

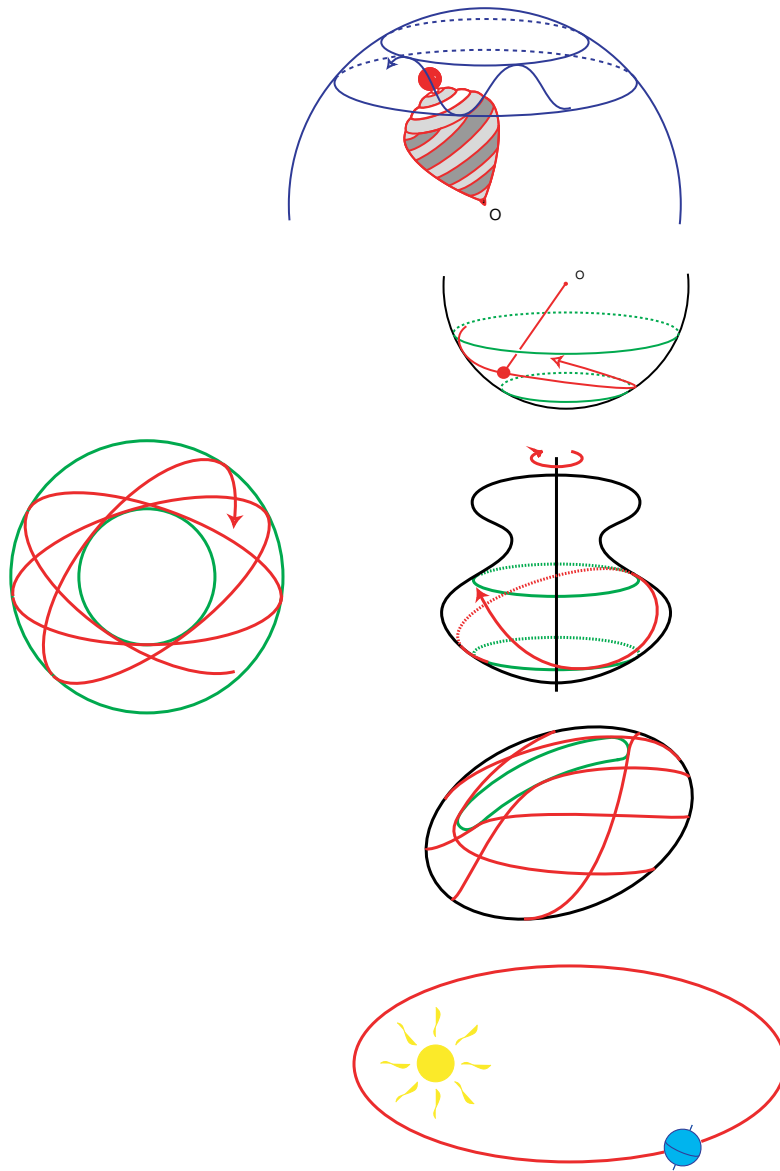


O satélite e a redução simpléctica

Michèle Audin, Universidade de Estrasburgo

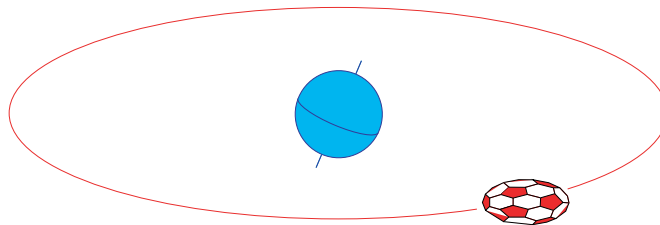
O problema geral

Dado um sistema hamiltoniano, como mostrar que ele é (ou não é) integrável?



O movimento dum sistema integrável é muito regular, mais precisamente, é quase-periódico. O sistema volta regularmente a uma vizinhança dum posição já tomada.

Exemplo : o movimento dum satélite sobre uma órbita circular à volta da Terra.



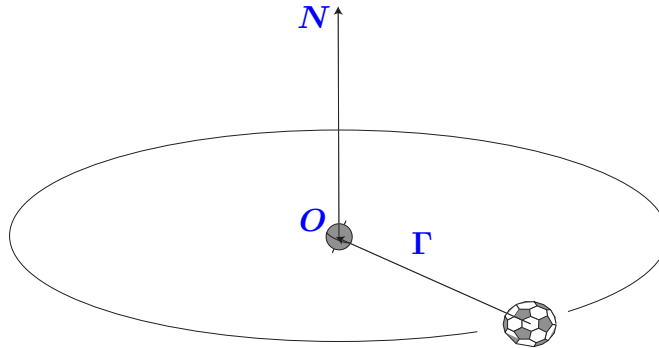
integrável ?

Estratégia, segundo o teorema de Morales e Ramis, 1998

Para demonstrar que um dado sistema **analítico** real **não** é integrável,

- (1) descrever o sistema como um sistema hamiltoniano sobre uma variedade simpléctica **W** de dimensão **$2n$**
- (2) escolher uma solução particular
- (3) linearisar o sistema ao longo desta trajectória
- (4) considerar o grupo de Galois diferencial do sistema linear obtido
- (5) mostrar que este grupo não é virtualmente abeliano.

- (1) descrever o sistema como um sistema hamiltoniano sobre uma variedade simpléctica W de dimensão $2n$



M o momento angular, Ω a velocidade angular, ligados pela relação $M = \mathcal{J}\Omega$ onde $\mathcal{J}$ é a matriz de inércia do satélite (uma matriz simétrica positiva). A energia total é

$$H(N, \Gamma, M) = \frac{1}{2} \langle M, \mathcal{J}^{-1} M \rangle - \langle M, N \rangle + \frac{3}{2} \langle \Gamma, \mathcal{J} \Gamma \rangle.$$

O sistema diferencial que descreve o movimento é

$$\begin{cases} \dot{N} = N \wedge \Omega \\ \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge (\Omega - N) \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + 3\Gamma \wedge \mathcal{J} \Gamma. \end{cases}$$

A variedade simpléctica é

$$\mathbf{W} = \left\{ (\mathbf{N}, \Gamma, \mathbf{M}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \mid \|\mathbf{N}\|^2 = 1, \|\Gamma\|^2 = 1 \right\}$$

É difeomorfa a $SO(3) \times \mathbf{R}^3$.

A estrutura simpléctica vem do facto de $\mathbf{W}$ ser uma órbita co-adjunta no dual $(\mathfrak{so}(3) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)^*$ duma álgebra de Lie.

(2) escolher uma solução particular

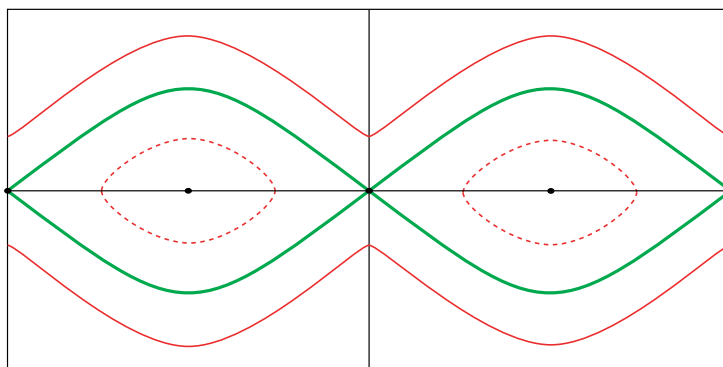
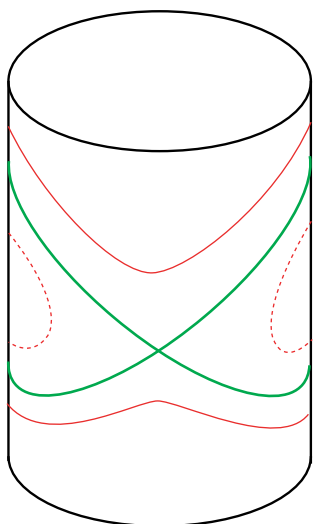
Suponhamos que $\mathcal{J}$ é uma matriz diagonal (a, b, c) .
Consideramos o cilindro

$$V = \{(N, \Gamma, M) = (e_3, (x, y, 0), c(z + 1)e_3) \in W\}$$

É uma subvariedade simpléctica de W e o campo vectorial hamiltoniano X_H é tangente a esta subvariedade. As trajectórias de X_H no cilindro V são

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 3(ax^2 + by^2) + cz^2 = 2h + c, \end{cases}$$

ou seja intersecções de duas quádricas, portanto curvas elípticas (menos quatro pontos no infinito), em geral suaves.



O sistema hamiltoniano é, nestas trajectórias

$$\begin{cases} \dot{x} = zy \\ \dot{y} = -zx \\ \dot{z} = \frac{3(b-a)}{c}xy. \end{cases}$$

(3) linearisar o sistema ao longo desta trajectória

O sistema linearisado é

$$\begin{cases} \dot{U} = e_3 \wedge \mathcal{J}^{-1}W + (z+1)U \wedge e_3 \\ \dot{V} = \Gamma \wedge (\mathcal{J}^{-1}W - U) + zV \wedge e_3 \\ \dot{W} = c(z+1)e_3 \wedge \mathcal{J}^{-1}W + (z+1)W \wedge e_3 + 3(\Gamma \wedge U) \end{cases}$$

(4) considerar o grupo de Galois diferencial do sistema linear obtido

É um subgrupo algébrico de $\mathbf{GL}(6; \mathbf{C})$.

(5) mostrar que este grupo não é virtualmente abeliano.



Problema desta estratégia no caso do satélite

O problema do satélite é um problema com três graus de liberdade. Portanto o grupo de Galois do sistema linearizado ao longo duma trajectória qualquer é um subgrupo algébrico de $\mathbf{Sp}(6; \mathbb{C}) \subset \mathbf{GL}(6; \mathbb{C})$.

Então é preciso **reduzir a ordem do sistema**.

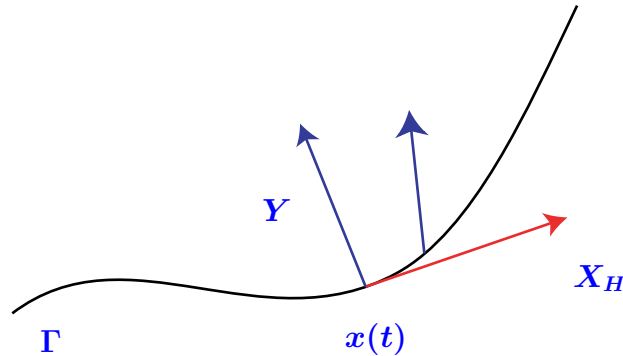
Como reduzir a ordem dum sistema ?

- Método algébrico : factorizar o operador diferencial linear $D = D_1 \circ D_2$ (**Delphine Boucher, Jacques-Arthur Weil**).
- Método geométrico : utilizar a redução simpléctica.

Em ambos métodos, obtém-se o grupo de Galois dum sistema de ordem menor. O facto deste grupo mais pequeno não ser virtualmente abeliano é suficiente para que o sistema maior não seja integrável.

A redução simpléctica

$E \longrightarrow \Gamma$ um fibrado analítico (complexo) simpléctico sobre uma superfície de Riemann, D um operador diferencial sobre as secções. Suponhamos que D é simpléctico.



Exemplo. Seja Γ uma trajectória do campo vectorial X_H e seja $E = j^*TW$ a restrição do fibrado tangente. As secções de E são os campo vectoriais tangentes a W ao longo de Γ . O parêntesis de Lie com o campo vectorial X_H define um operador D sobre estas secções. O sistema linearisado é precisamente

$$[X_H, Y] = DY = 0.$$

Seja $F \subset E$ um subfibrado co-isotrópico e invariante por D . Então, o seu ortogonal simpléctico F° é também invariante e D define um operador *reduzido* D_N sobre as secções de F/F° .

No exemplo dum sistema hamiltoniano, o hamiltoniano H é uma integral primeira. O subfibrado F° gerado por X_H em E é invariante. O seu ortogonal F é o fibrado tangente ao conjunto de nível de H onde fica a nossa trajectória Γ . A ordem da equação $D_N Y = 0$ é $2n - 2$.

Exemplo (continuação). Mais geralmente, se houvesse k integrais primeiras independentes ao longo de Γ que comutassem, a ordem do sistema linear poderia ser reduzida a $2n - 2k$.

O grupo de Galois $\text{Gal}(D_N)$ é um subgrupo dum quociente do grupo grande $\text{Gal}(D)$.

Portanto, se o grupo pequeno não for (virtualmente) abeliano, o grupo grande também não é.

Exemplo do satélite

O sistema tem três graus de liberdade e é hamiltoniano, pelo que o grupo de Galois é, de facto, um subgrupo do grupo simpléctico

$$\text{Gal}(D) \subset \text{Sp}(4; \mathbb{C}) \subset \text{GL}(4; \mathbb{C}) \text{ porque } 2 \times 3 - 2 = 4.$$

Infelizmente, é grande demais. É preciso reduzir a ordem um pouco mais. Por isso, **é preciso ter uma outra integral primeira.**

Suponhamos agora que **o nosso satélite é simétrico**, quer dizer mais exactamente que a matriz diagonal $\mathcal{J} = (1, c, c)$.

Então o momento relativamente ao eixo de simetria, $K = M \cdot e_1$, é uma integral primeira. Portanto, podemos reduzir a ordem do sistema diferencial linear até obter um sistema de segunda ordem.

O sistema diferencial linear reduzido é de segunda ordem :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ 3(c-1)x^2 + c(z+1)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}.$$

Este sistema é equivalente à equação de segunda ordem

$$\ddot{u} = -\frac{1}{c} (3(c-1)x^2 + c(z+1)^2) u.$$

Onde x e z são soluções do sistema (não linear)

$$\begin{cases} \dot{x} = zy \\ \dot{y} = -zx \\ \dot{z} = \frac{3(c-1)}{c} xy. \end{cases}$$

A não-integrabilidade do satélite

O grupo de Galois é um subgrupo algébrico de $\mathbf{SL}(2; \mathbf{C})$. Para demonstrar que este subgrupo não é virtualmente abeliano, só precisamos mostrar que ele contém

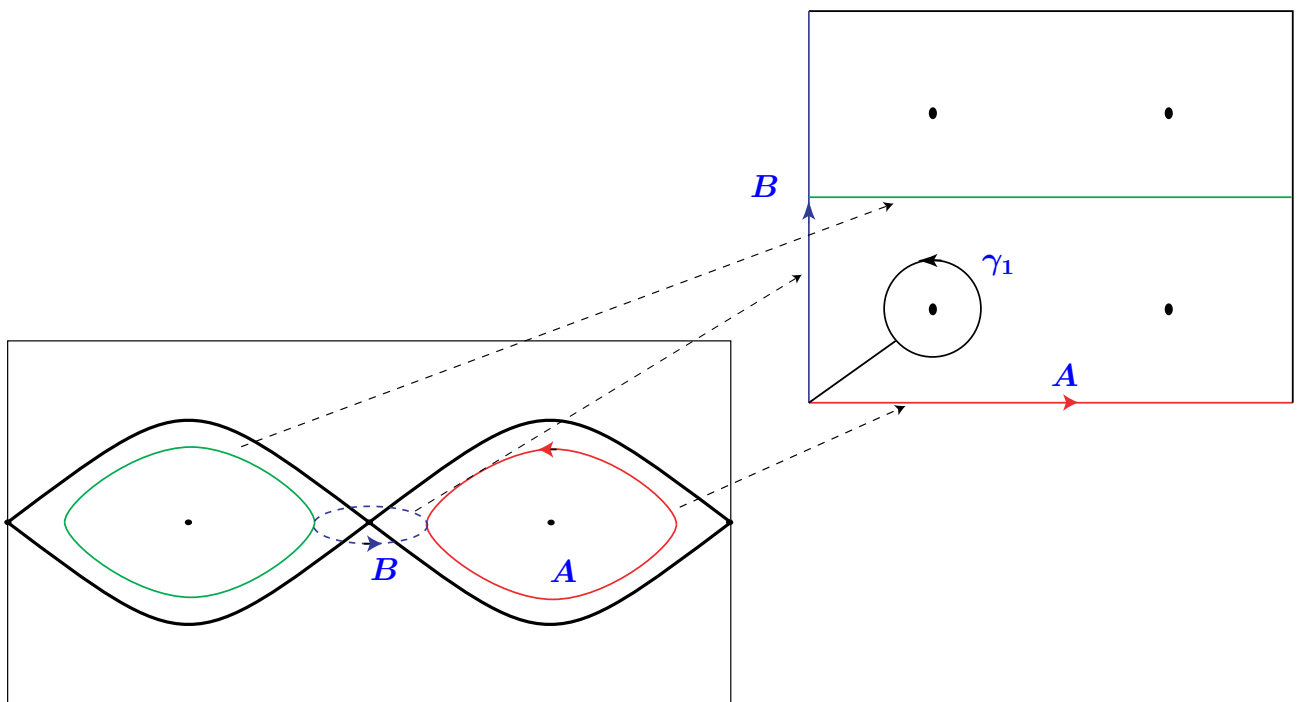
- um elemento diagonalisável de ordem infinita

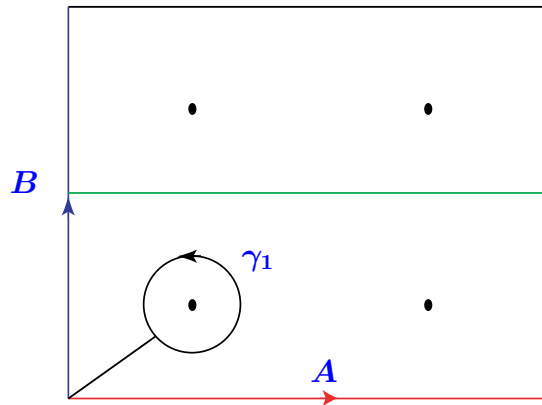
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

- e um elemento de ordem infinita que não é diagonalisável.

O grupo de Galois contém a monodromia do sistema (aqui, ele é gerado pela monodromia). Vamos então considerar esta monodromia.

A figura seguinte mostra um paralelogramo de períodos da curva elíptica. Os pontos pretos são os pontos no infinito, a aresta A é o caminho fechado ao longo duma componente da parte real da curva.



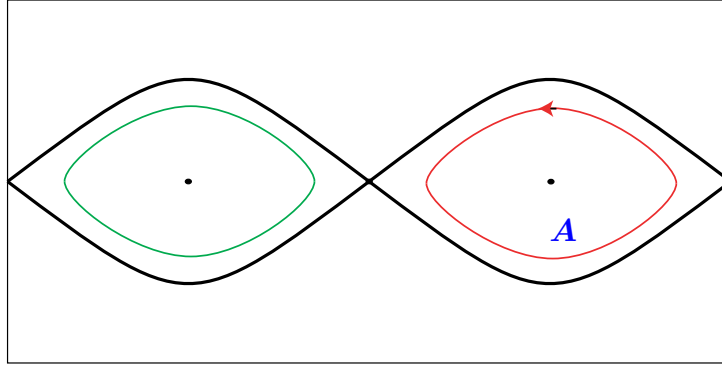


A monodromia ao longo do caminho fechado γ_1 (à volta dum dos pontos no infinito).

É fácil, utilizando o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = zy \\ \dot{y} = -zx \\ \dot{z} = \frac{3(c-1)}{c}xy, \end{cases}$$

estudar os pólos das funções x , y e z , e depois mostrar que a monodromia da equação linear não é diagonalisável.



Ao longo duma componente da parte real da curva, a nossa equação diferencial linear é

$$\ddot{u} = -\frac{1}{c} (3(c-1)x^2 + c(z+1)^2) u.$$

É uma equação real, cujos coeficientes são funções periódicas de t e a função $-\frac{1}{c} (3(c-1)x^2 + c(z+1)^2)$ é negativa.

Portanto, um teorema clássico de Liapounov diz que a monodromia ao longo de A tem valores próprios reais, negativos e distintos. Consequentemente, a monodromia ao longo deste caminho é diagonalizável e de ordem infinita.

Deduz-se então que o grupo de Galois não é virtualmente abeliano e que o sistema do satélite simétrico não é integrável por integrais meromorfas complexas.

Uma pergunta natural que se apresenta é a seguinte : será que este sistema é integrável por integrais analíticas reais que têm singularidades essenciais não reais

