

Points de vue géométriques sur quelques panoramas



Michèle Audin

Institut de recherche mathématique avancée

(CNRS et Université de Strasbourg)

<http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/>

<http://images.math.cnrs.fr/>

<http://www.oulipo.net/>

Slogan

Les mathématiques sont une activité humaine, et en particulier

- elles sont « en mouvement »,
- et elles font partie de la culture.

Une page de publicité

Pour le site

Images des mathématiques,



<http://images.math.cnrs.fr/>

(la recherche mathématique en images).

Géométries, une liste

affine	de Lobatchevski	non euclidienne
algébrique	de Riemann	plane
anallagmatique	descriptive	presque complexe
analytique	différentielle	projective
arguésienne	discrète	pseudo-riemannienne
arithmétique	élémentaire	pure
cartésienne	elliptique	réelle
classique	énumérative	riemannienne
combinatoire	euclidienne	sous-riemannienne
complexe	finslérienne	sphérique
conforme	hyperbolique	symplectique
convexe	intrinsèque	synthétique
dans l'espace	lorentzienne	torique
de contact	métrique	tropicale
de position	non commutative	vectorielle

Géométries, une liste

affine

algébrique

anallagmatique

analytique

arguésienne

arithmétique

cartésienne

classique

combinatoire

complexe

conforme

convexe

dans l'espace

de contact

de position

de Lobatchevski

de Riemann

descriptive

différentielle

discrète

élémentaire

elliptique

énumérative

euclidienne

finslérienne

hyperbolique

intrinsèque

lorentzienne

métrique

non commutative

non euclidienne

plane

presque complexe

projective

pseudo-riemannienne

pure

réelle

riemannienne

sous-riemannienne

sphérique

symplectique

synthétique

torique

tropicale

vectorielle

Géométries, une liste

affine	de Lobatchevski	non euclidienne
algébrique	de Riemann	plane
anallagmatique	descriptive	presque complexe
analytique	différentielle	projective
arguésienne	discrète	pseudo-riemannienne
arithmétique	élémentaire	pure
cartésienne	elliptique	réelle
classique	énumérative	riemannienne
combinatoire	euclidienne	sous-riemannienne
complexe	finslérienne	sphérique
conforme	hyperbolique	symplectique
convexe	intrinsèque	synthétique
dans l'espace	lorentzienne	torique
de contact	métrique	tropicale
de position	non commutative	vectorielle

Géométries, une liste

affine
algébrique
anallagmatique
analytique
arguésienne
arithmétique
cartésienne
classique
combinatoire
complexe
conforme
convexe
dans l'espace
de contact
de position

de Lobatchevski
de Riemann
descriptive
différentielle
discrète
élémentaire
elliptique
énumérative
euclidienne
finslérienne
hyperbolique
intrinsèque
lorentzienne
métrique
non commutative

non euclidienne
plane
presque complexe
projective
pseudo-riemannienne
pure
réelle
riemannienne
sous-riemannienne
sphérique
symplectique
synthétique
torique
tropicale
vectorielle

Géométries, une liste

affine	de Lobatchevski	non euclidienne
algébrique	de Riemann	plane
anallagmatique	descriptive	presque complexe
analytique	différentielle	projective
arguésienne	discrète	pseudo-riemannienne
arithmétique	élémentaire	pure
cartésienne	elliptique	réelle
classique	énumérative	riemannienne
combinatoire	euclidienne	sous-riemannienne
complexe	finslérienne	sphérique
conforme	hyperbolique	symplectique
convexe	intrinsèque	synthétique
dans l'espace	lorentzienne	torique
de contact	métrique	tropicale
de position	non commutative	vectorielle

Géométries, une liste

affine	de Lobatchevski	non euclidienne
algébrique	de Riemann	plane
anallagmatique	descriptive	presque complexe
analytique	différentielle	projective
arguésienne	discrète	pseudo-riemannienne
arithmétique	élémentaire	pure
cartésienne	elliptique	réelle
classique	énumérative	riemannienne
combinatoire	euclidienne	sous-riemannienne
complexe	finslérienne	sphérique
conforme	hyperbolique	symplectique
convexe	intrinsèque	synthétique
dans l'espace	lorentzienne	torique
de contact	métrique	tropicale
de position	non commutative	vectorielle

Géométries, une liste

affine
algébrique
anallagmatique
analytique
arguésienne
arithmétique
cartésienne
classique
combinatoire
complexe
conforme
convexe
dans l'espace
de contact
de position

de Lobatchevski
de Riemann
descriptive
différentielle
discrète
élémentaire
elliptique
énumérative
euclidienne
finslérienne
hyperbolique
intrinsèque
lorentzienne
métrique
non commutative

non euclidienne
plane
presque complexe
projective
pseudo-riemannienne
pure
réelle
riemannienne
sous-riemannienne
sphérique
symplectique
synthétique
torique
tropicale
vectorielle

Géométries, une liste

affine	de Lobatchevski	non euclidienne
algébrique	de Riemann	plane
anallagmatique	descriptive	presque complexe
analytique	différentielle	projective
arguésienne	discrète	pseudo-riemannienne
arithmétique	élémentaire	pure
cartésienne	elliptique	réelle
classique	énumérative	riemannienne
combinatoire	euclidienne	sous-riemannienne
complexe	finslérienne	sphérique
conforme	hyperbolique	symplectique
convexe	intrinsèque	synthétique
dans l'espace	lorentzienne	torique
de contact	métrique	tropicale
de position	non commutative	vectorielle

Géométries, une liste

affine
algébrique
anallagmatique
analytique
arguésienne
arithmétique
cartésienne
classique
combinatoire
complexe
conforme
convexe
dans l'espace
de contact
de position

de Lobatchevski
de Riemann
descriptive
différentielle
discrète
élémentaire
elliptique
énumérative
euclidienne
finslérienne
hyperbolique
intrinsèque
lorentzienne
métrique
non commutative

non euclidienne
plane
presque complexe
projective
pseudo-riemannienne
pure
réelle
riemannienne
sous-riemannienne
sphérique
symplectique
synthétique
torique
tropicale
vectorielle

Géométries, une liste

affine

algébrique

anallagmatique

analytique

arguésienne

arithmétique

cartésienne

classique

combinatoire

complexe

conforme

convexe

dans l'espace

de contact

de position

de Lobatchevski

de Riemann

descriptive

différentielle

discrète

élémentaire

elliptique

énumérative

euclidienne

finslérienne

hyperbolique

intrinsèque

lorentzienne

métrique

non commutative

non euclidienne

plane

presque complexe

projective

pseudo-riemannienne

pure

réelle

riemannienne

sous-riemannienne

sphérique

symplectique

synthétique

torique

tropicale

vectorielle

Géométries, une liste

tropicale

En dépit de son qualificatif évocateur (et de l'illustration ci-contre), la «géométrie tropicale» ne décrit pas une région foisonnante de la planète.

Pascale Harinck, Alain Plagne & Claude Sabbah

Comité éditorial

Géométrie tropicale



LES ÉDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Géométries, une liste

sphérique

Géométrie sphérique



Des questions

Où se lève la lune ?

Des questions

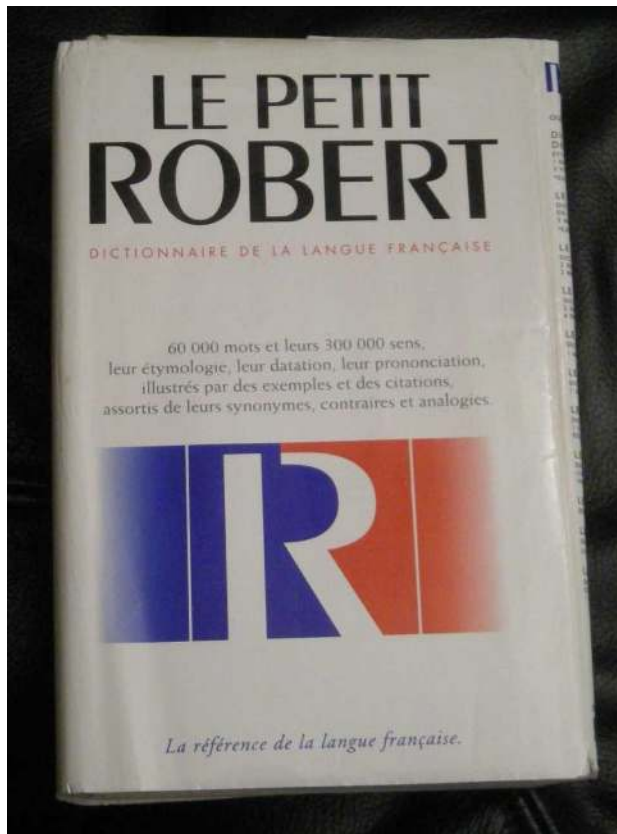
Où se lève la lune ?

Je suis à Saint-Flour, je regarde vers l'est, je vais tout droit.

Après 20 000 km, où suis-je ?

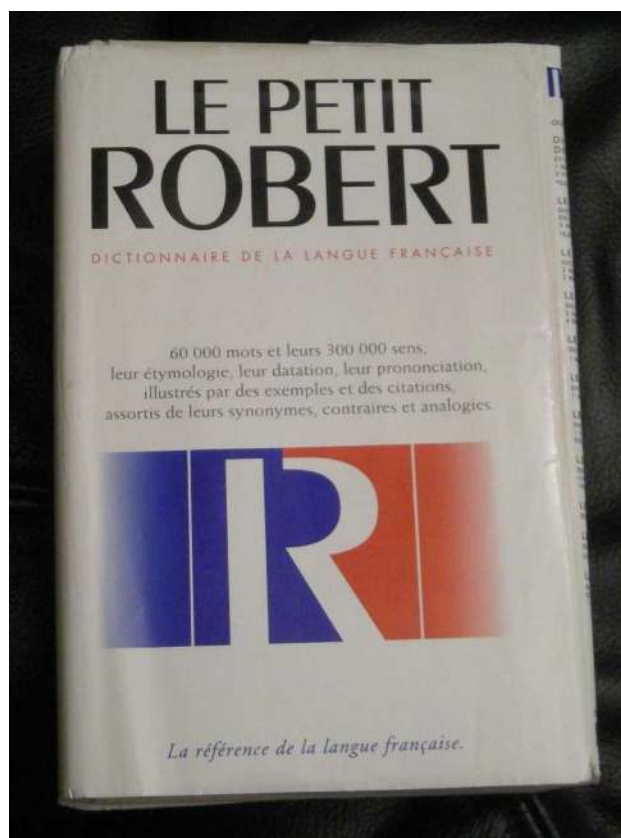
Et si j'avais regardé vers l'ouest ?

La géométrie, c'est quoi ?



GÉOMÉTRIE n. f. – 1175 «arpentage» ; lat. *geometria*, o. gr.
1. Science des figures de l'espace physique. «*La géométrie [...] science de toutes les espèces d'espace*» (d'après Kant). 2. MATH. VX Étude des relations entre points, courbes, surfaces et volumes de l'espace réel. – MOD. Étude des invariants du groupe opérant sur des ensembles de points. *Géométrie affine et géométrie vectorielle. Géométrie algébrique. Géométrie analytique*, où l'on utilise le calcul algébrique sur les coordonnées des points. *Géométrie descriptive*, où les figures de l'espace sont définies par leurs projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires. *Géométrie différentielle*. – *Géométrie euclidienne ou géométrie de l'angle droit plane (dans R^2) ou dans l'espace (dans R^3).* Les géométries non euclidiennes : la *géométrie elliptique*, *géométrie de Riemann* ou *géométrie de l'angle obtus*, et la *géométrie hyperbolique* ou *géométrie de l'angle aigu*. – *Figure de géométrie. Étudier, enseigner la géométrie.* ♦ *Traité, manuel de géométrie. Acheter une géométrie.*

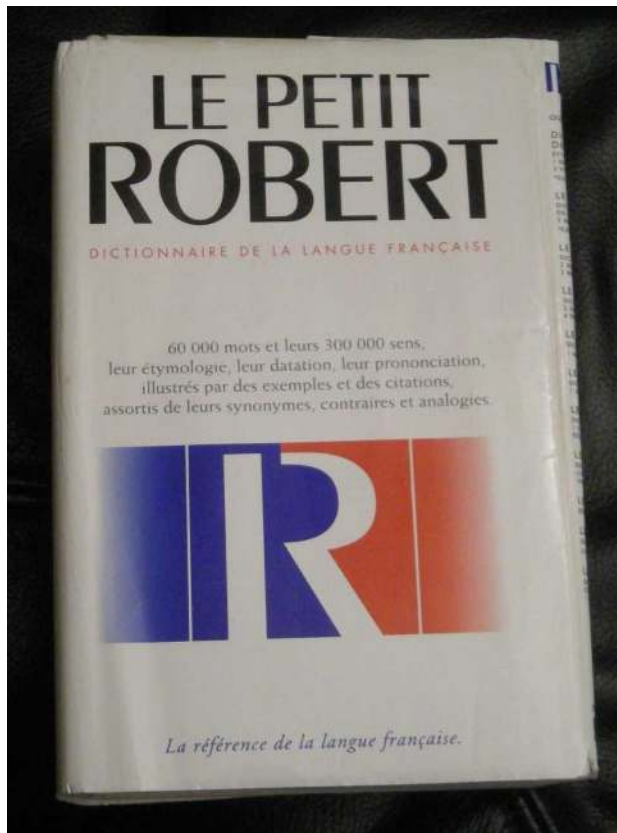
La géométrie, c'est quoi ?



GÉOMÉTRIE n. f. – 1175 «arpentage» ; lat. *geometria*, o. gr.

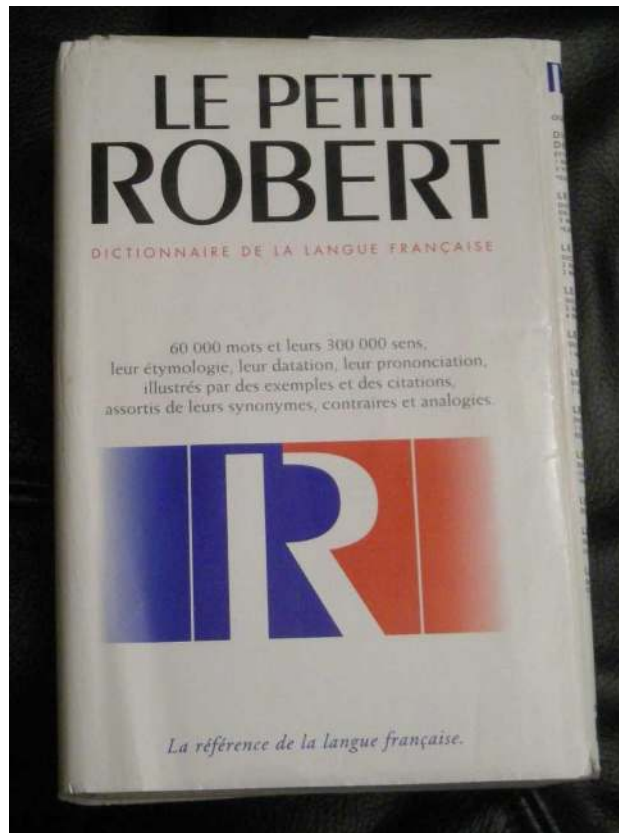
1. Science des figures de l'espace physique. «*La géométrie [...] science de toutes les espèces d'espace*» (d'après Kant). 2. MATH. VX Étude des relations entre points, courbes, surfaces et volumes de l'espace réel. – MOD. Étude des invariants du groupe opérant sur des ensembles de points. *Géométrie affine et géométrie vectorielle. Géométrie algébrique. Géométrie analytique*, où l'on utilise le calcul algébrique sur les coordonnées des points. *Géométrie descriptive*, où les figures de l'espace sont définies par leurs projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires. *Géométrie différentielle*. – *Géométrie euclidienne ou géométrie de l'angle droit plane (dans R^2) ou dans l'espace (dans R^3)*. *Les géométries non euclidiennes : la géométrie elliptique, géométrie de Riemann ou géométrie de l'angle obtus, et la géométrie hyperbolique ou géométrie de l'angle aigu*. – *Figure de géométrie. Étudier, enseigner la géométrie.* ♦ *Traité, manuel de géométrie. Acheter une géométrie.*

La géométrie, c'est quoi ?



GÉOMÉTRIE n. f. – 1175 «arpentage» ; lat. *geometria*, o. gr.
1. Science des figures de l'espace physique. «*La géométrie [...] science de toutes les espèces d'espace*» (d'après Kant). 2. MATH. VX Étude des relations entre points, courbes, surfaces et volumes de l'espace réel. – MOD. Étude des invariants du groupe opérant sur des ensembles de points. *Géométrie affine et géométrie vectorielle. Géométrie algébrique. Géométrie analytique*, où l'on utilise le calcul algébrique sur les coordonnées des points. *Géométrie descriptive*, où les figures de l'espace sont définies par leurs projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires. *Géométrie différentielle*. – *Géométrie euclidienne ou géométrie de l'angle droit plane (dans R^2) ou dans l'espace (dans R^3)*. *Les géométries non euclidiennes : la géométrie elliptique, géométrie de Riemann ou géométrie de l'angle obtus, et la géométrie hyperbolique ou géométrie de l'angle aigu*. – *Figure de géométrie. Étudier, enseigner la géométrie.* ♦ *Traité, manuel de géométrie. Acheter une géométrie.*

La géométrie, c'est quoi ?



GÉOMÉTRIE n. f. – 1175 «arpentage» ; lat. *geometria*, o. gr.
1. Science des figures de l'espace physique. «*La géométrie [...] science de toutes les espèces d'espace*» (d'après Kant). 2. MATH. VX Étude des relations entre points, courbes, surfaces et volumes de l'espace réel. – MOD. Étude des invariants du groupe opérant sur des ensembles de points. Géométrie affine et géométrie vectorielle. Géométrie algébrique. Géométrie analytique, où l'on utilise le calcul algébrique sur les coordonnées des points. Géométrie descriptive, où les figures de l'espace sont définies par leurs projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires. Géométrie différentielle. – Géométrie euclidienne ou géométrie de l'angle droit plane (dans R^2) ou dans l'espace (dans R^3). Les géométries non euclidiennes : la géométrie elliptique, géométrie de Riemann ou géométrie de l'angle obtus, et la géométrie hyperbolique ou géométrie de l'angle aigu. – Figure de géométrie. Étudier, enseigner la géométrie. ♦ Traité, manuel de géométrie. Achever une géométrie.

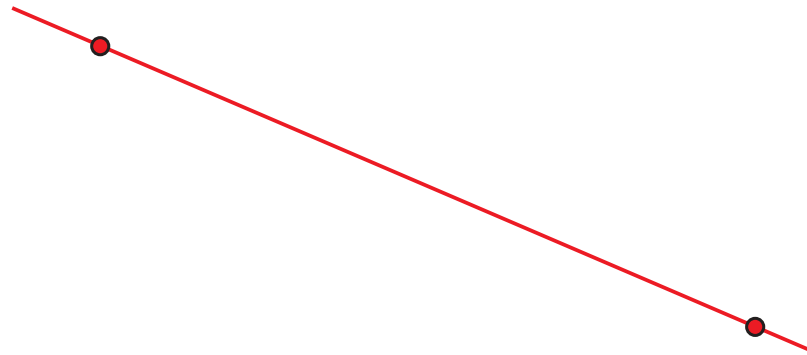
Étude des relations entre points, courbes...

Par deux points...



Étude des relations entre points, courbes...

Par deux points...
passe une droite.



Étude des relations entre points, courbes...

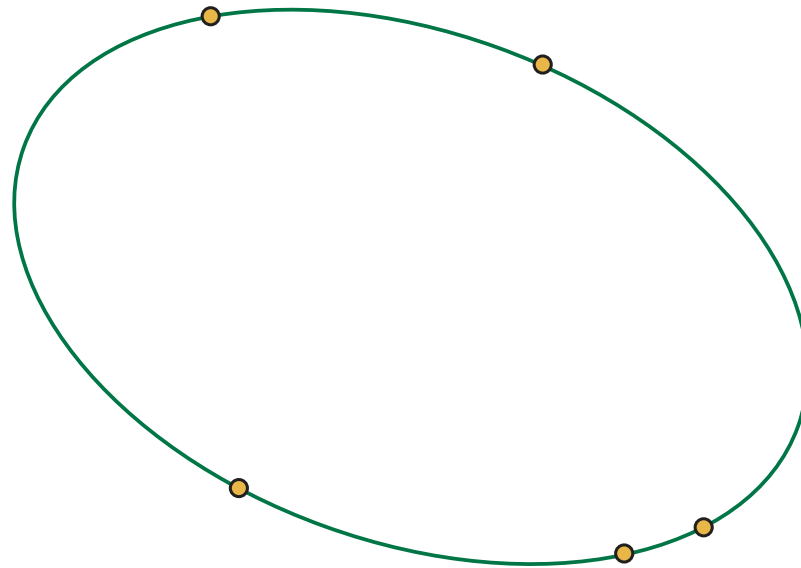


Par cinq points...



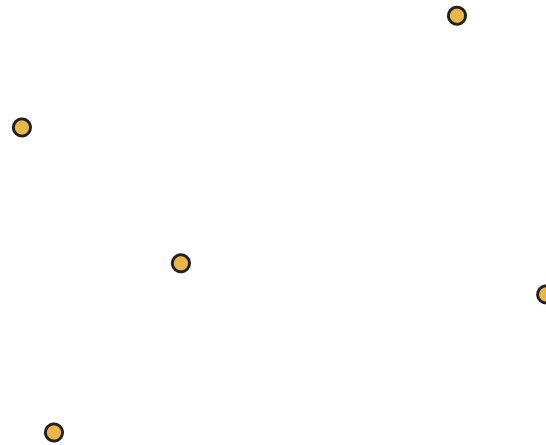
Étude des relations entre points, courbes...

Par cinq points...
passe une conique.



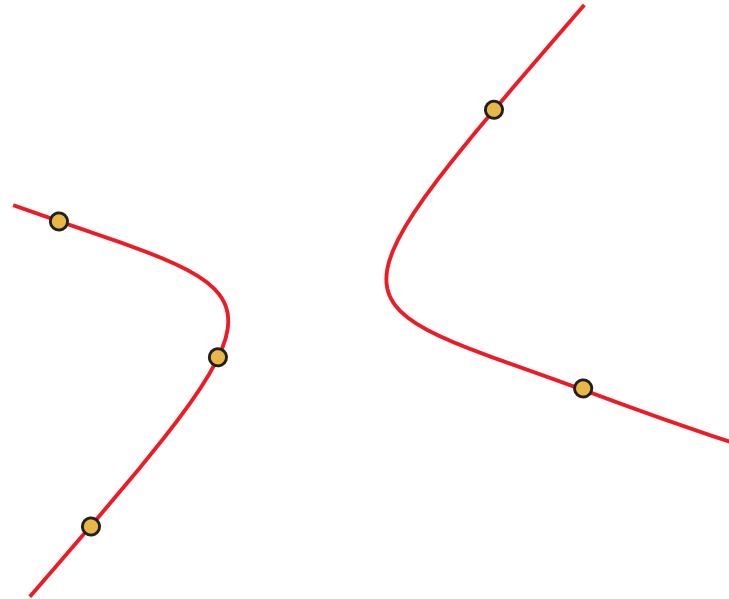
Étude des relations entre points, courbes...

Par cinq points...



Étude des relations entre points, courbes...

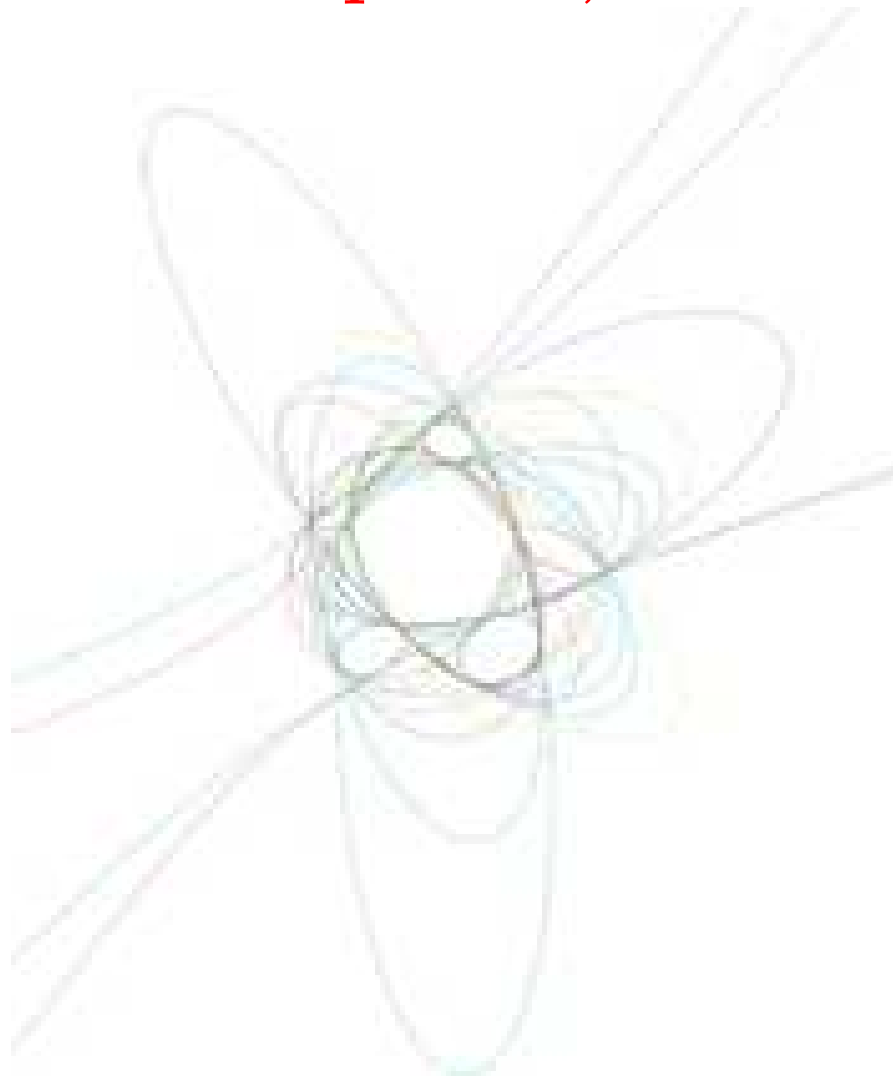
Par cinq points...
passe une conique.



Étude des relations entre points, courbes...

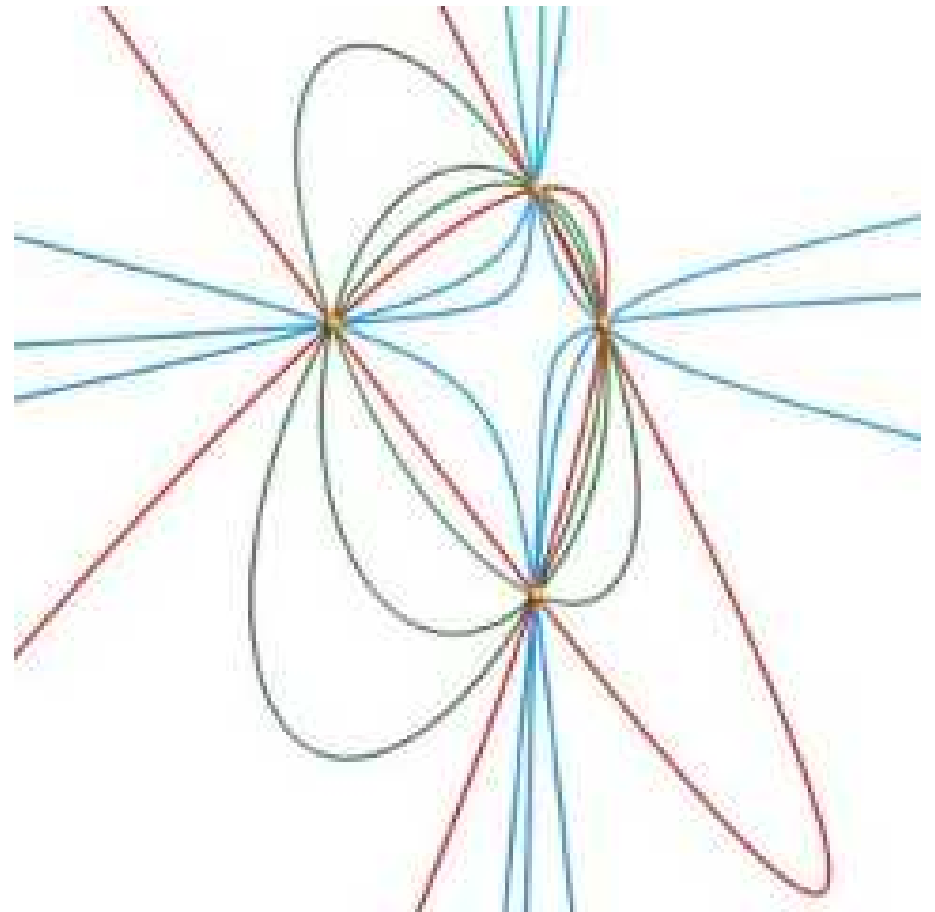
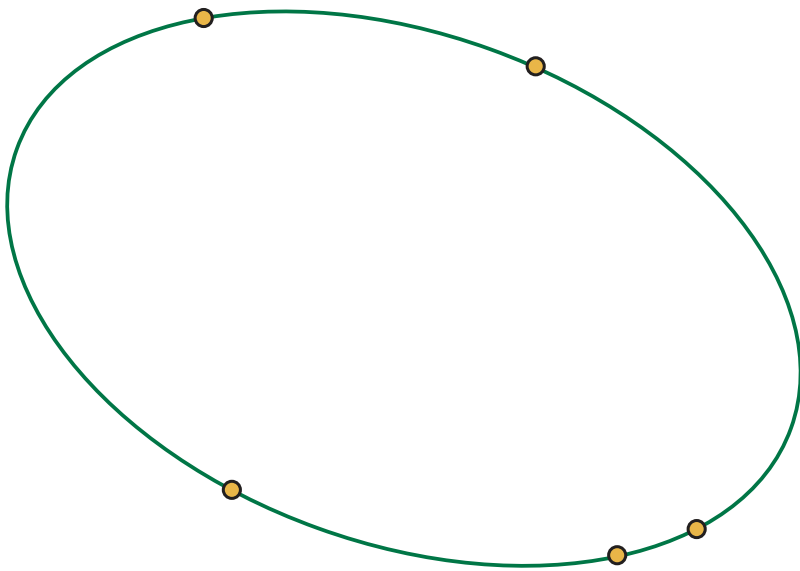
Et il y a 3 264 coniques tangentes à cinq coniques données (un théorème de Chasles au XIXe siècle).

Dont au moins 32 sont réelles (un théorème de Welschinger, 2007).

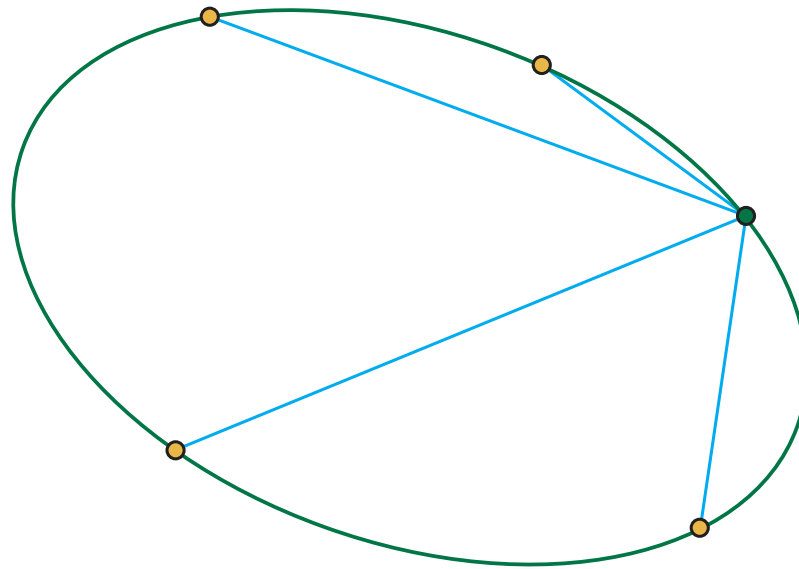


<http://images.math.cnrs.fr/Trois-mille-deux-cent-soixante.html>

Étude des relations entre points, courbes...



Pour repérer l'une des coniques du pinceau, il suffit de donner un (cinquième) point du plan. Ou un nombre.



Un théorème de Chasles.

Le birapport de quatre droites joignant un point d'une conique à quatre points fixes de cette conique ne dépend pas du choix de ce point.

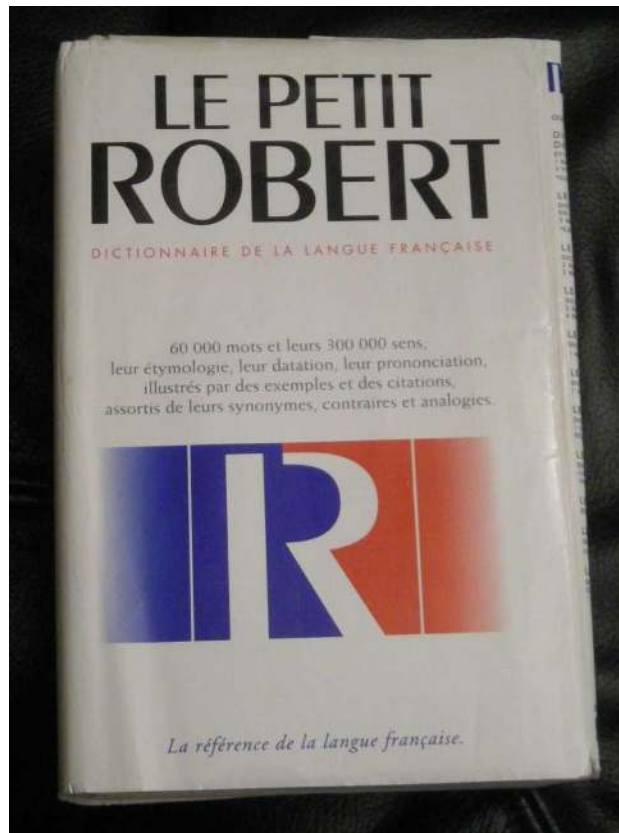
L'ensemble des points du plan tels que les quatre droites les joignant à quatre points fixes du plan ont un birapport donné est une conique passant par ces quatre points.



Sur Chasles

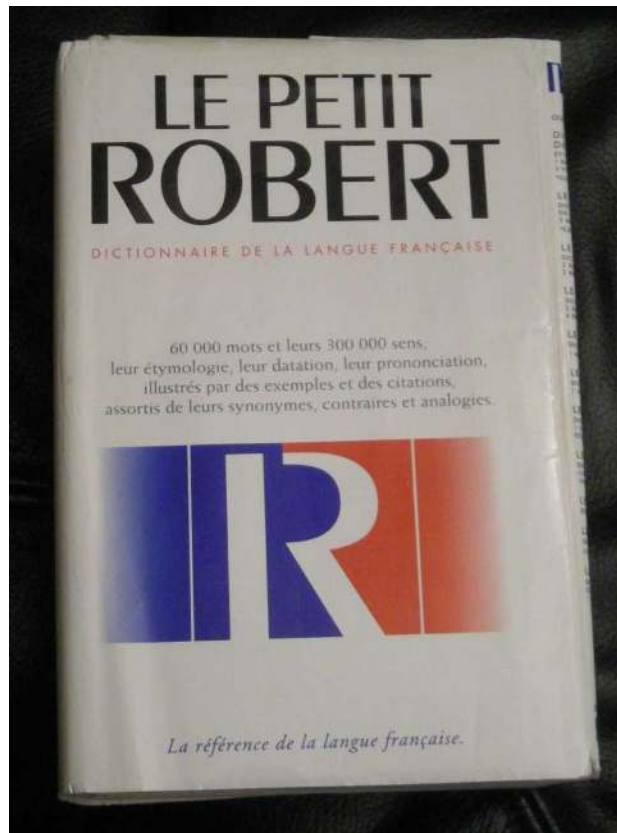
<http://images.math.cnrs.fr/Mai-1871-Sophie-Joseph-Charles.html>

Et un panorama, c'est quoi ?



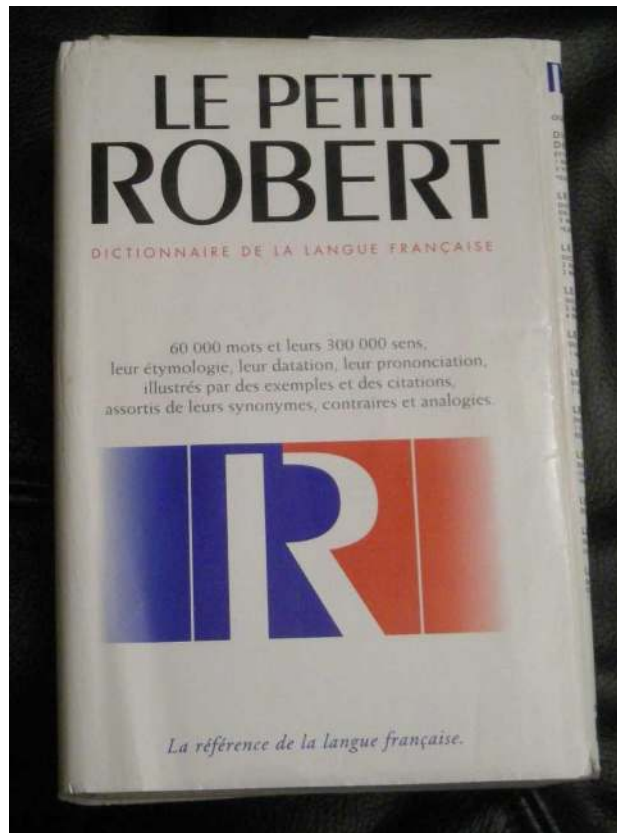
PANORAMA n. m. – 1799 mot angl.; de *pan-* et *-orama* 1. Spectacle constitué par un vaste tableau circulaire peint en trompe-l'œil et destiné à être regardé du centre. *Le panorama du musée de Waterloo.* 2. Vaste paysage que l'on peut contempler de tous côtés [...] 3. Étude successive et complète d'une catégorie de questions. *Panorama de la littérature contemporaine.*

Et un panorama, c'est quoi ?



PANORAMA n. m. – 1799 mot angl.; de *pan-* et *-orama* 1. Spectacle constitué par un vaste tableau circulaire peint en trompe-l'œil et destiné à être regardé du centre. *Le panorama du musée de Waterloo.* 2. Vaste paysage que l'on peut contempler de tous côtés [...] 3. **Étude successive et complète d'une catégorie de questions. *Panorama de la littérature contemporaine.***

Et un panorama, c'est quoi ?



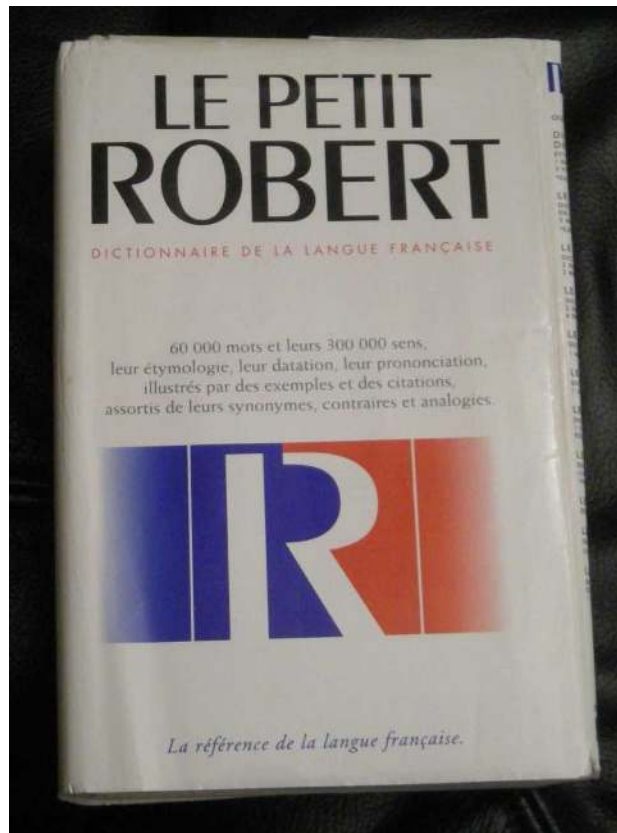
PANORAMA n. m. – 1799 mot angl. ; de *pan-* et *-orama* 1. Spectacle constitué par un vaste tableau circulaire peint en trompe-l'œil et destiné à être regardé du centre. *Le panorama du musée de Waterloo.* 2. Vaste paysage que l'on peut contempler de tous côtés [...] 3. Étude successive et complète d'une catégorie de questions. *Panorama de la littérature contemporaine.*

Et maintenant, un contresens

La théorie du bon voisin...

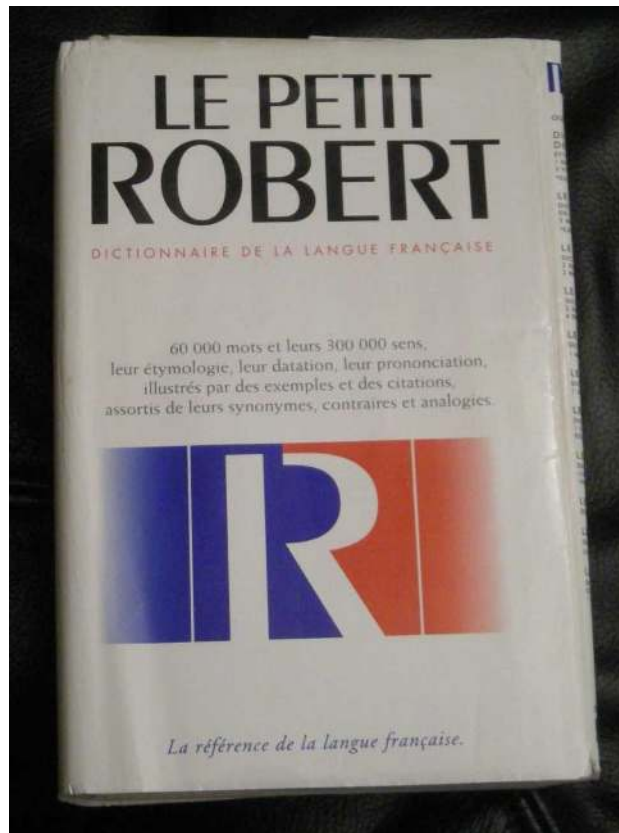
<http://images.math.cnrs.fr/Classer.html>

Pan ?



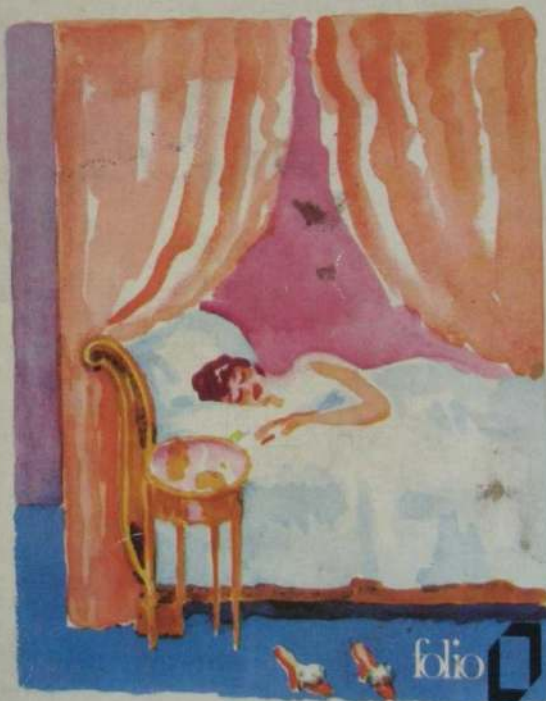
PAN n. m. – 1080 ; lat. pannus «morceau d’étoffe» 1. Grand morceau d’étoffe [...] 2. *Pan de mur* : partie plus ou moins grande d’un mur. « *la précieuse matière du tout petit pan de mur jaune* » (Proust). – Ossature d’un mur. [...]

Pan ?



PAN n. m. – 1080 ; lat. pannus «morceau d’étoffe» 1. Grand morceau d’étoffe [...] 2. *Pan de mur* : partie plus ou moins grande d’un mur. « *la précieuse matière du tout petit pan de mur jaune* » (Proust). – Ossature d’un mur. [...]

Proust La
prisonnière



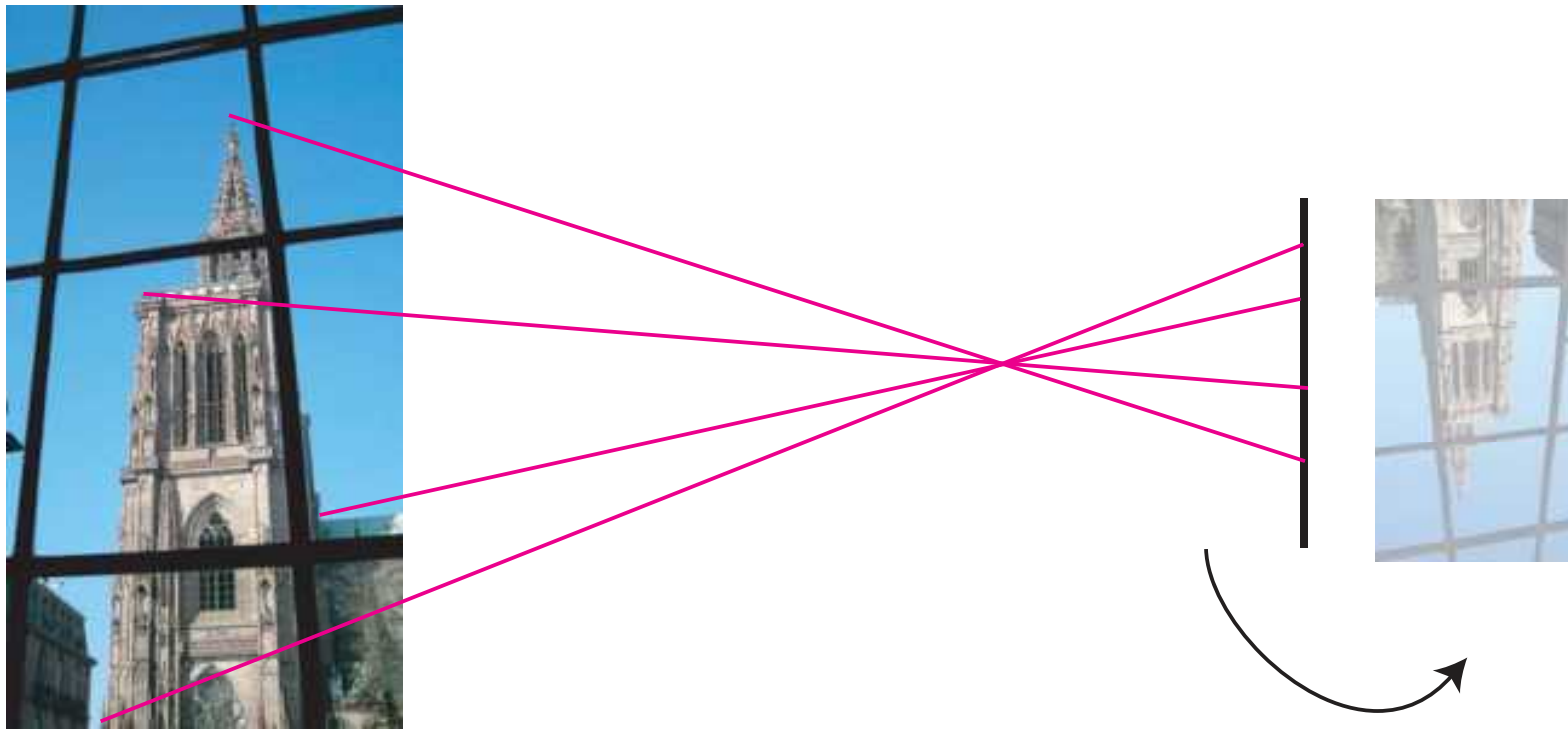
Texte intégral

Pan ?

Le petit pan de mur jaune devant lequel meurt l'écrivain Bergotte dans **la Prisonnière**, de Marcel Proust, se trouve dans **la vue de Delft**, de Vermeer, un tableau peint vers 1660.



Comment est-ce peint ? Une chambre noire

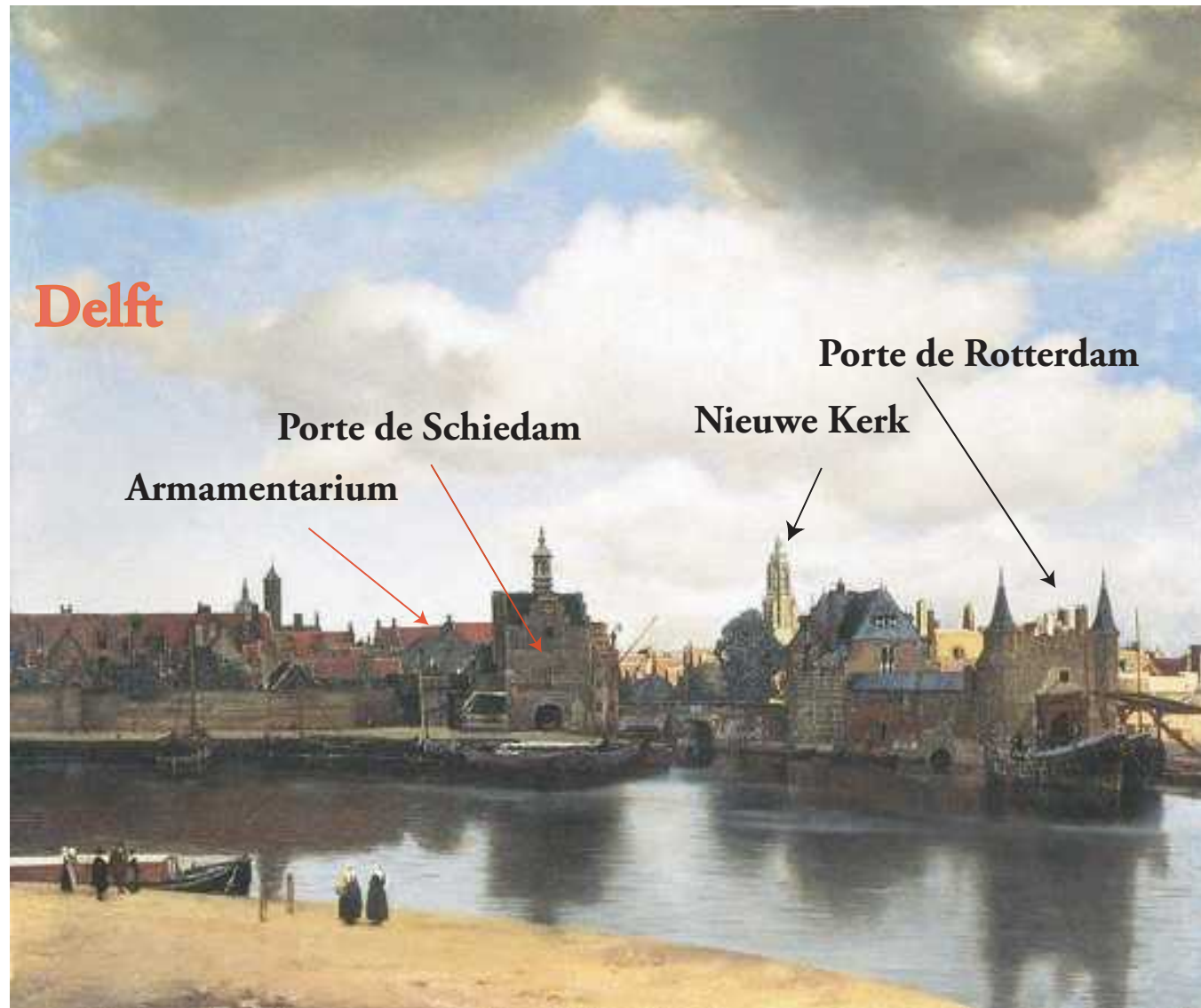


Aujourd'hui à Delft, voies rapides, voitures,
À l'emplacement où Vermeer se trouvait lorsqu'il a peint le tableau,
il y a un *square de la Vue de Delft (Plein Delftzicht)*...

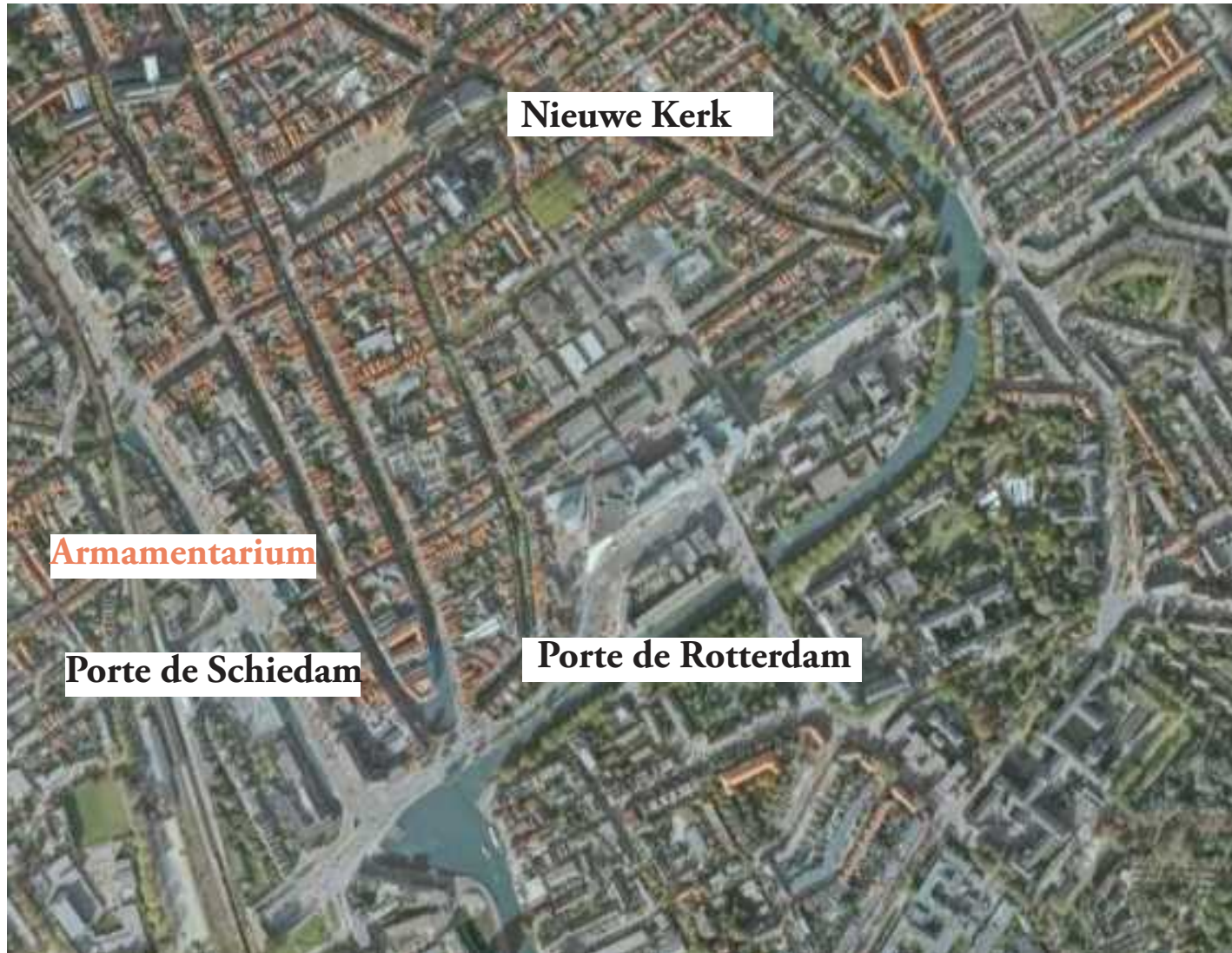


Mais comment sait-on où était Vermeer ?

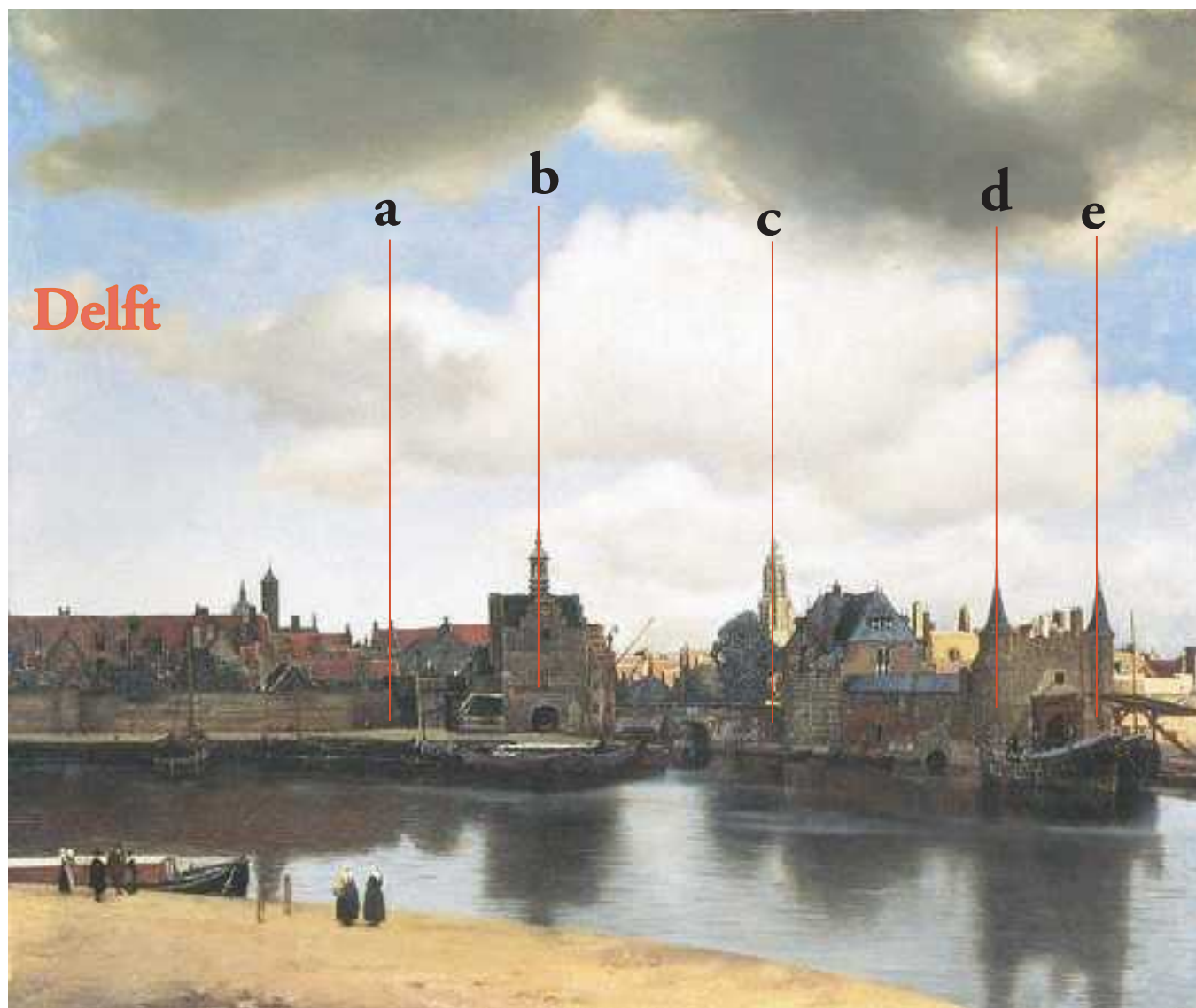
Sur le tableau, nous choisissons cinq monuments que nous savons reconnaître



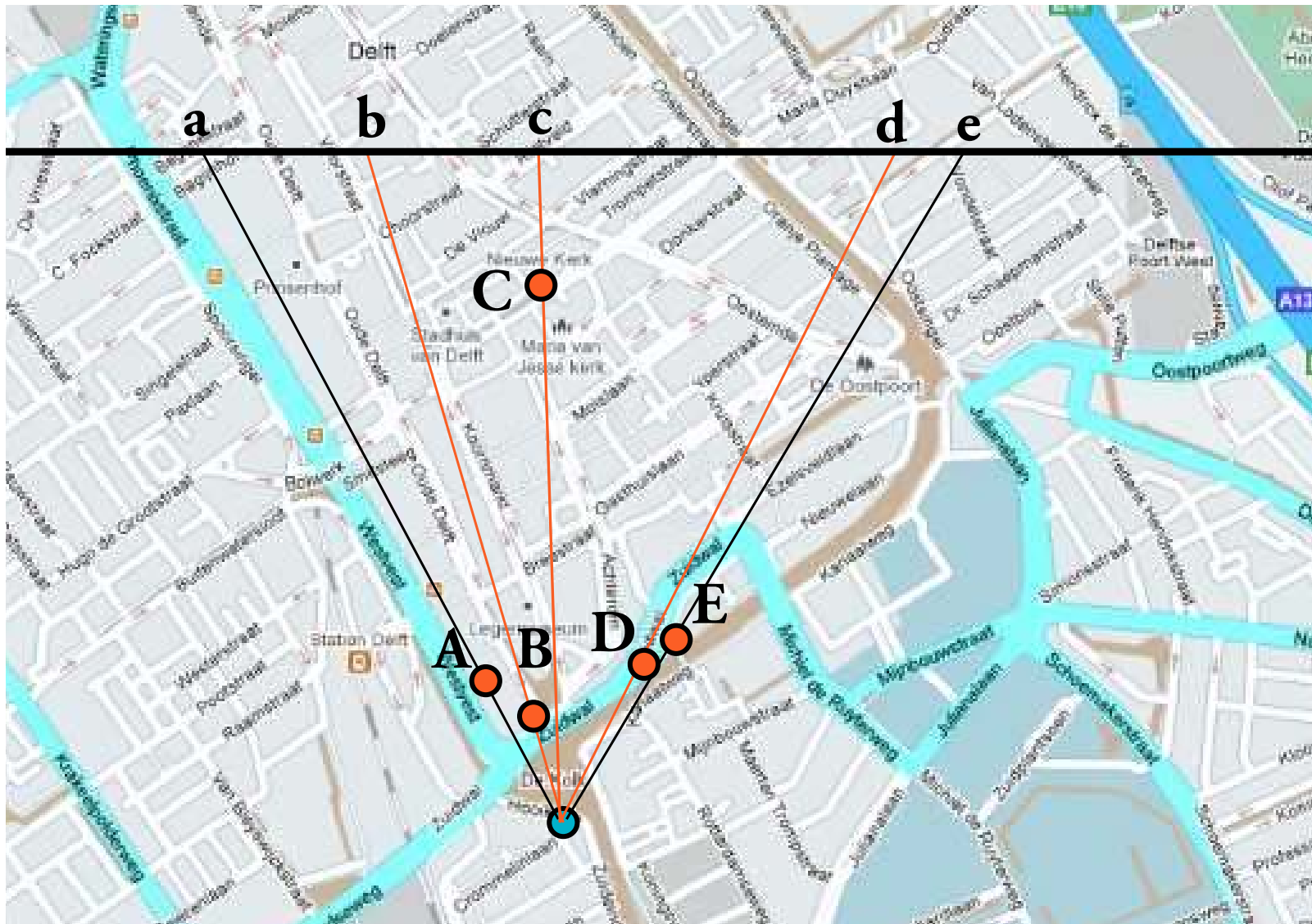
(avec ses deux tours, la porte de Rotterdam compte pour deux).



On repère ces cinq monuments sur un plan de la ville, ici une photo satellite.

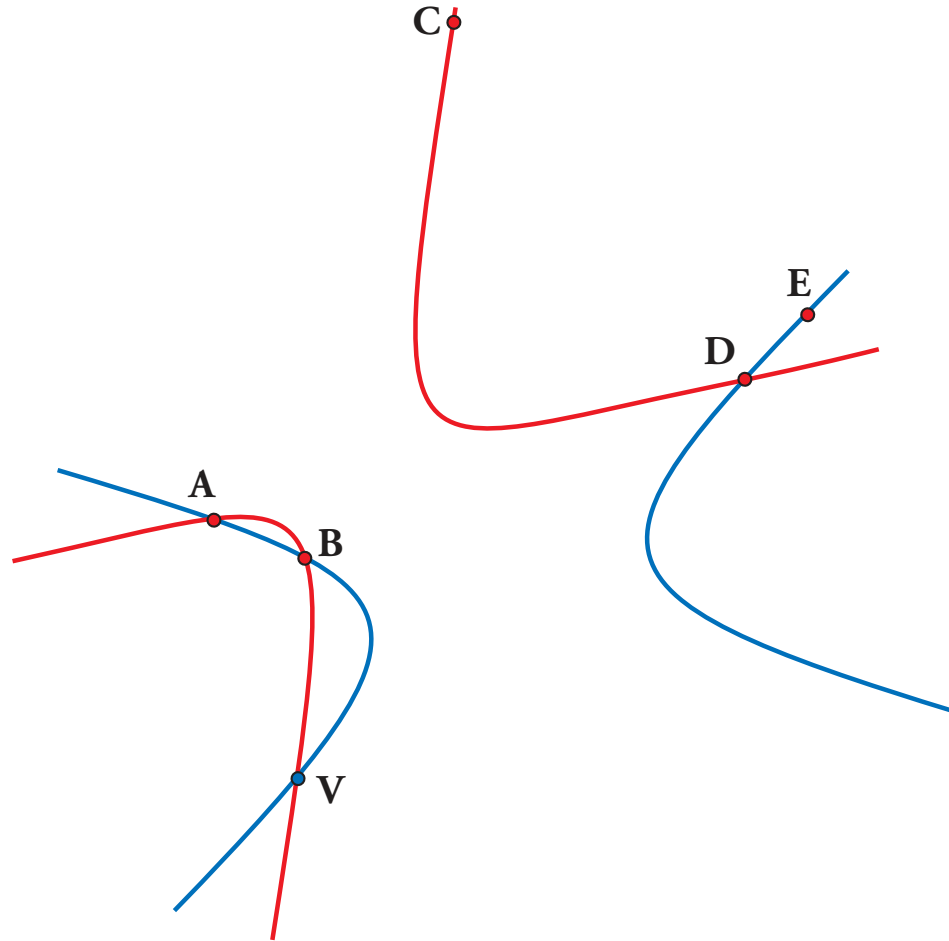


On les note précisément sur l'image, ici ils sont appelés a , b , c , d , e . On mesure les segments et on calcule les birapports $[a, b, c, d]$ et $[a, b, d, e]$...



La situation de la chambre noire. Sur le plan, on considère les points A , B , C , D et E ...

On trace la conique passant par A , B , C et D et correspondant au birapport $[a, b, c, d]$... puis la conique passant par A , B , C et E correspondant au birapport $[a, b, c, e]$...



Elles se coupent en un quatrième point V , qui est l'emplacement du peintre.





Venise ?



Panorama





Panorama



Panorama



