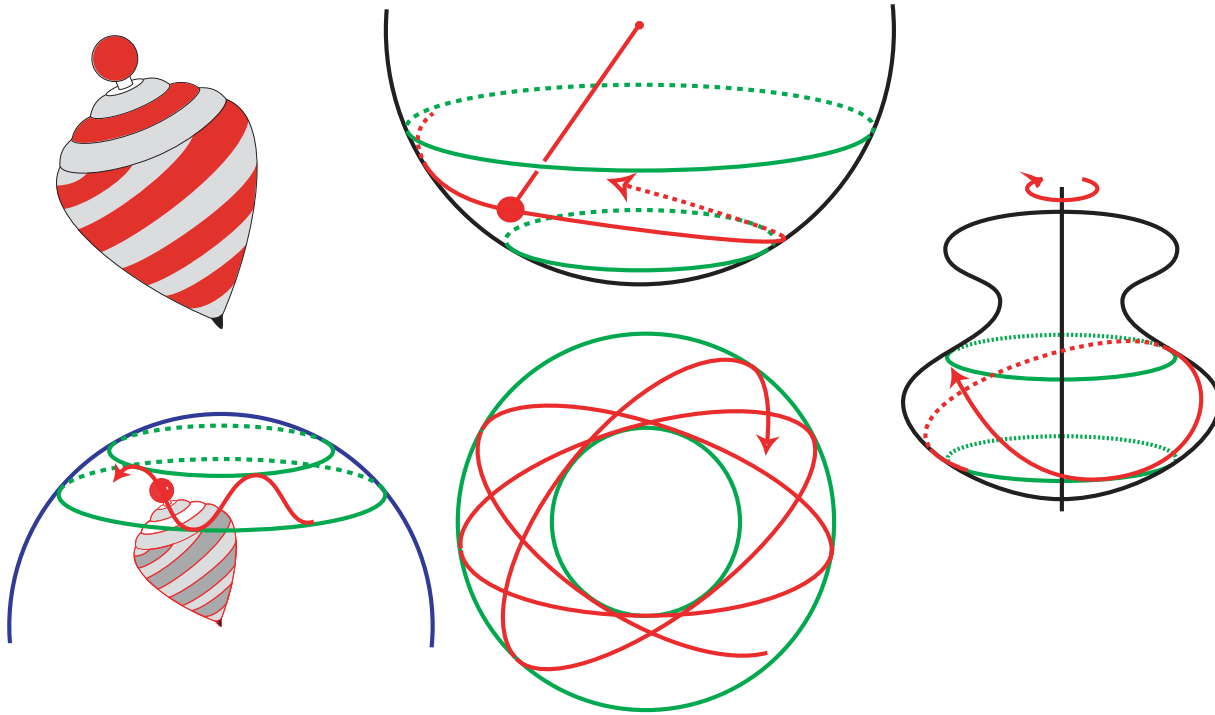
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



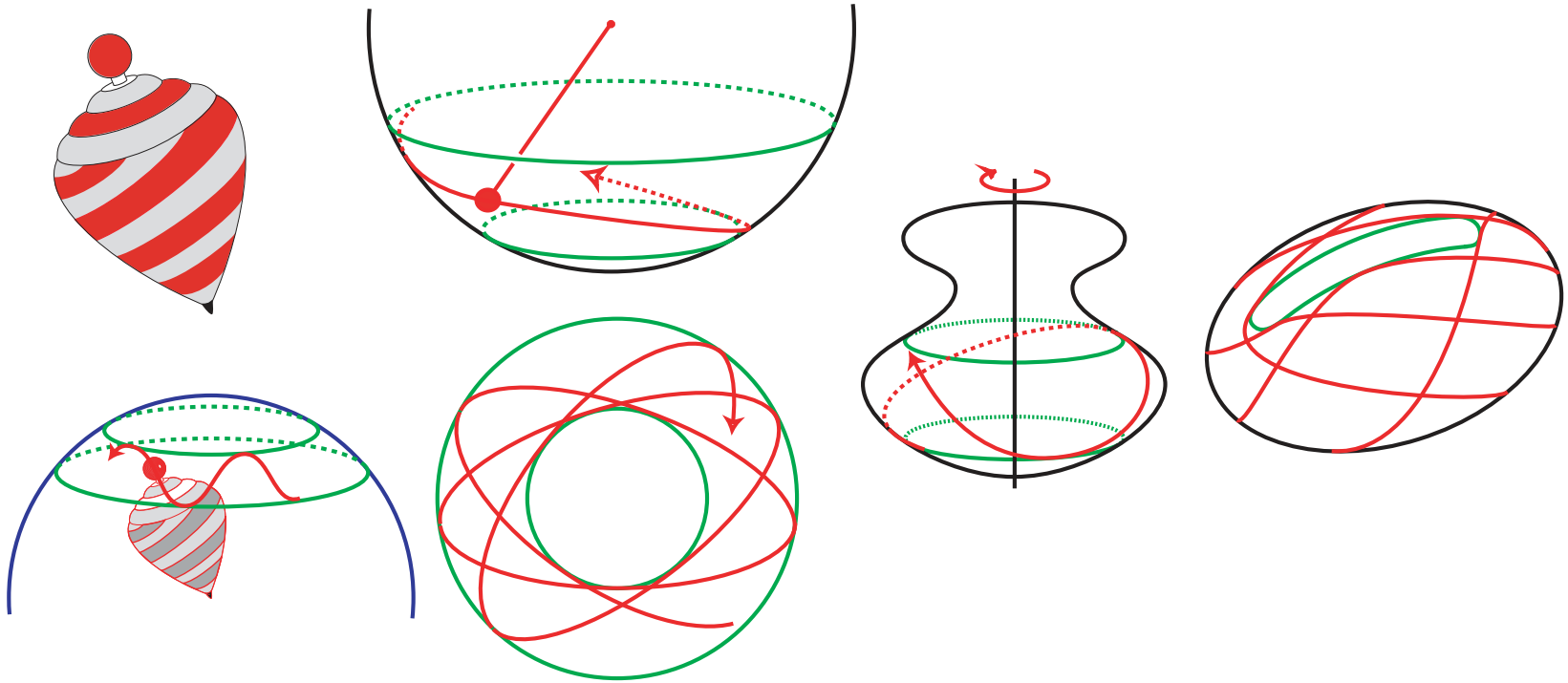
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



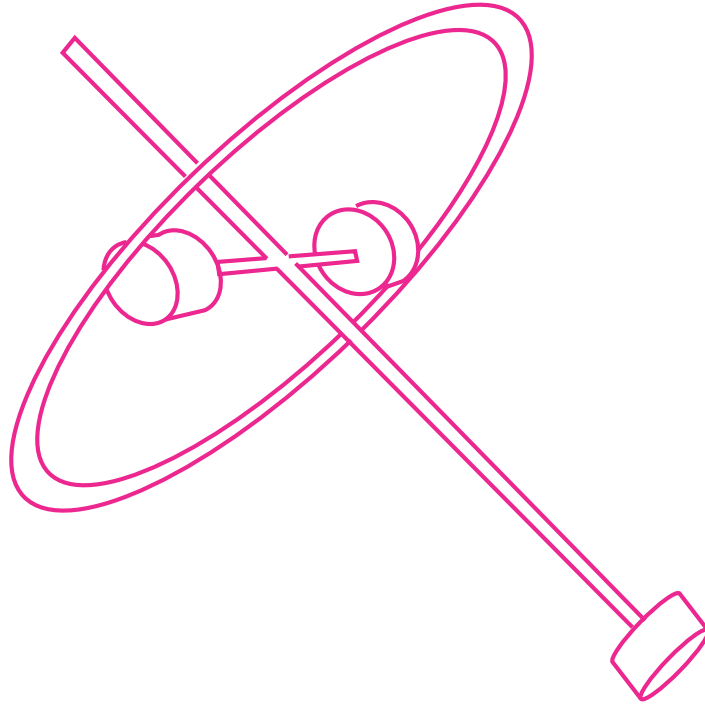
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



Systemes intégrables

Systeme intégrable

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie,

Systèmes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie, on s'est ramené à l'équation

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie, on s'est ramené à l'équation

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

en éliminant des variables grâce aux quantités conservées,
assez nombreuses, grâce au moment de la toupie par rapport
à son axe.

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie, on s'est ramené à l'équation

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

en éliminant des variables grâce aux quantités conservées,
assez nombreuses, grâce au moment de la toupie par rapport
à son axe. Kowalevski a résolu les équations dans son cas
grâce à un **polynôme** R de degré **5**.

Systèmes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie, on s'est ramené à l'équation

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

en éliminant des variables grâce aux quantités conservées,
assez nombreuses, grâce au moment de la toupie par rapport
à son axe. Kowalevski a résolu les équations dans son cas
grâce à un **polynôme** R de degré **5**.

Mais d'où a-t-elle sorti ce polynôme ?

Systemes intégrables

Systeme intégrable

Systemes intégrables

Dans son cas, elle a remarqué qu'il y avait aussi une quantité conservée au cours du mouvement,

Systemes intégrables

Dans son cas, elle a remarqué qu'il y avait aussi une quantité conservée au cours du mouvement,

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma + i\gamma')|^2,$$

Systemes intégrables

Dans son cas, elle a remarqué qu'il y avait aussi une quantité conservée au cours du mouvement,

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma + i\gamma')|^2,$$

c'est ce qui permet, par élimination,

Systemes intégrables

Dans son cas, elle a remarqué qu'il y avait aussi une quantité conservée au cours du mouvement,

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma + i\gamma')|^2,$$

c'est ce qui permet, par élimination,
d'intégrer le système.

Questions

Questions

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

Questions

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

La relation entre ces deux propriétés n'est pas encore très claire aujourd'hui.

Questions

Questions

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable ?

Questions

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable ?
Comment trouve-t-on une intégrale première ?

Questions

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable ?

Comment trouve-t-on une intégrale première ?

Et d'où sort ce cas bizarre ?

Questions

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable ?

Comment trouve-t-on une intégrale première ?

Et d'où sort ce cas bizarre ?

C'est un des sujets sur lesquels depuis environ trente ans, il y a eu énormément de progrès.

Questions

Questions

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable ?

Questions

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable ? On trouve des intégrales premières.

Questions

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable ? On trouve des intégrales premières.

Et si on n'en trouve pas ?

Questions

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable ? On trouve des intégrales premières.

Et si on n'en trouve pas ?

Il existe des systèmes qui ne sont pas intégrables.

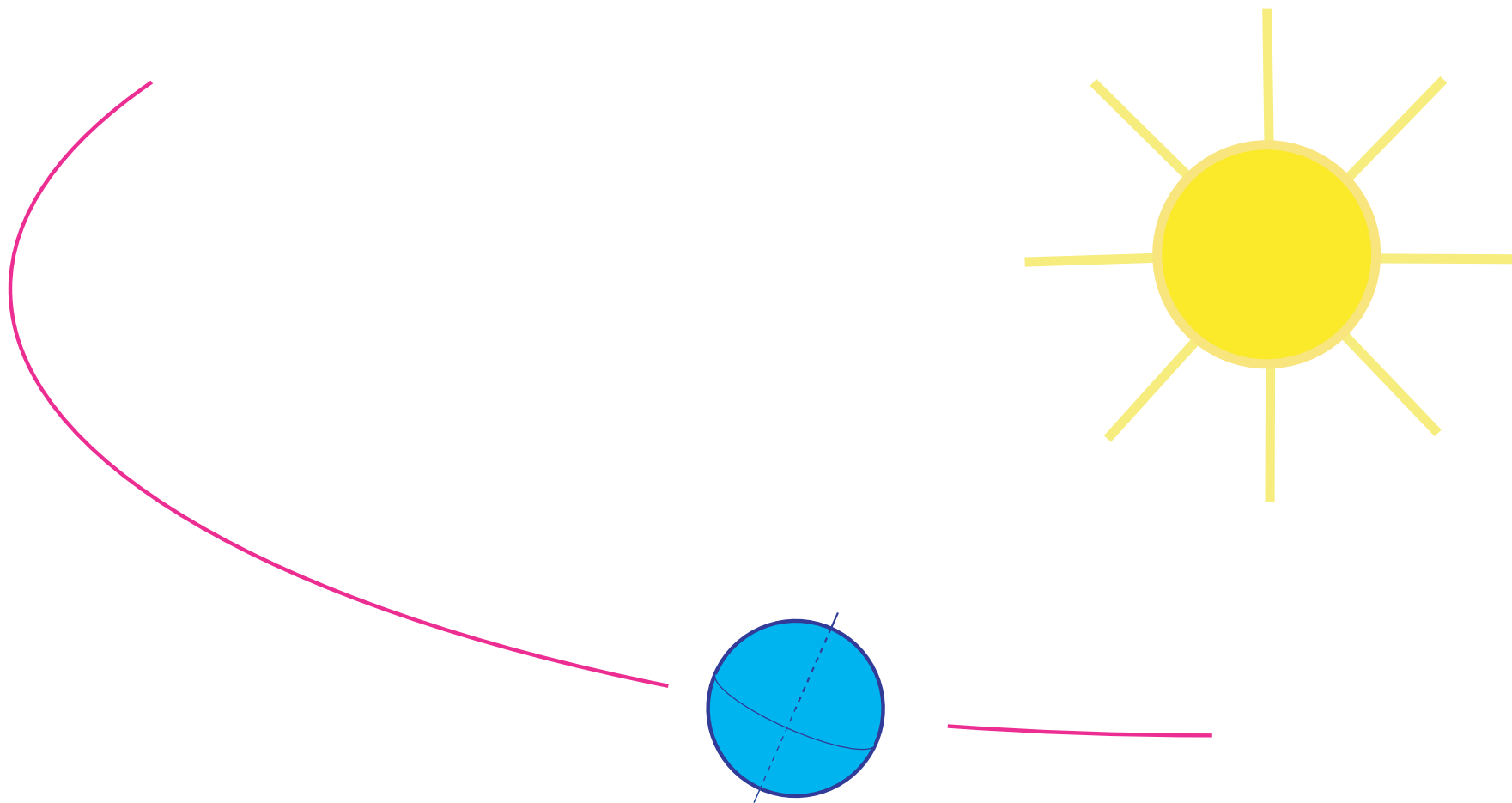
Questions

Questions

Deux corps,

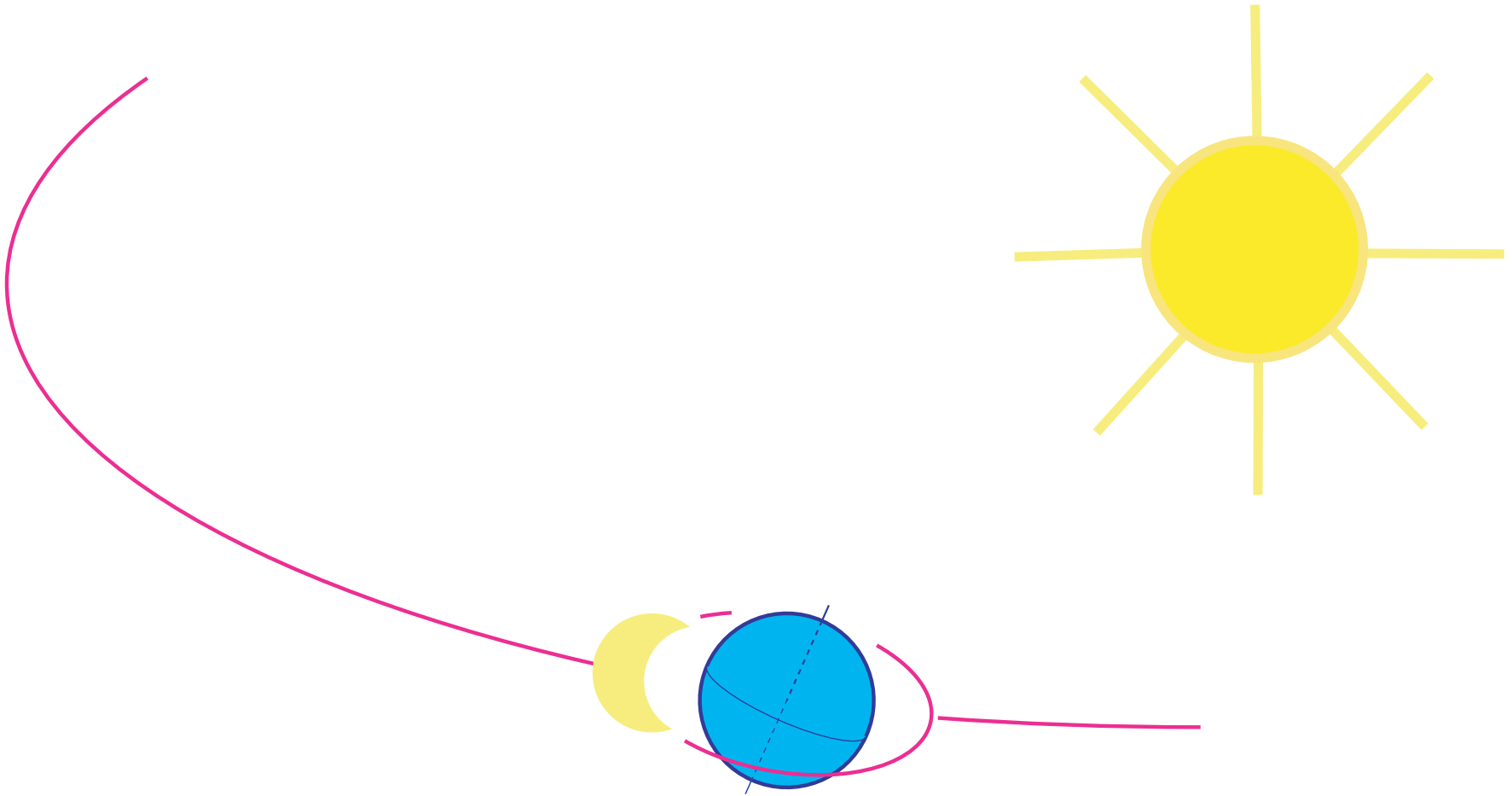
Questions

Deux corps,



Questions

Deux corps, trois corps...



Questions — la troisième

Le mouvement d'un satellite est-il intégrable ?

Questions — la troisième

Le mouvement d'un satellite est-il intégrable ?



Trois questions — la troisième

Trois questions — la troisième

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable,

Trois questions — la troisième

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable, grâce à un théorème de Morales et Ramis (1998).

Trois questions — la troisième

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable, grâce à un théorème de Morales et Ramis (1998).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse

Vol. XIV, n° 1, 2005
pp. 123–160

Differential Galois approach to the non-integrability of the heavy top problem^(*)

ANDRZEJ J. MACIEJEWSKI⁽¹⁾, MARIA PRZYBYLSKA^(2,3)

ABSTRACT. — We study integrability of the Euler-Poisson equations describing the motion of a rigid body with one fixed point in a constant gravity field. Using the Morales-Ramis theory and tools of differential algebra we prove that a symmetric heavy top is integrable only in the classical cases of Euler, Lagrange, and Kovalevskaya and is partially integrable only in the Goryachev-Chaplygin case. Our proof is alternative to that given by Ziglin (*Functional Anal. Appl.*, 17(1):6–17, 1983; *Functional Anal. Appl.*, 31(1):3–9, 1997).

RÉSUMÉ. — Nous étudions l'intégrabilité des équations de Euler-Poisson qui décrivent le mouvement d'un solide rigide avec un point fixe dans un champ gravitationnel constant. En utilisant la théorie de Morales-Ramis et des outils d'algèbre différentielle, nous prouvons qu'un solide symétrique est intégrable seulement dans les cas classiques d'Euler, Lagrange et Kovalevski, et est partiellement intégrable seulement dans le cas Goryatchev-Tchaletski.

Après avoir prouvé que le système de Kovalevskaya

Trois questions — la troisième

Trois questions — la troisième

On peut montrer par exemple que le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité n'est pas un système intégrable.

Trois questions — la troisième

On peut montrer par exemple que le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité n'est pas un système intégrable.

