

Le cas de Sophie Kowalevski

Michèle Audin

Institut de recherche mathématique avancée

CNRS et Université Louis Pasteur

Strasbourg

Le texte (page 1)

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$(1) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - qr'', \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r'q, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Le texte (page 1)

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - qr'', \\ (1) \quad B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r'q, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Annales mathématiques. 18. Imprimé le 22 janvier 1889.

23

Le texte (page 1)

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$(1) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - qr'', \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r'q, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Le texte (page 1)

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

A STOCKHOLM.

$$(1) \quad \begin{aligned} B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_3r - z_0r'), & \frac{dr}{dt} &= pr'' - r\dot{r}, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_3r' - y_0r), & \frac{dr'}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_3, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Le texte (page 1)

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

A STOCKHOLM.

$$\begin{aligned} B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_3 r - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= pr'' - r' r, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_3 r' - y_0 r), & \frac{dr'}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_3, y_0, z_3$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.



(1850-1891)

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION
D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

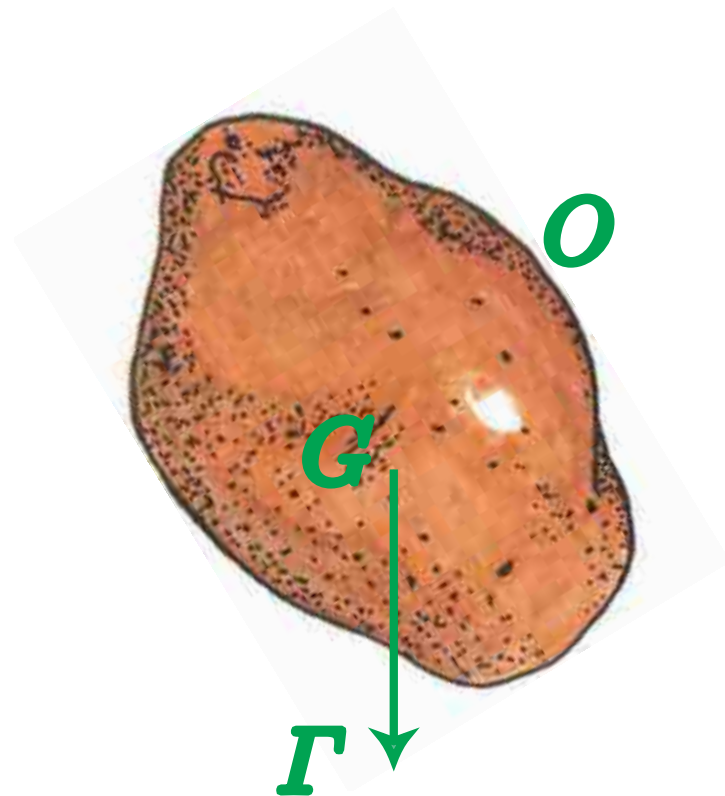
PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION
D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE'

PAR

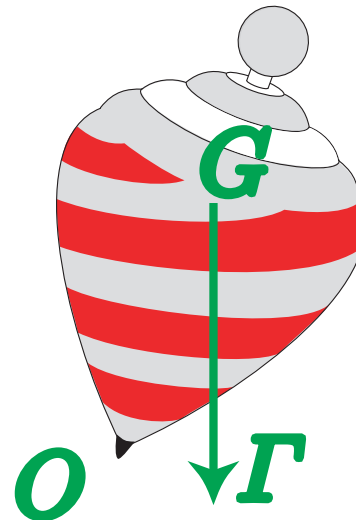
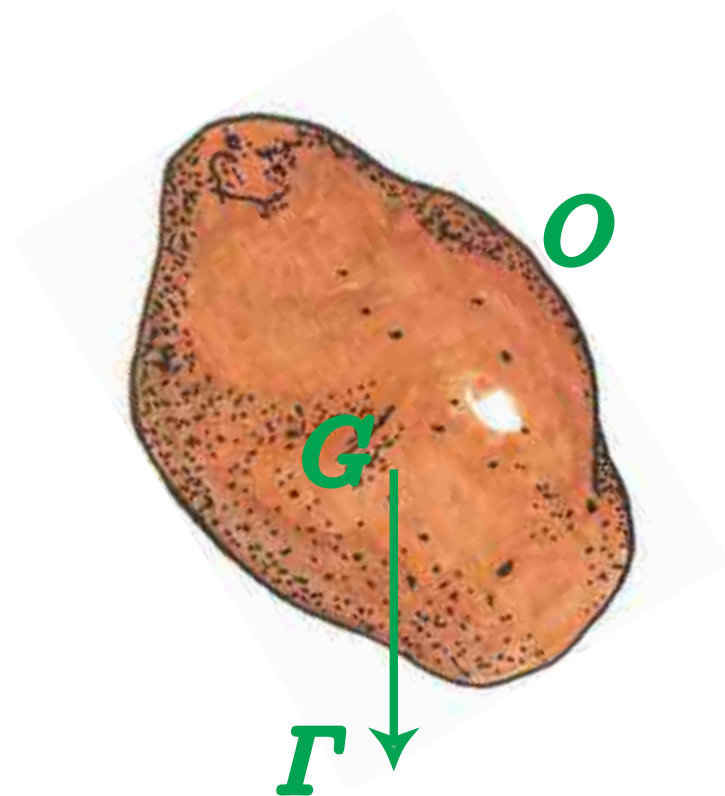
SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.



SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION
D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE

PAR

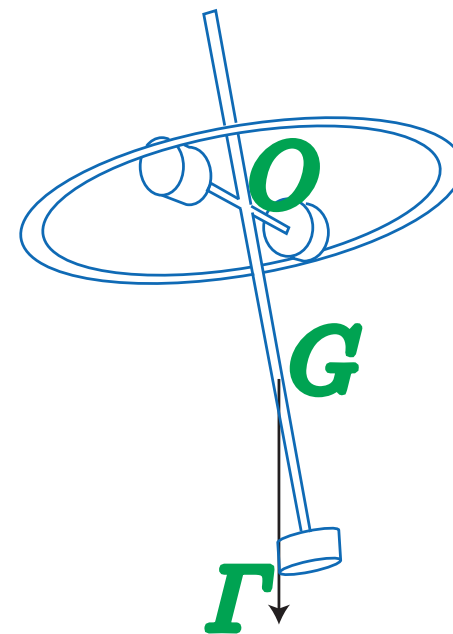
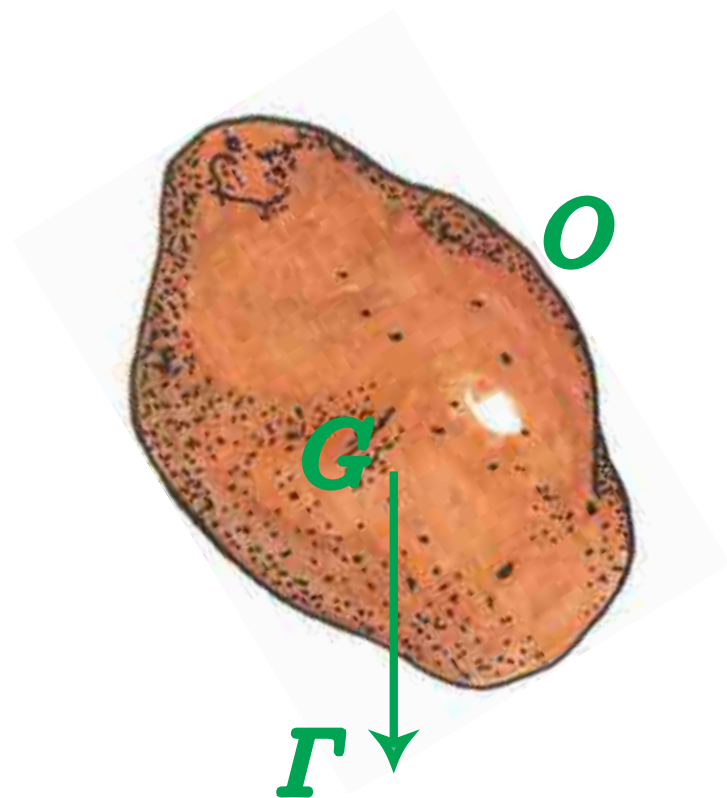
SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.



SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION
D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.



$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), \quad \frac{dr}{dt} = r r' - q r'',$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), \quad \frac{dr'}{dt} = p r'' - r r',$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + Mg(x_0 r' - u_0 r), \quad \frac{dr''}{dt} = q r' - p r''.$$

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), \quad \frac{dr}{dt} = r r' - q r'',$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), \quad \frac{dr'}{dt} = pr'' - r r',$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + Mg(x_0 r' - u_0 r), \quad \frac{dr''}{dt} = qr - pr'.$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc.

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - \eta'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= pr'' - r_T, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r), & \frac{dr'''}{dt} &= \eta' - pr'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc. Il y a six quantités inconnues, p , γ , etc.

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - \eta'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= pr'' - r_T, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr'''}{dt} &= \eta' - pr'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc. Il y a six quantités inconnues, p , q , etc. Elles décrivent la position et la vitesse du solide en fonction du temps t .

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - q', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= q' - pr'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc. Il y a six quantités inconnues, p , q , etc. Elles décrivent la position et la vitesse du solide en fonction du temps t . Il y a aussi des constantes A , x_0 , etc.

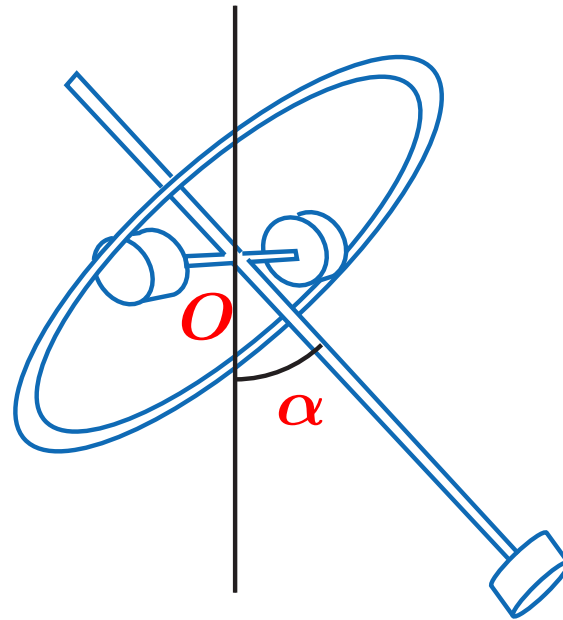
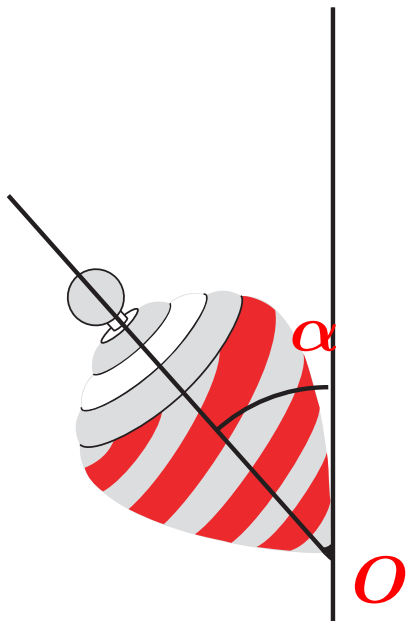
$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dx}{dt} &= vr' - yr'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dy}{dt} &= pr'' - vr', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dz}{dt} &= yr' - pr'.
 \end{aligned}$$

Ce sont des équations différentielles : $\frac{dp}{dt}$, etc. Il y a six quantités inconnues, p , q , etc. Elles décrivent la position et la vitesse du solide en fonction du temps t .

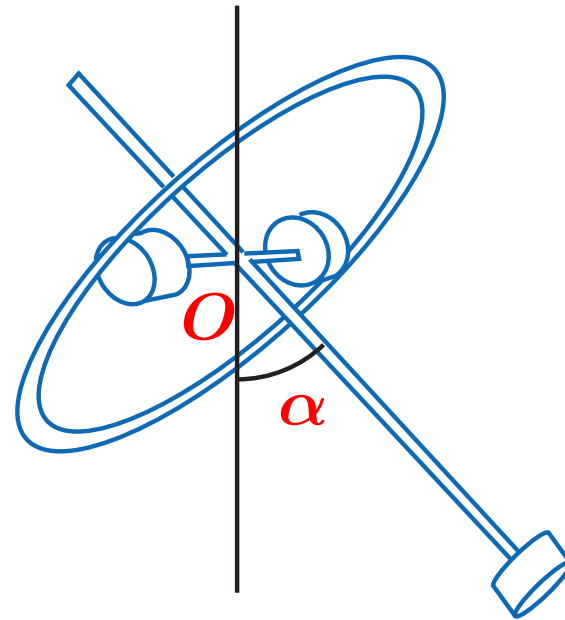
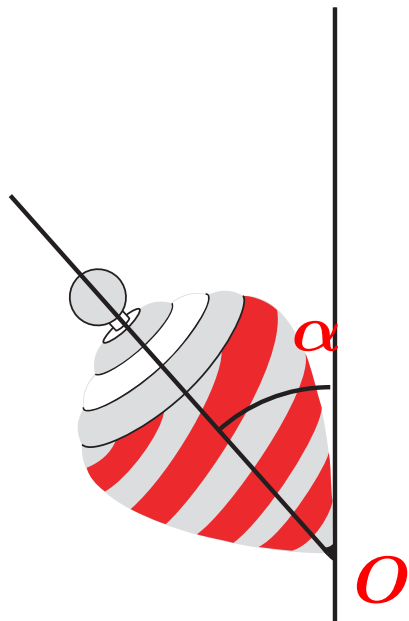
Il y a aussi des constantes A , x_0 , etc. Elles décrivent la forme du solide et la position du centre de gravité par rapport au point fixe.

Par exemple γ'' est le cosinus de l'angle entre OG et la verticale

Par exemple γ'' est le cosinus de l'angle entre OG et la verticale



Par exemple γ'' est le cosinus de l'angle entre OG et la verticale



$$\gamma'' = \cos \alpha$$

Le texte (page 2)

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité du corps considéré dans un système de coordonnées, dont l'origine est au point fixe et dont la direction coïncide avec celle des axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie.

Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

1) Le cas de POISSON (ou d'EULER) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,

2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

Dans ces deux cas l'intégration s'opère à l'aide des fonctions $\theta(u)$ dont l'argument est une fonction entière linéaire du temps.

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Si tel était le cas il faudrait pouvoir intégrer ces équations différentielles à l'aide de séries de la forme

$$(2) \quad \begin{aligned} p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots), \\ q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots), \\ r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \dots), \\ \gamma &= t^{-m_1}(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots), \\ \gamma' &= t^{-m_2}(\gamma'_0 + \gamma'_1 t + \gamma'_2 t^2 + \dots), \\ \gamma'' &= t^{-m_3}(\gamma''_0 + \gamma''_1 t + \gamma''_2 t^2 + \dots), \end{aligned}$$

où $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$ désignent des nombres entiers positifs, et ces séries, pour pouvoir représenter le système général d'intégrales des équations différentielles considérées, devraient contenir cinq constantes arbitraires.

Il faut donc examiner si une pareille intégration est possible.

On s'assure facilement, en comparant les exposants des premiers termes dans les membres gauches et dans les membres droits des équations considérées que l'on doit avoir

Le texte (page 2)

Le solide en 1888

Un problème classique et difficile,

Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié depuis le dix-huitième siècle, notamment par Euler (1707-1783).

Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié depuis le dix-huitième siècle, notamment par Euler (1707-1783).

Pas de vrai progrès depuis Lagrange (1736-1813).

Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié depuis le dix-huitième siècle, notamment par Euler (1707-1783).

Pas de vrai progrès depuis Lagrange (1736-1813).

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution,

Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié depuis le dix-huitième siècle, notamment par Euler (1707-1783).

Pas de vrai progrès depuis Lagrange (1736-1813).

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution, en Allemagne, on appelait ce problème *die mathematische Nixe*.

Plan de la conférence

- Étude d'un des cas connus à l'époque de Kowalevski (deuxième moitié du dix-neuvième siècle), le cas de Lagrange,

Plan de la conférence

- Étude d'un des cas connus à l'époque de Kowalevski (deuxième moitié du dix-neuvième siècle), le cas de Lagrange,
- ce que c'est que le cas de Kowalevski et comment elle l'a trouvé,

Plan de la conférence

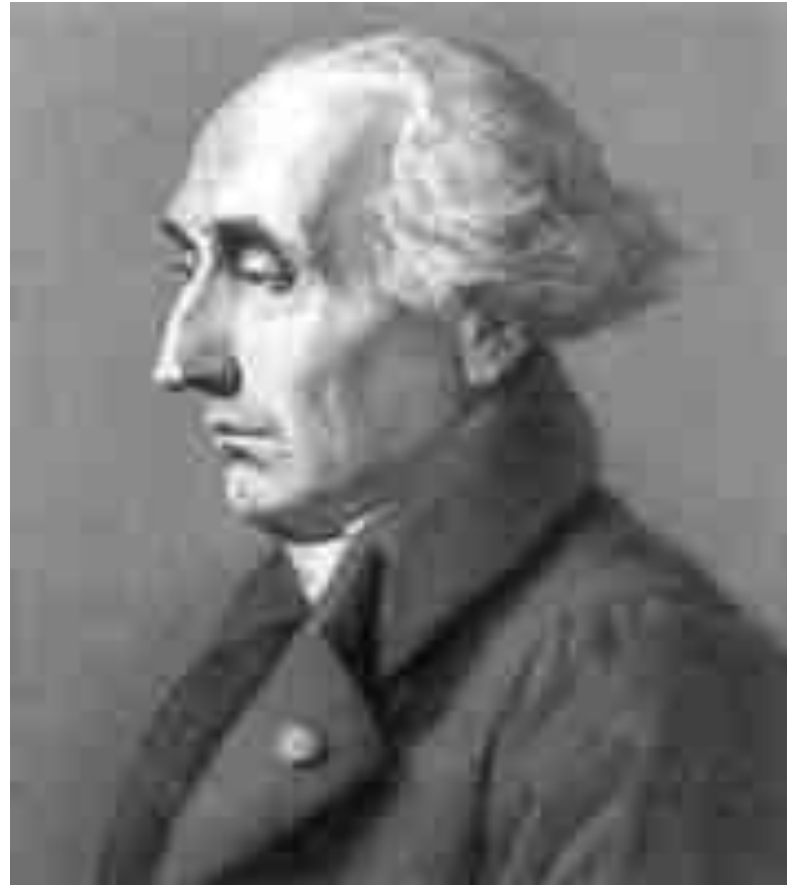
- Étude d'un des cas connus à l'époque de Kowalevski (deuxième moitié du dix-neuvième siècle), le cas de Lagrange,
- ce que c'est que le cas de Kowalevski et comment elle l'a trouvé,
- actualité et modernité de ce travail.

Le cas de Lagrange

2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

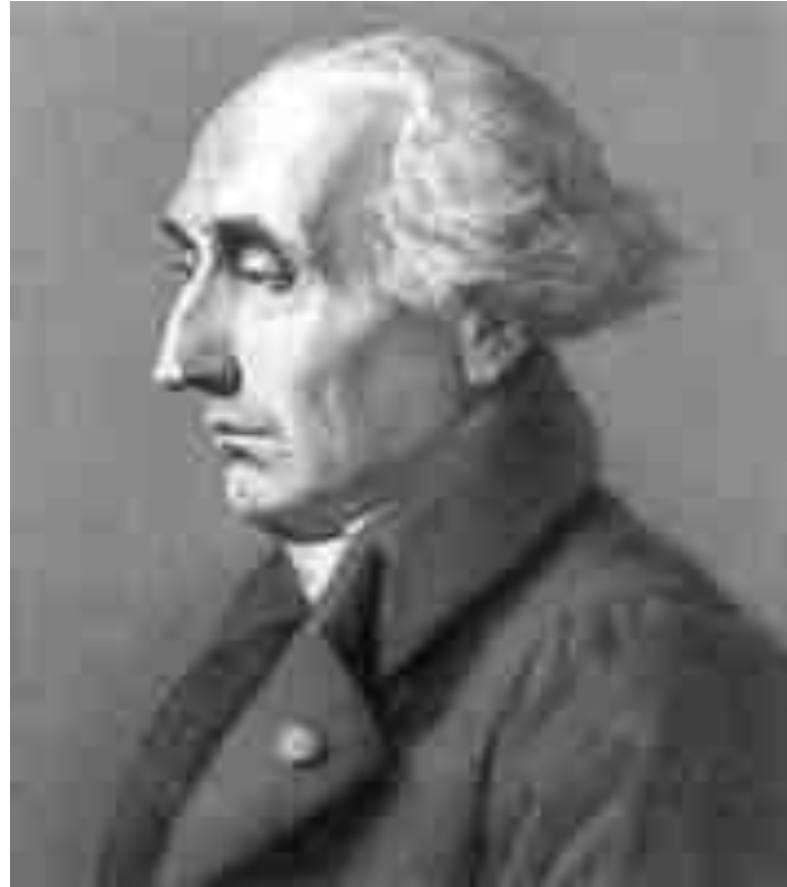
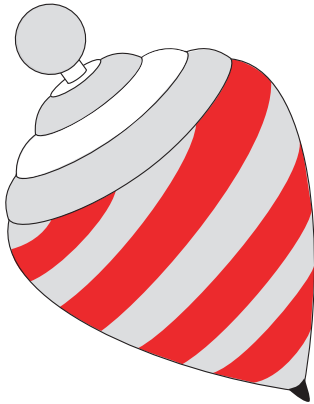
Le cas de Lagrange

2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.



Le cas de Lagrange

2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 \neq y_0 = 0$.



Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie

Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie

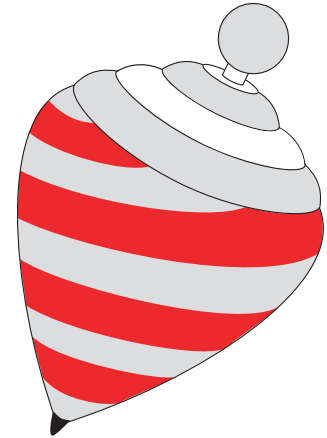


Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie



rotation :

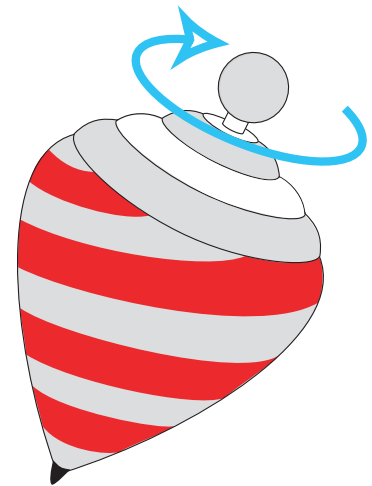


Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie

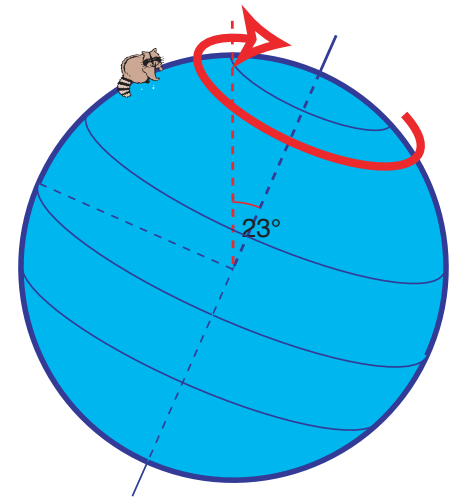
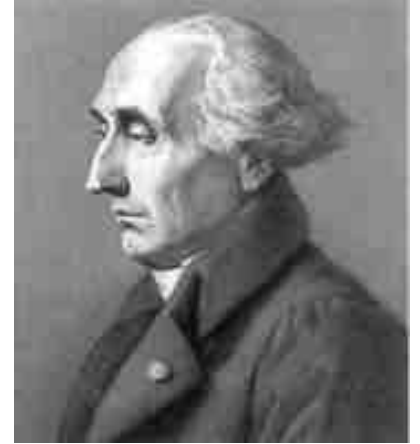


rotation : la toupie tourne autour de son axe



Ce que l'on voit...

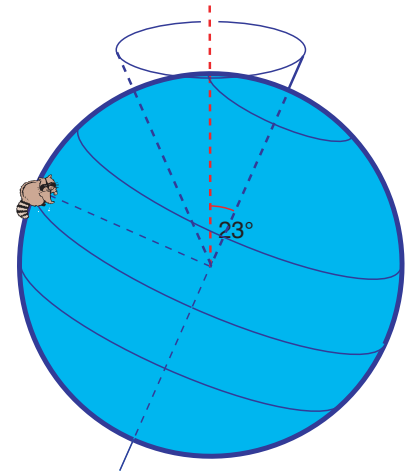
... quand on regarde une toupie



rotation : la toupie tourne autour de son axe

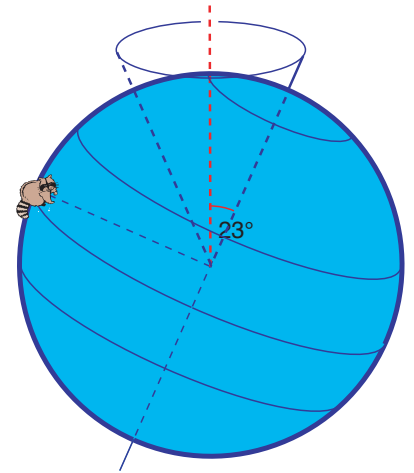
Ce que l'on voit...

précession :



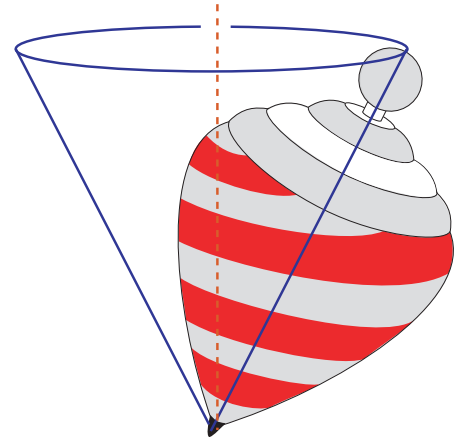
Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône



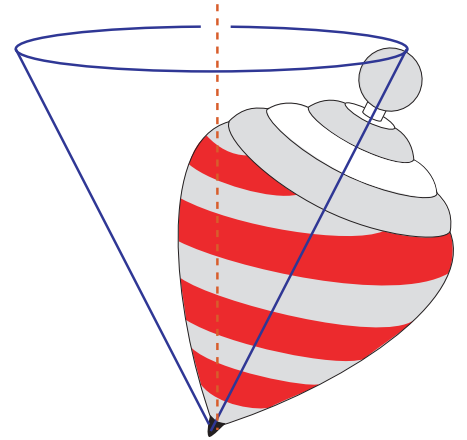
Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône

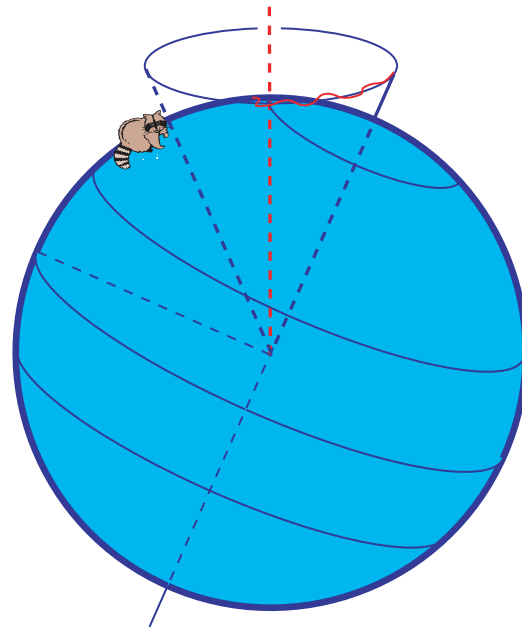


Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône

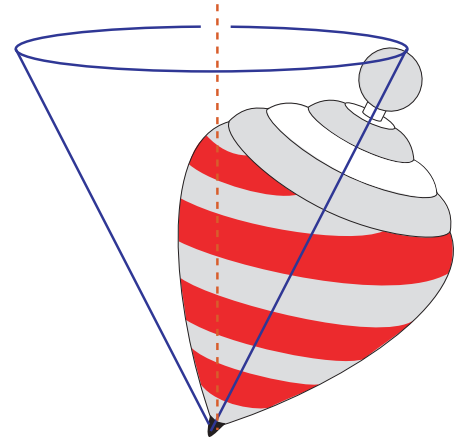


nutaton :

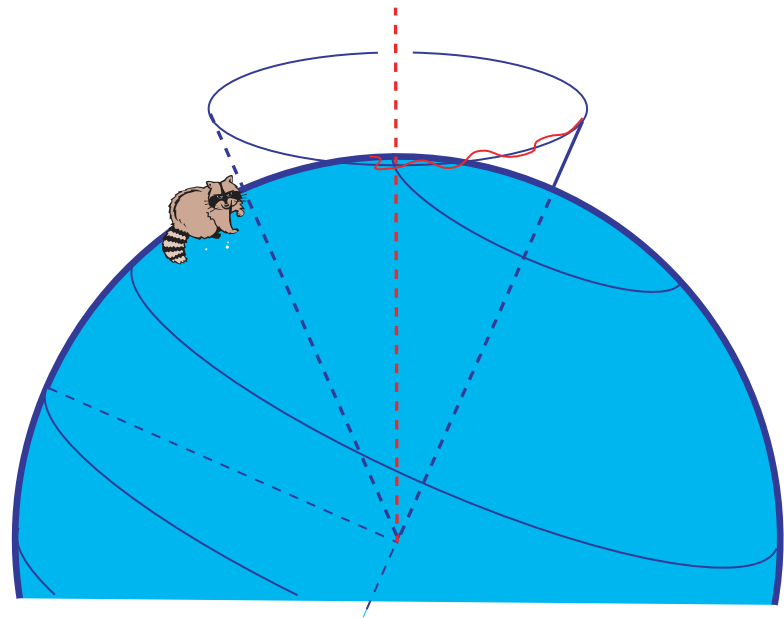


Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône

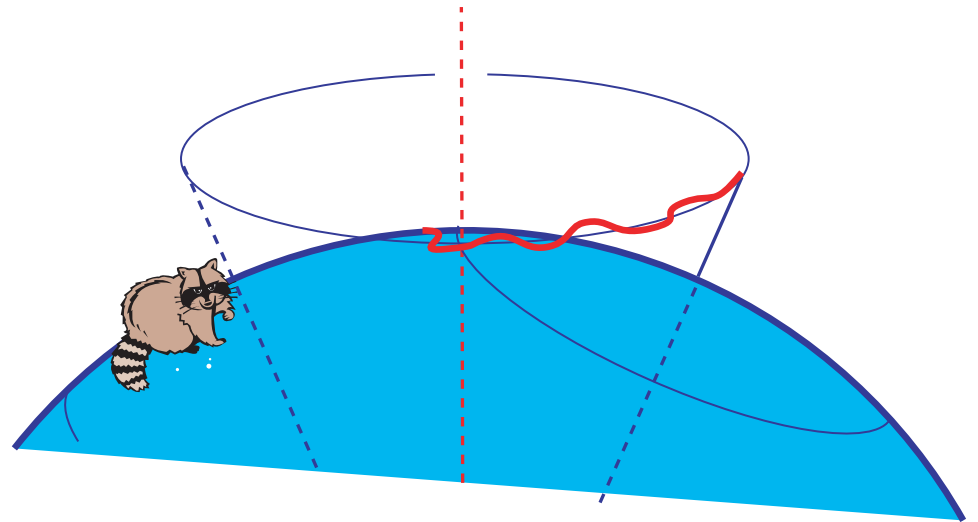
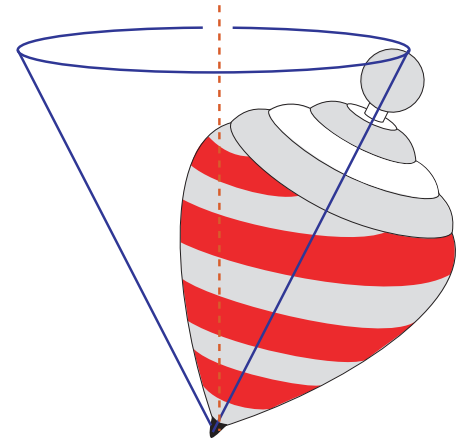


nutaton :



Ce que l'on voit...

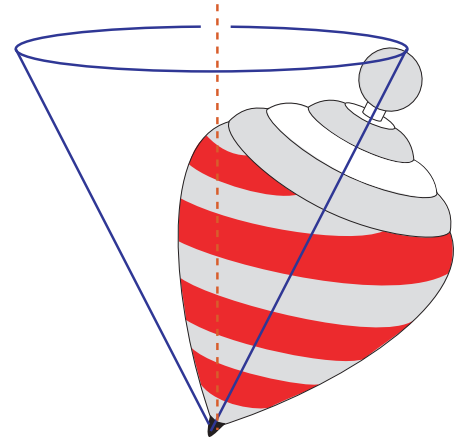
précession : l'axe décrit un cône



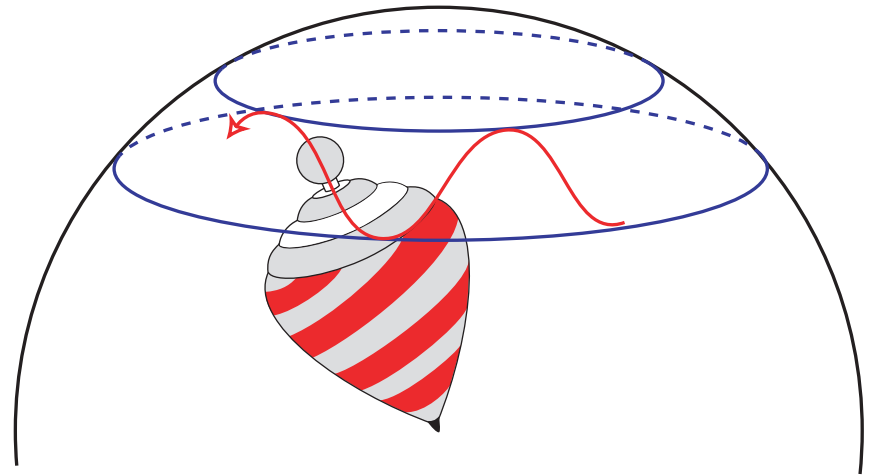
nutation :

Ce que l'on voit...

précession : l'axe décrit un cône



nutaton : les petits festons



Résolution (1)

- On utilise les lois de conservation de la physique.

Résolution (1)

- On utilise les lois de conservation de la physique.
- Par exemple l'énergie est conservée,

Résolution (1)

- On utilise les lois de conservation de la physique.
- Par exemple l'énergie est conservée,
- ainsi que le moment de la toupie par rapport à son axe de révolution.

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la **hauteur** de l'extrémité de l'axe de la toupie.

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie.

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie.

$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie.

$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré 3.

Résolution (2)

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie.

$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré 3.

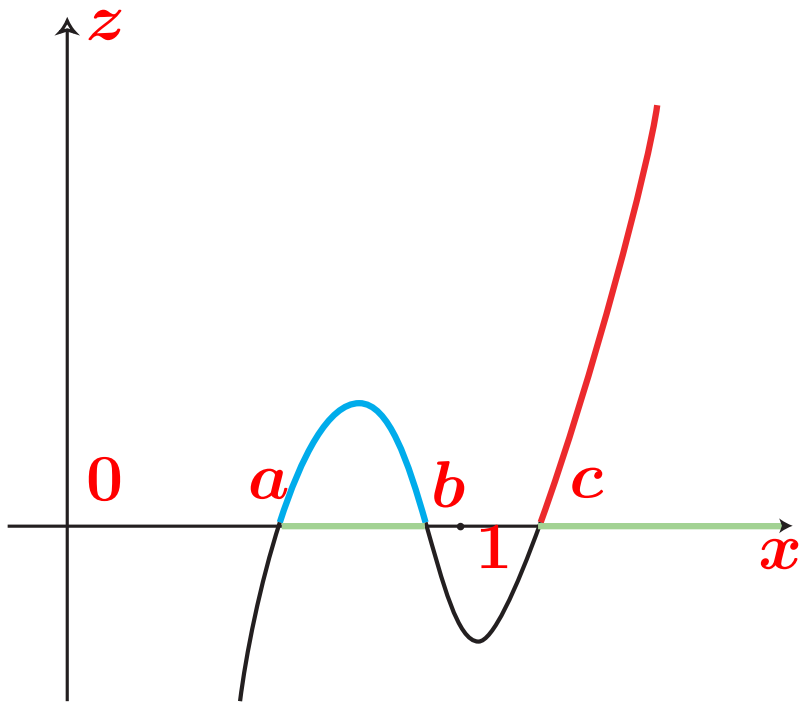
Les quantités x et $y = \dot{x}$ sont donc astreintes à vérifier l'équation $y^2 = P(x)$.

Résolution (3)

La courbe d'équation $y^2 = P(x)$.

Résolution (3)

La courbe d'équation $y^2 = P(x)$.

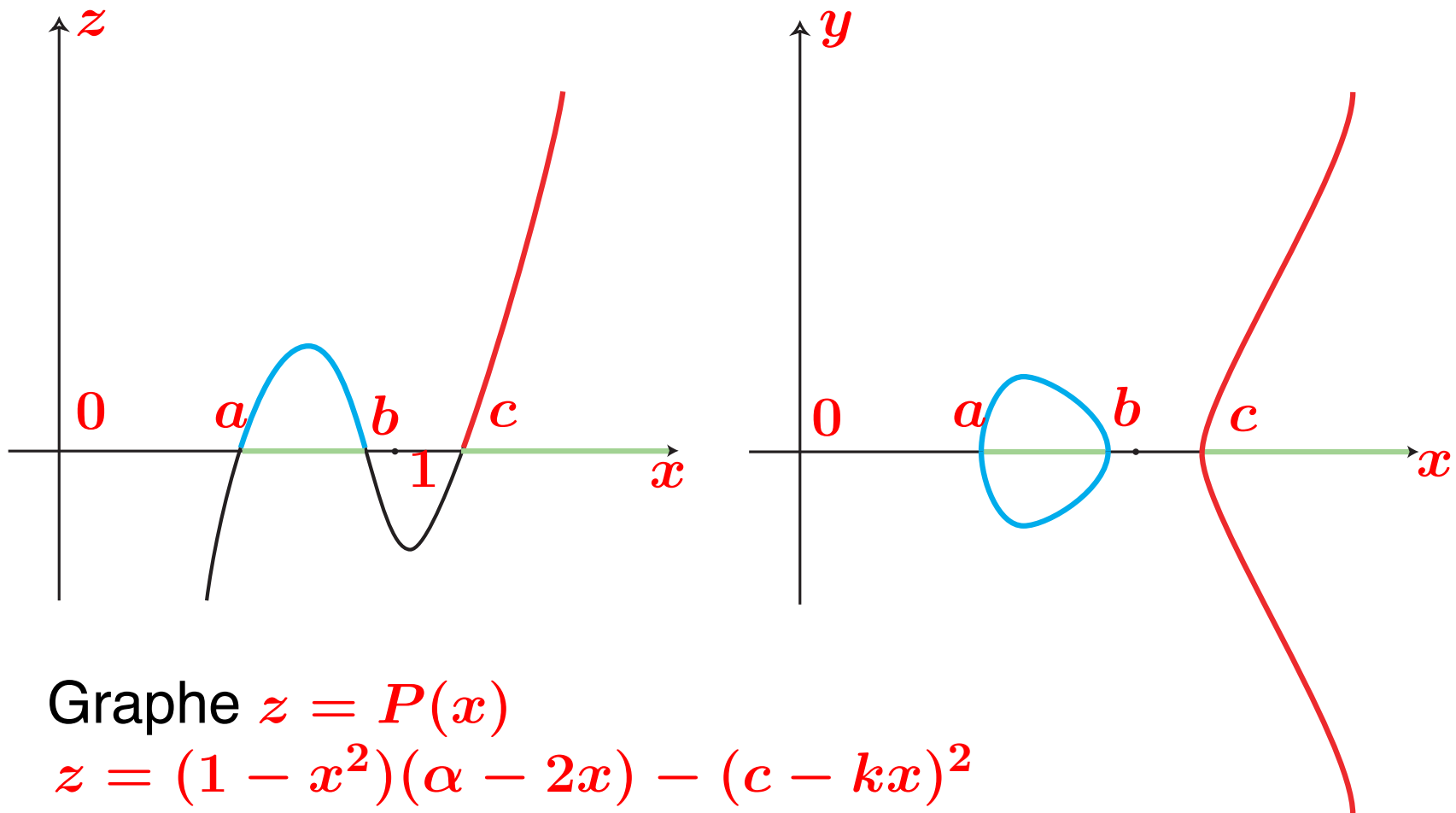


Graphe $z = P(x)$

$$z = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2$$

Résolution (3)

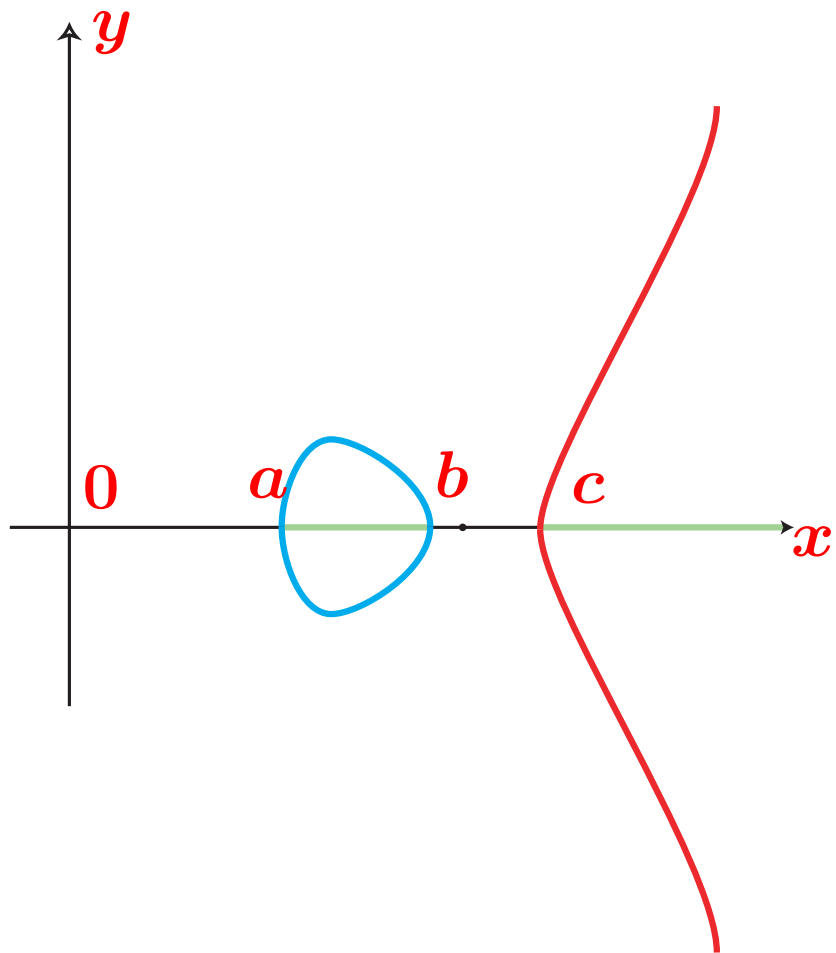
La courbe d'équation $y^2 = P(x)$.



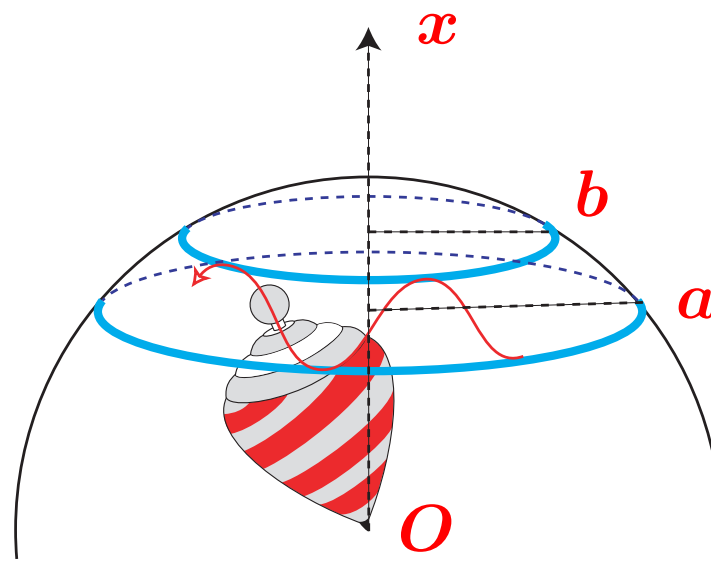
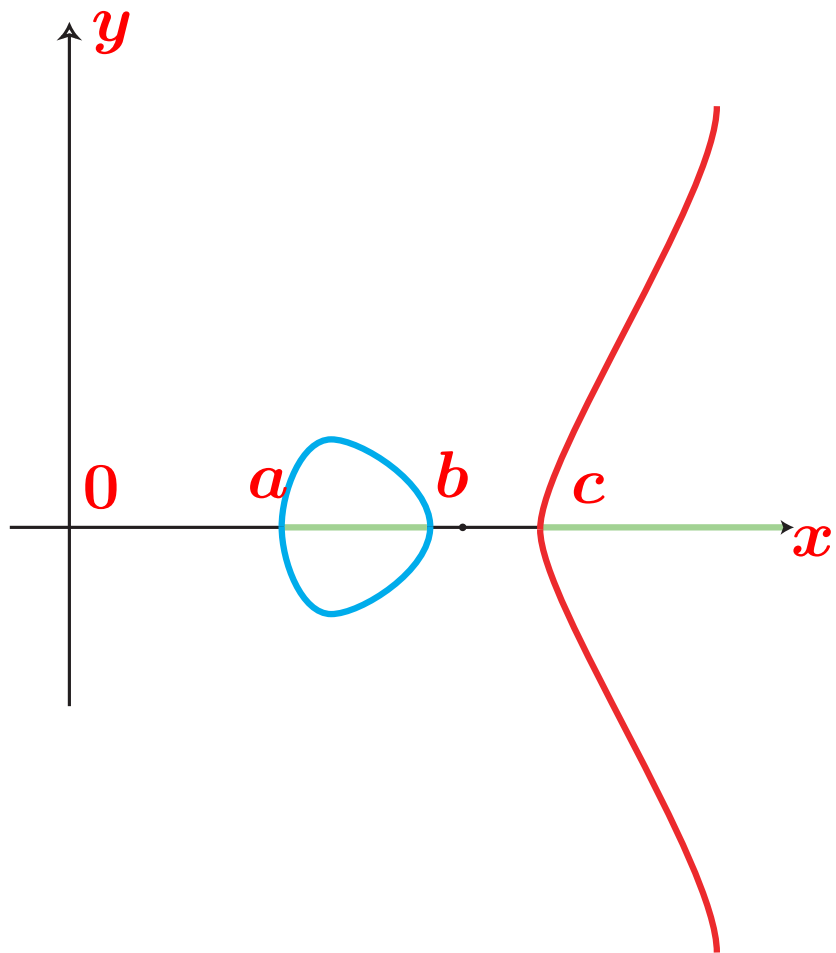
Graphe $z = P(x)$

$$z = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2$$

Résolution (4)



Résolution (4)



Ce que l'on voit...

Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie



Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie
voyons ce qui se passe dans les cas où l'on
sait résoudre le système et regardons si des
propriétés analogues pourraient être plus gé-
nérales



Ce que l'on voit...

... quand on regarde une toupie
voyons ce qui se passe dans les cas où l'on
sait résoudre le système et regardons si des
propriétés analogues pourraient être plus gé-
nérales



Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

- 1) Le cas de POISSON (ou d'EULER) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,
- 2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

Dans ces deux cas l'intégration s'opère à l'aide des fonctions $\theta(u)$ dont l'argument est une fonction entière linéaire du temps.

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Ce que l'on voit...

Les six quantités $p, q, r, \dot{r}, \dot{r}', \dot{r}''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Ce que l'on voit...

Les six quantités $p, q, r, \dot{r}, \dot{r}', \dot{r}''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Les solutions ont des pôles, ça veut dire qu'elle partent à l'infini,

Ce que l'on voit...

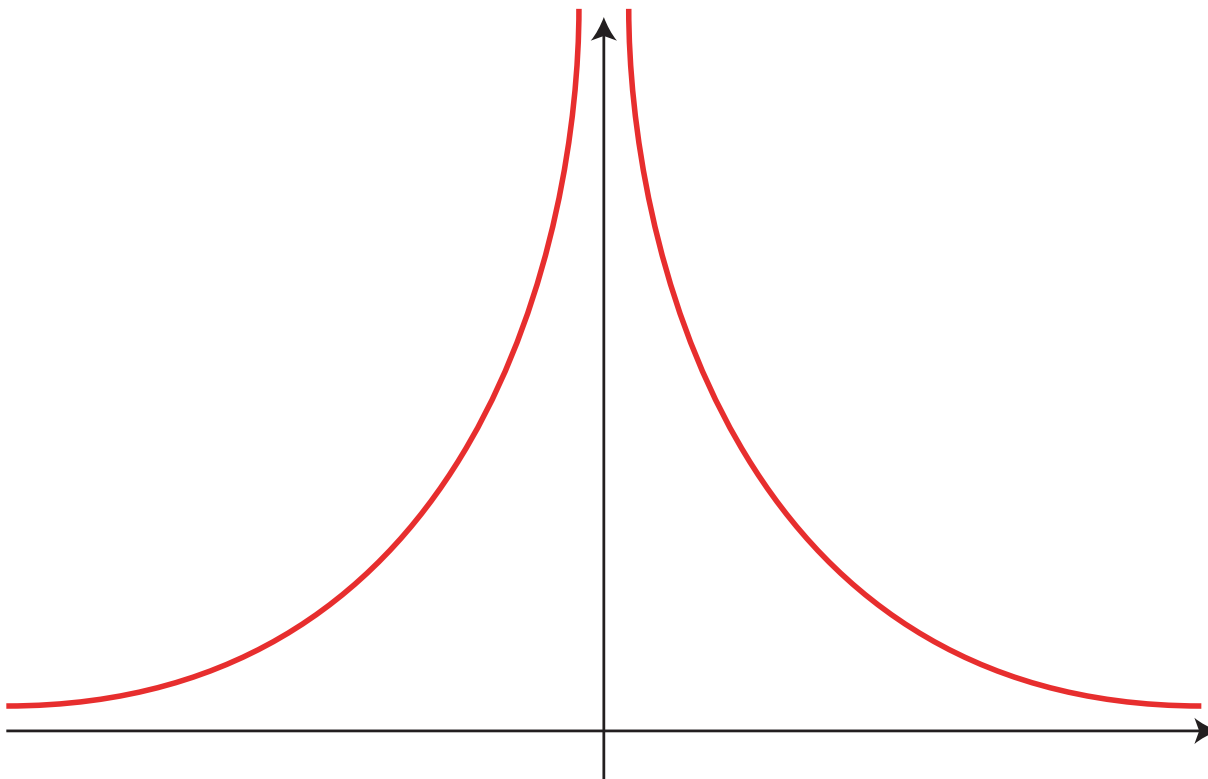
Les six quantités $p, q, r, \dot{r}, \dot{r}', \dot{r}''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Les solutions ont des pôles, ça veut dire qu'elle partent à l'infini, comme par exemple $t \mapsto 1/t^2$.

Ce que l'on voit...

Les six quantités p, q, r, r', r'', r''' sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Les solutions ont des pôles, ça veut dire qu'elle partent à l'infini, comme par exemple $t \mapsto 1/t^2$.



Ce que l'on voit...

Vous ne l'avez pas vu en regardant tourner la toupie. Par exemple, $x = \cos \alpha$ reste plus petit que 1, la toupie n'explose pas !

Ce que l'on voit...

Vous ne l'avez pas vu en regardant tourner la toupie. Par exemple, $x = \cos \alpha$ reste plus petit que 1, la toupie n'explose pas !

Regardons mieux.

Ce que l'on voit...

Vous ne l'avez pas vu en regardant tourner la toupie. Par exemple, $x = \cos \alpha$ reste plus petit que 1, la toupie n'explose pas !

Regardons mieux.

« La mathématique est la science qui demande le plus d'imagination. »

Regarder, c'est imaginer...

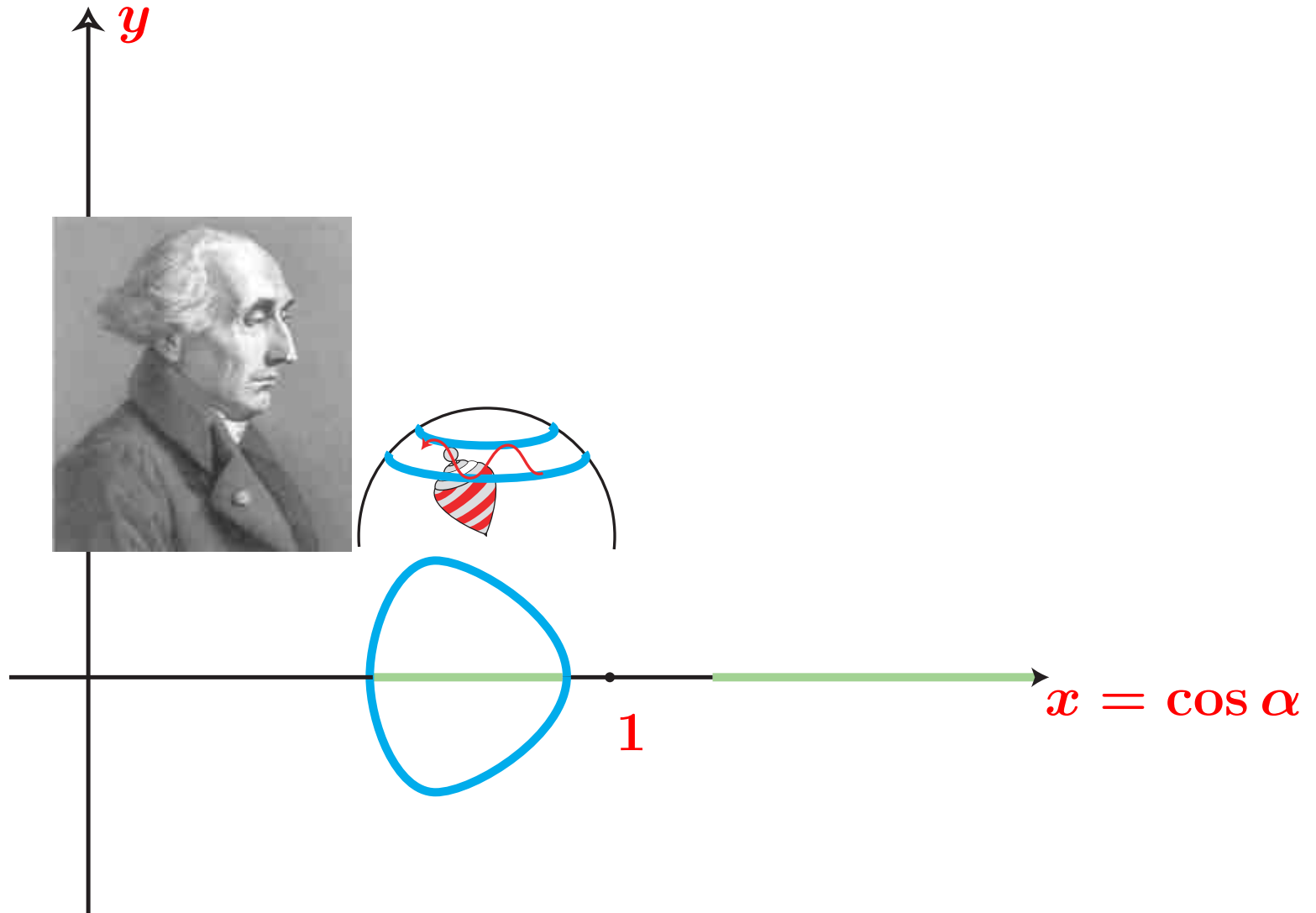
Regarder, c'est imaginer...



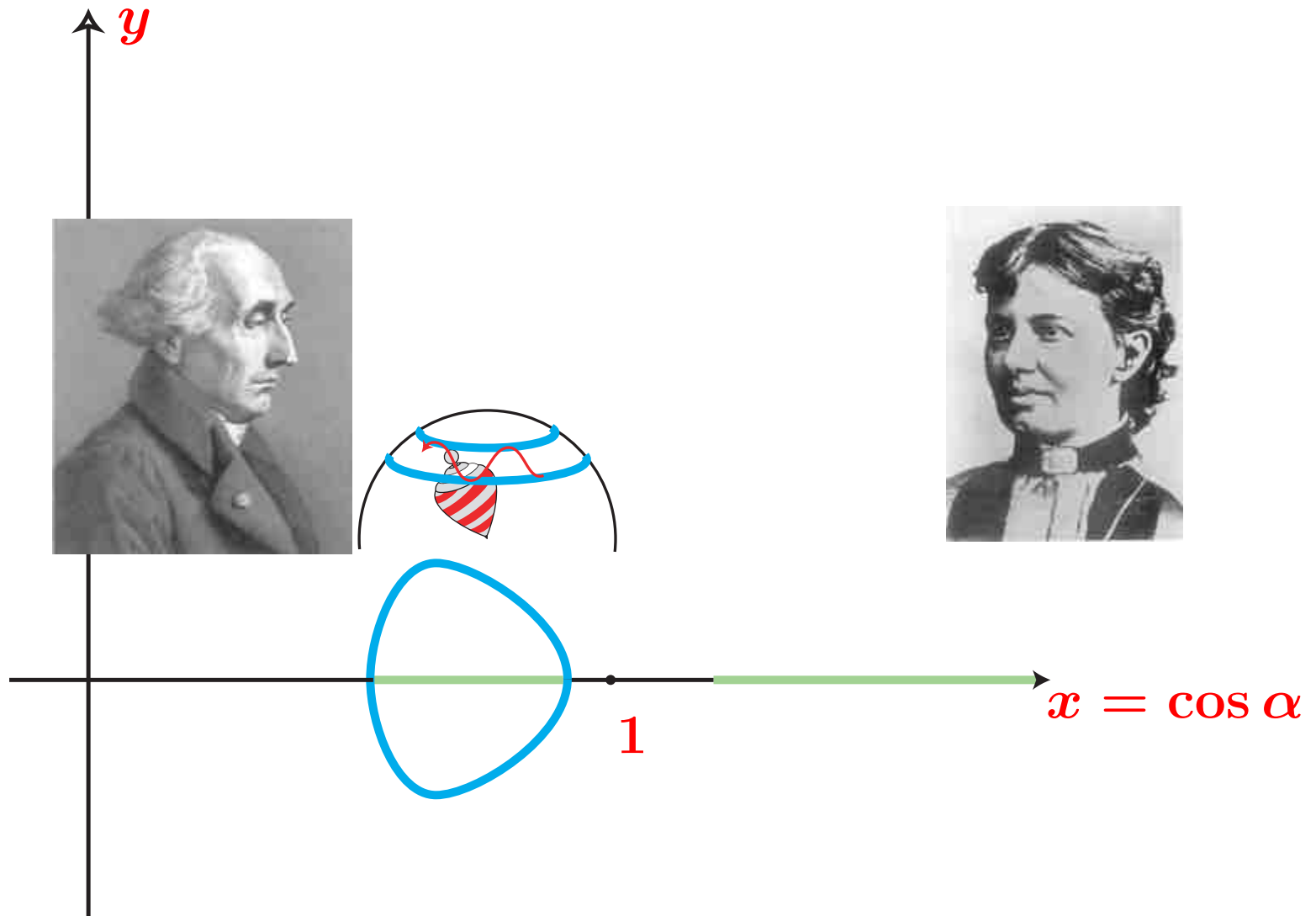
Regarder, c'est imaginer...



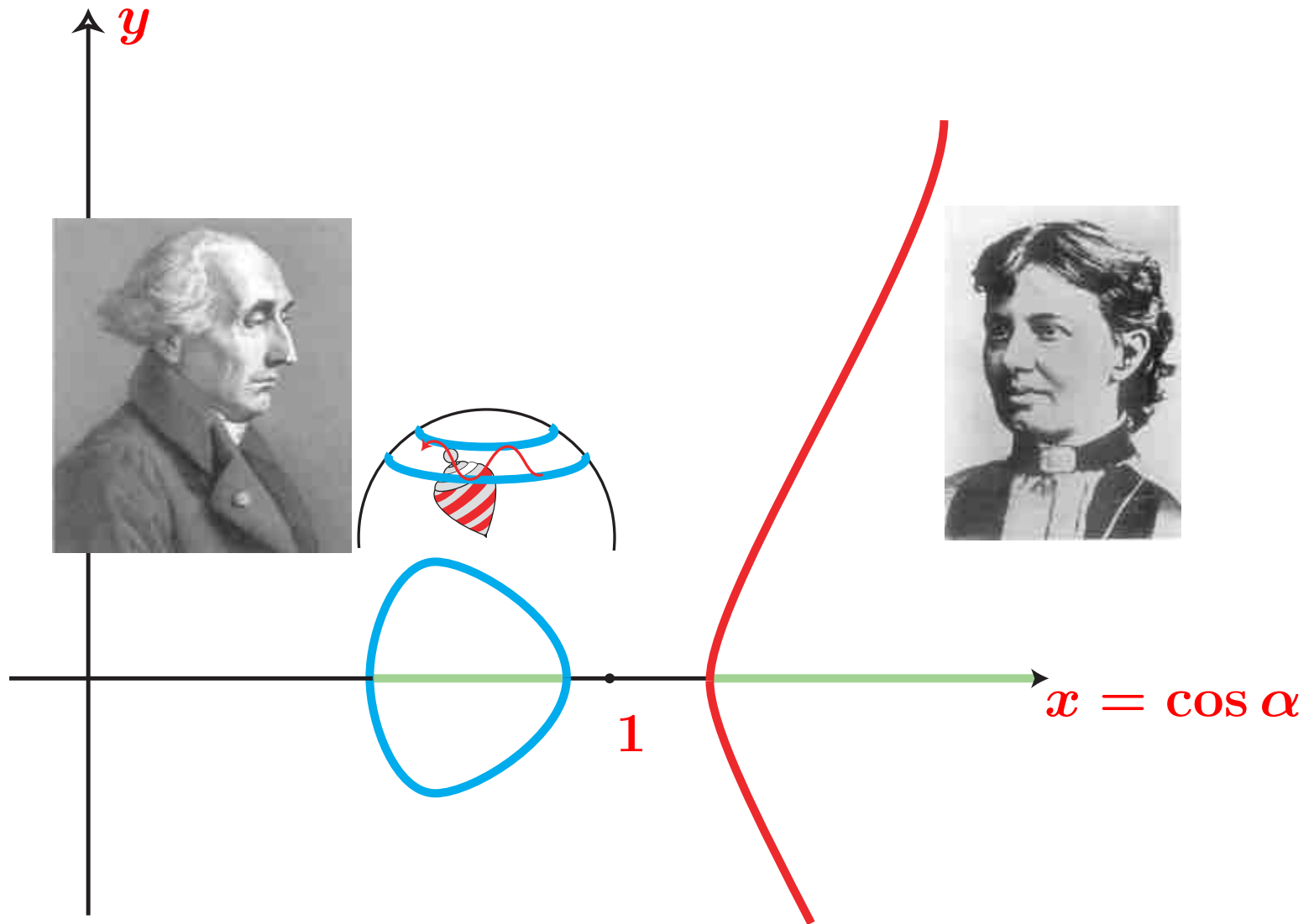
Regarder, c'est imaginer...



Regarder, c'est imaginer...



Regarder, c'est imaginer...



Imaginer...

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que 1...

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que 1...

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que 1...

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha > 1 \iff \sin^2 \alpha < 0$$

Imaginer...

Imaginer un angle dont le cosinus est plus grand que 1...

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha > 1 \iff \sin^2 \alpha < 0$$

c'est imaginer un nombre dont le carré est négatif...

Imaginer...

Imaginer...

Imaginer un nombre dont le carré est négatif

Imaginer...

Imaginer un nombre dont le carré est négatif



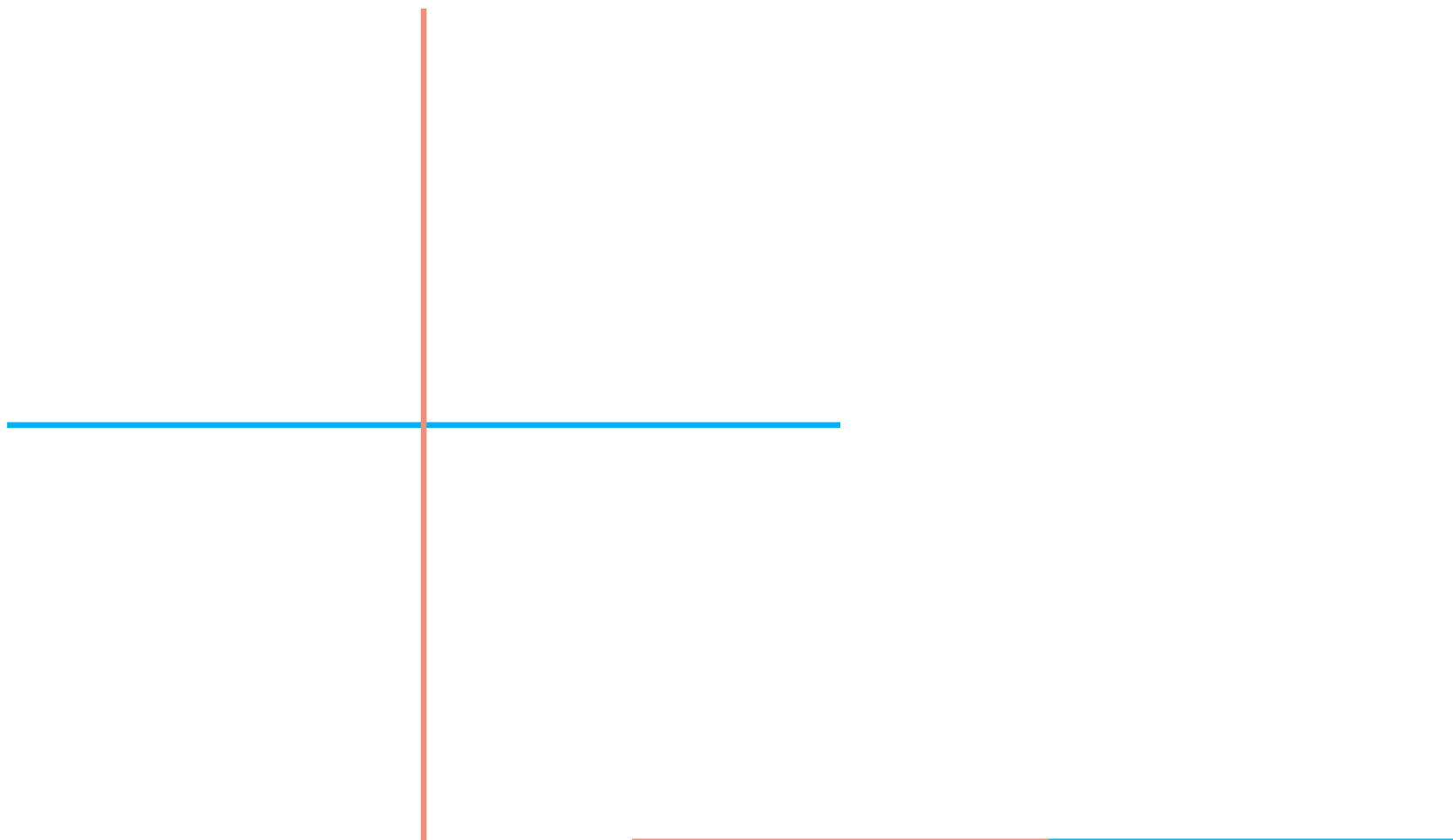
Imaginer...

Imaginer un nombre dont le carré est négatif



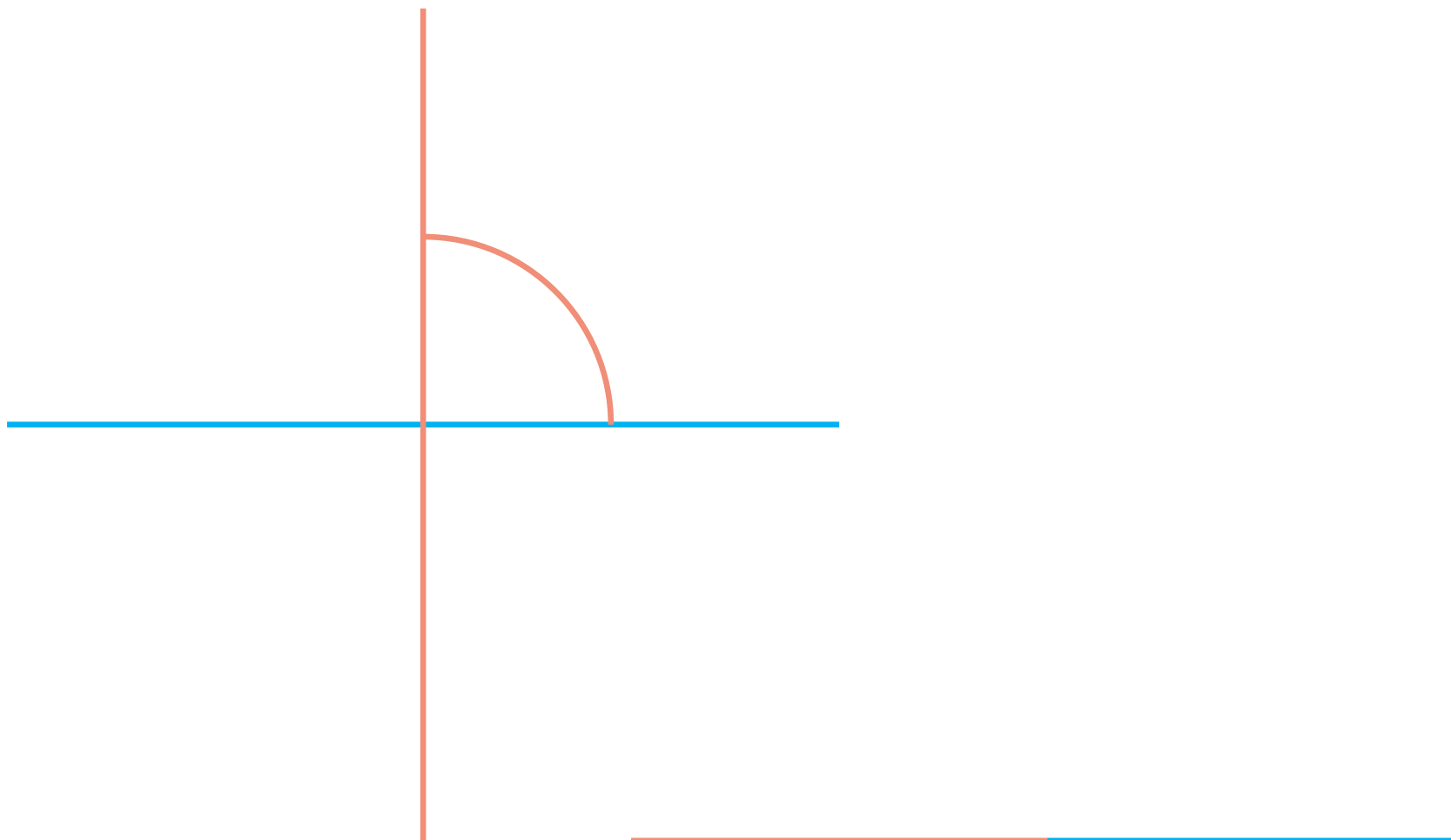
Imaginer...

Imaginer un nombre dont le carré est négatif



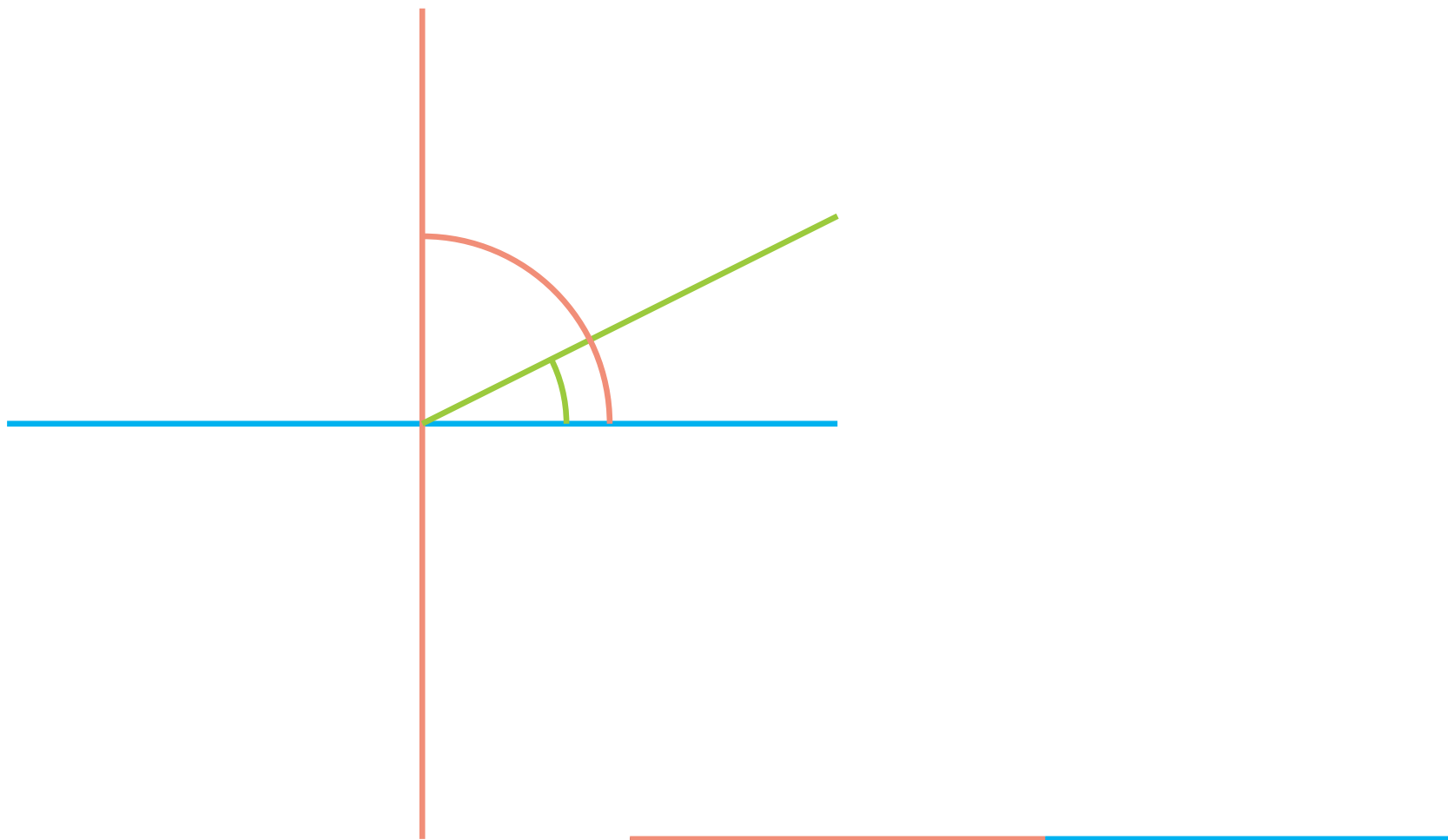
Imaginer...

Imaginer un nombre dont le carré est négatif



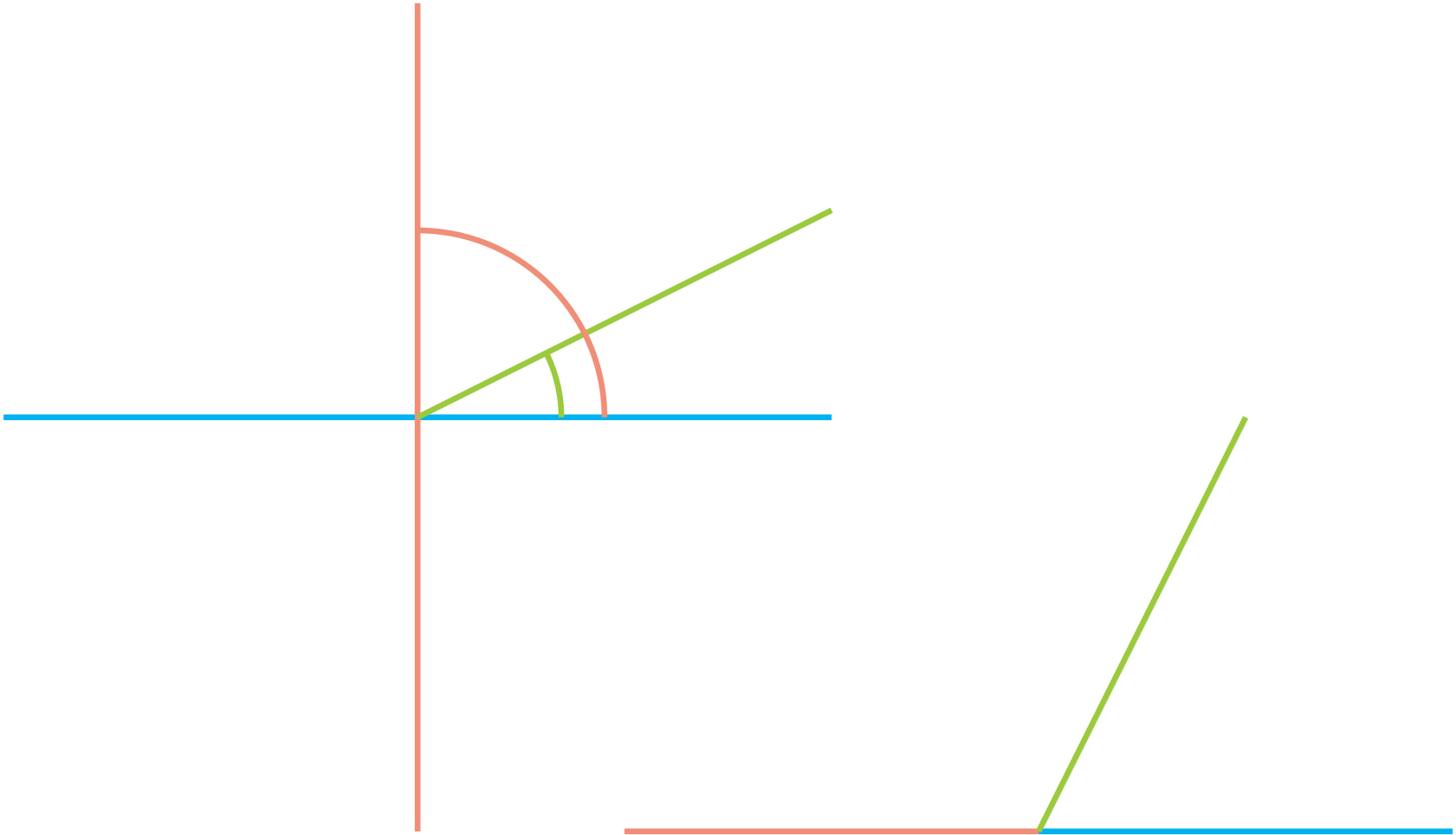
Imaginer...

Imaginer un nombre dont le carré est négatif



Imaginer...

Imaginer un nombre dont le carré est négatif



Retour à Lagrange. Résolution (5)

$$\dot{x}^2 = P(x)$$

Retour à Lagrange. Résolution (5)

$$\dot{x}^2 = P(x) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = P(x)$$

Retour à Lagrange. Résolution (5)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{P(x)}$$

Retour à Lagrange. Résolution (5)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{P(x)} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

Retour à Lagrange. Résolution (5)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{P(x)} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \varphi(x)$$

Retour à Lagrange. Résolution (5)

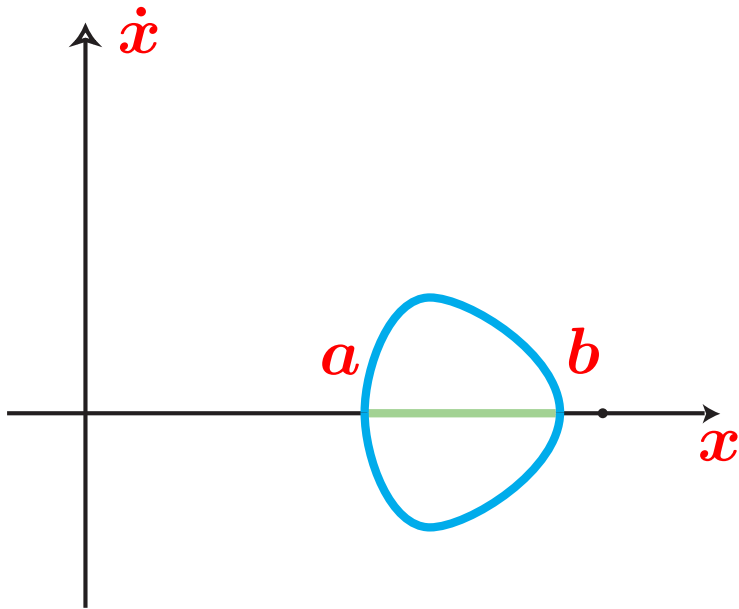
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{P(x)} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad x = \psi(t)$$

Retour à Lagrange. Résolution (5)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{P(x)} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

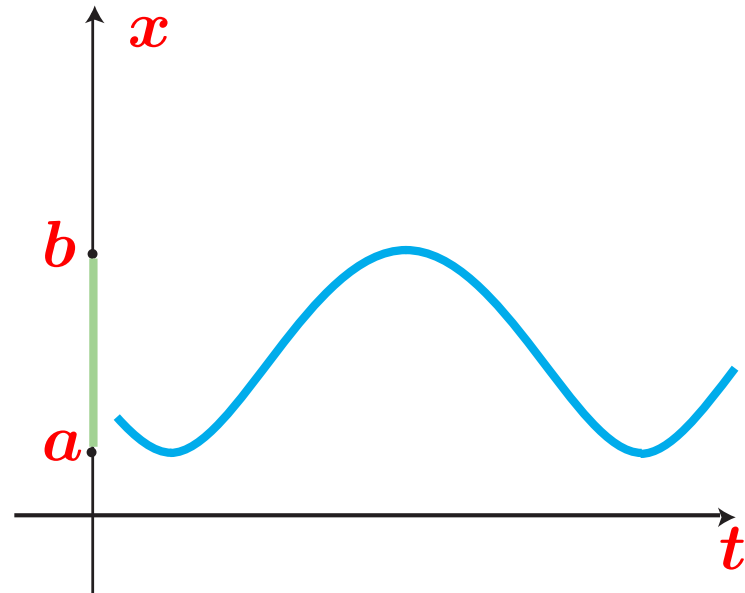
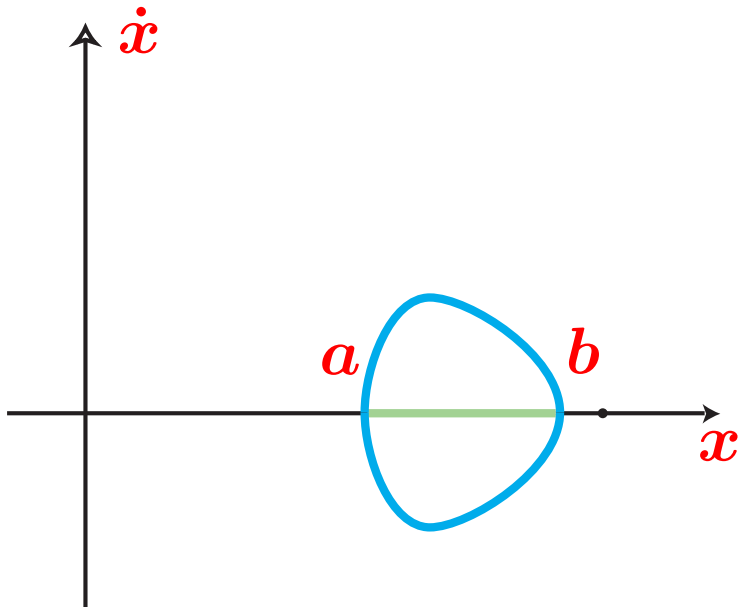
$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad x = \psi(t)$$



Retour à Lagrange. Résolution (5)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{P(x)} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad x = \psi(t)$$



La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.

La fonction $\wp$ de Weierstrass

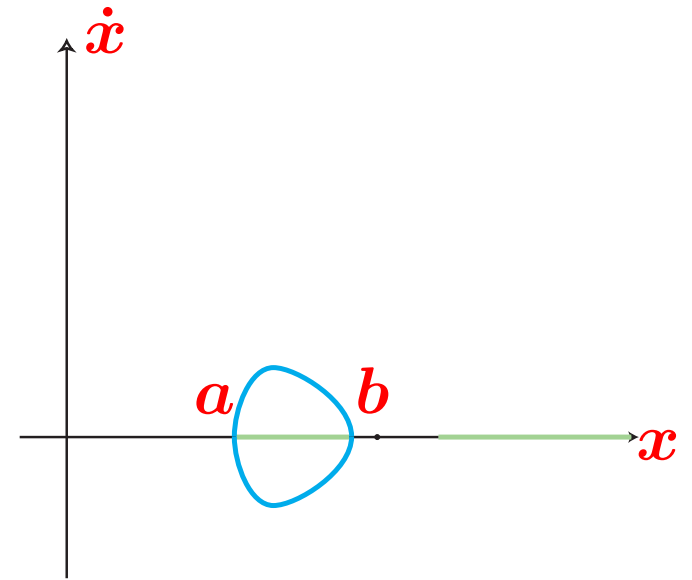
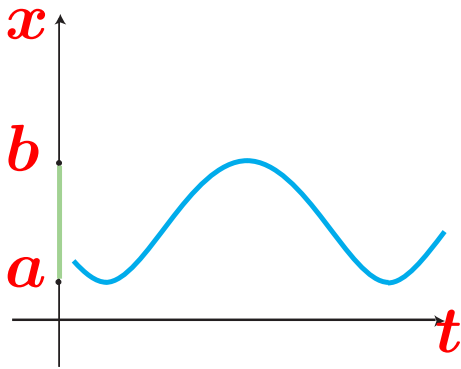
Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass,

La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass, $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

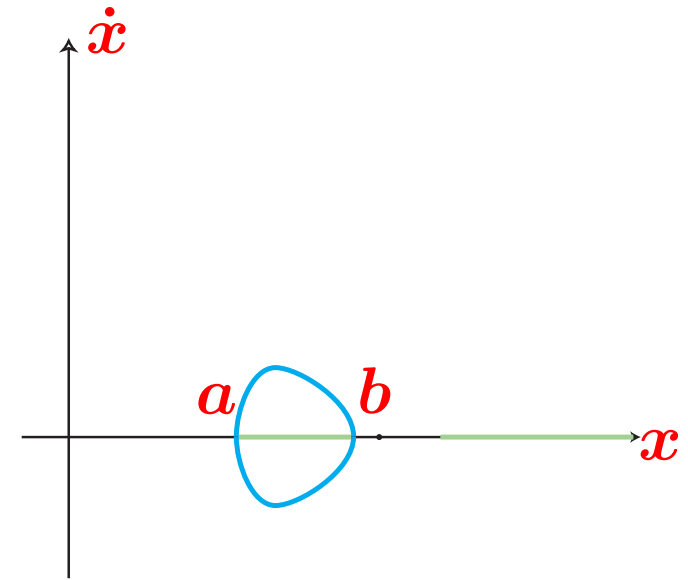
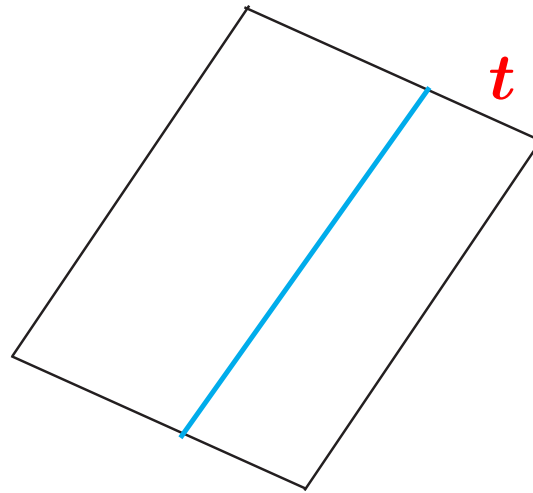
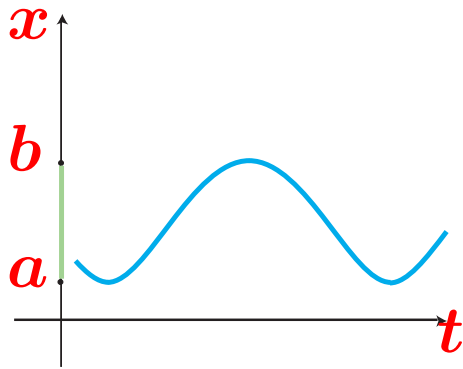
La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass, $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.



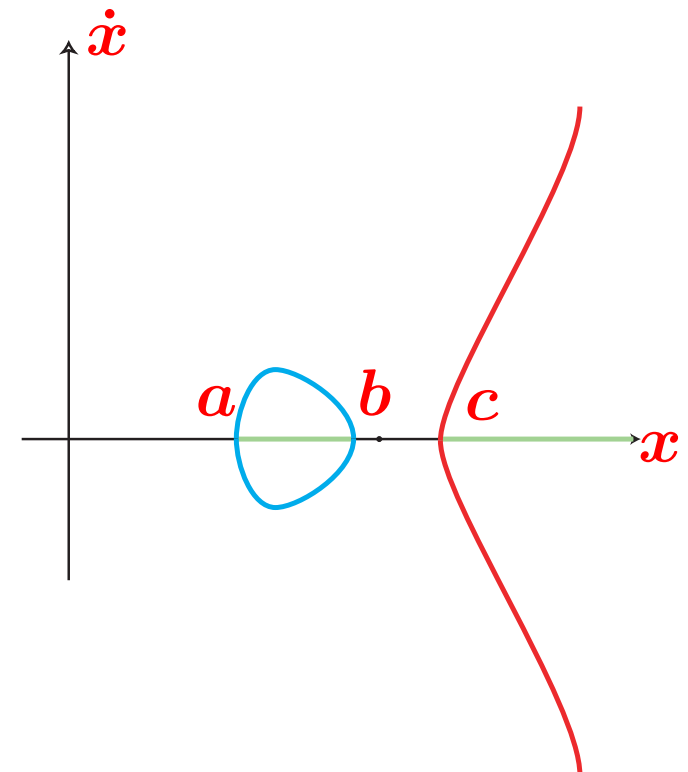
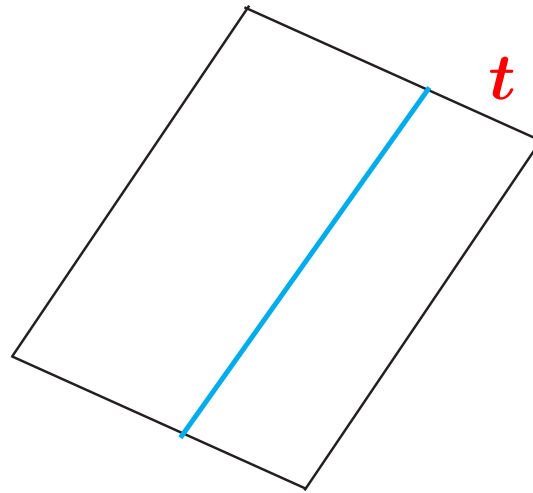
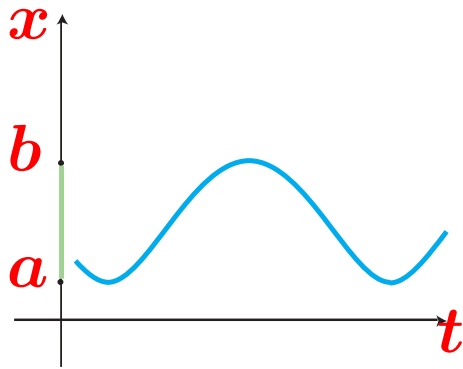
La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass, $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.



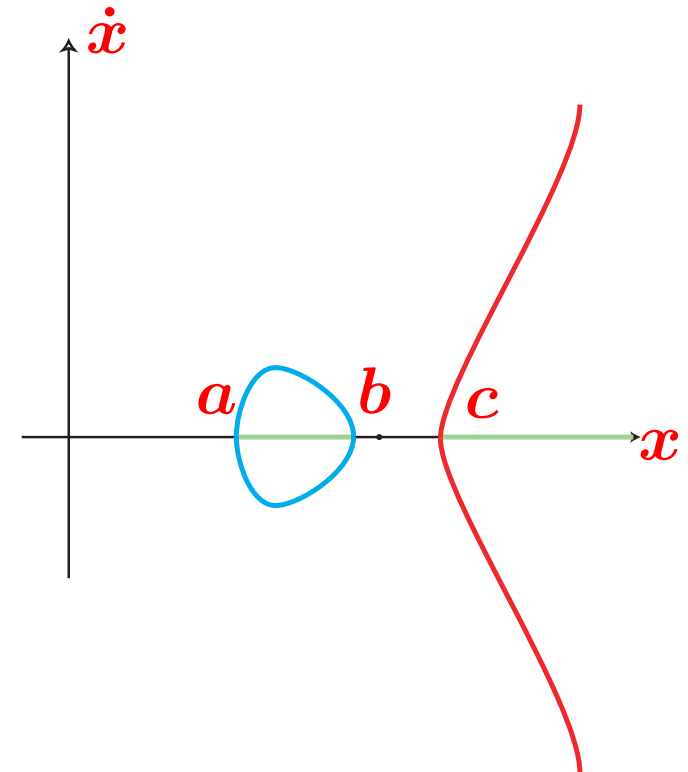
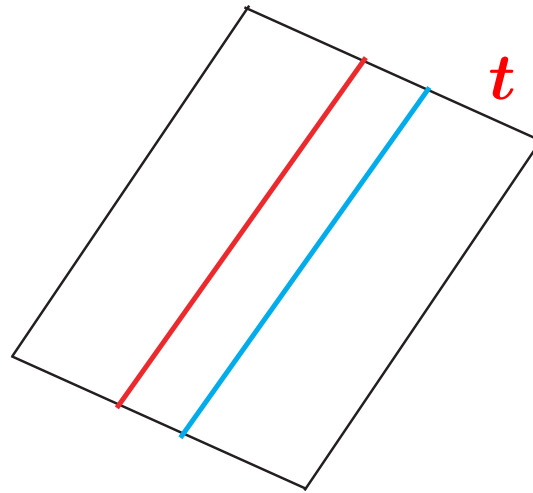
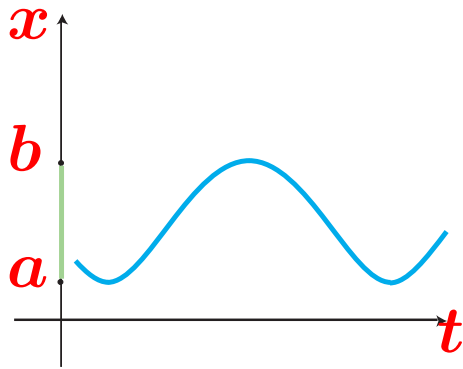
La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass, $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.



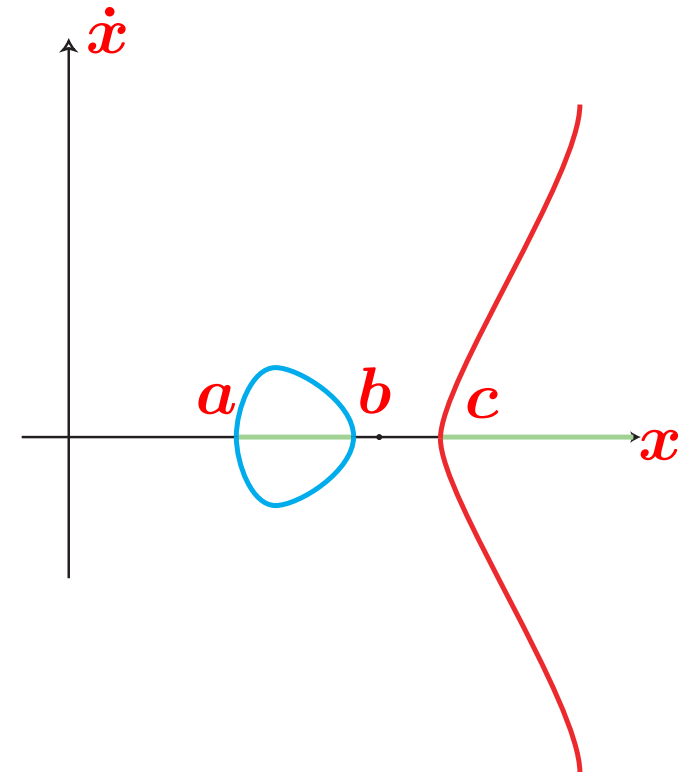
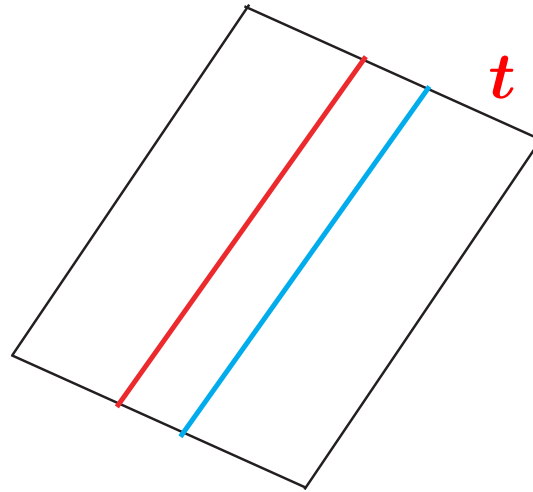
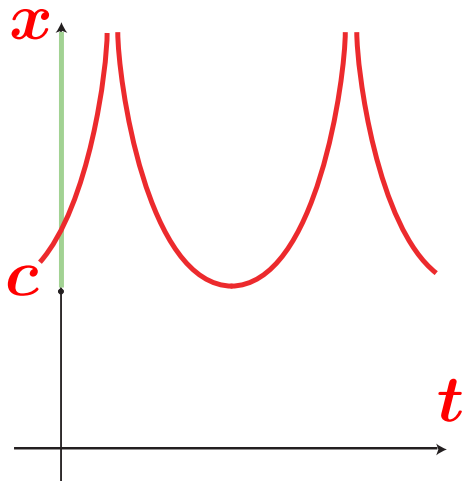
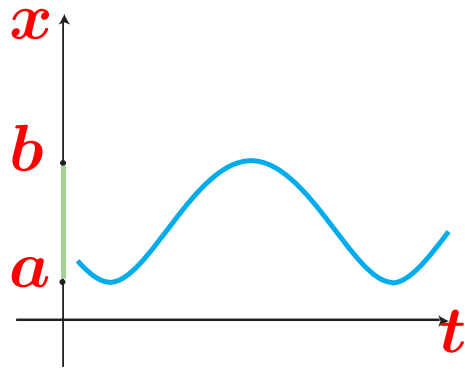
La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass, $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.



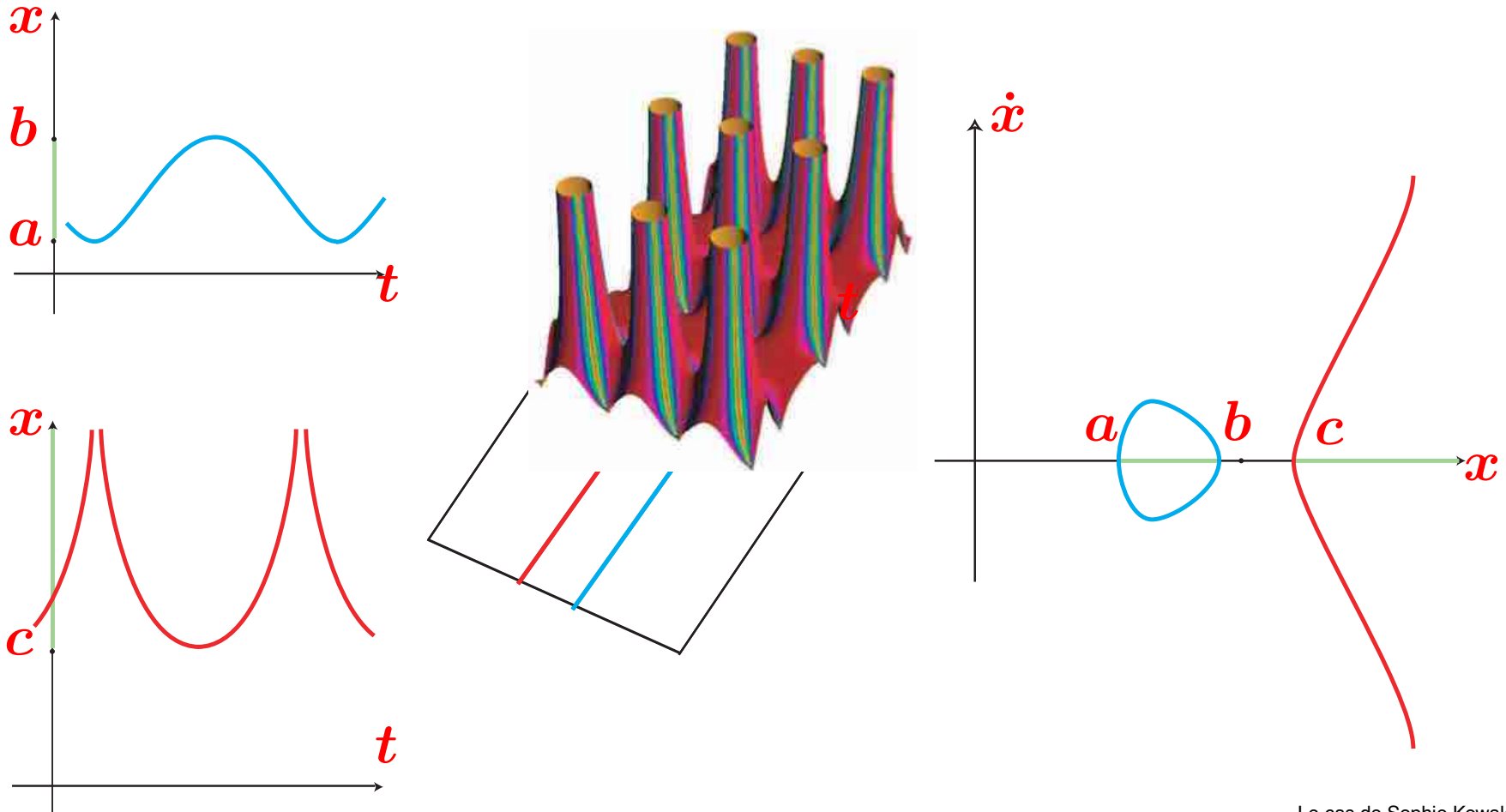
La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass, $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.



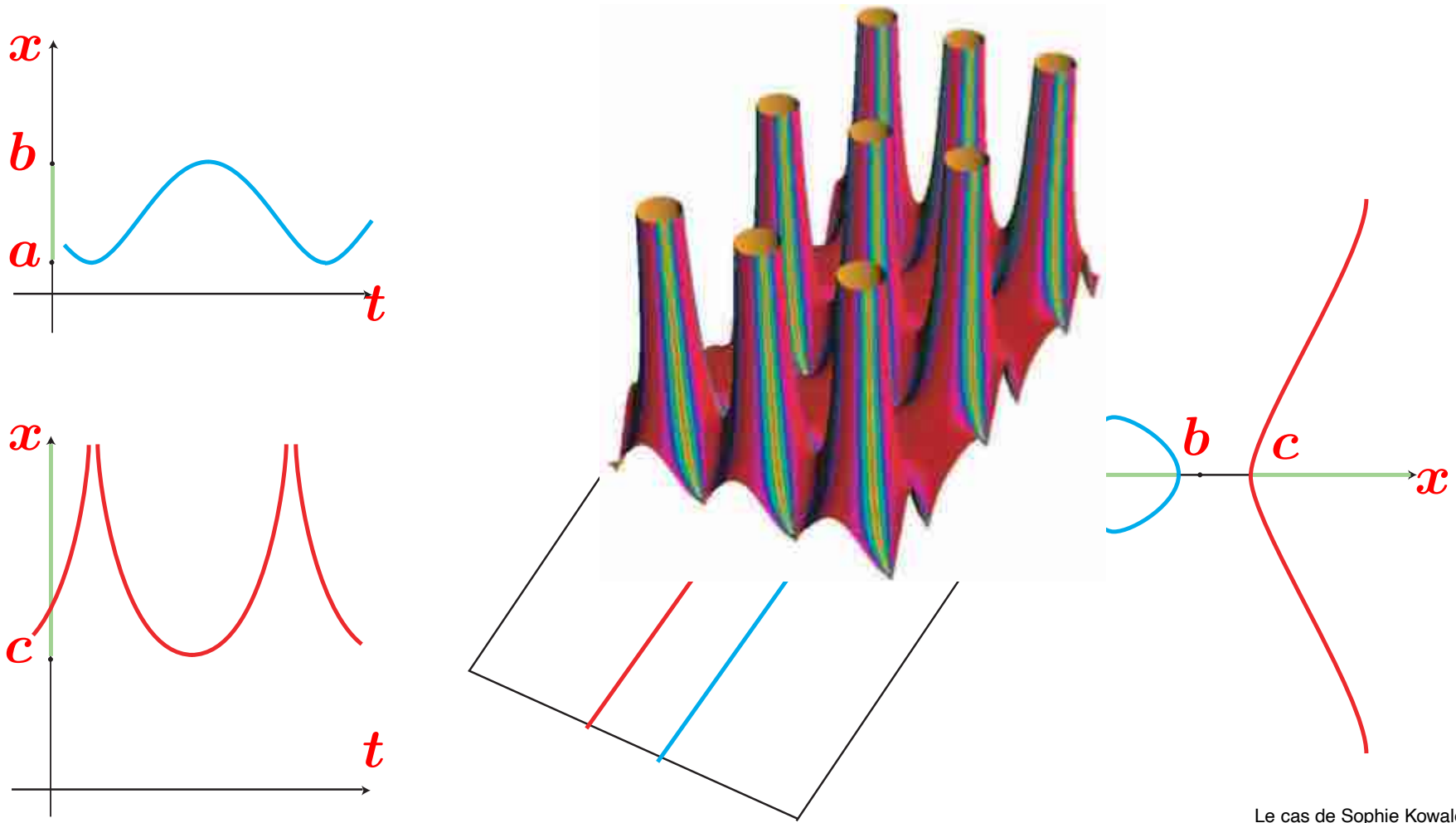
La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass, $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.



La fonction $\wp$ de Weierstrass

Kowalevski considère le temps comme une variable **complexe**.
La fonction ψ est une fonction $\wp$ de Weierstrass, $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.



Le cas de Kowalevski

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r r' - \eta r', \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - u_0 r), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r - pr'. \end{aligned}$$

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r r' - \eta r', \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r r', \\ C \frac{dx}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r' - pr'. \end{aligned}$$

et se demande pour quelles valeurs de A , B , C (forme du solide) et (x_0, y_0, z_0) (position du point fixe) les solutions, comme fonction de la variable complexe temps, ont cette propriété,

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r r' - \eta r', \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r' - pr'. \end{aligned}$$

et se demande pour quelles valeurs de A , B , C (forme du solide) et (x_0, y_0, z_0) (position du point fixe) les solutions, comme fonction de la variable complexe temps, ont cette propriété, n'avoir **que** des pôles.

Le cas de Kowalevski

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Elle considère donc le système dans le cas général

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r r' - \eta r', \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r' - pr'. \end{aligned}$$

et se demande pour quelles valeurs de A , B , C (forme du solide) et (x_0, y_0, z_0) (position du point fixe) les solutions, comme fonction de la variable complexe temps, ont cette propriété, n'avoir **que** des pôles.

C'est le comportement le plus simple possible pour une solution d'un système comme celui du solide...

Le cas de Kowalevski (suite)

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais.

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas,

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas, le cas d'Euler, celui de Lagrange,

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas, le cas d'Euler, celui de Lagrange,

et un nouveau cas, le cas dit **de Kowalevski**

Le cas de Kowalevski (suite)

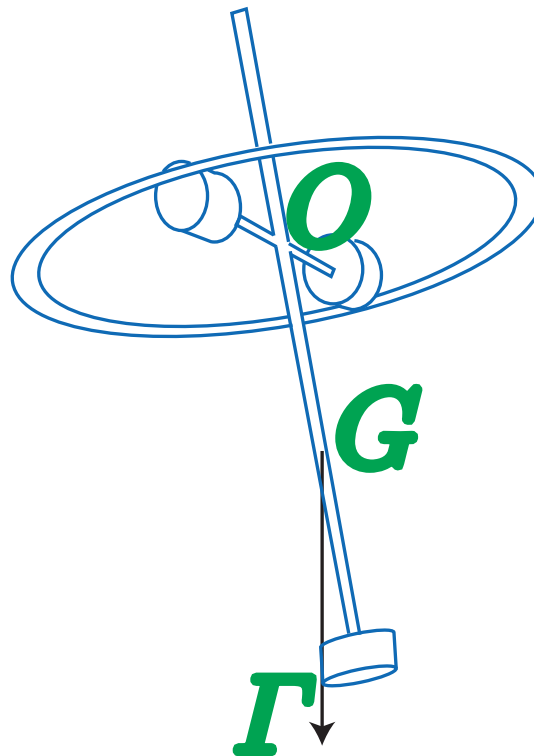
... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas, le cas d'Euler, celui de Lagrange,

et un nouveau cas, le cas dit **de Kowalevski** où $A = B = 2C$, $z_0 = 0$.

Le cas de Kowalevski (suite)

... tellement simple que ça n'arrive presque jamais. Ça se produit dans exactement trois cas, le cas d'Euler, celui de Lagrange,

et un nouveau cas, le cas dit **de Kowalevski** où $A = B = 2C$, $z_0 = 0$.



Le cas de Kowalevski (suite)

Le cas de Kowalevski (suite)

« C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants, »

Le cas de Kowalevski (suite)

« C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants, » dit-elle à la septième page de l'article,

Le cas de Kowalevski (suite)

« C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants, » dit-elle à la septième page de l'article, qui en comporte cinquante-cinq.

Le cas de Kowalevski (résolution)

Le cas de Kowalevski (résolution)

Elle exprime les solutions en termes de fonctions $\wp$ de deux variables. Ce sont les analogues en dimension **2** de la fonction $\wp$ de Weierstrass, de **nouvelles fonctions**, qu'elle connaît bien.

Le cas de Kowalevski (résolution)

Elle exprime les solutions en termes de fonctions $\wp$ de deux variables. Ce sont les analogues en dimension **2** de la fonction $\wp$ de Weierstrass, de **nouvelles fonctions**, qu'elle connaît bien.

Rapport de la Commission du prix Bordin :

Le cas de Kowalevski (résolution)

Elle exprime les solutions en termes de fonctions ϑ de deux variables. Ce sont les analogues en dimension **2** de la fonction $\wp$ de Weierstrass, de **nouvelles fonctions**, qu'elle connaît bien.

Rapport de la Commission du prix Bordin :

« Les propriétés des fonctions ϑ à deux variables indépendantes permettent de donner la solution complète sous la forme la plus précise et la plus élégante ; et l'on a ainsi un nouvel et mémorable exemple d'un problème de Mécanique dans lequel interviennent ces fonctions transcendantes, dont les applications avaient été bornées jusqu'ici à l'analyse pure ou à la Géométrie [...] »

Et aujourd'hui ?

Et aujourd'hui ?

Russian Math. Surveys 31:1 (1976), 59–146

From Uspekhi Mat. Nauk 31:1 (1976), 55–136

NON-LINEAR EQUATIONS OF KORTEWEG–DE VRIES TYPE, FINITE-ZONE LINEAR OPERATORS, AND ABELIAN VARIETIES

B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, and S. P. Novikov

The basic content of this survey is an exposition of a recently developed method of constructing a broad class of periodic and almost-periodic solutions of non-linear equations of mathematical physics to which (in the rapidly decreasing case) the method of the inverse scattering problem is applicable. These solutions are such that the spectrum of their associated linear differential operators has a finite-zone structure. The set of linear operators with a given finite-zone spectrum is the Jacobian variety of a Riemann surface, which is determined by the structure of the spectrum. We give an explicit solution of the corresponding non-linear equations in the language of the theory of Abelian functions.

Et aujourd'hui ?

Commun. Math. Phys. 83, 83–106 (1982)

**Communications in
Mathematical
Physics**

© Springer-Verlag 1982

Kowalewski's Asymptotic Method, Kac-moody Lie Algebras and Regularization

M. Adler^{*,1} and P. van Moerbeke^{**2}

¹ Brandeis University, Waltham, MA 02254, USA

² University of Louvain, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium, and Brandeis University, Waltham, MA 02254, USA

Abstract. We use an effective criterion based on the asymptotic analysis of a class of Hamiltonian equations to determine whether they are linearizable on an abelian variety, i.e., solvable by quadrature. The criterion is applied to a system with Hamiltonian

Et aujourd'hui ? systèmes intégrables

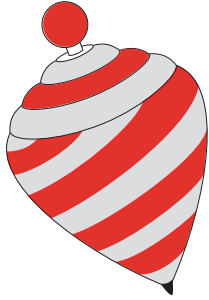
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables

Le cas de Kowalevski est un exemple de ce que l'on appelle un **système intégrable**,

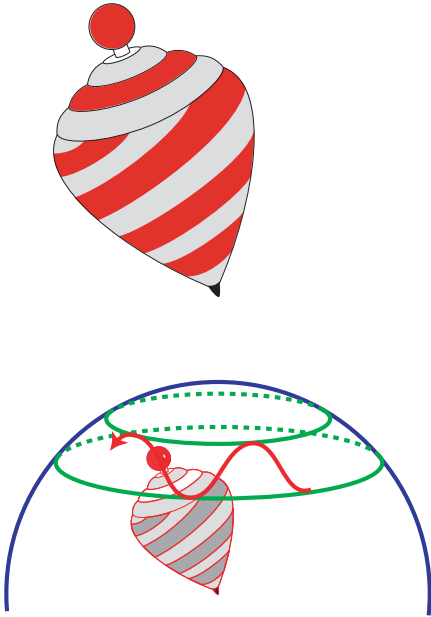
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables

Le cas de Kowalevski est un exemple de ce que l'on appelle un **système intégrable**,
un système différentiel qui possède assez de quantités conservées (énergie, moment,...) ce qui donne à ses solutions un comportement très régulier sur le long terme.

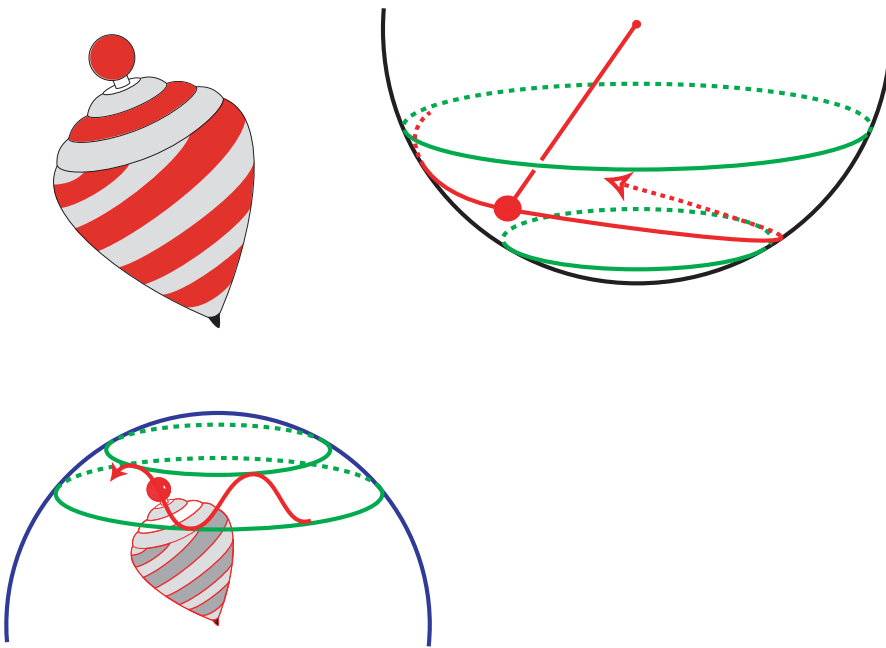
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



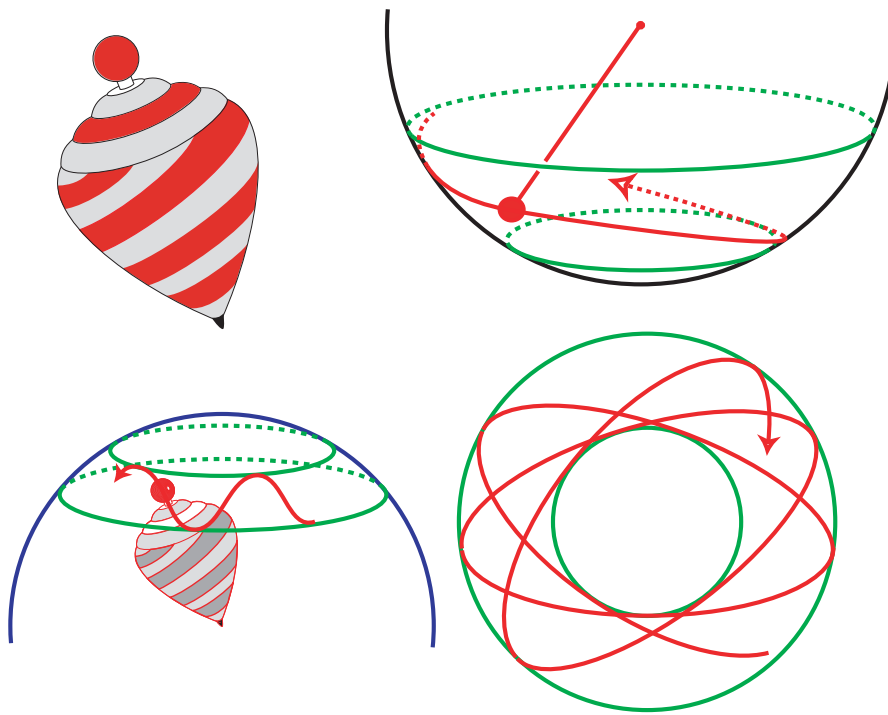
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



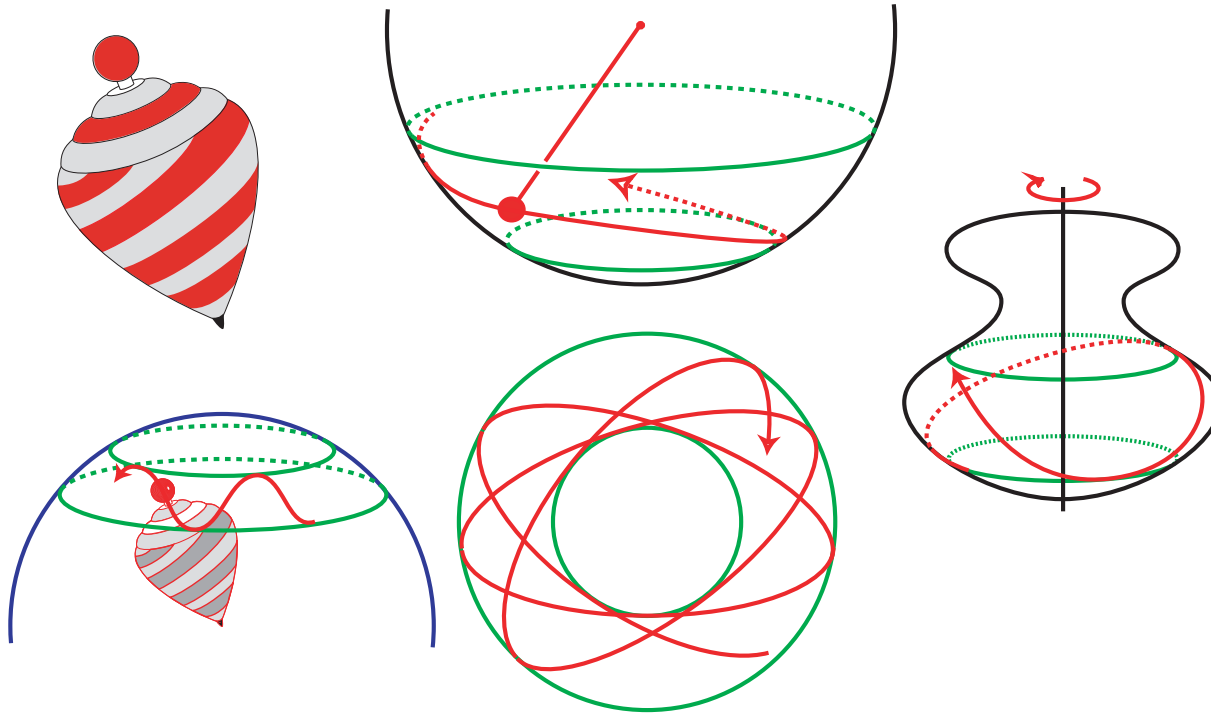
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



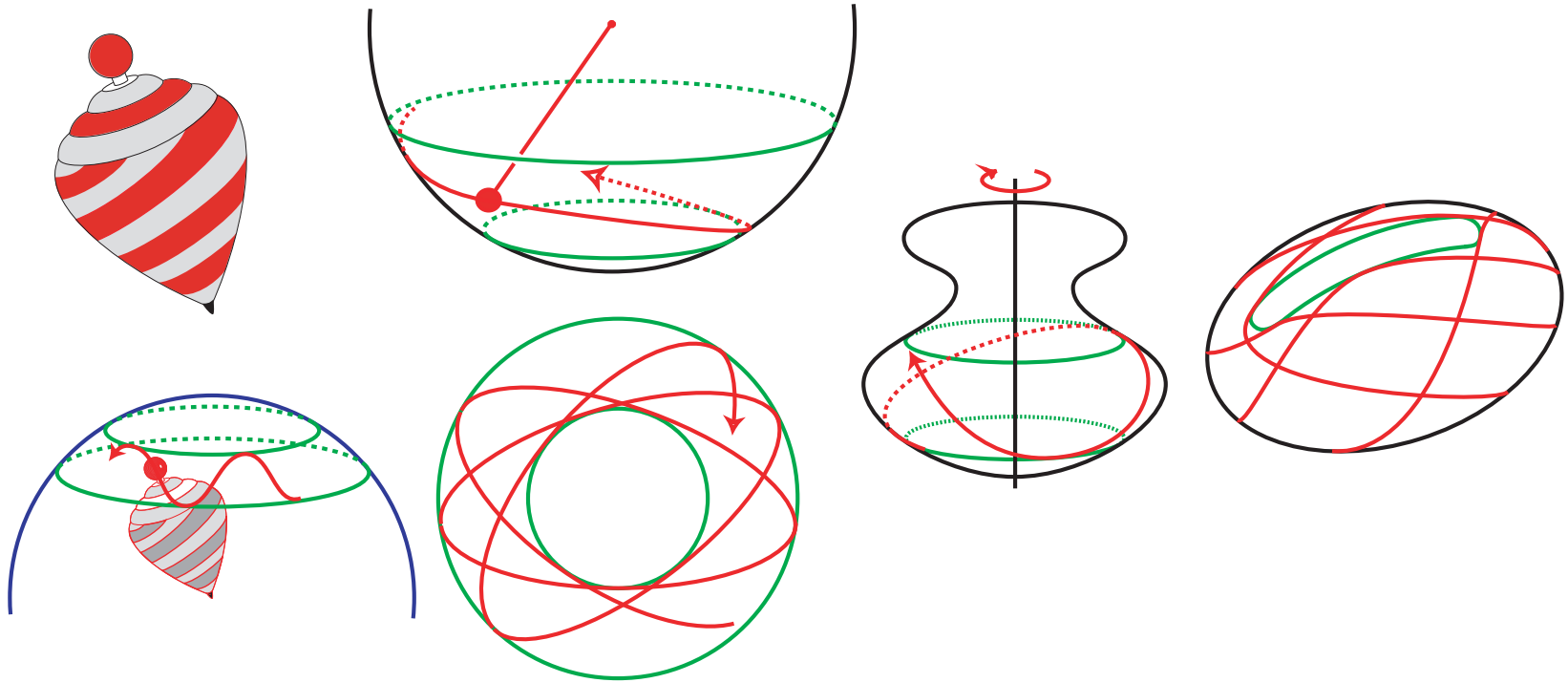
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



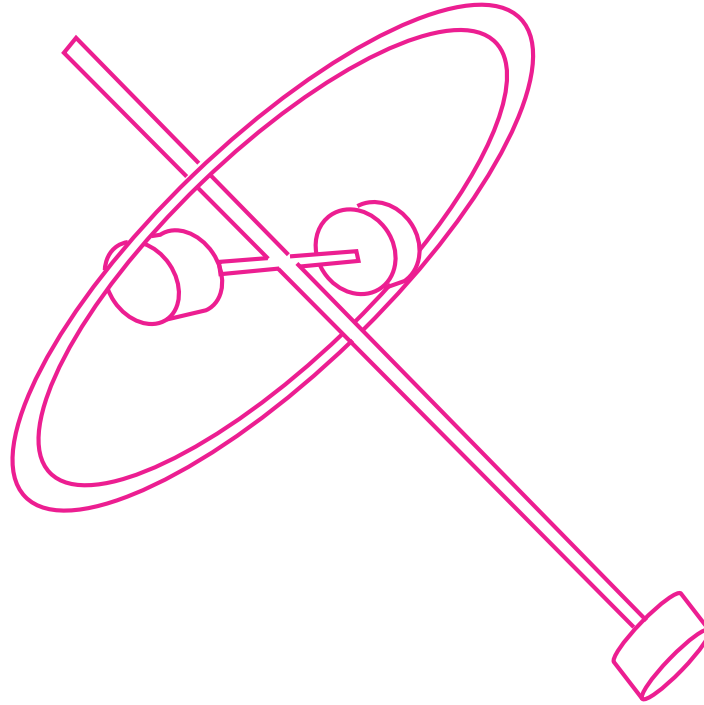
Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



Et aujourd'hui ? systèmes intégrables



Systemes intégrables

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie,

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie, on s'est ramené à l'équation

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie, on s'est ramené à l'équation

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

en éliminant des variables grâce aux quantités conservées,
assez nombreuses, grâce au moment de la toupie par rapport
à son axe.

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie, on s'est ramené à l'équation

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

en éliminant des variables grâce aux quantités conservées,
assez nombreuses, grâce au moment de la toupie par rapport
à son axe. Kowalevski a résolu les équations dans son cas
grâce à un polynôme ***R*** de degré **5**.

Systemes intégrables

On est capable de les **intégrer**, d'en écrire les solutions ;
dans le cas de la toupie, on s'est ramené à l'équation

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

en éliminant des variables grâce aux quantités conservées,
assez nombreuses, grâce au moment de la toupie par rapport
à son axe. Kowalevski a résolu les équations dans son cas
grâce à un polynôme ***R*** de degré **5**.

Mais d'où a-t-elle sorti ce polynôme ?

Systemes intégrables

Systemes intégrables

Dans son cas, elle a remarqué qu'il y avait aussi une quantité conservée au cours du mouvement,

Systemes intégrables

Dans son cas, elle a remarqué qu'il y avait aussi une quantité conservée au cours du mouvement,

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma + i\gamma')|^2,$$

Systemes intégrables

Dans son cas, elle a remarqué qu'il y avait aussi une quantité conservée au cours du mouvement,

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma + i\gamma')|^2,$$

c'est ce qui permet, par élimination,

Systemes intégrables

Dans son cas, elle a remarqué qu'il y avait aussi une quantité conservée au cours du mouvement,

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma + i\gamma')|^2,$$

c'est ce qui permet, par élimination,
d'intégrer le système.

Trois questions — la première

Trois questions — la première

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

Trois questions — la première

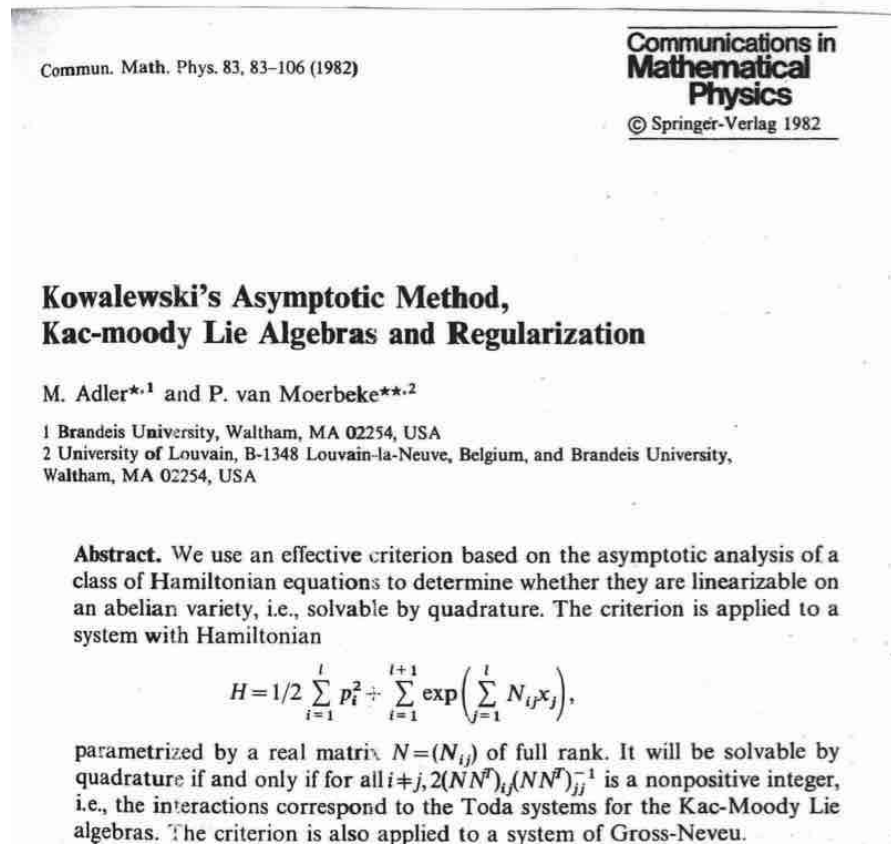
On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

La propriété de Kowalevski est maintenant appelée **complète intégrabilité algébrique**.

Trois questions — la première

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

La propriété de Kowalevski est maintenant appelée **complète intégrabilité algébrique**.



Trois questions — la première

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

La propriété de Kowalevski est maintenant appelée **complète intégrabilité algébrique**.

...orism with algebraic addition law).

This paper deals with a criterion for algebraic complete integrability, inspired by work of Kowalewski. In celebrated papers [7, 8], she has shown that the *only*

algebraically completely integrable systems among the rigid body motions are Euler's rigid body, Lagrange's top and the famous Kowalewski top. Her method is based on the idea that if the system is to be algebraically completely integrable, and if the phase variables of the problem are to be algebraic (abelian) functions, then the phase variables of the problem must be meromorphic in time. In addition, the trajectories which blow up (as they must) are nicely parametrized by a codimension one family of parameters. This implies the existence of enough codimension one parameter families of (complex) pole solutions of the system so that all the (abelian) phase variables get a chance to blow up (not necessarily simultaneously). The sufficiency of this criterion has not been established. We remark that the parameters of the pole solutions play the role of regularizing variables when the equations blow up.

Trois questions — la première

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

La propriété de Kowalevski est maintenant appelée **complète intégrabilité algébrique**.

La relation entre cette intégrabilité algébrique et l'intégrabilité usuelle n'est pas encore très claire aujourd'hui.

Trois questions — la deuxième

Trois questions — la deuxième

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable ?

Trois questions — la deuxième

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable ?
Comment trouve-t-on une intégrale première ?

Trois questions — la deuxième

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable ?
Comment trouve-t-on une intégrale première ?
Et d'où sort ce cas bizarre ?

Trois questions — la deuxième

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable ?

Comment trouve-t-on une intégrale première ?

Et d'où sort ce cas bizarre ?

C'est un des sujets sur lesquels depuis environ trente ans, il y a eu énormément de progrès.

Trois questions — la deuxième

The Kowalewski Top 99 Years Later: A Lax Pair, Generalizations and Explicit Solutions

A. I. Bobenko, A. G. Reyman, and M. A. Semenov-Tian-Shansky

Leningrad Branch of V. A. Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27,
SU-191011 Leningrad, USSR

Abstract. A “natural” Lax pair for the Kowalewski top is derived by using a general group-theoretic approach. This gives a new insight into the algebraic geometry of the top and leads to its complete solution via finite-band integration theory.

Introduction

In her celebrated paper [1] published in 1889 Kowalewski found a new and highly nontrivial integrable case of the motion of a heavy rigid body about a fixed point, completing the list of integrable tops. Two previously known integrable cases are relatively simple and had been solved already in the XVIIIth century. These are Euler's top in which the stationary point coincides with the center of mass, and Lagrange's top which is axially symmetric. The third case discovered by Kowalewski is rather bizarre: the moments of inertia have a fixed ratio 2:2:1, and the center of mass lies in the equatorial plane of the top. This case was detected by requiring that the general solution be given by meromorphic functions of the complex time variable. Until

Trois questions — la deuxième

Compositio Mathematica **87**: 153–229, 1993.

© 1993 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski

MICHELE AUDIN¹ et ROBERT SILHOL²

¹*Institut De Rech. Math. Avancée, 7 Rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France;*

²*Université de Montpellier II, F-34095 Montpellier Cedex 5, France*

Received 5 February 1992; accepted 30 June 1992

Nous allons expliquer dans ces notes comment sont faits les niveaux communs des intégrales premières dans l'exemple de la toupie de Kowalevski et, à titre d'introduction, dans les exemples plus simples de la toupie de Lagrange et du solide de dimension 3. Pour ce faire, nous montrerons que les aspects réels de la méthode de la courbe spectrale permettent d'étudier les "tores de Liouville". Ces résultats sont assez classiques dans les cas du solide libre et de la toupie symétrique (cas dit de Lagrange), en particulier, l'exposé de Verdier [28] utilise précisément l'exemple de Lagrange pour introduire et illustrer la méthode.

Le calcul des tores de Liouville de Kowalevski a déjà été fait dans [19], mais, d'une part les calculs sont assez pénibles et certains arguments ne sont pas très détaillés dans cet article, d'autre part, ces mêmes arguments reposent sur l'étude [4] qu'il n'est pas très facile de se procurer.

L'exemple de Kowalevski est à la fois un exemple très simple de système complètement intégrable: deux fonctions en involution sur une variété sym-

Trois questions — la deuxième

The Kowalewski Top 99 Years Later: A Lax Pair, Generalizations and Explicit Solutions

A. I. Bobenko, A. G. Reyman, and M. A. Semenov-Tian-Shansky

Leningrad Branch of V. A. Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27,
SU-191011 Leningrad, USSR

Abstract. A “natural” Lax pair for the Kowalewski top is derived by using a general group-theoretic approach. This gives a new insight into the algebraic geometry of the top and leads to its complete solution via finite-band integration theory.

Introduction

In her celebrated paper [1] published in 1889 Kowalewski found a new and highly nontrivial integrable case of the motion of a heavy rigid body about a fixed point, completing the list of integrable tops. Two previously known integrable cases are relatively simple and had been solved already in the XVIIIth century. These are Euler's top in which the stationary point coincides with the center of mass, and Lagrange's top which is axially symmetric. The third case discovered by Kowalewski is rather bizarre: the moments of inertia have a fixed ratio 2:2:1, and the center of mass lies in the equatorial plane of the top. This case was detected by requiring that the general solution be given by meromorphic functions of the complex time variable. Until

Trois questions — la troisième

Trois questions — la troisième

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable ?

Trois questions — la troisième

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable ? On trouve des intégrales premières.

Trois questions — la troisième

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable ? On trouve des intégrales premières.

Et si on n'en trouve pas ?

Trois questions — la troisième

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable ? On trouve des intégrales premières.

Et si on n'en trouve pas ?

Il existe des systèmes qui ne sont pas intégrables.

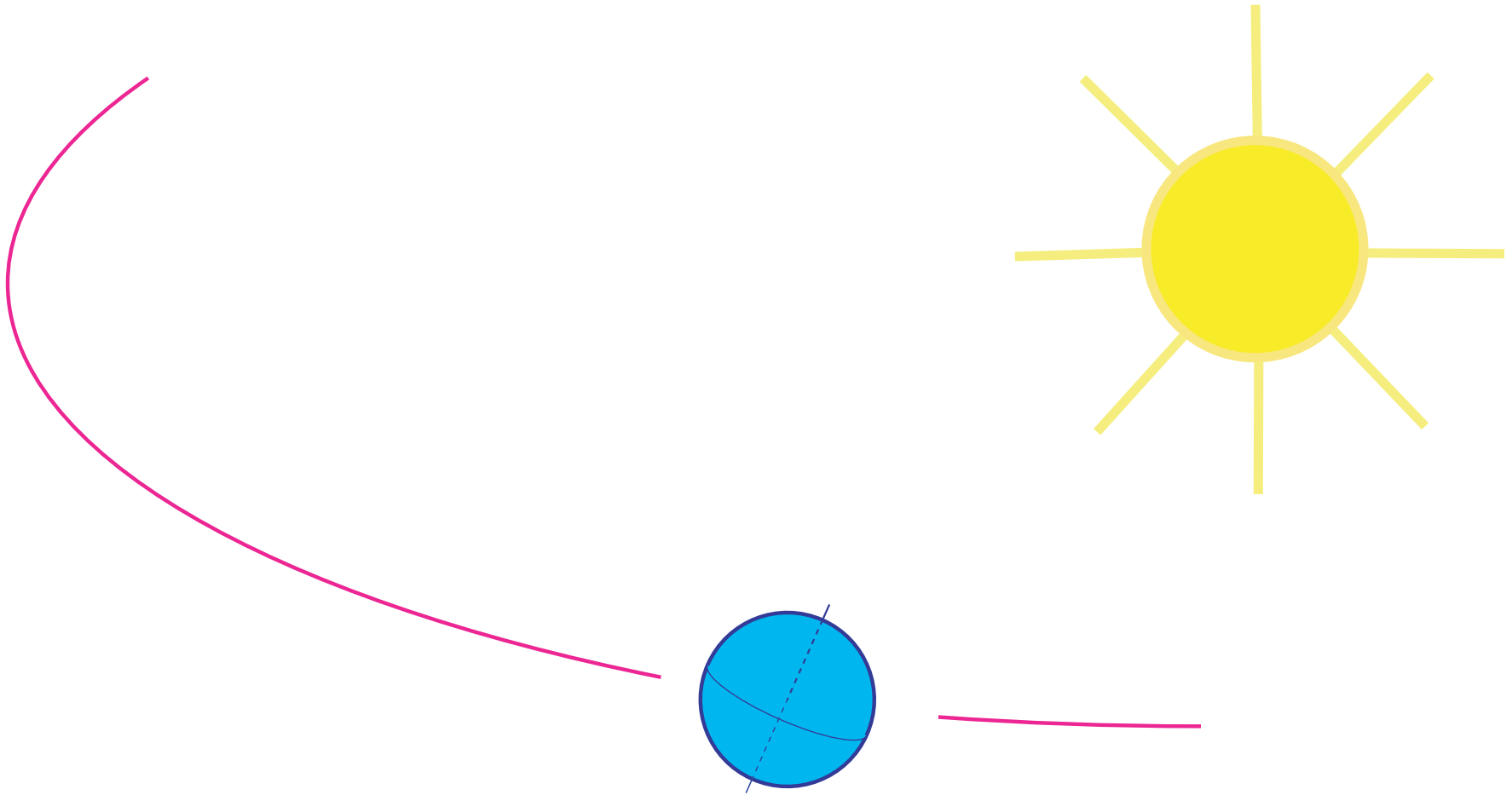
Trois questions — la troisième

Trois questions — la troisième

Deux corps,

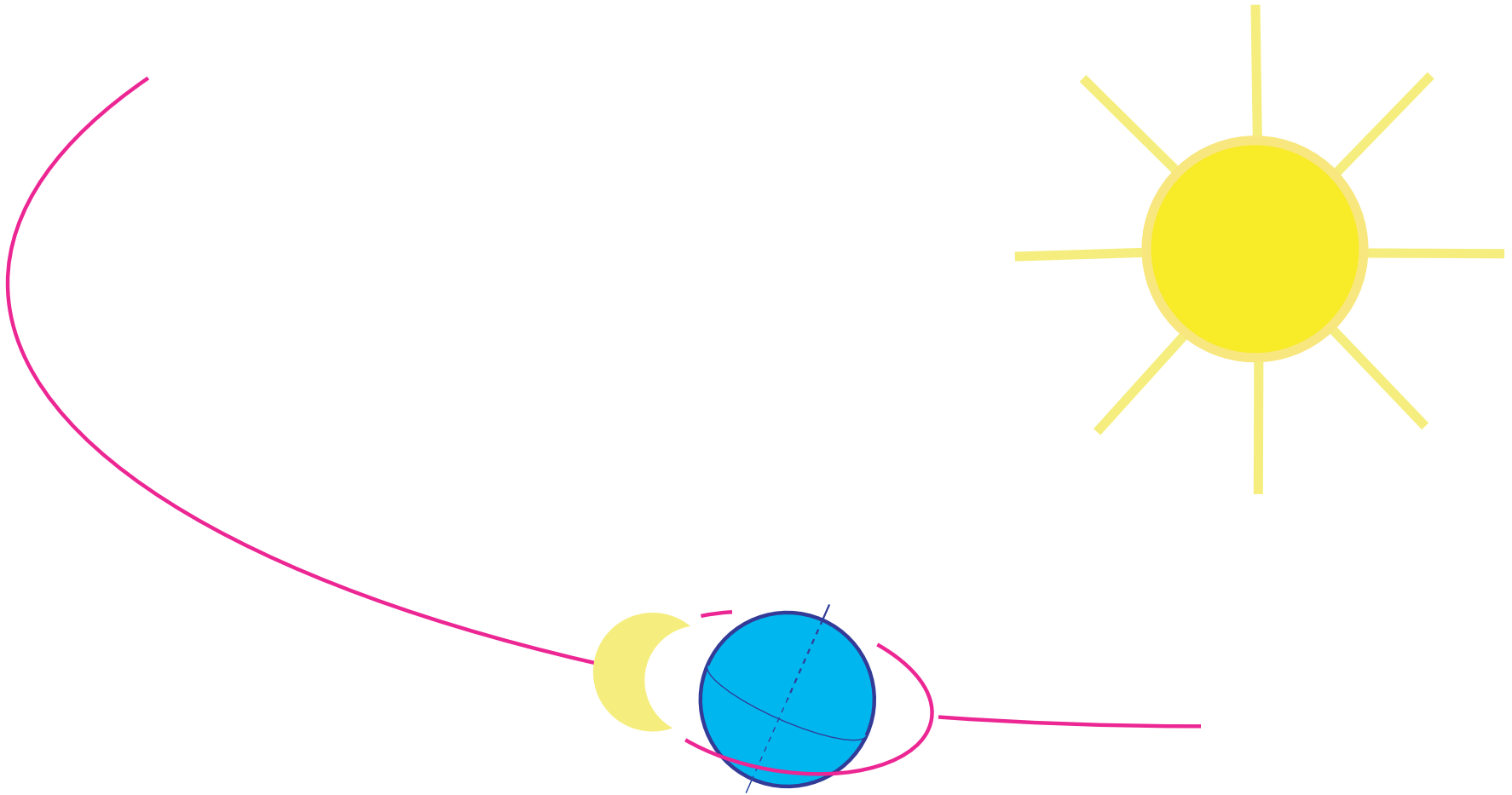
Trois questions — la troisième

Deux corps,



Trois questions — la troisième

Deux corps, trois corps...



Trois questions — la troisième

Le mouvement d'un satellite est-il intégrable ?

Trois questions — la troisième

Le mouvement d'un satellite est-il intégrable ?



Trois questions — la troisième

Trois questions — la troisième

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable,

Trois questions — la troisième

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable, grâce à un théorème de Morales et Ramis (1998).

Trois questions — la troisième

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable, grâce à un théorème de Morales et Ramis (1998).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse

Vol. XIV, n° 1, 2005
pp. 123–160

Differential Galois approach to the non-integrability of the heavy top problem^(*)

ANDRZEJ J. MACIEJEWSKI⁽¹⁾, MARIA PRZYBYLSKA^(2,3)

ABSTRACT. — We study integrability of the Euler-Poisson equations describing the motion of a rigid body with one fixed point in a constant gravity field. Using the Morales-Ramis theory and tools of differential algebra we prove that a symmetric heavy top is integrable only in the classical cases of Euler, Lagrange, and Kovalevskaya and is partially integrable only in the Goryachev-Chaplygin case. Our proof is alternative to that given by Ziglin (*Functional Anal. Appl.*, 17(1):6–17, 1983; *Functional Anal. Appl.*, 31(1):3–9, 1997).

RÉSUMÉ. — Nous étudions l'intégrabilité des équations de Euler-Poisson qui décrivent le mouvement d'un solide rigide avec un point fixe dans un champ gravitationnel constant. En utilisant la théorie de Morales-Ramis et des outils d'algèbre différentielle, nous prouvons qu'un solide symétrique est intégrable seulement dans les cas classiques d'Euler, Lagrange et Kovalevski, et est partiellement intégrable seulement dans le cas Goryatchev-Tchaplygin. Notre preuve est une alternative à celle donnée

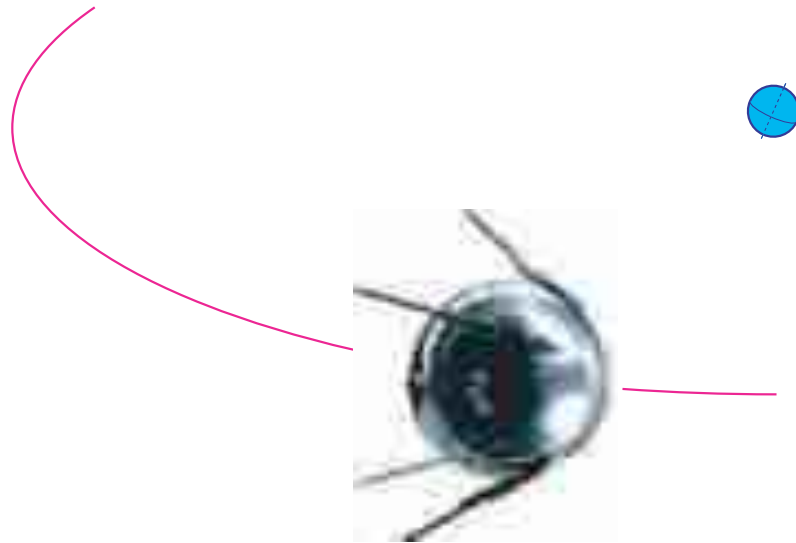
Trois questions — la troisième

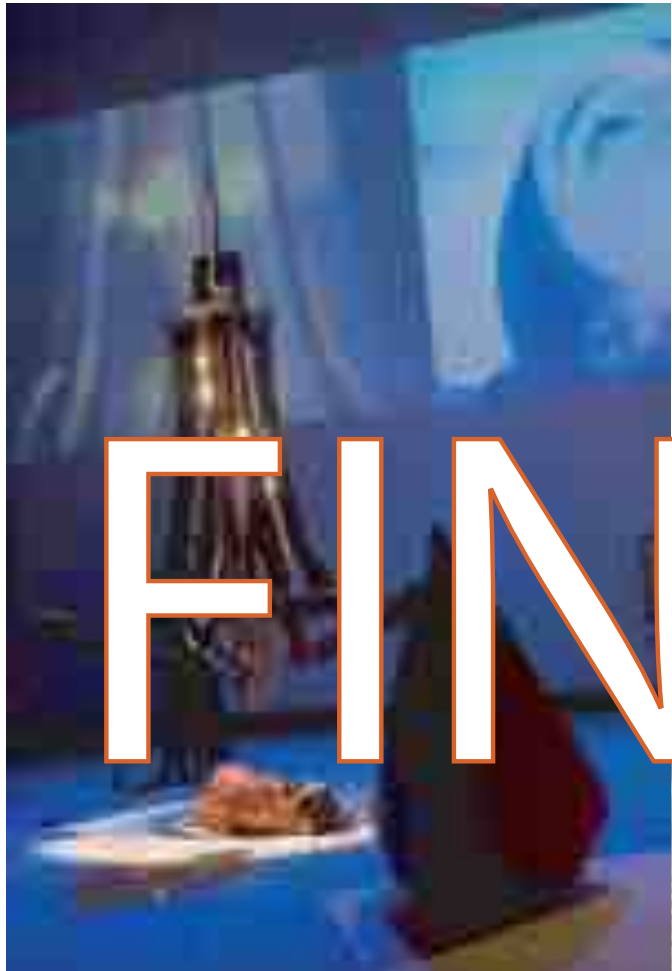
Trois questions — la troisième

On peut montrer par exemple que le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité n'est pas un système intégrable.

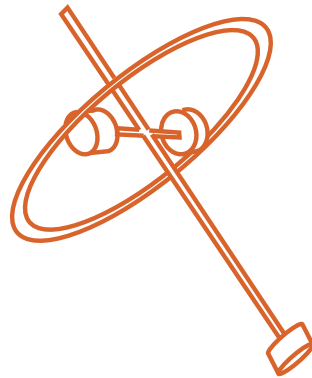
Trois questions — la troisième

On peut montrer par exemple que le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité n'est pas un système intégrable.





FIN



Équations

Les équations sont écrites dans un repère lié au solide,

Équations

Les équations sont écrites dans un repère lié au solide,

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= vr' - \eta r', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r_T, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r - pr'.
 \end{aligned}$$

Équations

Les équations sont écrites dans un repère lié au solide,

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dx}{dt} &= vr' - ur'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dy}{dt} &= pr'' - vr', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dz}{dt} &= ur' - pr'.
 \end{aligned}$$

Les quantités inconnues sont

Équations

Les équations sont écrites dans un repère lié au solide,

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= vr' - \eta r', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr'' - r_T, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r - pr'.
 \end{aligned}$$

Les quantités inconnues sont $\Gamma = (\gamma, \gamma', \gamma'')$, la pesanteur,

Équations

Les équations sont écrites dans un repère lié au solide,

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 \gamma'' - z_0 \gamma'), & \frac{dx}{dt} &= v \gamma' - w \gamma'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 \gamma - x_0 \gamma'), & \frac{dy}{dt} &= w \gamma'' - v \gamma, \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 \gamma' - y_0 \gamma), & \frac{dz}{dt} &= w \gamma - v \gamma'.
 \end{aligned}$$

Les quantités inconnues sont $\Gamma = (\gamma, \gamma', \gamma'')$, la pesanteur, $\Omega = (p, q, r)$, le vecteur instantané de rotation,

Équations

Les équations sont écrites dans un repère lié au solide,

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dx}{dt} &= v r' - w r'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dy}{dt} &= w r'' - v r', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dz}{dt} &= w r' - v r''.
 \end{aligned}$$

Les quantités inconnues sont $\Gamma = (\gamma, \gamma', \gamma'')$, la pesanteur, $\Omega = (p, q, r)$, le vecteur instantané de rotation, A , B et C sont des nombres positifs (constants), la matrice d'inertie décrit la forme du solide,

Équations

Les équations sont écrites dans un repère lié au solide,

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dx}{dt} &= v r' - w r'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dy}{dt} &= w r'' - v r', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dz}{dt} &= w r' - v r''.
 \end{aligned}$$

Les quantités inconnues sont $\Gamma = (\gamma, \gamma', \gamma'')$, la pesanteur, $\Omega = (p, q, r)$, le vecteur instantané de rotation, A , B et C sont des nombres positifs (constants), la matrice d'inertie décrit la forme du solide, $L = \overrightarrow{OG} = (x_0, y_0, z_0)$ est constant aussi.

Équations

Les équations sont écrites dans un repère lié au solide,

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dx}{dt} &= v r' - w r'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dy}{dt} &= w r'' - v r', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dz}{dt} &= w r' - v r''.
 \end{aligned}$$

Les quantités inconnues sont $\Gamma = (\gamma, \gamma', \gamma'')$, la pesanteur, $\Omega = (p, q, r)$, le vecteur instantané de rotation, A , B et C sont des nombres positifs (constants), la matrice d'inertie décrit la forme du solide, $L = \overrightarrow{OG} = (x_0, y_0, z_0)$ est constant aussi. On peut supposer que $Mg = 1$, (choix des unités).

$$A \frac{dy}{dt} = (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), \quad \frac{dr}{dt} = r r' - q r'',$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), \quad \frac{dr'}{dt} = pr'' - r r',$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + Mg(x_0 r' - u_0 r), \quad \frac{dr''}{dt} = qr - pr'.$$

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'),$$

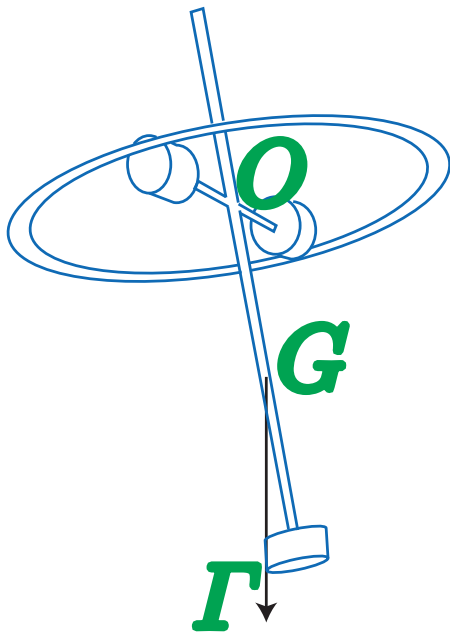
$$\frac{dr}{dt} = r r' - r r'',$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''),$$

$$\frac{dr}{dt} = pr'' - r r',$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''),$$

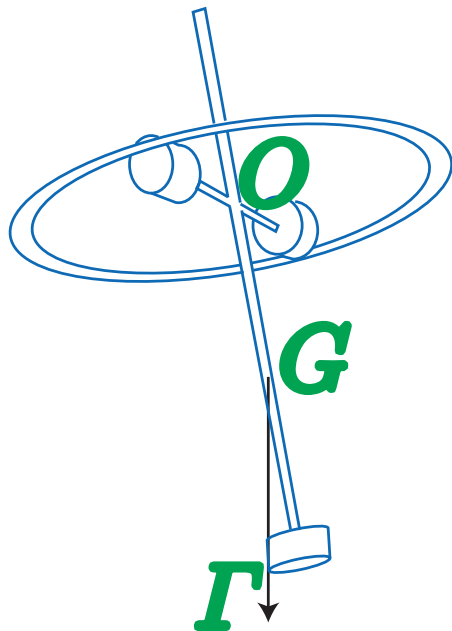
$$\frac{dr}{dt} = r r' - pr'.$$



$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), \quad \frac{dr}{dt} = r' - \eta',$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), \quad \frac{dr}{dt} = pr'' - r_T,$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), \quad \frac{dr}{dt} = \eta' - pr'.$$



Avec $\Omega = (p, q, r)$, $M = (Ap, Bq, Cr)$ et $\overrightarrow{OG} = L = (x_0, y_0, z_0)$, ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{M} = M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L \\ \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega. \end{cases}$$

Résolution (1)

- La gravitation est constante, donc

$$\|\Gamma\|^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 \equiv 1,$$

Résolution (1)

- La gravitation est constante, donc

$$\|\Gamma\|^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 \equiv 1,$$

- de même que le moment par rapport à la verticale (c'est-à-dire à la direction du champ de pesanteur Γ)

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' \equiv c.$$

Résolution (1)

- La gravitation est constante, donc

$$\|\Gamma\|^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 \equiv 1,$$

- de même que le moment par rapport à la verticale (c'est-à-dire à la direction du champ de pesanteur Γ)

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' \equiv c.$$

- Et bien sûr, l'énergie totale est conservée

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - (x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') \equiv h.$$

Le cas de Kowalevski (résolution)

Le cas de Kowalevski (résolution)

$$0 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

$$dt = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

Le cas de Kowalevski (résolution)

$$0 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

$$dt = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

où R est un polynôme de degré 5.

Le cas de Kowalevski (résolution)

$$0 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

$$dt = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

où R est un polynôme de degré 5. Analogue au

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

dans le cas de la toupie.