

Équations différentielles —

le cas de

Cauchy-Kowalevski

Michèle Audin

IRMA, Université de Strasbourg







$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''),$$

$$\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma),$$

$$\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'.$$

# SOUVENIRS SUR SOFIA KOVALEVSKAYA

MICHÈLE AUDIN



COLLECTION.- ORIZZONTI

CALVAGE & MOUNET



## ***2. THÉORÈME D'EXISTENCE DES SOLUTIONS***

Dans tout ce paragraphe, on considère une équation différentielle

$$(E) \qquad y' = f(t, y)$$

où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est continue et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ .

## 2.5. THÉORÈME D'EXISTENCE (CAUCHY-PEANO-ARZELA)

L'idée est d'utiliser le théorème d'Ascoli pour montrer l'existence d'une sous-suite uniformément convergente de solutions approchées. On obtient ainsi le

**Théorème** – Soit  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$  avec  $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$  un cylindre de sécurité pour l'équation (E) :  $y' = f(t, y)$ . Alors il existe une solution  $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \overline{B}(y_0, r_0)$  de (E) avec condition initiale  $y'(t_0) = y_0$ .

**Théorème** (Cauchy-Lipschitz) – Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est localement lipschitzienne en  $y$ , alors pour tout cylindre de sécurité  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$  comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec condition initiale  $(t_0, y_0)$  admet une unique solution exacte  $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow U$ . De plus, toute suite  $y_{(p)}$  de solutions  $\varepsilon_p$ -approchées avec  $\varepsilon_p$  tendant vers 0 converge uniformément vers la solution exacte  $y$  sur  $[t_0 - T, t_0 + T]$ .

**Théorème III.1.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz).** Soit  $E$  un e.v.n. complet,  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R} \times E$ , et  $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$  une application **continue** de  $U$  dans  $E$ , **localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable**. Pour chaque point  $(t_0, x_0)$  de  $U$ , il existe un intervalle  $J$ , de centre  $t_0$  et de longueur non nulle, tel que l'équation différentielle

$$(1) \quad X' = f(t, X)$$

admette **sur  $J$  une solution unique** vérifiant  $X(t_0) = x_0$ .

Pour l'Analyse classique, la question était censée comporter une première réponse, simple et générale, donnée par le théorème de Cauchy pour lequel on possède la célèbre et belle démonstration de Sophie KOWALEWSKI. En se bornant, pour prendre le cas le plus intéressant, à une équation du second ordre, et en appelant  $x, x_1, \dots, x_n$  les variables indépendantes, ce théorème s'énonce de la manière suivante: si l'équation aux dérivées partielles

$$F\left(x, x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}\right) = 0 \quad \left(\begin{matrix} i, k = 0, 1, 2, \dots, n \\ x_0 = x \end{matrix}\right) \quad (1)$$

peut être résolue par rapport à la dérivée  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x, x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}\right), \quad (1')$$

la fonction  $f$  contenant ou pouvant contenir toutes les variables indépendantes, la fonction inconnue  $u$ , toutes ses dérivées du premier ou du second ordre à l'exception de celle qui figure au premier membre et étant fonction holomorphe de ces quantités, cette équation admet une solution et une seule holomorphe en  $x, x_1, \dots, x_n$  satisfaisant aux conditions

$$u = g(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = h(x_1, \dots, x_n),$$

pour  $x = 0$ ,  $g$  et  $h$  étant des fonctions holomorphes données de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Plus généralement, au lieu de l'hyperplan  $x = 0$ , on peut considérer une hypersurface

$$S(x, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (S)$$

et, en chaque point de cette hypersurface, se donner la valeur de l'inconnue  $u$  et d'une de ses dérivées premières (convenablement choisie, c'est-à-dire dans une direction non tangente à  $S$ ). Telles seront les conditions définies que l'on adjoindra à l'équation aux dérivées partielles indéfinie (1) pour déterminer  $u$ ; le problème de Cauchy ainsi posé se ramène évidemment, par une transformation ponctuelle, au précédent, auquel il se réduit lorsque la surface qui porte les données, c'est-à-dire la surface  $S$ , est le plan  $x = 0$ .





# Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen \*).

(Von Frau Sophie von Kowalevsky.)

## Einleitung.

Es sei eine algebraische Differentialgleichung

$$(1.) \quad G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

vorgelegt, wo  $G$  eine ganze rationale Function der unabhängigen Veränderlichen  $x$ , der als Function derselben zu bestimmenden Grösse  $y$  und der Ableitungen derselben nach  $x$  bis zur  $n^{\text{ten}}$  Ordnung hin bedeutet.

Eine analytische Function ist vollständig bestimmt, sobald irgend ein regulärer Zweig derselben gegeben ist. Es kommt also darauf an, auf die allgemeinste Weise eine Potenzreihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} b_v \frac{(x-a)^v}{v!},$$

wo  $a, b_0, b_1, \dots$  Constanten bedeuten, so zu bestimmen, dass dieselbe, für  $y$  gesetzt, der gegebenen Differentialgleichung genügt, und innerhalb eines gewissen, die Stelle  $a$  umgebenden Bezirks convergirt.

Es muss also, wenn man diese Reihe für  $y$  in den Ausdruck  $G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$  einsetzt und denselben nach Potenzen von  $x-a$  entwickelt, jeder einzelne Coefficient dieser Entwicklung gleich Null werden.

So erhält man zunächst zwischen  $a, b_0, b_1, \dots b_n$  die Gleichung

$$(2.) \quad G(a, b_0, b_1, \dots b_n) = 0.$$

Nun hat aber, wenn  $y$  irgend eine reguläre Function von  $x$  ist, die  $\lambda^{\text{te}}$  Ableitung von

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

die Form

$$G'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right) \frac{d^{n+\lambda} y}{dx^{n+\lambda}} + H_\lambda\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{n+\lambda-1} y}{dx^{n+\lambda-1}}\right),$$

wo  $G'$  die partielle Ableitung von  $G$  in Beziehung auf  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , und  $H_\lambda$  eine

\*) Diese Abhandlung ist zugleich als Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen Facultät zu Göttingen erschienen.



Potenzreihe

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r),$$

welche für  $\varphi$  gesetzt die gegebene Differentialgleichung formell befriedigt.

Aber ich habe bemerkt, dass wenn diese Reihe convergent sein soll, die Functionen  $\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(n-1)}$  nicht willkürlich angenommen werden können, sondern solchen Beschränkungen unterworfen sind, dass man im Allgemeinen sagen kann, die Reihe

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$$

convergiere an *keiner* Stelle  $(x, x_1, \dots, x_r)$ , wie nahe man dieselbe auch der Stelle  $(a, a_1, \dots, a_r)$  annehmen kann.

Ich begnüge mich aber hier dies an einem Beispiel nachzuweisen.

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

gegeben. Wenn  $\varphi_0(y|b)$  irgend eine Potenzreihe von  $y-b$  ist, so genügt die Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{d^{2\nu} \varphi_0(y|b)}{dy^{2\nu}} \cdot \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

dieser Differentialgleichung formell, und geht für  $x=a$  in  $\varphi_0(y|b)$  über, sie besitzt aber nur bei einer ganz besonderen Wahl von  $\varphi_0(y|b)$  einen Convergenzbezirk, während im Allgemeinen sie für kein Werthsystem  $(x, y)$  eine bestimmte, endliche Summe hat.

Es sei z. B.  $a=0, b=0$ ,

$$\varphi_0(y|b) = \frac{1}{1-y}.$$

Dann ist

$$\frac{d^n \varphi}{dy^n} = \frac{n!}{(1-y)^{n+1}},$$

und die obige Reihe geht in

$$\sum_0^\infty \frac{2\nu!}{\nu!} \frac{x^\nu}{(1-y)^{2\nu+1}}$$

über, von der es leicht zu sehen ist, dass sie divergent ist, wie klein auch  $x, y$  angenommen werden.

fondamental. Permettez-moi, de faire à ce sujet quelques observations.

» Il y a longtemps que Cauchy s'est occupé de la même question. Dans la séance du 27 juin 1842, il énonçait le problème général : « Un système  
 » quelconque d'équations différentielles ou aux dérivées partielles admet-  
 » il toujours un système correspondant d'intégrales générales? » Et il démontrait un théorème appelé fondamental qui détermine les conditions de la convergence des séries obtenues et une limite de l'erreur que l'on commet en arrêtant chaque développement après un certain nombre de termes. (*Comptes rendus*, t. XIV, p. 1020-1023.)

» Dans la séance du 11 juillet 1842, Cauchy proposait encore la question : « Peut-on intégrer généralement une équation aux dérivées partielles d'un  
 » ordre quelconque, ou même un système quelconque de semblables équations? » Ensuite, il traitait le cas particulier d'une équation linéaire du premier ordre à une seule inconnue (*Comptes rendus*, t. XV, p. 44-58). Dans la séance du 18 juillet 1842, il considérait un système d'équations linéaires ou non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre (*Comptes rendus*, p. 85-101). Enfin, dans la séance du 25 juillet 1842, il expliquait la manière de réduire les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordres quelconques à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre (*Comptes rendus*, p. 131-138).

» On peut ajouter qu'on doit aussi à Cauchy la méthode à suivre lorsque les conditions particulières auxquelles l'inconnue se trouve assujettie se rapportent, non plus à une certaine valeur  $\tau$  de la variable  $t$ , mais à certains systèmes de valeurs des variables  $x, y, z, \dots$ , par exemple, à ceux qui vérifient une certaine équation de forme déterminée (séance du 13 mars 1843; *Comptes rendus*, t. XVI, p. 572).

» Je conclus que, pour les équations aux dérivées partielles comme pour les équations différentielles, la première démonstration de l'existence de l'intégrale est due à Cauchy. Sans doute, le très-grand nombre des écrits du célèbre analyste doit excuser ceux qui n'ont pas connaissance de tous les résultats obtenus par lui.