

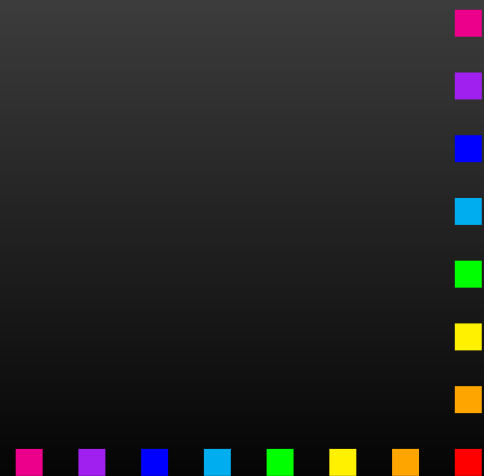
Le cas de Sophie Kowalevski

Michèle Audin

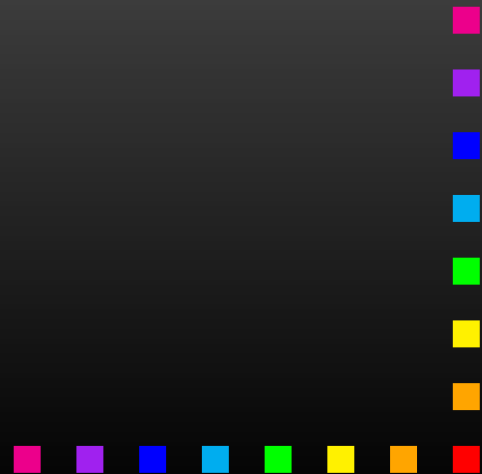
Institut de recherche mathématique avancée

CNRS et Université Louis Pasteur

Strasbourg



Un cas?



Un cas?

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - qr', \\ (1) \quad B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr' - r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Un cas?

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

A STOCKHOLM.

$$(1) \quad \begin{aligned} B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r - x_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= pr' - r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r), & \frac{dr'}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Un cas?

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - qr', \\ (1) \quad B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr' - r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

Un cas?

Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

- 1) Le cas de POISSON (ou d'EULER) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,
- 2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 \neq y_0 = 0$.

Un cas?

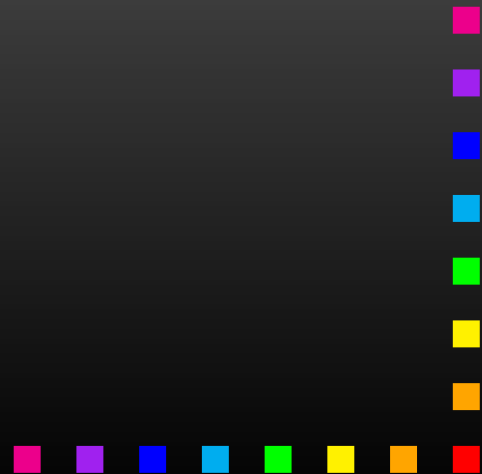
Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

- 1) Le cas de POISSON (ou d'EULER) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,
- 2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

Le “cas de Sophie Kowalevski” est un (le) troisième cas dans lequel on sait désormais intégrer ce système.



Sophie Kowalevski



Sophie Kowalevski



Née en 1850 en Russie, thèse avec Weierstraß en 1874, professeur à Stockholm de 1883–84 à sa mort en 1891.

Ce qu'elle n'est pas



Elle n'est pas la première femme à obtenir un doctorat, même en mathématiques.

Elle n'est peut-être même pas la première femme à obtenir un poste dans une université.

Ce qu'elle n'est pas



Maria Agnesi (1718–1799)

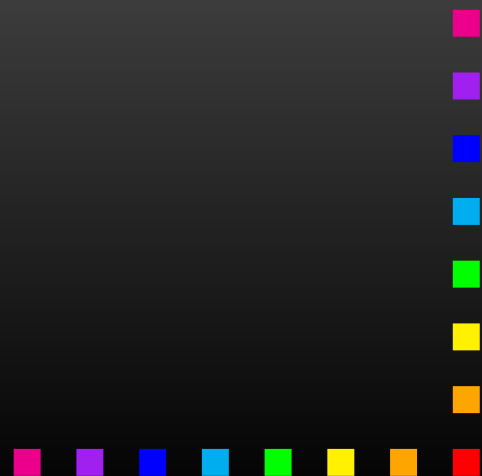
Elle n'est pas la première femme à obtenir un doctorat, même en mathématiques.

Elle n'est peut-être même pas la première femme à obtenir un poste dans une université.

Ce qu'elle n'est pas



Elle n'est pas la première femme à obtenir un prix de l'Académie des Sciences.



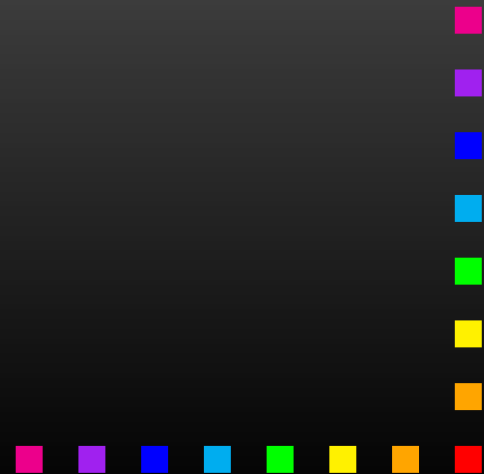
Ce qu'elle n'est pas



Sophie Germain (1776–1831)

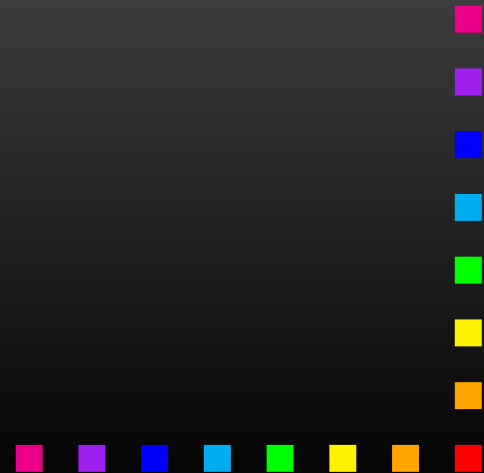
Elle n'est pas la première femme à obtenir un prix de l'Académie des Sciences.

Ce qu'elle est



Ce qu'elle est

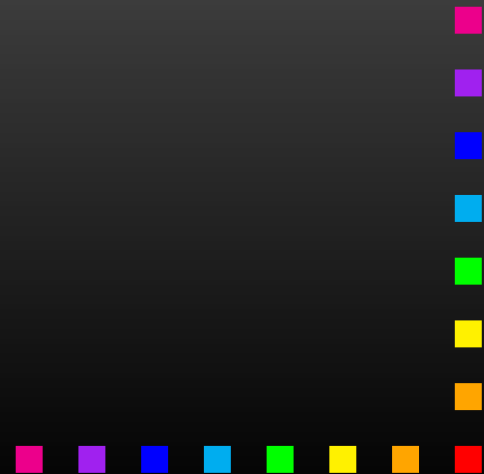
la première femme à mener une vie professionnelle
d'universitaire au sens où nous l'entendons aujourd'hui:



Ce qu'elle est

la première femme à mener une vie professionnelle
d'universitaire au sens où nous l'entendons aujourd'hui:

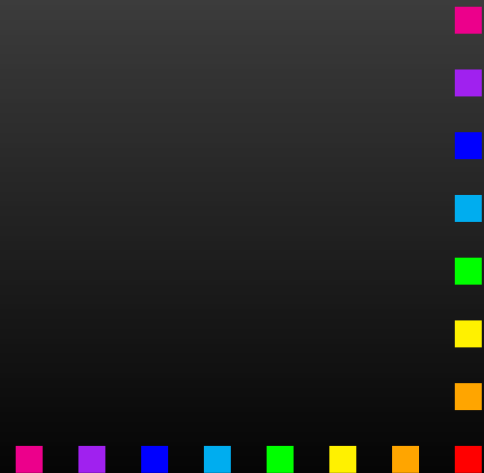
- elle démontre des théorèmes originaux qui servent à la munir du titre de docteur,



Ce qu'elle est

la première femme à mener une vie professionnelle d'universitaire au sens où nous l'entendons aujourd'hui:

- elle démontre des théorèmes originaux qui servent à la munir du titre de docteur,
- elle donne des cours,



Ce qu'elle est

la première femme à mener une vie professionnelle d'universitaire au sens où nous l'entendons aujourd'hui:

- elle démontre des théorèmes originaux qui servent à la munir du titre de docteur,
- elle donne des cours,
- elle s'occupe de politique et croit à la responsabilité des savants,



Ce qu'elle est

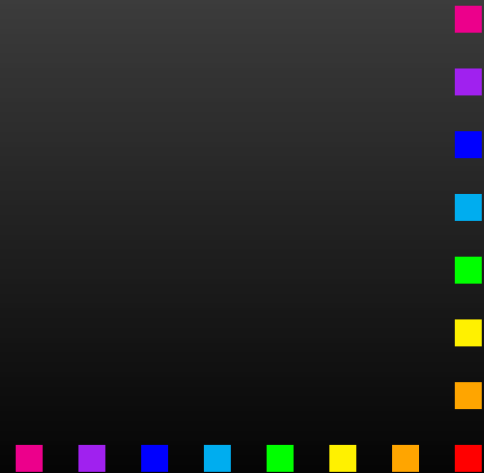
la première femme à mener une vie professionnelle d'universitaire au sens où nous l'entendons aujourd'hui:

- elle démontre des théorèmes originaux qui servent à la munir du titre de docteur,
- elle donne des cours,
- elle s'occupe de politique et croit à la responsabilité des savants,
- elle voyage pour rencontrer des collègues ou participer à des congrès,



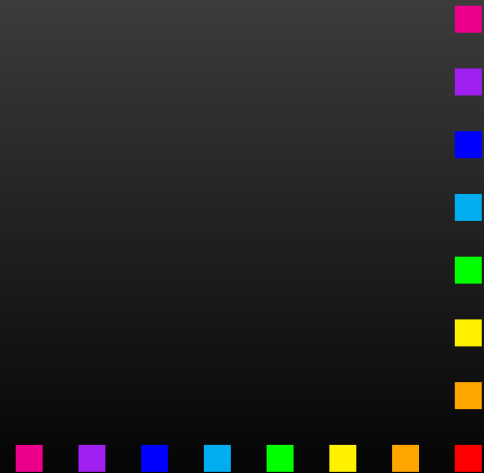
Ce qu'elle est

- elle participe (sans entrain) à des réunions de conseils,



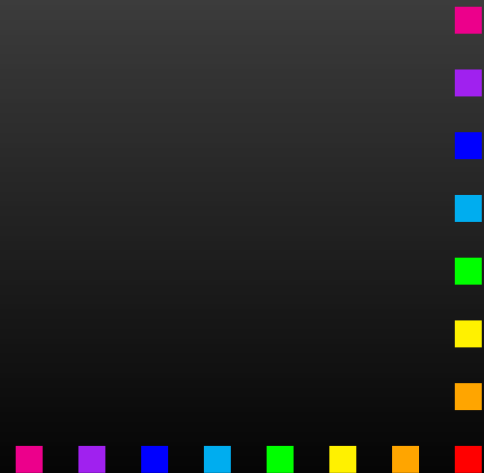
Ce qu'elle est

- elle participe (sans entrain) à des réunions de conseils,
- elle est (la première femme) membre du comité de rédaction d'un journal scientifique,



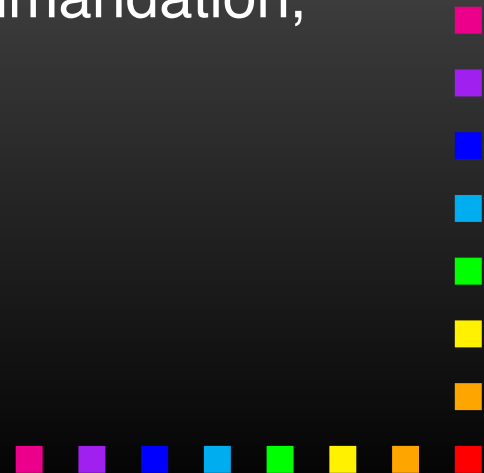
Ce qu'elle est

- elle participe (sans entrain) à des réunions de conseils,
- elle est (la première femme) membre du comité de rédaction d'un journal scientifique,
- elle a un enfant,



Ce qu'elle est

- elle participe (sans entrain) à des réunions de conseils,
- elle est (la première femme) membre du comité de rédaction d'un journal scientifique,
- elle a un enfant,
- elle écrit des rapports et des lettres de recommandation,



Ce qu'elle est

- elle participe (sans entrain) à des réunions de conseils,
- elle est (la première femme) membre du comité de rédaction d'un journal scientifique,
- elle a un enfant,
- elle écrit des rapports et des lettres de recommandation,
- elle est candidate à des promotions,

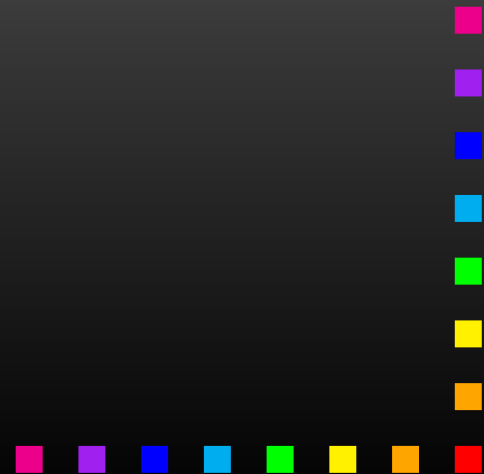


Ce qu'elle est

- elle participe (sans entrain) à des réunions de conseils,
- elle est (la première femme) membre du comité de rédaction d'un journal scientifique,
- elle a un enfant,
- elle écrit des rapports et des lettres de recommandation,
- elle est candidate à des promotions,
- elle défend la cause des femmes...

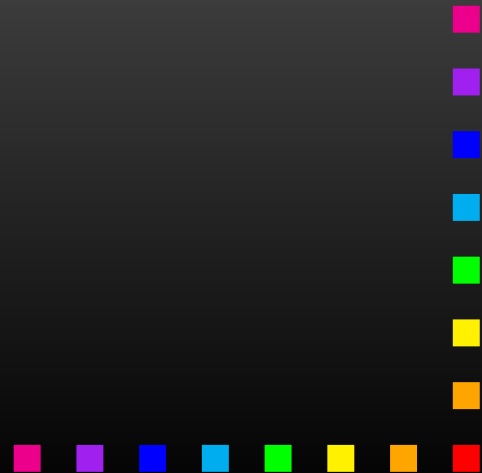


Ce qu'elle est : ce que nous sommes



Ce qu'elle est : ce que nous sommes

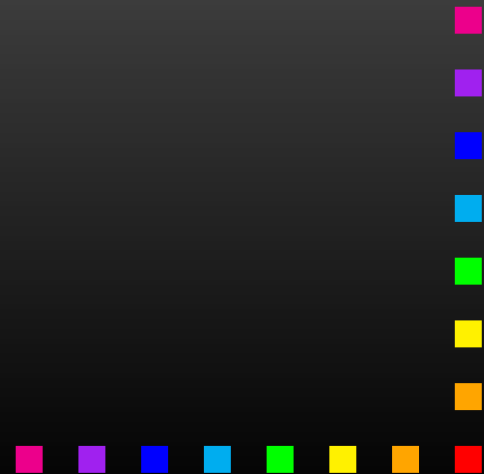
... comme nous le faisons au vingtième siècle, comme nous continuons à le faire au vingt-et-unième siècle.



Ce qu'elle est : ce que nous sommes

... comme nous le faisons au vingtième siècle, comme nous continuons à le faire au vingt-et-unième siècle.

C'est en ce sens qu'elle est proche de nous et que sa vie, son travail, et ce que l'on en dit nous touchent.



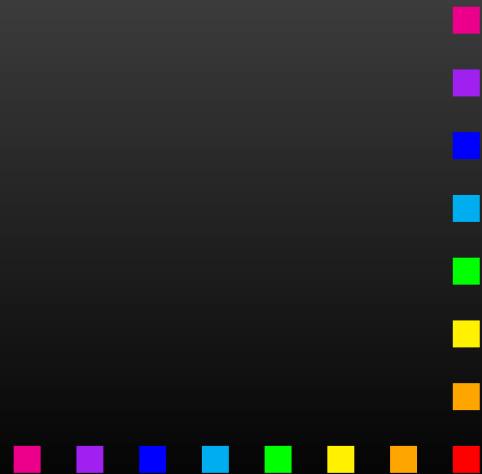
Ce qu'elle est : ce que nous sommes

... comme nous le faisons au vingtième siècle, comme nous continuons à le faire au vingt-et-unième siècle.

C'est en ce sens qu'elle est proche de nous et que sa vie, son travail, et ce que l'on en dit nous touchent.

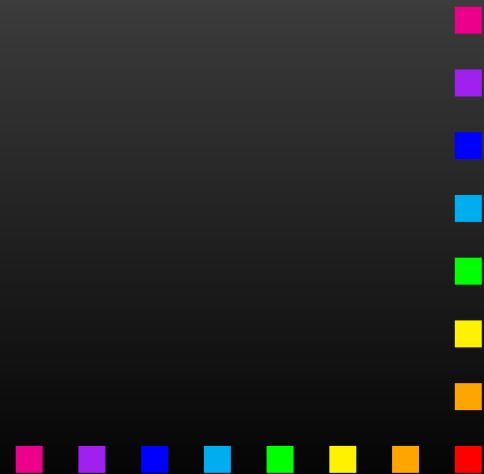
Surtout si l'on ajoute qu'elle a mené sa vie professionnelle dans des conditions très difficiles et dans une grande variété de situations personnelles (mariée, séparée de son mari, veuve, mère et chef de famille).

Une image de la science



Une image de la science

Pourquoi ne représente-t-on donc pas la science sous les traits d'une jeune femme avenante, délurée et décidée, poursuivant son chemin sans se soucier du qu'en dira-t-on, sachant s'imposer dans un monde d'hommes, aimant plaire, heureuse?



Une image de la science

Pourquoi ne représente-t-on donc pas la science sous les traits d'une jeune femme avenante, délurée et décidée, poursuivant son chemin sans se soucier du qu'en dira-t-on, sachant s'imposer dans un monde d'hommes, aimant plaire, heureuse?
demande **Françoise Balibar** dans un ouvrage récent consacré à... **Marie Curie**.

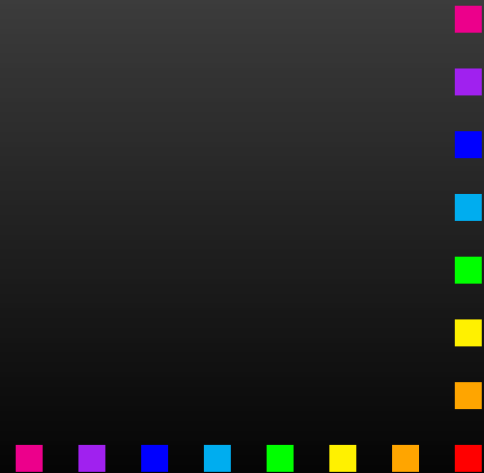
Une image de la science

Pourquoi ne représente-t-on donc pas la science sous les traits d'une jeune femme avenante, délurée et décidée, poursuivant son chemin sans se soucier du qu'en dira-t-on, sachant s'imposer dans un monde d'hommes, aimant plaire, heureuse?

demande **Françoise Balibar** dans un ouvrage récent consacré à... **Marie Curie**.

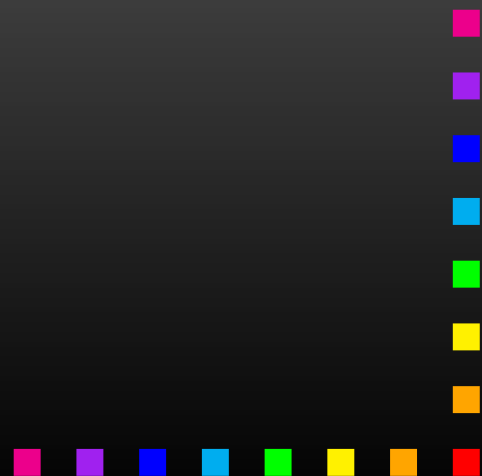
On croirait lire un portrait de **Sophie Kowalevski**, qui n'est pourtant pas mentionnée.

La réputation de Sophie



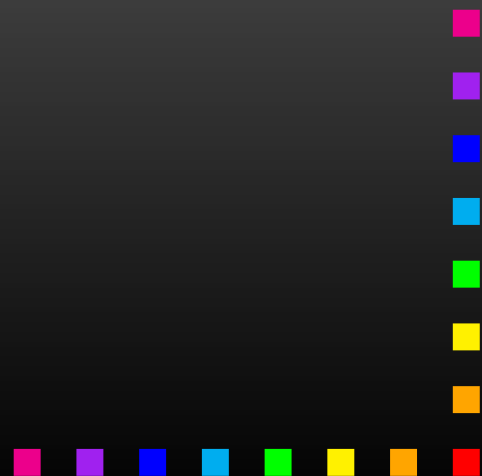
La réputation de Sophie

Sophie Kowalevski est aujourd'hui, au mieux, mal connue des scientifiques et même des mathématiciens.



La réputation de Sophie

Sophie Kowalevski est aujourd'hui, au mieux, mal connue des scientifiques et même des mathématiciens. Sa réputation n'est pas à la hauteur de ses accomplissements scientifiques.



La réputation de Sophie

Sophie Kowalevski est aujourd'hui, au mieux, mal connue des scientifiques et même des mathématiciens. Sa réputation n'est pas à la hauteur de ses accomplissements scientifiques.

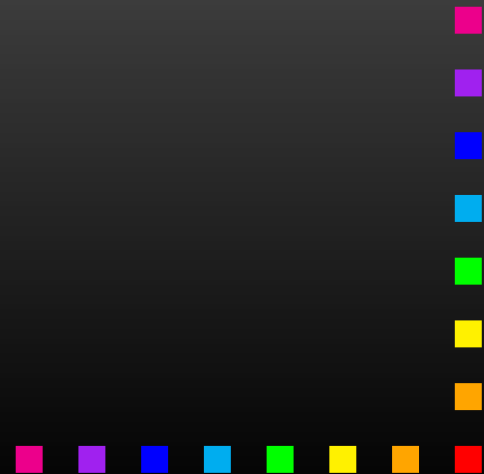
En son temps, elle était pourtant très célèbre et surtout très bien intégrée dans la communauté mathématique européenne,

La réputation de Sophie

Sophie Kowalevski est aujourd'hui, au mieux, mal connue des scientifiques et même des mathématiciens. Sa réputation n'est pas à la hauteur de ses accomplissements scientifiques.

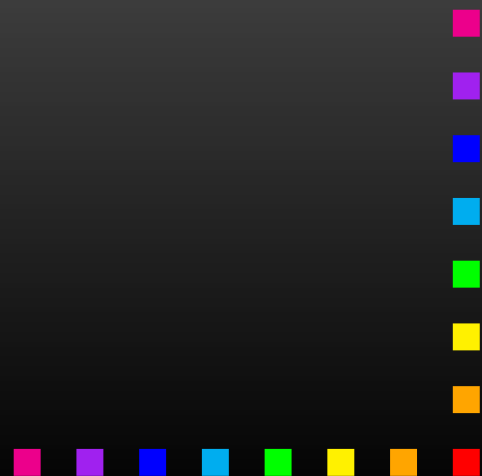
En son temps, elle était pourtant très célèbre et surtout très bien intégrée dans la communauté mathématique européenne, témoin le prix Bordin de l'Académie des Sciences (taillé sur mesure pour elle par Hermite) pour son travail sur le solide.

Ses travaux mathématiques



Ses travaux mathématiques

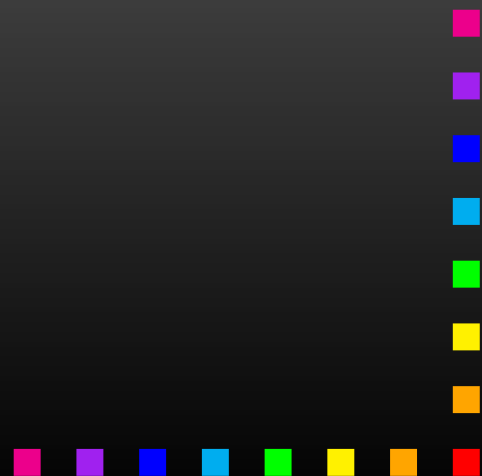
Sa thèse, en 1874 à Göttingen, constituée de



Ses travaux mathématiques

Sa thèse, en 1874 à Göttingen, constituée de

- *Zur Theorie der partialen Differentialgleichungen*, le théorème de Cauchy-Kowalevski,



Ses travaux mathématiques

Sa thèse, en 1874 à Göttingen, constituée de

- *Zur Theorie der partialen Differentialgleichungen*, le théorème de Cauchy-Kowalevski,
- *Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe*,

Ses travaux mathématiques

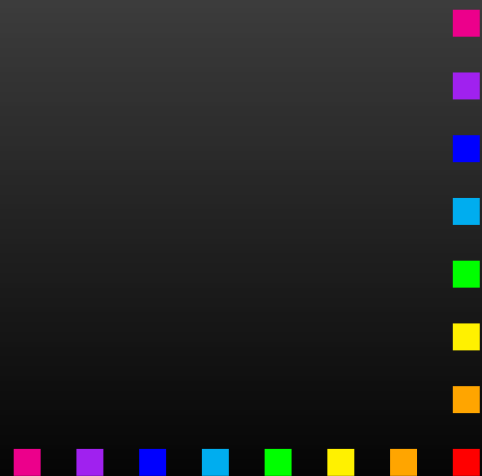
Sa thèse, en 1874 à Göttingen, constituée de

- *Zur Theorie der partialen Differentialgleichungen*, le théorème de Cauchy-Kowalevski,
- *Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe*,
- *Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3tem Ranges auf elliptische Integrale*

Ses travaux mathématiques

puis le travail du Prix Bordin, en 1888–89,

- *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe,*



Ses travaux mathématiques

puis le travail du Prix Bordin, en 1888–89,

- *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe,*
- *Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.*

Ses deux idées

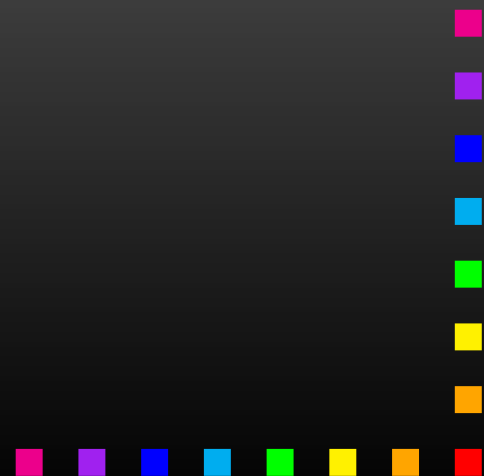
C'était une "mathématicienne à deux idées". Vous savez, beaucoup de mathématiciens, et même de très connus, ont une bonne idée — ce qui est mieux que de ne pas en avoir du tout — après quoi ils l'exploitent toute leur vie. Voyez Mittag-Leffler. Au contraire, Kovalevskaya a eu l'idée qui l'a conduite (indépendamment de Cauchy) à ce que l'on appelle le théorème de Cauchy-Kovalevskaya, puis, dix ans plus tard, l'idée menant à la toupie de Kovalevskaya,

Ses deux idées

*C'était une "mathématicienne à deux idées". Vous savez, beaucoup de mathématiciens, et même de très connus, ont une bonne idée — ce qui est mieux que de ne pas en avoir du tout — après quoi ils l'exploitent toute leur vie. Voyez Mittag-Leffler. Au contraire, Kovalevskaya a eu l'idée qui l'a conduite (indépendamment de Cauchy) à ce que l'on appelle le théorème de Cauchy-Kovalevskaya, puis, dix ans plus tard, l'idée menant à la toupie de Kovalevskaya, a dit **André Weil** à **Ann Hibner Koblitz**.*

Cauchy-Kowalevski

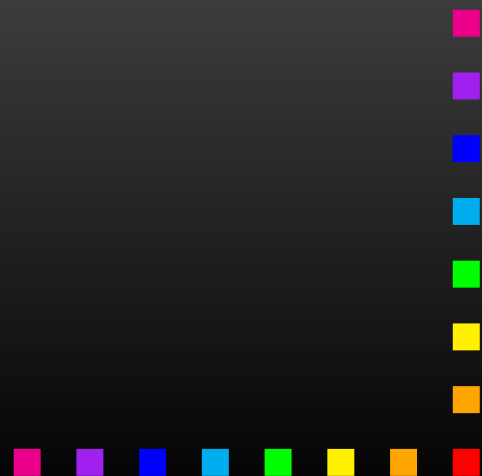
Le théorème de Cauchy-Kowalevski est le principal résultat d'existence et d'unicité de solutions d'une équation aux dérivées partielles,



Cauchy-Kowalevski

Le théorème de Cauchy-Kowalevski est le principal résultat d'existence et d'unicité de solutions d'une équation aux dérivées partielles,

de la forme : $\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \Phi(t, x, u, \dots)$, où Φ est analytique.



Cauchy-Kowalevski

Le théorème de Cauchy-Kowalevski est le principal résultat d'existence et d'unicité de solutions d'une équation aux dérivées partielles,

de la forme : $\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \Phi(t, x, u, \dots)$, où Φ est analytique.

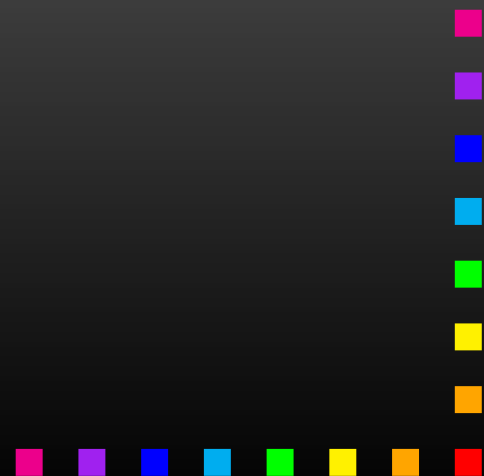
On donne u et ses dérivées par rapport au temps t à l'instant $t = 0$:

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(0, x) = g_k(x) \text{ pour } 0 \leq k \leq m - 1$$

(les g_k sont analytiques).

Cauchy-Kowalevski

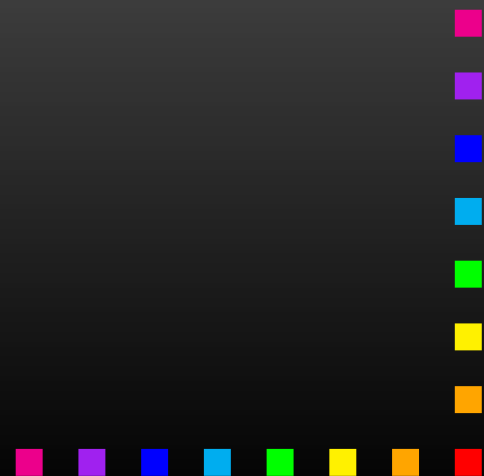
Sophie commence par trouver un contre-exemple, qui étonne beaucoup **Weierstraß** !



Cauchy-Kowalevski

Sophie commence par trouver un contre-exemple, qui étonne beaucoup **Weierstraß** !

L'équation est celle de la chaleur : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.



Cauchy-Kowalevski

Sophie commence par trouver un contre-exemple, qui étonne beaucoup **Weierstraß** !

L'équation est celle de la chaleur : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Sophie a vérifié que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^{2k} u_0}{dx^{2k}} \frac{(t-a)^k}{k!}$$

est une solution formelle, avec, pour $t = 0$, $u(0, x) = u_0(x)$.

Cauchy-Kowalevski

Mais, elle a aussi remarqué que la donnée initiale

$$u_0(x) = \frac{1}{1-x},$$

une fonction analytique pour $|x| < 1$, donne

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{k!} \frac{t^k}{(1-x)^{2k+1}},$$

Cauchy-Kowalevski

Mais, elle a aussi remarqué que la donnée initiale

$$u_0(x) = \frac{1}{1-x},$$

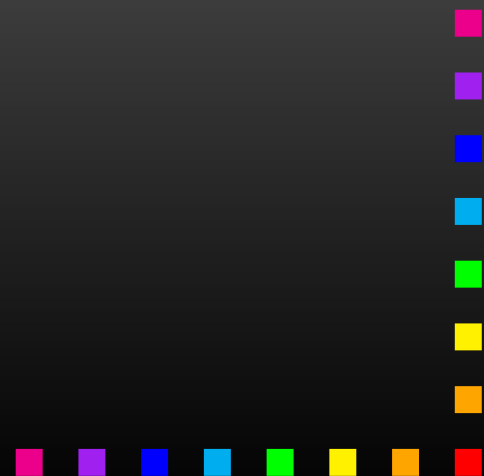
une fonction analytique pour $|x| < 1$, donne

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{k!} \frac{t^k}{(1-x)^{2k+1}},$$

une série qui ne converge que pour $t = 0$.

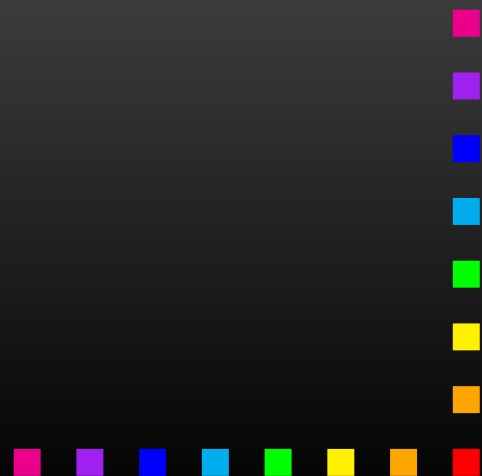
Cauchy-Kowalevski

Ce contre-exemple lui a permis de trouver les hypothèses sous lequel l'énoncé désiré pouvait être vrai,



Cauchy-Kowalevski

Ce contre-exemple lui a permis de trouver les hypothèses sous lequel l'énoncé désiré pouvait être vrai, et de le démontrer.



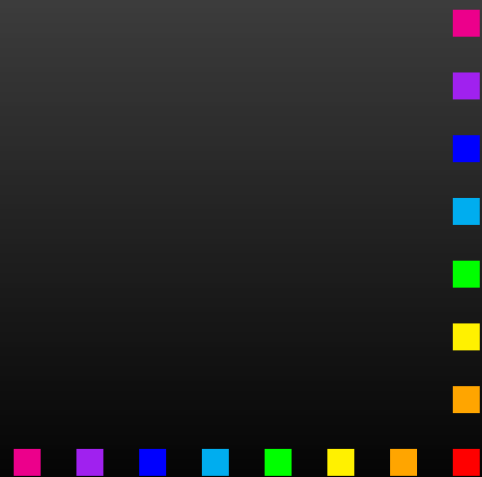
Cauchy-Kowalevski

Ceci a été découvert, à ma grande surprise par mon élève, complètement indépendamment, d'abord pour des équations différentielles plus compliquées que celle citée — au point qu'elle a même douté qu'il fût possible d'obtenir un résultat général ; j'admire beaucoup le moyen apparemment simple qu'elle a trouvé pour surmonter cet obstacle et que je considère comme la preuve de son flair mathématique,

Cauchy-Kowalevski

Ceci a été découvert, à ma grande surprise par mon élève, complètement indépendamment, d'abord pour des équations différentielles plus compliquées que celle citée — au point qu'elle a même douté qu'il fût possible d'obtenir un résultat général ; j'admire beaucoup le moyen apparemment simple qu'elle a trouvé pour surmonter cet obstacle et que je considère comme la preuve de son flair mathématique,
écrit Weierstraß à Fuchs.

Le solide



Le solide

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r' - qr', \\ (1) \quad B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= pr' - r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= qr - pr'. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

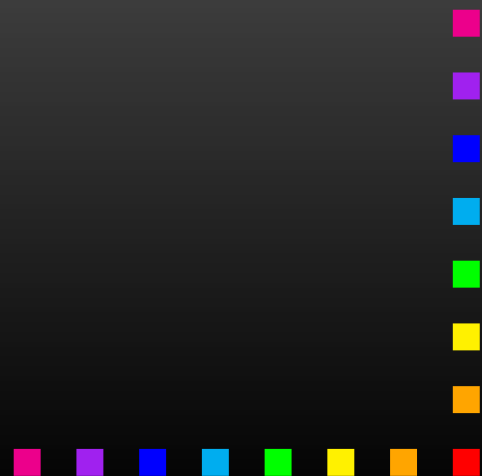
M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

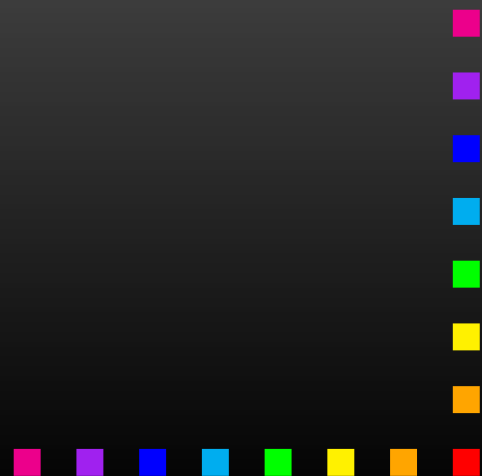
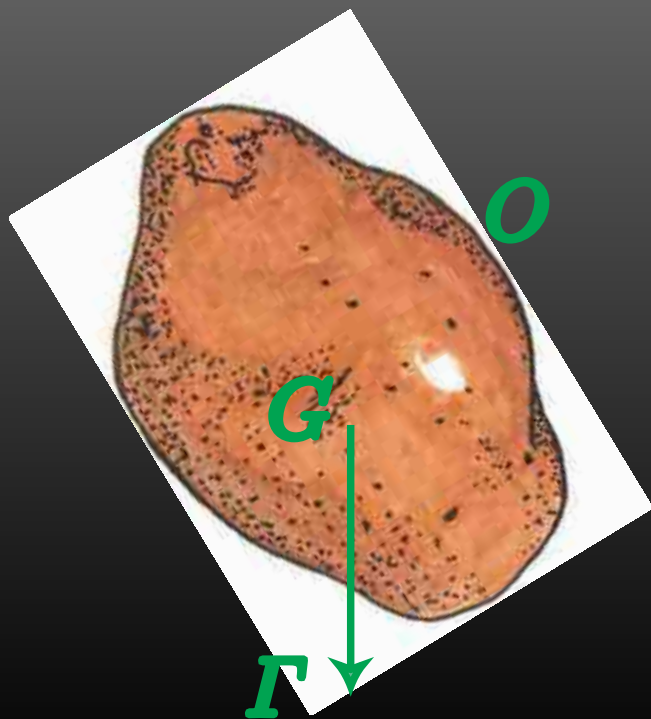
Le solide

Il est question du mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant.



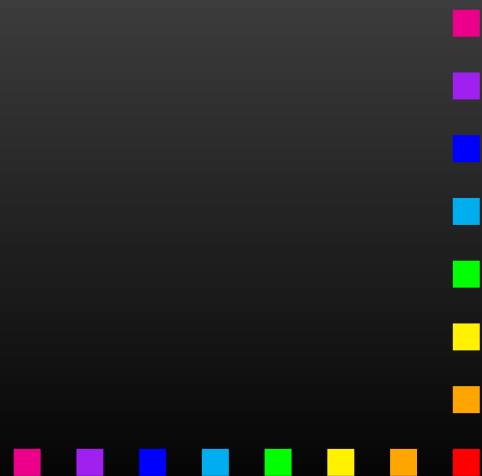
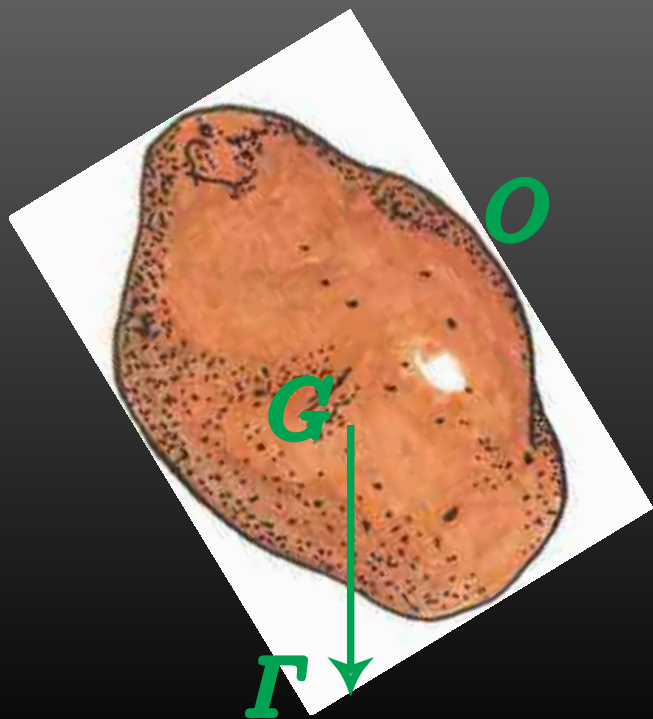
Le solide

Il est question du mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant.



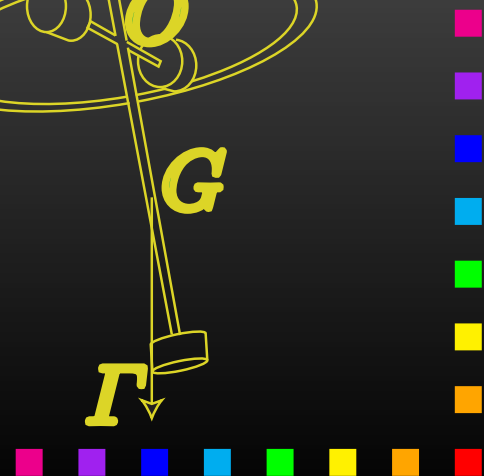
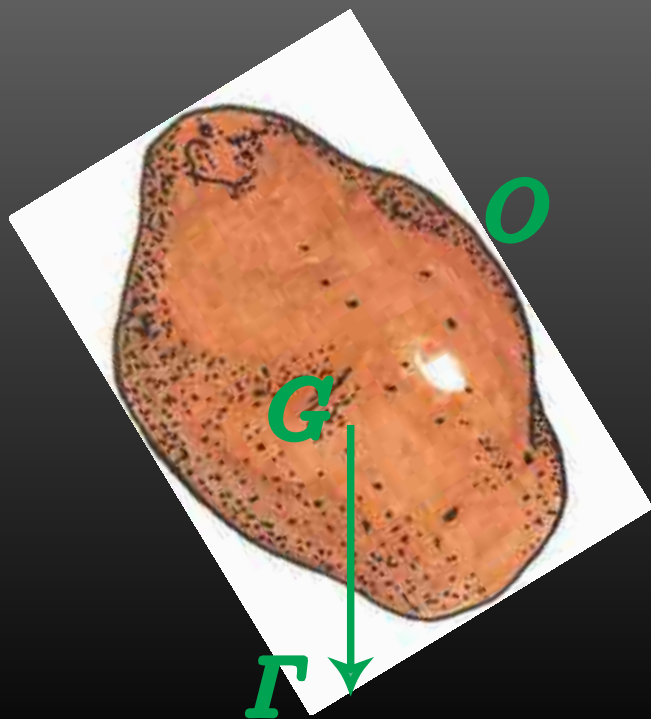
Le solide

Il est question du mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant.



Le solide

Il est question du mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant.



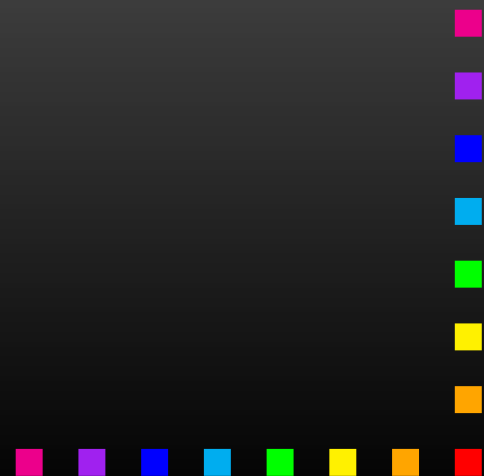
Le solide

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= vr' - \eta r', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= \eta r'' - vr', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r' - pr'.
 \end{aligned}$$

Le solide

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= vr' - \eta r', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= \eta r'' - vr', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r' - pr'.
 \end{aligned}$$

Un système différentiel,



Le solide

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= vr' - \eta r', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= \eta r'' - vr', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= \eta r' - pr'.
 \end{aligned}$$

Un système différentiel, avec six quantités inconnues, p , q , r , etc.,

Le solide

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dx}{dt} &= vr' - \eta r'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dy}{dt} &= \eta r'' - vr', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dz}{dt} &= \eta r' - pr''.
 \end{aligned}$$

Un système différentiel, avec six quantités inconnues, p , q , r , etc., qui décrivent la **position et la vitesse** du solide en fonction du temps t .

Le solide

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dx}{dt} &= vr' - \eta r'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dy}{dt} &= \eta r'' - vr', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dz}{dt} &= \eta r' - pr'.
 \end{aligned}$$

Un système différentiel, avec six quantités inconnues, p , q , etc., qui décrivent la **position et la vitesse** du solide en fonction du temps t .

Il y a aussi des constantes A , x_0 , etc.,

Le solide

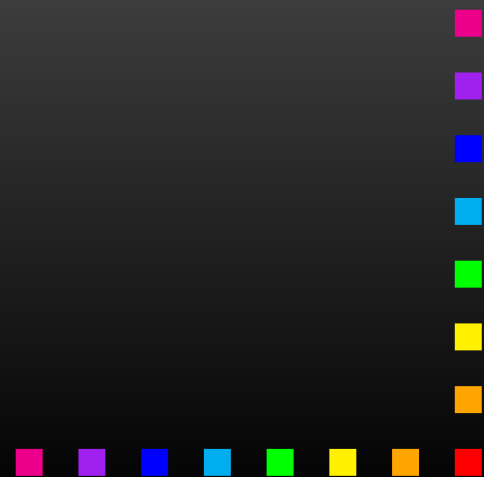
$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dx}{dt} &= vr' - \eta r'', \\
 B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dy}{dt} &= \eta r'' - vr', \\
 C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dz}{dt} &= \eta r' - pr''.
 \end{aligned}$$

Un système différentiel, avec six quantités inconnues, p , q , etc., qui décrivent la **position et la vitesse** du solide en fonction du temps t .

Il y a aussi des constantes A , x_0 , etc., qui décrivent la forme du solide et la position du centre de gravité par rapport au point fixe.

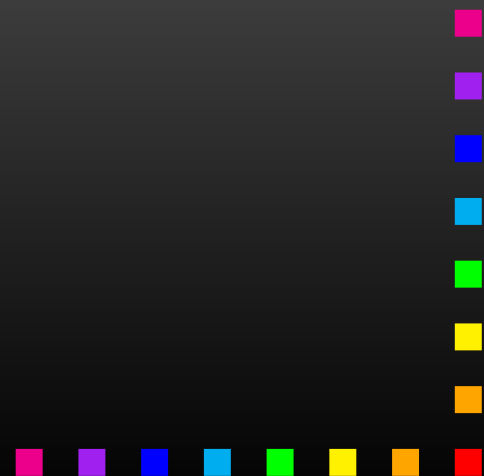
Le solide en 1888

Un problème classique et difficile,



Le solide en 1888

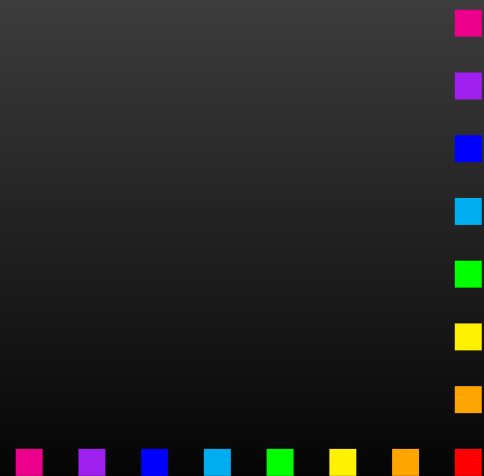
Un problème classique et difficile, étudié depuis le dix-huitième siècle, notamment par Euler (1707-1783).



Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié depuis le dix-huitième siècle, notamment par **Euler** (1707-1783).

Pas de vrai progrès depuis **Lagrange** (1736-1813).

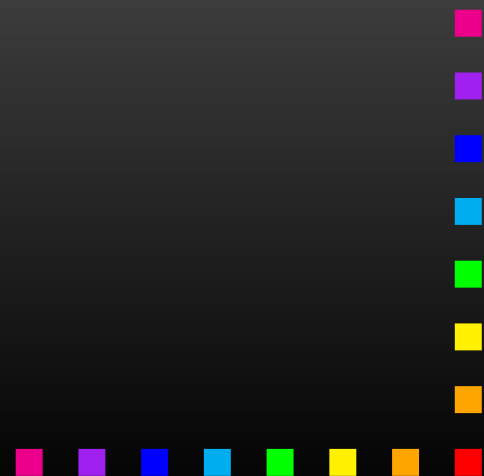


Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié depuis le dix-huitième siècle, notamment par **Euler** (1707-1783).

Pas de vrai progrès depuis **Lagrange** (1736-1813).

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution,

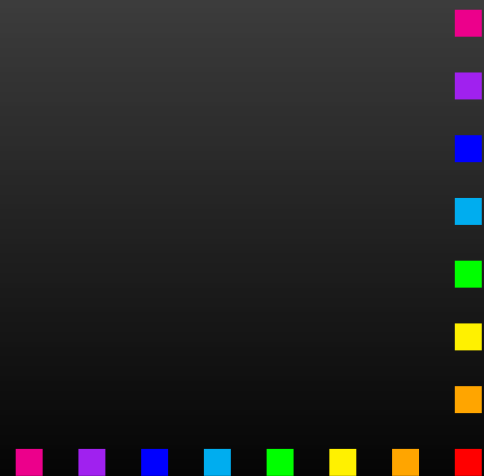


Le solide en 1888

Un problème classique et difficile, étudié depuis le dix-huitième siècle, notamment par **Euler** (1707-1783).

Pas de vrai progrès depuis **Lagrange** (1736-1813).

Un prix proposé par l'Académie prussienne des sciences en 1852 n'avait inspiré aucune contribution, en Allemagne, on appelait ce problème *die mathematische Nixe*.



Le solide

178

Sophie Kowalewski.

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité du corps considéré dans un système de coordonnées, dont l'origine est au point fixe et dont la direction coïncide avec celle des axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie.

Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

- 1) Le cas de POISSON (ou d'EULER) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,
- 2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B, x_0 = y_0 = 0$.

Dans ces deux cas l'intégration s'opère à l'aide des fonctions $\theta(u)$ dont l'argument est une fonction entière linéaire du temps.

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Si tel était le cas il faudrait pouvoir intégrer ces équations différentielles à l'aide de séries de la forme

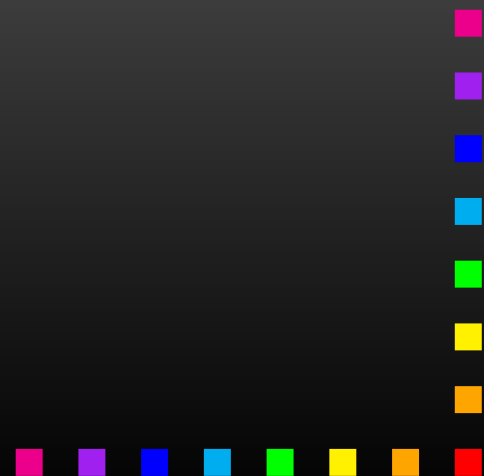
$$(2) \quad \begin{aligned} p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots), \\ q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots), \\ r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \dots), \\ \gamma &= t^{-m_1}(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots), \\ \gamma' &= t^{-m_2}(\gamma'_0 + \gamma'_1 t + \gamma'_2 t^2 + \dots), \\ \gamma'' &= t^{-m_3}(\gamma''_0 + \gamma''_1 t + \gamma''_2 t^2 + \dots), \end{aligned}$$

où $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$ désignent des nombres entiers positifs, et ces

Le solide

Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

- 1) Le cas de POISSON (ou d'EULER) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,
- 2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.



Le solide

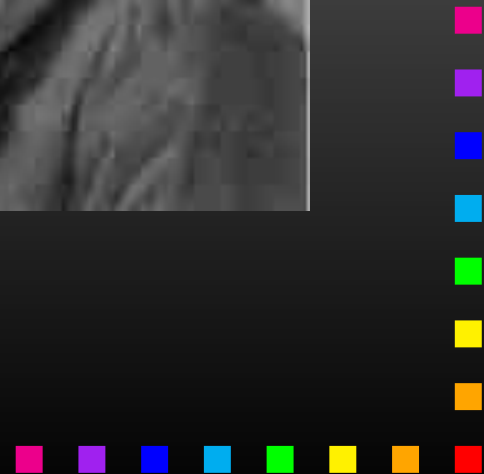
Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

- 1) Le cas de POISSON (ou d'EULER) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,
- 2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

Dans ces deux cas l'intégration s'opère à l'aide des fonctions $\vartheta(u)$ dont l'argument est une fonction entière linéaire du temps.

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Le solide



Le solide



Le solide

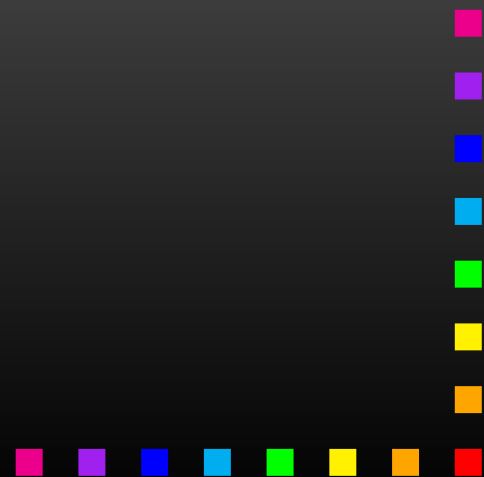


La toupie de Lagrange



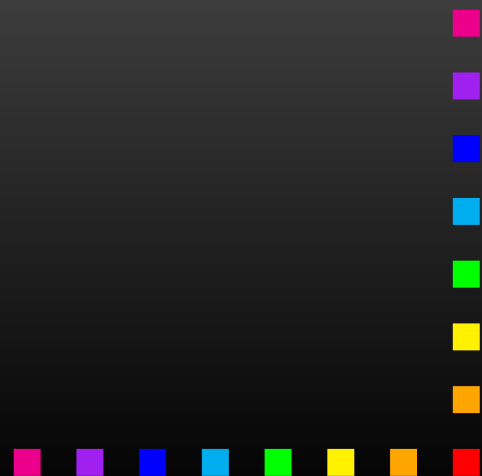
La toupie de Lagrange

- On utilise les lois de conservation de la physique.



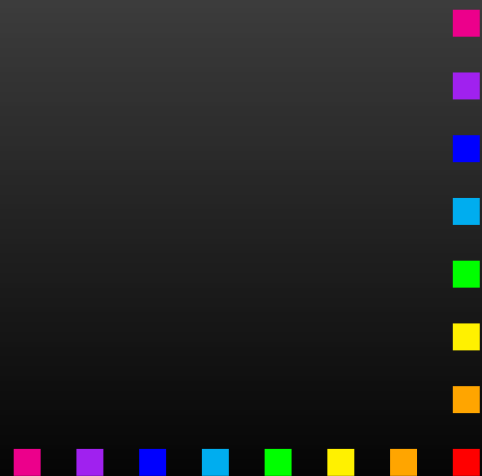
La toupie de Lagrange

- On utilise les lois de conservation de la physique.
- Par exemple l'énergie est conservée,



La toupie de Lagrange

- On utilise les lois de conservation de la physique.
- Par exemple l'énergie est conservée,
- ainsi que le moment de la toupie par rapport à son axe de révolution.



La toupie de Lagrange

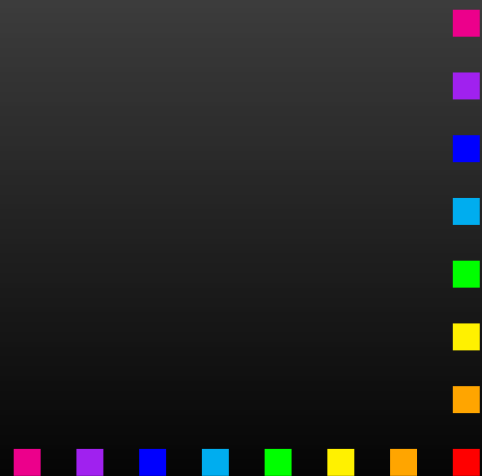
- On utilise les lois de conservation de la physique.
- Par exemple l'énergie est conservée,
- ainsi que le moment de la toupie par rapport à son axe de révolution.

Élimination de toutes les inconnues sauf γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie.

La toupie de Lagrange

$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

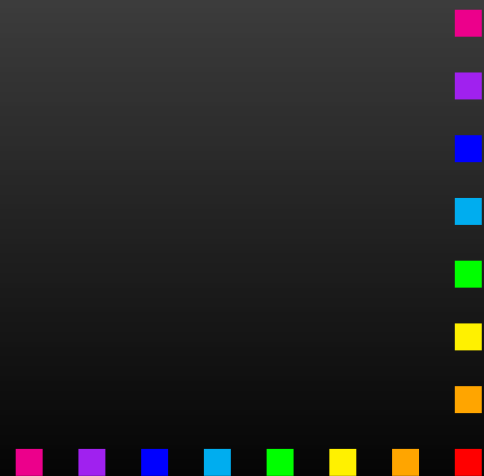


La toupie de Lagrange

$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré 3.



La toupie de Lagrange

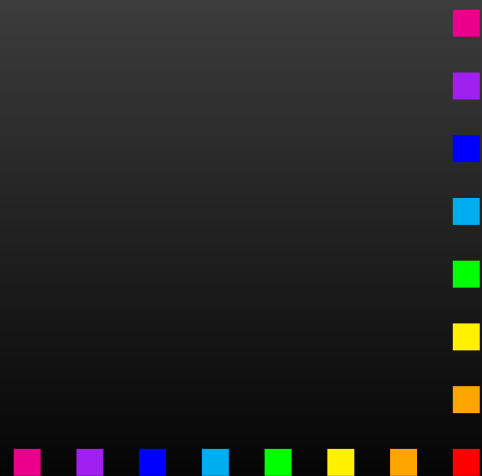
$x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré 3. Les solutions sont des fonctions elliptiques, exprimables à l'aide de la fonction $\wp$ de Weierstraß.

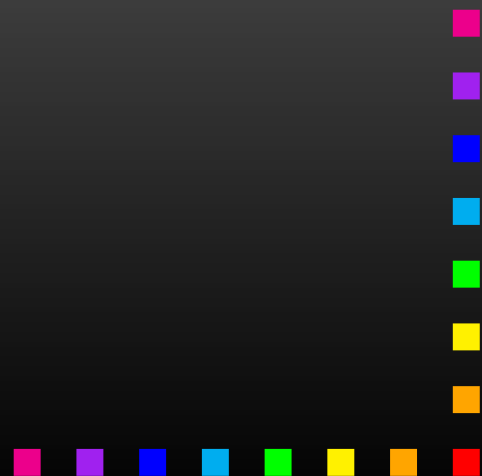
La toupie de Lagrange

Les solutions ont donc en effet des pôles, et pas pire.



La toupie de Lagrange

Les solutions ont donc en effet des pôles, et pas pire.
C'est une situation exceptionnelle pour les solutions d'un système différentiel non linéaire.

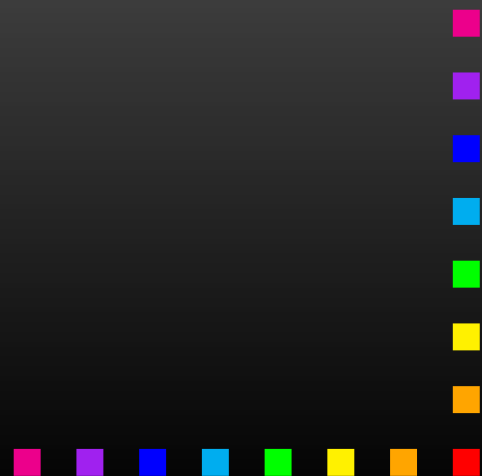


La toupie de Lagrange

Les solutions ont donc en effet des pôles, et pas pire.

C'est une situation exceptionnelle pour les solutions d'un système différentiel non linéaire.

D'autre part, on ne voit ces pôles que si l'on considère le temps comme une variable **complexe**...



La toupie de Lagrange

Les solutions ont donc en effet des pôles, et pas pire.
C'est une situation exceptionnelle pour les solutions d'un système différentiel non linéaire.

D'autre part, on ne voit ces pôles que si l'on considère le temps comme une variable **complexe**...

La mathématique est la science qui demande le plus d'imagination,



La toupie de Lagrange

Les solutions ont donc en effet des pôles, et pas pire.
C'est une situation exceptionnelle pour les solutions d'un système différentiel non linéaire.

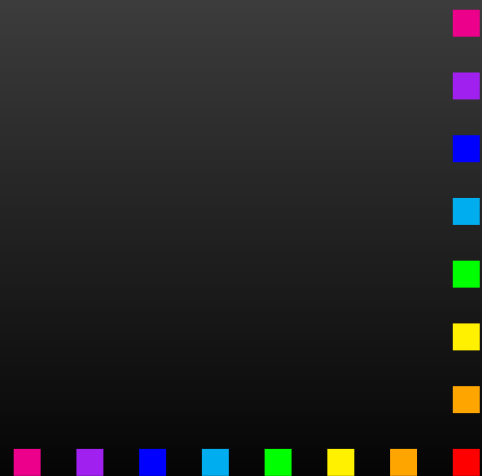
D'autre part, on ne voit ces pôles que si l'on considère le temps comme une variable **complexe**...

La mathématique est la science qui demande le plus d'imagination,

disait Sophie quand on s'étonnait qu'elle soit à la fois mathématicienne et écrivaine.

La méthode de Sophie

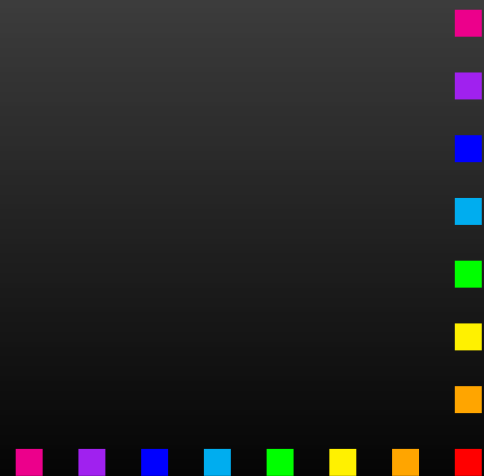
Pour quelles formes du solide, quelles positions du point fixe, les solutions ont-elles cette propriété?



La méthode de Sophie

Pour quelles formes du solide, quelles positions du point fixe, les solutions ont-elles cette propriété?

Elle démontre que ceci se produit dans trois cas seulement:

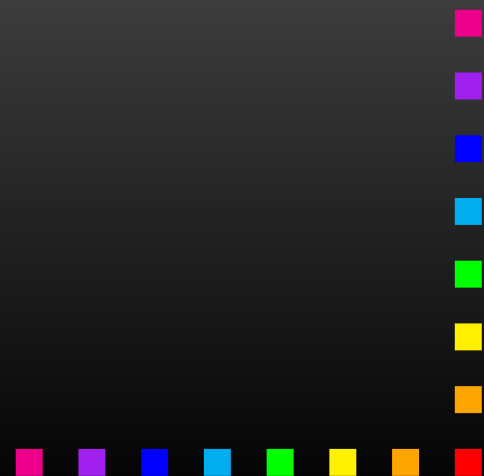


La méthode de Sophie

Pour quelles formes du solide, quelles positions du point fixe, les solutions ont-elles cette propriété?

Elle démontre que ceci se produit dans trois cas seulement:

- Le cas d'**Euler** (le centre de gravité est fixe),

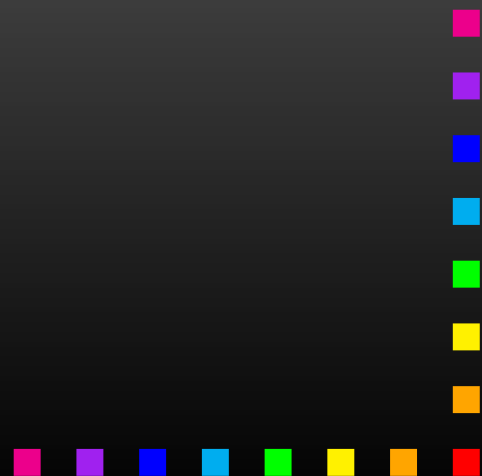


La méthode de Sophie

Pour quelles formes du solide, quelles positions du point fixe, les solutions ont-elles cette propriété?

Elle démontre que ceci se produit dans trois cas seulement:

- Le cas d'**Euler** (le centre de gravité est fixe),
- celui de **Lagrange** (axe de révolution),



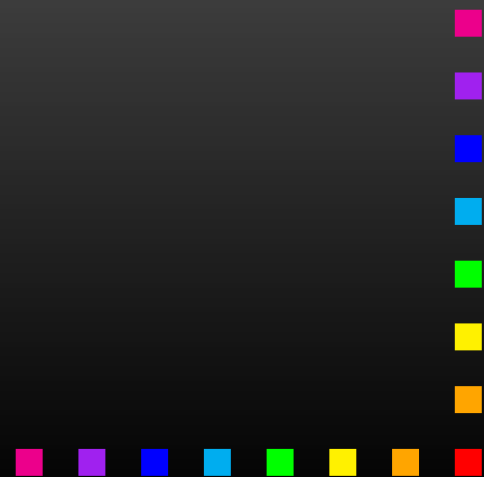
La méthode de Sophie

Pour quelles formes du solide, quelles positions du point fixe, les solutions ont-elles cette propriété?

Elle démontre que ceci se produit dans trois cas seulement:

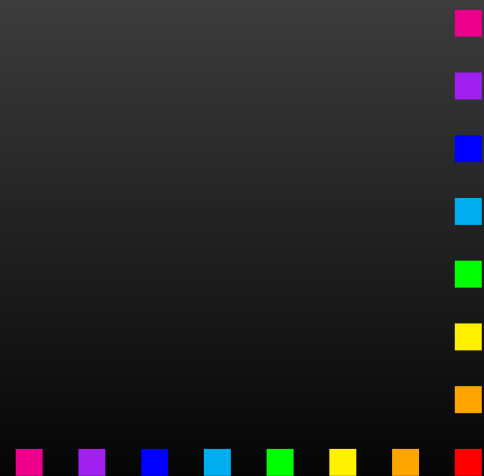
- Le cas d'**Euler** (le centre de gravité est fixe),
- celui de **Lagrange** (axe de révolution),
- et un nouveau cas, le **cas de Sophie Kowalevski**, celui où $A = B = 2C$, $z_0 = 0$.

Le cas de Kowalevski



Le cas de Kowalevski

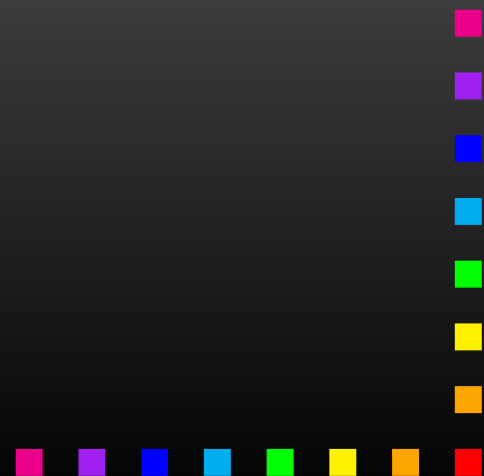
Et elle résout le système dans ce cas.



Le cas de Kowalevski

Et elle résout le système dans ce cas.

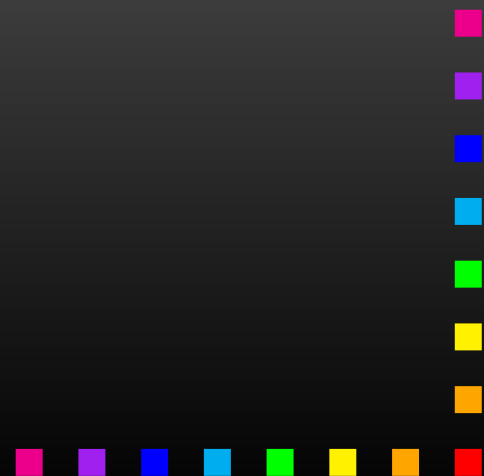
L'article comporte encore une cinquantaine de pages



Le cas de Kowalevski

Et elle résout le système dans ce cas.

L'article comporte encore une cinquantaine de pages dans lesquelles elle résout effectivement le système, à l'aide, cette fois, de fonctions ϑ de deux variables.

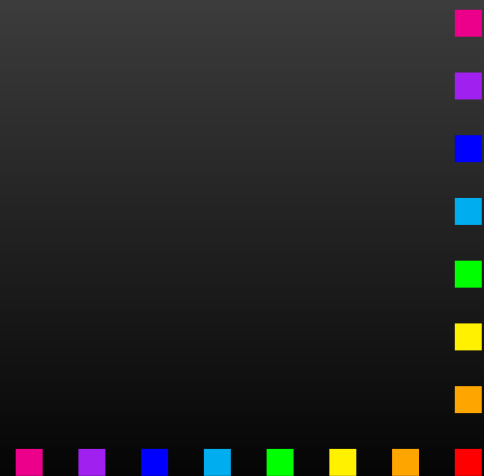


Le cas de Kowalevski

Et elle résout le système dans ce cas.

L'article comporte encore une cinquantaine de pages dans lesquelles elle résout effectivement le système, à l'aide, cette fois, de fonctions $\wp$ de deux variables.

Il y a en effet une courbe hyperelliptique de genre 2 dans cette affaire.



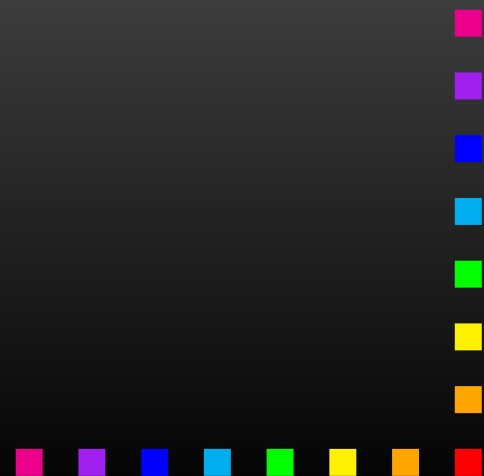
Le cas de Kowalevski

Et elle résout le système dans ce cas.

L'article comporte encore une cinquantaine de pages dans lesquelles elle résout effectivement le système, à l'aide, cette fois, de fonctions $\wp$ de deux variables.

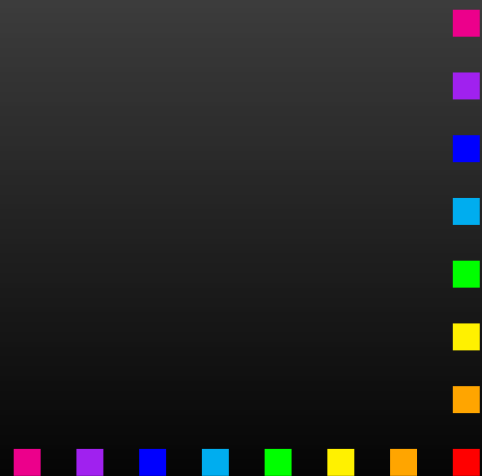
Il y a en effet une courbe hyperelliptique de genre 2 dans cette affaire.

Mais pourquoi?



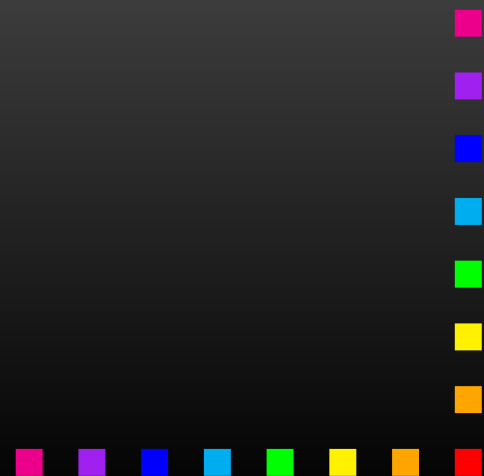
Le cas de Kowalevski

Dans le cas de Lagrange, les solutions elliptiques venaient d'une courbe elliptique $y^2 = P(x)$



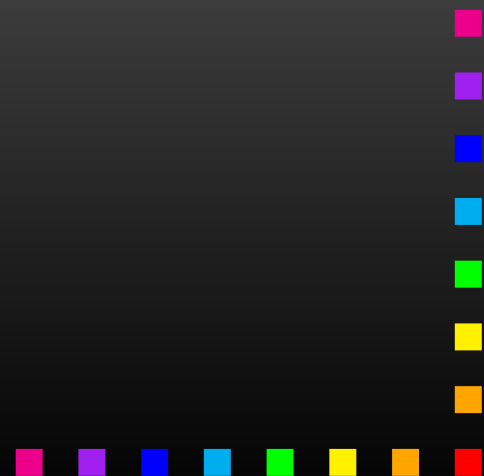
Le cas de Kowalevski

Dans le cas de Lagrange, les solutions elliptiques venaient d'une courbe elliptique $y^2 = P(x)$ obtenue par élimination des inconnues



Le cas de Kowalevski

Dans le cas de Lagrange, les solutions elliptiques venaient d'une courbe elliptique $y^2 = P(x)$ obtenue par élimination des inconnues en utilisant la conservation de l'énergie et celle du moment de la toupie par rapport à son axe.



Le cas de Kowalevski

Dans le cas de Lagrange, les solutions elliptiques venaient d'une courbe elliptique $y^2 = P(x)$

obtenue par élimination des inconnues

en utilisant la conservation de l'énergie et celle du moment de la toupie par rapport à son axe.

Dans le cas de Sophie Kowalevski, il se trouve qu'il y a en effet une quantité conservée en plus de l'énergie,

Le cas de Kowalevski

Dans le cas de Lagrange, les solutions elliptiques venaient d'une courbe elliptique $y^2 = P(x)$ obtenue par élimination des inconnues en utilisant la conservation de l'énergie et celle du moment de la toupie par rapport à son axe.

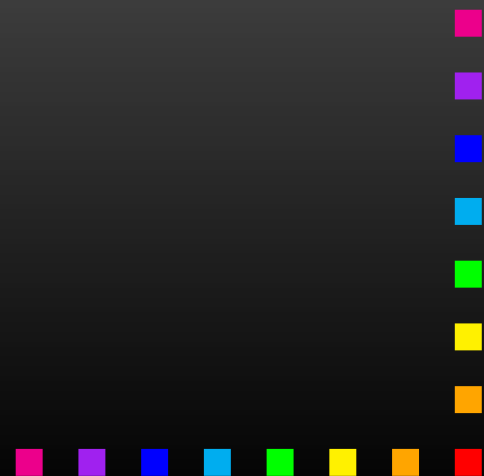
Dans le cas de Sophie Kowalevski, il se trouve qu'il y a en effet une quantité conservée en plus de l'énergie, la fonction

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma + i\gamma')|^2,$$



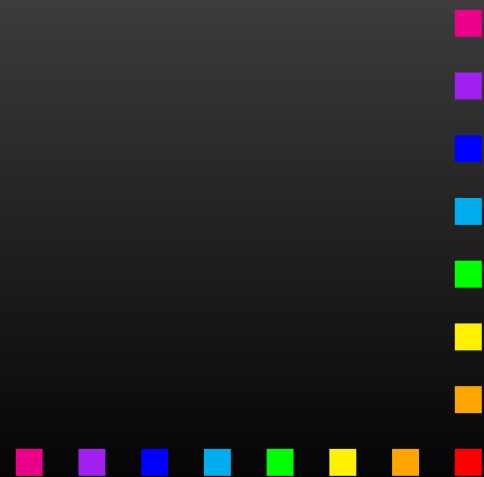
Le cas de Kowalevski

qui a lui a permis d'éliminer des inconnues,



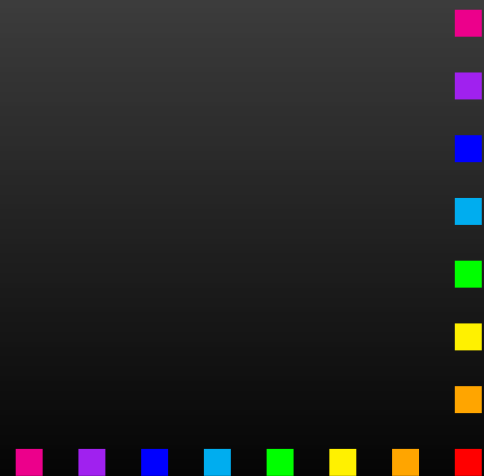
Le cas de Kowalevski

qui a lui a permis d'éliminer des inconnues,
de mettre en évidence un polynôme R de degré 5,



Le cas de Kowalevski

qui a lui a permis d'éliminer des inconnues,
de mettre en évidence un polynôme R de degré 5,
et enfin de ramener le système différentiel à la forme

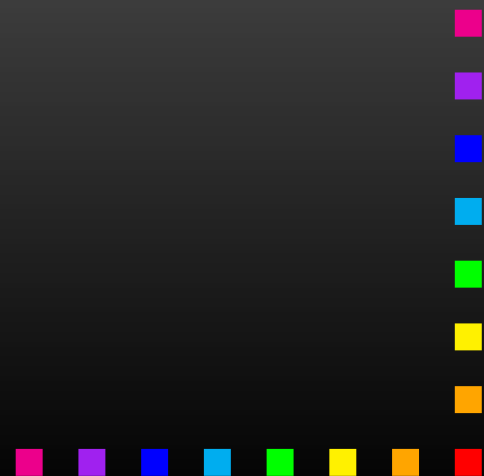


Le cas de Kowalevski

qui a lui a permis d'éliminer des inconnues,
de mettre en évidence un polynôme R de degré 5,
et enfin de ramener le système différentiel à la forme

$$0 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

$$dt = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}.$$

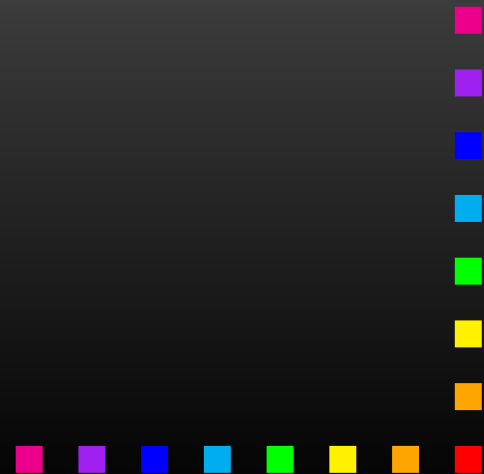


Le cas de Kowalevski

Rapport de la Commission du prix Bordin:

Les propriétés des fonctions ϑ à deux variables indépendantes permettent de donner la solution complète sous la forme la plus précise et la plus élégante ; et l'on a ainsi un nouvel et mémorable exemple d'un problème de Mécanique dans lequel interviennent ces fonctions transcendentes, dont les applications avaient été bornées jusqu'ici à l'analyse pure ou à la Géométrie.

Et aujourd'hui?



Et aujourd'hui?

Russian Math. Surveys 31:1 (1976), 59–146
From Uspekhi Mat. Nauk 31:1 (1976), 55–136

NON-LINEAR EQUATIONS OF KORTEWEG–DE VRIES TYPE, FINITE-ZONE LINEAR OPERATORS, AND ABELIAN VARIETIES

B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, and S. P. Novikov

The basic content of this survey is an exposition of a recently developed method of constructing a broad class of periodic and almost-periodic solutions of non-linear equations of mathematical physics to which (in the rapidly decreasing case) the method of the inverse scattering problem is applicable. These solutions are such that the spectrum of their associated linear differential operators has a finite-zone structure. The set of linear operators with a given finite-zone spectrum is the Jacobian variety of a Riemann surface, which is determined by the structure of the spectrum. We give an explicit solution of the corresponding non-linear equations in the language of the theory of Abelian functions.



Et aujourd'hui?

Commun. Math. Phys. 83, 83–106 (1982)

Communications in
Mathematical
Physics

© Springer-Verlag 1982

Kowalewski's Asymptotic Method, Kac-moody Lie Algebras and Regularization

M. Adler^{★,1} and P. van Moerbeke^{★★,2}

¹ Brandeis University, Waltham, MA 02254, USA

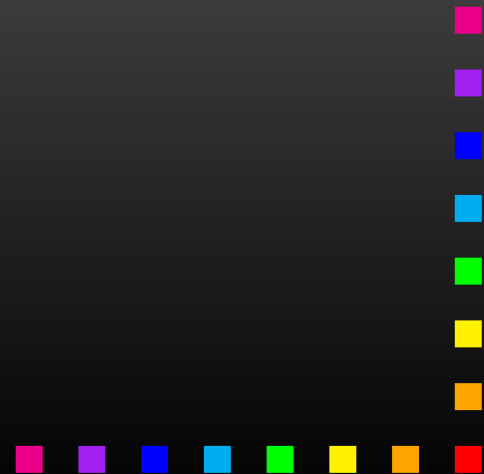
² University of Louvain, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium, and Brandeis University, Waltham, MA 02254, USA

Abstract. We use an effective criterion based on the asymptotic analysis of a class of Hamiltonian equations to determine whether they are linearizable on an abelian variety, i.e., solvable by quadrature. The criterion is applied to a system with Hamiltonian

$$H = 1/2 \sum_{i=1}^l p_i^2 + \sum_{i=1}^{l+1} \exp \left(\sum_{j=1}^l N_{ij} x_j \right),$$

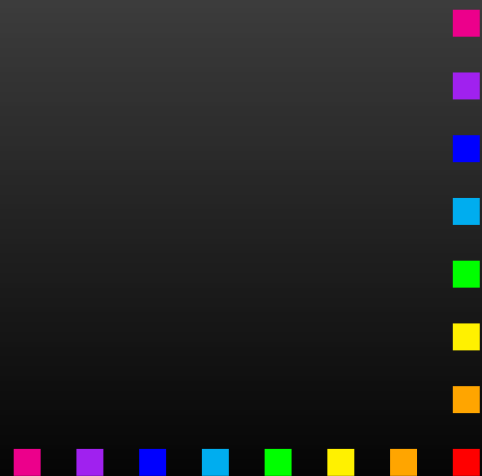
parametrized by a real matrix $N = (N_{ij})$ of full rank. It will be solvable by quadrature if and only if for all $i \neq j$, $2(NN^T)_{ij}(NN^T)_{jj}^{-1}$ is a nonpositive integer, i.e., the interactions correspond to the Toda systems for the Kac-Moody Lie algebras. The criterion is also applied to a system of Gross-Neveu.

Et aujourd'hui?



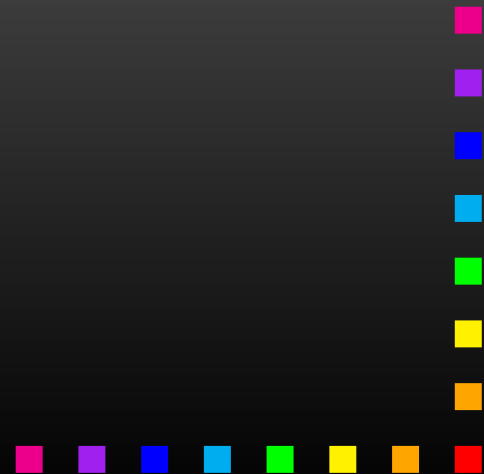
Et aujourd'hui?

Le cas de Kowalevski est un exemple de ce que l'on appelle un **système intégrable**,

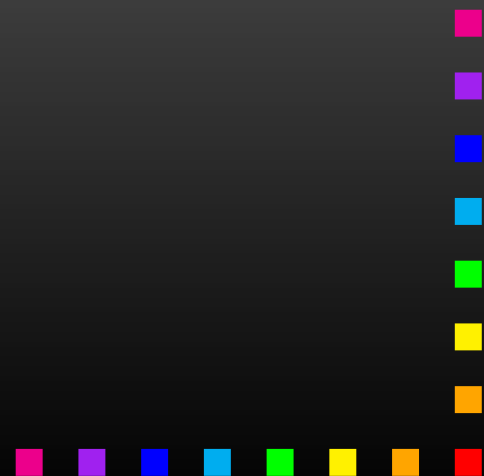
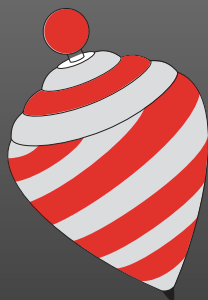


Et aujourd'hui?

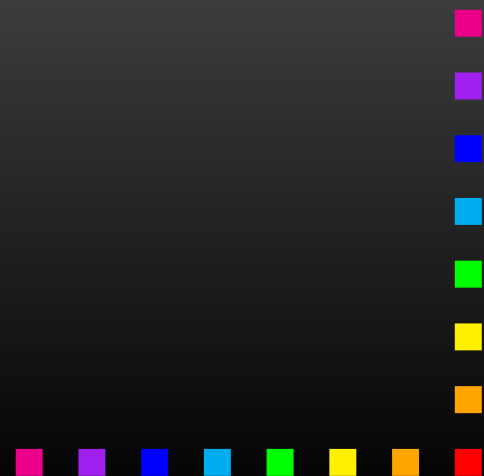
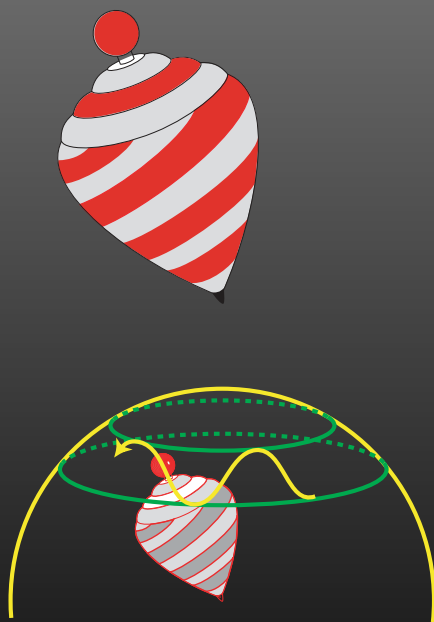
Le cas de Kowalevski est un exemple de ce que l'on appelle un **système intégrable**,
un système différentiel qui possède assez de quantités
conservées (énergie, moment,...) ce qui donne à ses solutions
un comportement très régulier sur le long terme.



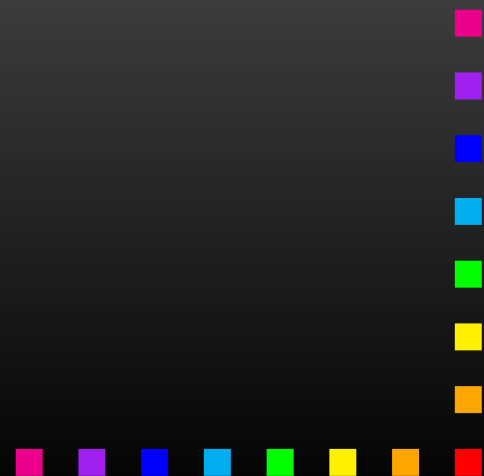
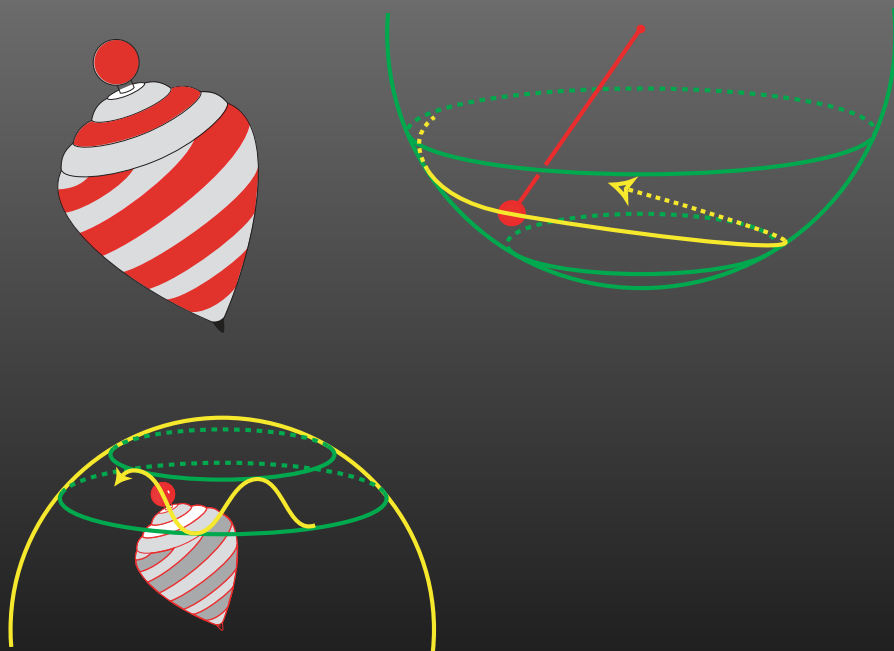
Systemes intégrables



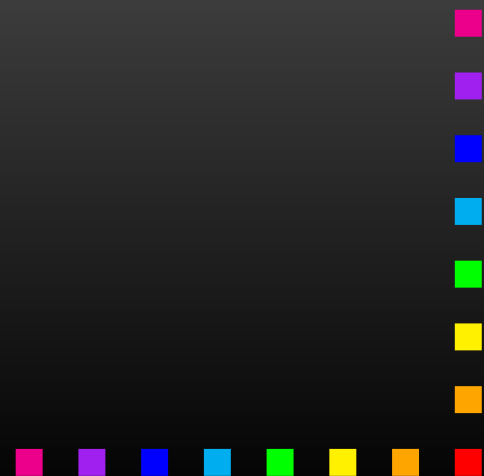
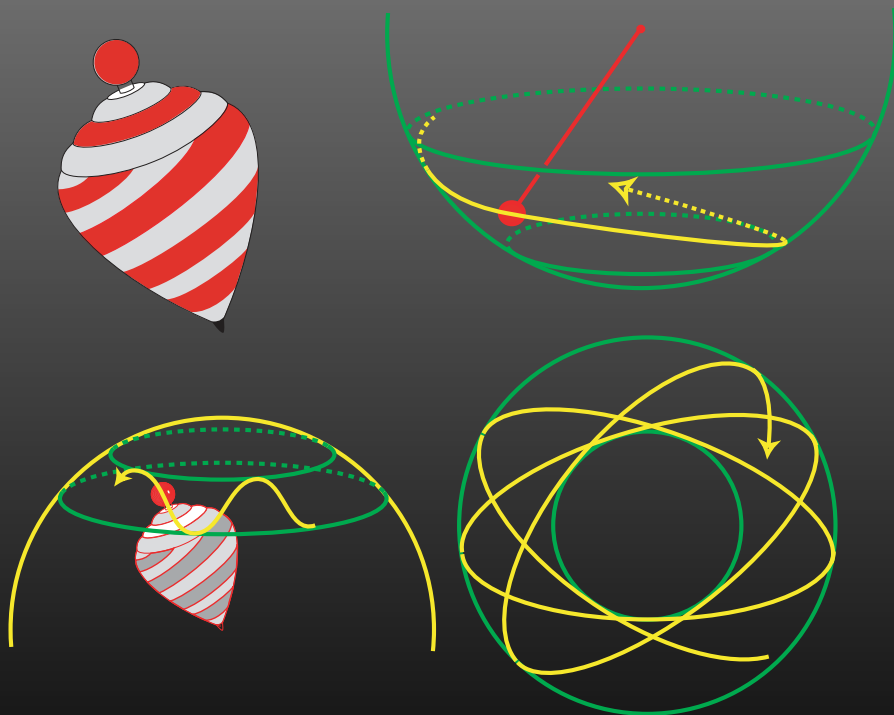
Systemes intégrables



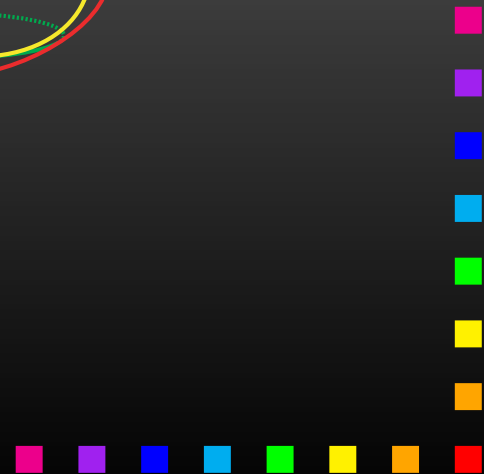
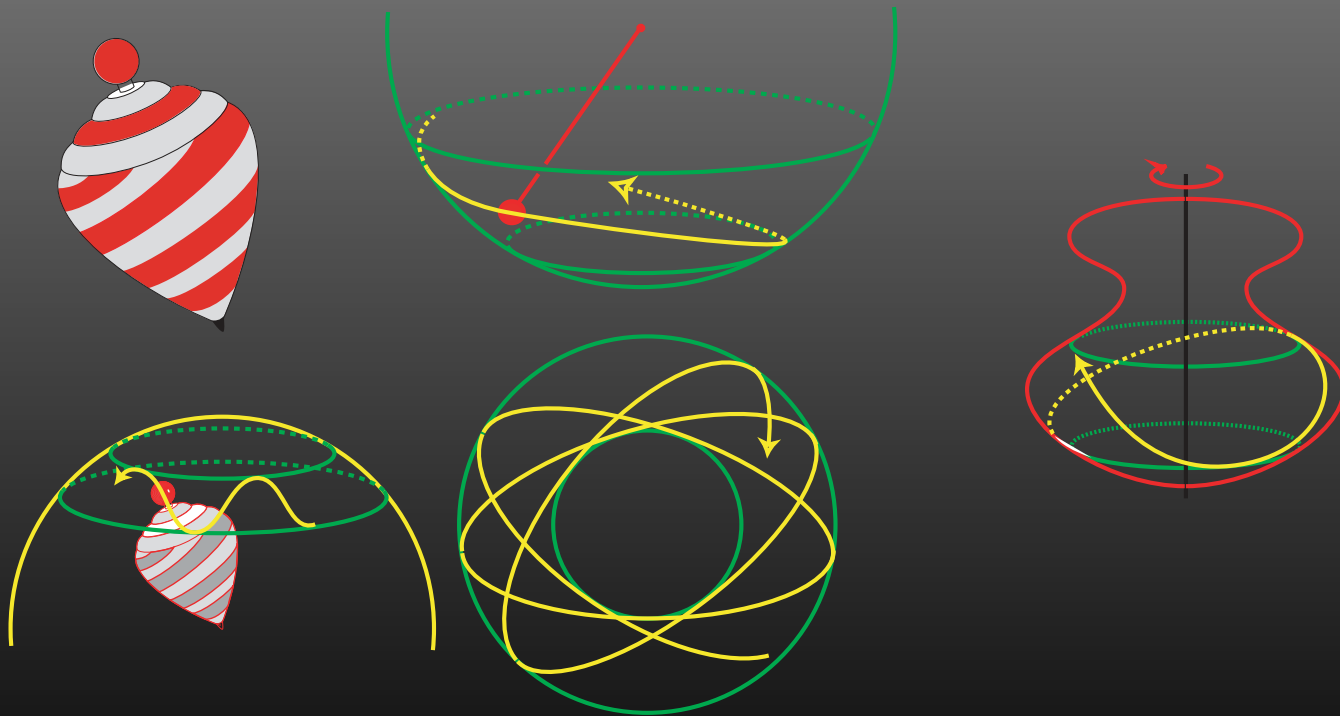
Systemes intégrables



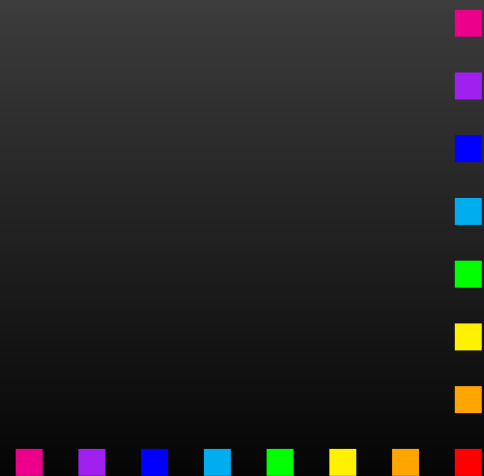
Systemes intégrables



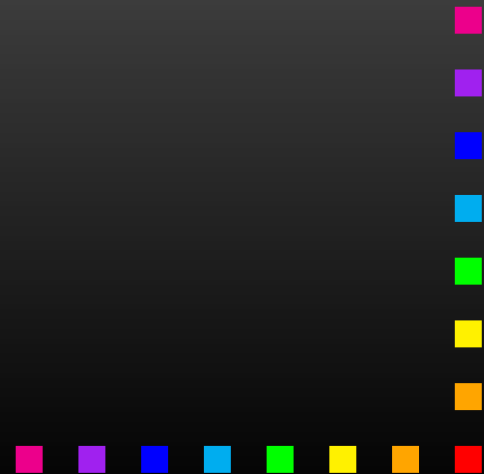
Systemes intégrables



Systemes intégrables

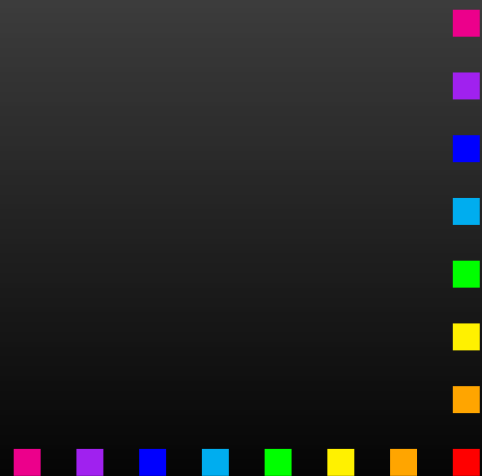


Première question



Première question

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.



Première question

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

Commun. Math. Phys. 83, 83–106 (1982)

Communications in
Mathematical
Physics

© Springer-Verlag 1982

Kowalewski's Asymptotic Method, Kac-moody Lie Algebras and Regularization

M. Adler^{*1} and P. van Moerbeke^{**2}

¹ Brandeis University, Waltham, MA 02254, USA

² University of Louvain, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium, and Brandeis University, Waltham, MA 02254, USA

Abstract. We use an effective criterion based on the asymptotic analysis of a class of Hamiltonian equations to determine whether they are linearizable on an abelian variety, i.e., solvable by quadrature. The criterion is applied to a system with Hamiltonian

$$H = 1/2 \sum_{i=1}^l p_i^2 + \sum_{i=1}^{l+1} \exp \left(\sum_{j=1}^l N_{ij} x_j \right),$$

parametrized by a real matrix $N = (N_{ij})$ of full rank. It will be solvable by quadrature if and only if for all $i \neq j$, $2(NN^T)_{ij}(NN^T)_{jj}^{-1}$ is a nonpositive integer, i.e., the interactions correspond to the Toda systems for the Kac-Moody Lie algebras. The criterion is also applied to a system of Gross-Neveu.

Première question

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

...orus with algebraic addition law).

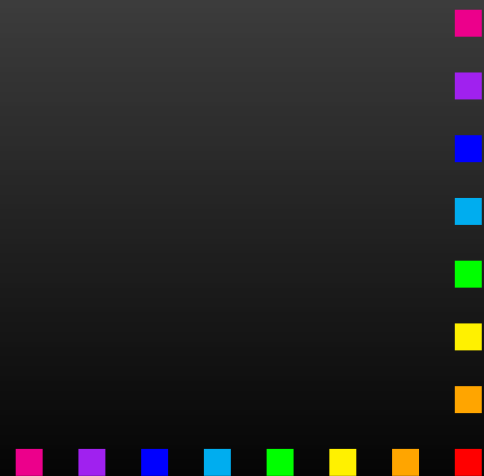
This paper deals with a criterion for algebraic complete integrability, inspired by work of Kowalewski. In celebrated papers [7, 8], she has shown that the *only*

algebraically completely integrable systems among the rigid body motions are Euler's rigid body, Lagrange's top and the famous Kowalewski top. Her method is based on the idea that if the system is to be algebraically completely integrable, and if the phase variables of the problem are to be algebraic (abelian) functions, then the phase variables of the problem must be meromorphic in time. In addition, the trajectories which blow up (as they must) are nicely parametrized by a codimension one family of parameters. This implies the existence of enough codimension one parameter families of (complex) pole solutions of the system so that all the (abelian) phase variables get a chance to blow up (not necessarily simultaneously). The sufficiency of this criterion has not been established. We remark that the parameters of the pole solutions play the role of regularizing variables when the equations blow up.

Première question

On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

La propriété de Kowalevski est maintenant appelée **complète intégrabilité algébrique**.

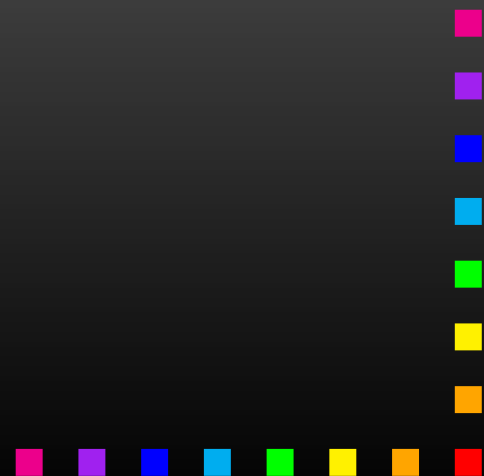


Première question

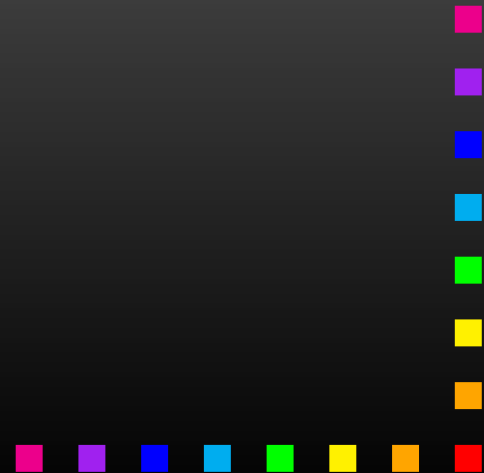
On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable.

La propriété de Kowalevski est maintenant appelée **complète intégrabilité algébrique**.

La relation entre cette intégrabilité algébrique et l'intégrabilité usuelle n'est pas encore très claire aujourd'hui.

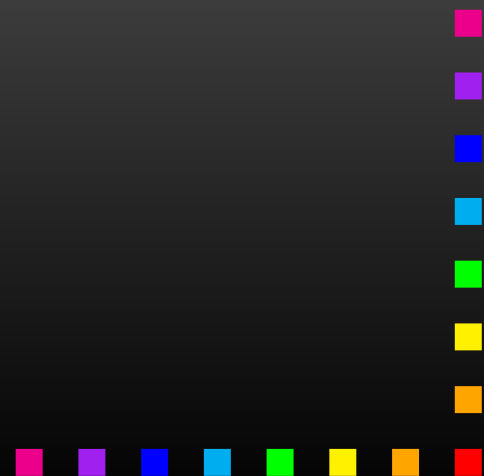


Deuxième question



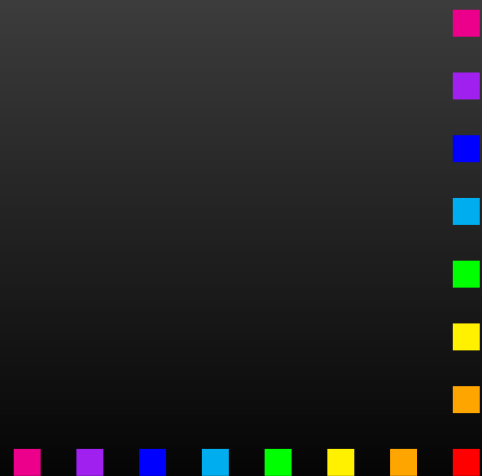
Deuxième question

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable?



Deuxième question

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable?
Comment trouve-t-on une intégrale première?

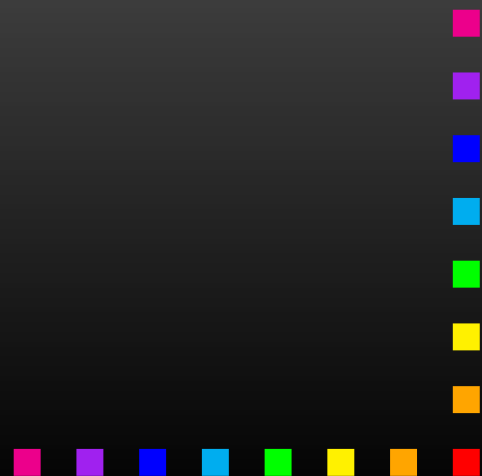


Deuxième question

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable?

Comment trouve-t-on une intégrale première?

Et d'où sort ce cas bizarre?



Deuxième question

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable?

Comment trouve-t-on une intégrale première?

Et d'où sort ce cas bizarre?

Roger Cooke, en 1984 :

[...] mais puisque le cas auquel [l'analyse de Kovalevskaya] s'applique est plutôt spécial, il n'est pas nécessaire de s'occuper plus longtemps de ses arguments.

Deuxième question

Et d'ailleurs, pourquoi ce système est-il intégrable?

Comment trouve-t-on une intégrale première?

Et d'où sort ce cas bizarre?

Roger Cooke, en 1984 :

[...] mais puisque le cas auquel [l'analyse de Kovalevskaya] s'applique est plutôt spécial, il n'est pas nécessaire de s'occuper plus longtemps de ses arguments.

C'est un des sujets sur lesquels depuis environ trente ans, il y a eu énormément de progrès.

Deuxième question

The Kowalewski Top 99 Years Later: A Lax Pair, Generalizations and Explicit Solutions

A. I. Bobenko, A. G. Reyman, and M. A. Semenov-Tian-Shansky

Leningrad Branch of V. A. Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27,
SU-191011 Leningrad, USSR

Abstract. A “natural” Lax pair for the Kowalewski top is derived by using a general group-theoretic approach. This gives a new insight into the algebraic geometry of the top and leads to its complete solution via finite-band integration theory.

Introduction

In her celebrated paper [1] published in 1889 Kowalewski found a new and highly nontrivial integrable case of the motion of a heavy rigid body about a fixed point, completing the list of integrable tops. Two previously known integrable cases are relatively simple and had been solved already in the XVIIIth century. These are Euler’s top in which the stationary point coincides with the center of mass, and Lagrange’s top which is axially symmetric. The third case discovered by Kowalewski is rather bizarre: the moments of inertia have a fixed ratio $2:2:1$, and the center of mass lies in the equatorial plane of the top. This case was detected by requiring that the general solution be given by meromorphic functions of the complex time variable. It is the only case of a heavy rigid body for which this is possible.

Deuxième question

Compositio Mathematica **87**: 153–229, 1993.

© 1993 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski

MICHELE AUDIN¹ et ROBERT SILHOL²

¹*Institut De Rech. Math. Avancée, 7 Rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France;*

²*Université de Montpellier II, F-34095 Montpellier Cedex 5, France*

Received 5 February 1992; accepted 30 June 1992

Nous allons expliquer dans ces notes comment sont faits les niveaux communs des intégrales premières dans l'exemple de la toupie de Kowalevski et, à titre d'introduction, dans les exemples plus simples de la toupie de Lagrange et du solide de dimension 3. Pour ce faire, nous montrerons que les aspects réels de la méthode de la courbe spectrale permettent d'étudier les "tores de Liouville". Ces résultats sont assez classiques dans les cas du solide libre et de la toupie symétrique (cas dit de Lagrange), en particulier, l'exposé de Verdier [28] utilise précisément l'exemple de Lagrange pour introduire et illustrer la méthode.

Le calcul des tores de Liouville de Kowalevski a déjà été fait dans [19], mais, d'une part les calculs sont assez pénibles et certains arguments ne sont pas très détaillés dans cet article, d'autre part, ces mêmes arguments reposent sur l'étude [4] qu'il n'est pas très facile de se procurer.

L'exemple de Kowalevski est à la fois un exemple très simple de système complètement intégrable: deux fonctions en involution sur une variété symplectique de dimension 4 et à la fois un exemple très difficile: une interprétation

Deuxième question

The Kowalewski Top 99 Years Later: A Lax Pair, Generalizations and Explicit Solutions

A. I. Bobenko, A. G. Reyman, and M. A. Semenov-Tian-Shansky

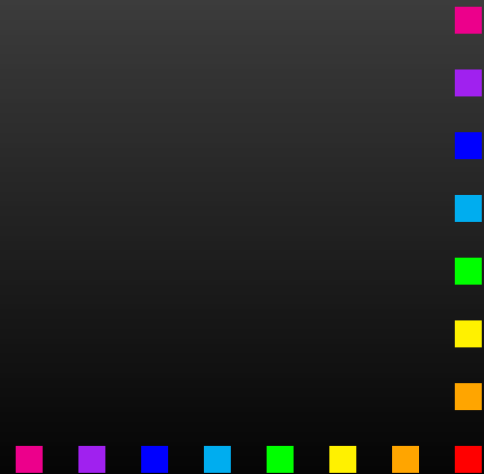
Leningrad Branch of V. A. Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27,
SU-191011 Leningrad, USSR

Abstract. A “natural” Lax pair for the Kowalewski top is derived by using a general group-theoretic approach. This gives a new insight into the algebraic geometry of the top and leads to its complete solution via finite-band integration theory.

Introduction

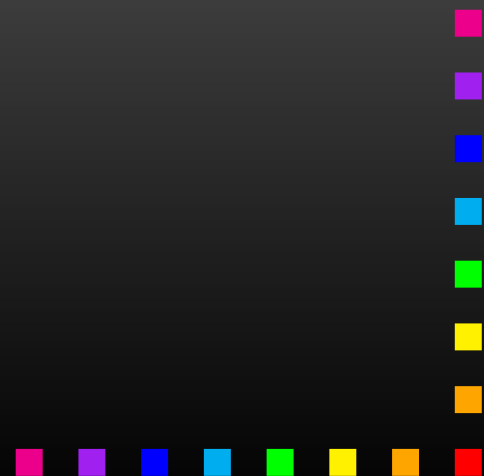
In her celebrated paper [1] published in 1889 Kowalewski found a new and highly nontrivial integrable case of the motion of a heavy rigid body about a fixed point, completing the list of integrable tops. Two previously known integrable cases are relatively simple and had been solved already in the XVIIIth century. These are Euler’s top in which the stationary point coincides with the center of mass, and Lagrange’s top which is axially symmetric. The third case discovered by Kowalewski is rather bizarre: the moments of inertia have a fixed ratio $2:2:1$, and the center of mass lies in the equatorial plane of the top. This case was detected by requiring that the general solution be given by meromorphic functions of the complex time variable. It is the only case of a heavy rigid body motion which is integrable in the Liouville sense.

Troisième question



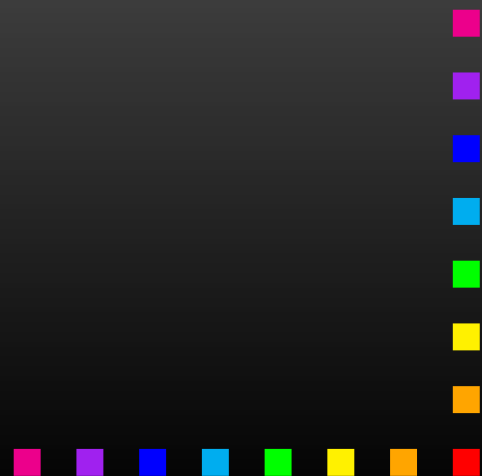
Troisième question

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable?



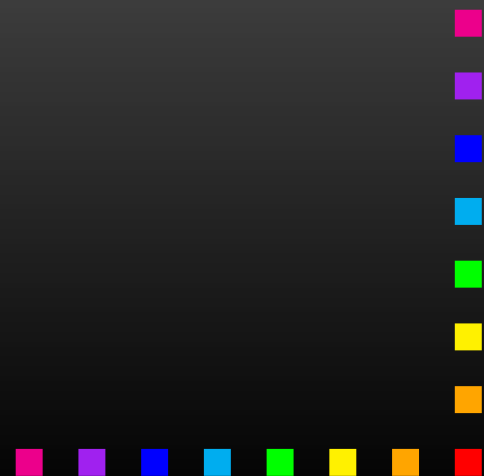
Troisième question

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable? On trouve des intégrales premières.



Troisième question

Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable? On trouve des intégrales premières.
Et si on n'en trouve pas?

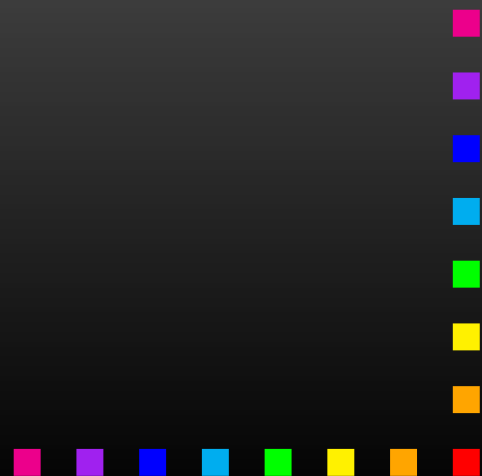


Troisième question

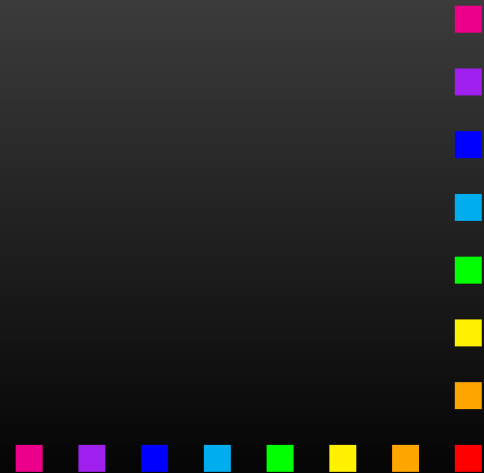
Et d'ailleurs, comment montre-t-on qu'un système est intégrable? On trouve des intégrales premières.

Et si on n'en trouve pas?

Il existe des systèmes qui ne sont pas intégrables.

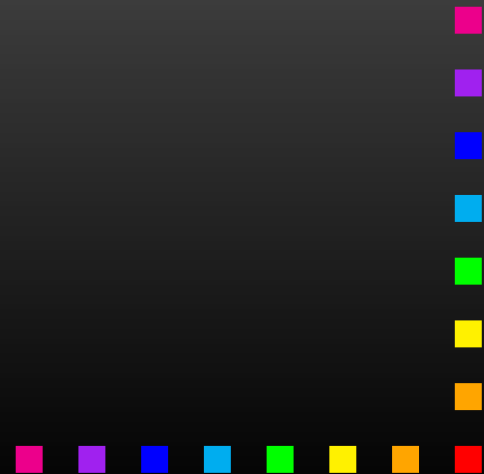


Troisième question



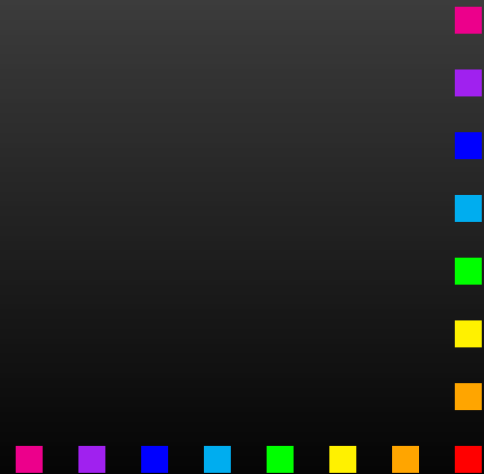
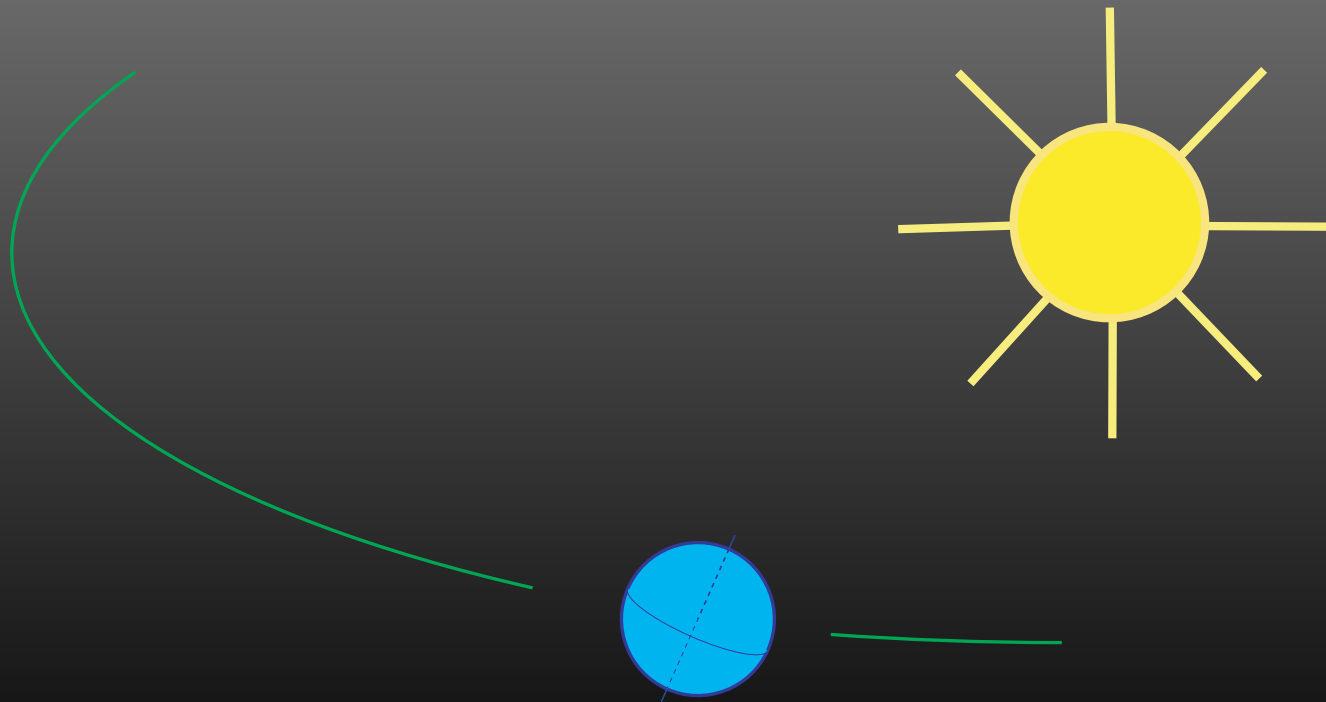
Troisième question

Deux corps,



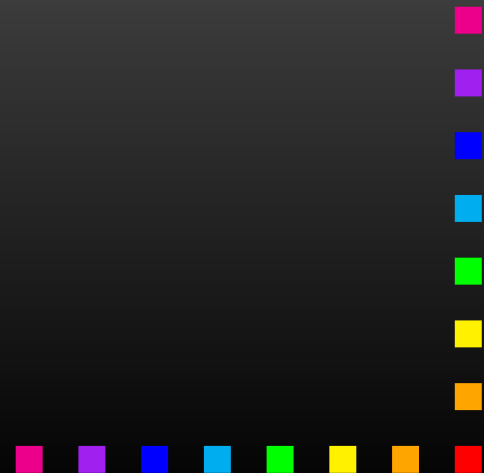
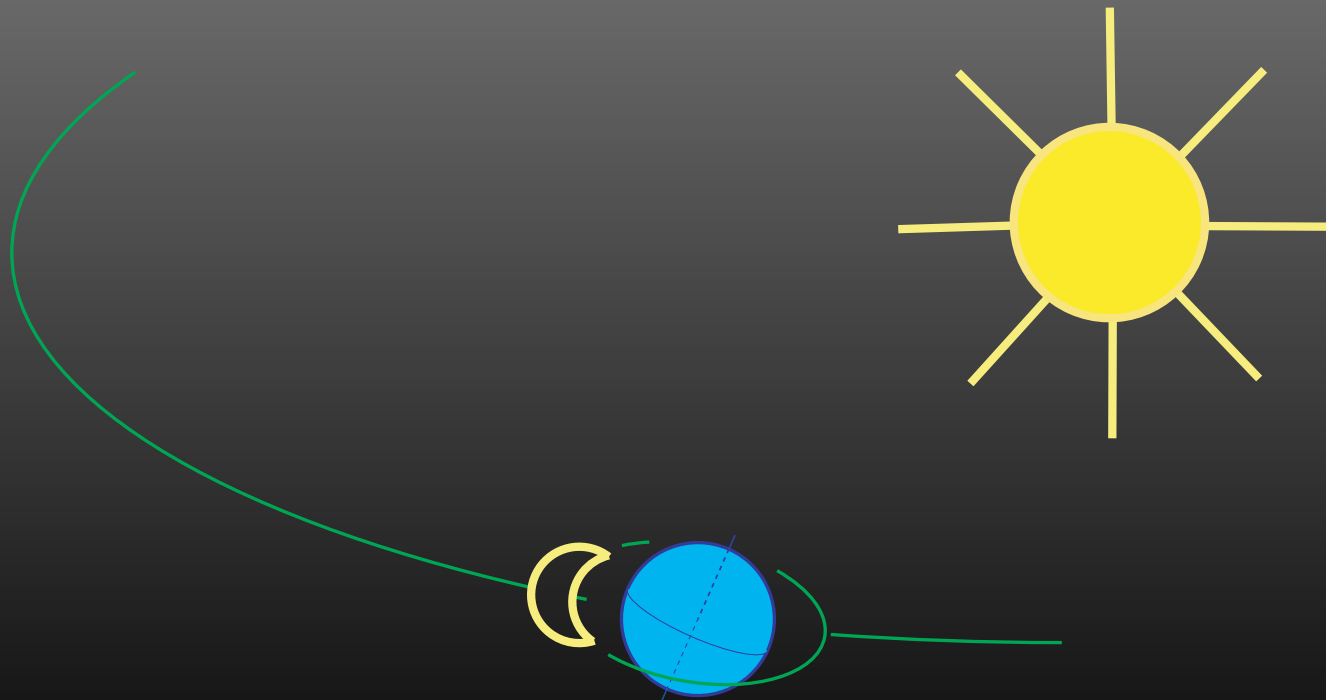
Troisième question

Deux corps,



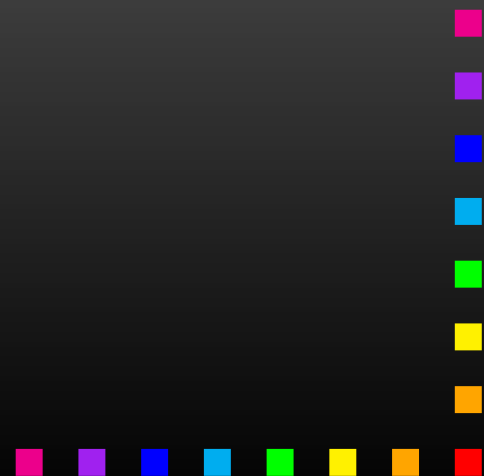
Troisième question

Deux corps, trois corps...



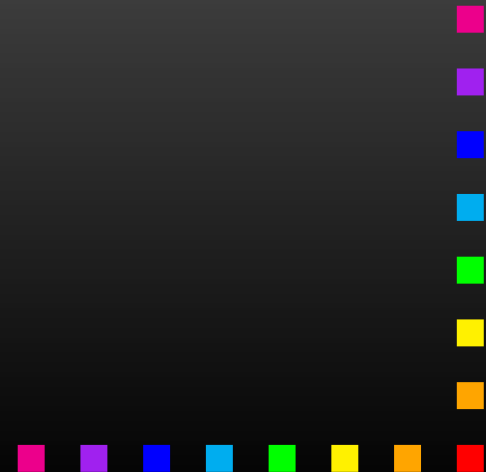
Troisième question

Le mouvement d'un satellite est-il intégrable?

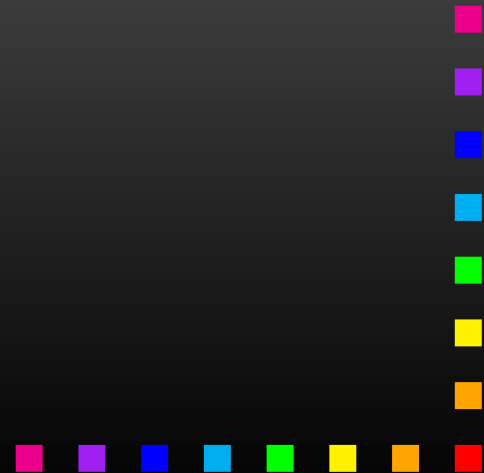


Troisième question

Le mouvement d'un satellite est-il intégrable?

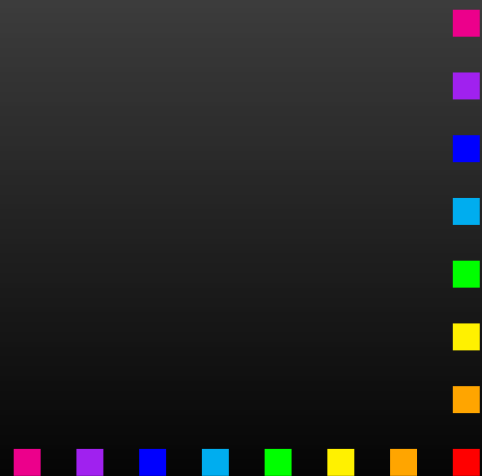


Troisième question



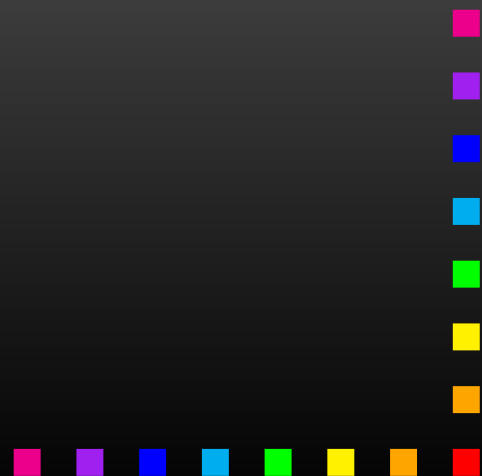
Troisième question

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable,



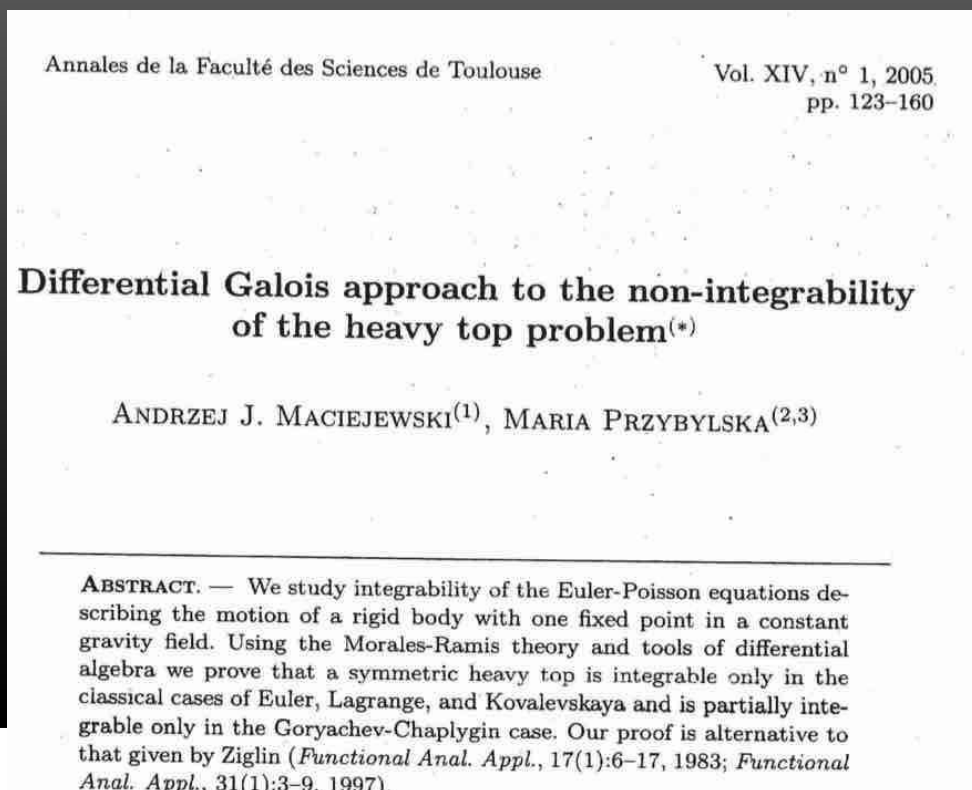
Troisième question

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable, grâce à un théorème de **Morales** et **Ramis** (1998).

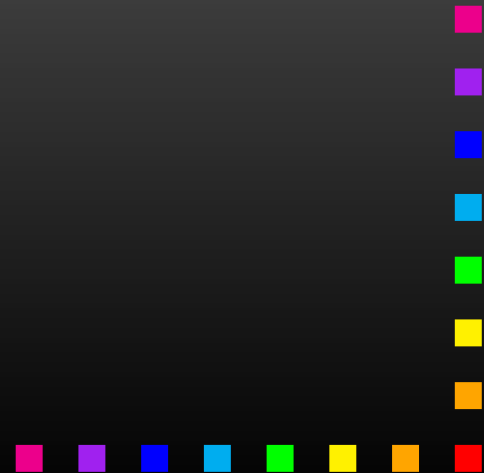


Troisième question

La théorie de Galois différentielle permet parfois de démontrer qu'un système n'est pas intégrable, grâce à un théorème de **Morales** et **Ramis** (1998).

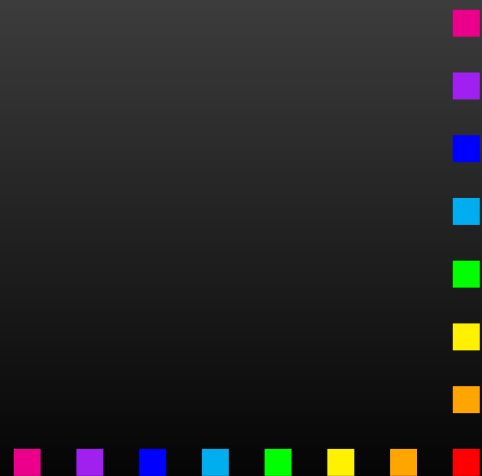


Troisième question



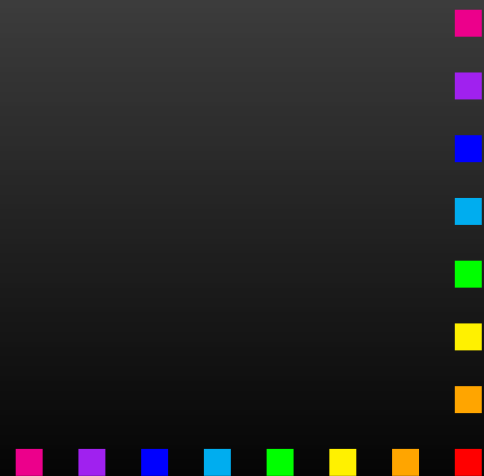
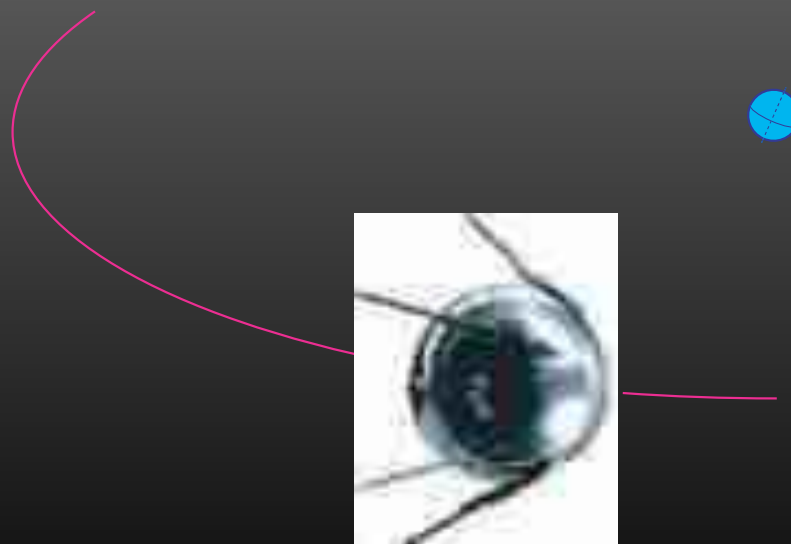
Troisième question

On peut montrer par exemple que le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité n'est pas un système intégrable.



Troisième question

On peut montrer par exemple que le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité n'est pas un système intégrable.





Références

- Kowalevski, Sophie, Sur le problème de la rotation..., *Acta Math.*, 12, (1889), 177–232.
- Cooke, Roger, The mathematics of Sonya Kovalevskaya, Springer, 1984.
- Hibner Koblitz, Ann, A convergence of lives, Rutgers University Press, 1993.
- Bölling, Reinhard, Briefwechsel, Karl Weierstraß, Sofja Kowalewskaja, Akademie Verlag, 1993.
- Balibar, Françoise, Marie Curie, femme savante ou sainte vierge de la science, Découverte, Gallimard, 2006.